

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

και στην Κυματική

Επιμέλεια:

Ανδρέας Τσακαλίδης

Ημερομηνία:

28/11/2025

Τυπολόγιο

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Θέση:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

Ταχύτητα:

$$x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \vartheta)$$

Επιτάχυνση:

$$x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta)$$

Γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Περίοδος:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Μηχανική Ενέργεια:

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

Κυματική

Κυματοσυνάρτηση:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ut) + \phi\right) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

Ταχύτητα διάδοσης:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Κυματαριθμός:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda}$$

Περίοδος:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Μέση ισχύς

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u$$

Φαινόμενο Doppler

$$f' = \frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} f$$

Ένταση πηγής ήχου

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2}$$

Συνάρτηση μετατόπισης

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t)$$

Συνάρτηση μεταβολής πίεσης

$$\Delta P = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t)$$

Συμβολή

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta \phi$$

Ηχοστάθμη

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Άσκηση 1

Σε ένα λιμάνι (όχι του Ηρακλείου), η παλίρροια προκαλεί την άνοδο και κάθοδο των κυμάτων. Συγκεκριμένα, η επιφάνεια της θάλασσας ανεβαίνει και κατεβαίνει απόσταση d (από το υψηλότερο σημείο ως το χαμηλότερο), κινούμενη σε απλή αρμονική κίνηση με περίοδο 12.5 ώρες. Αν ξεκινήσετε τη μέτρησή σας από το υψηλότερο σημείο (που κάτι σημαίνει αυτό για την αρχική φάση της αρμονικής κίνησης :-), πόσο χρόνο χρειάζεται το νερό να κατέβει απόσταση $0.25d$ από το υψηλότερο σημείο;

Λύση:

Αφού η απόσταση μεταξύ του υψηλότερου και του χαμηλότερου σημείου της επιφάνειας της θάλασσας είναι d , τότε μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την άνοδο και την κάθοδο της ως απλή αρμονική κίνηση με πλάτος $d/2$. Αν η περίοδος μας δίνεται ως 12.5 ώρες, τότε η συχνότητα θα είναι $\omega = 2\pi f = 2\pi/T = \frac{2\pi}{12.5}$ rad/h. Το πρόβλημα μας ζητά να ξεκινήσουμε τη μέτρησή μας από το υψηλότερο σημείο, δηλ. για $t = 0$, η απλή αρμονική κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας θα δίνεται ως

$$x(0) = A \cos(\omega t + \phi) \implies \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \cos(0 + \phi) \implies \cos(\phi) = 1 \implies \phi = 0 \quad (1)$$

Άρα

$$x(t) = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \quad (2)$$

με το χρόνο t να εκφράζεται σε ώρες. Για να κατέβει το νερό απόσταση $0.25d$ από το υψηλότερο σημείο, σημαίνει ότι τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$. Οπότε

$$\frac{d}{4} = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \quad (3)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{12.5}t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$\frac{1}{12.5}t = k \pm \frac{1}{6} \quad (6)$$

και θέτοντας $k = 0$ για να βρούμε την πρώτη φορά που κατεβαίνει από το μέγιστο ύψος μέχρι το δοσμένο ύψος, έχουμε

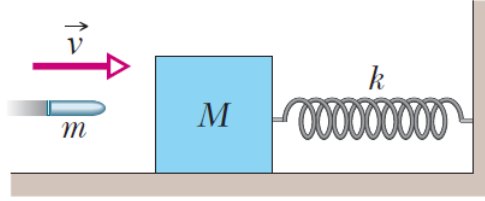
$$\frac{t}{12.5} = \frac{1}{6} \iff 6t = 12.5 \iff t = 2.0833 \text{ ώρες} \quad (7)$$

Άσκηση 2

Ενα σώμα μάζας $M = 5.4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο, και είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 6000 \text{ N/m}$. Μια σφαίρα μάζας $m = 0.095 \text{ kg}$ χτυπά το σώμα, και αφού σφηνώνεται μέσα στο σώμα (θεωρώντας ότι η κρούση δε συμπιέζει το ελατήριο), το νέο σώμα {σφαίρα, σώμα} αποκτά ταχύτητα $u_{m,M} = 1.089 \text{ m/s}$. Το νέο σώμα συμπιέζει το ελατήριο, και στη συνέχεια εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το νέο σώμα.

Λύση:

Στο πρόβλημα αυτό, πρέπει να βρούμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, όταν αυτό συμπιέζεται από το σώμα {σφαίρα, σώμα} μάζας $M + m$. Θεωρούμε ότι, απουσία τριβών, το σύστημα {ελατήριο, σώματα} είναι απομονωμένο, καθώς η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του ελατηρίου (η κάθετη δύναμη από το έδαφος και η δύναμη του βάρους είναι μεν δυνάμεις που δρουν στο σύστημα αλλά είναι κάθετες στη μετατόπιση που πραγματοποιεί το σώμα, και έτσι το έργο τους είναι μηδέν), η οποία είναι συντηρητική. Στη διαδρομή από το σημείο



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

A (σημείο που το σώμα αποκτά την ταχύτητα που αναφέρει η εκφώνηση) ως το σημείο B (σημείο μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου), ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{mec}^A = E_{mech}^B \quad (8)$$

$$K_A + U_{sA} = K_B + U_{sB} \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(m + M)u_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (10)$$

$$(m + M)u_A^2 = kx^2 \quad (11)$$

$$x^2 = \frac{(m + M)u_A^2}{k} \quad (12)$$

$$x = \sqrt{\frac{(m + M)u_A^2}{k}} = 0.0329 \text{ m} \quad (13)$$

Επιλέξαμε τη θετική ρίζα καθώς η συμπίεση του ελατηρίου γίνεται προς τα δεξιά, όπου θεωρούμε ότι πρόκειται για τη θετική φορά μετρήσεων θέσης σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου ($x = 0$). Άρα το πλάτος της ταλάντωσης που θα υποστεί το σύστημα θα είναι $A = 0.033 \text{ m}$.

Άσκηση 3

Ένα σώμα σε απλή αρμονική ταλάντωση περιγράφει τη θέση του ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14)$$

σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του. Αν $\phi = \pi/5$, τότε πόσο ποσοστό της συνολικής ενέργειας του ταλαντωτή βρίσκεται αποθηκευμένο ως ελαστική δυναμική ενέργεια του, όταν $t = 0$;

Λύση:

Όταν $\phi = \pi/5$ και $t = 0$, τότε

$$x(0) = A \cos(\pi/5) \quad (15)$$

Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (16)$$

για κάθε χρονική στιγμή. Η ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$U(t = 0) = \frac{1}{2}kx(0)^2 \quad (17)$$

Ο λόγος των δυο είναι

$$\frac{U(0)}{E_{tot}} = \frac{\frac{1}{2}kx(0)^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{\frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\pi/5)}{\frac{1}{2}kA^2} = \cos^2(\pi/5) \quad (18)$$

οπότε

$$U(0) = \cos^2(\pi/5)E_{tot} = 0.6545E_{tot} \quad (19)$$

άρα το ποσοστό της συνολικής ενέργειας του ταλαντωτή που βρίσκεται αποθηκευμένο ως ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι 65.45%.

Άσκηση 4

Ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας 500 Hz ταξιδεύει με ταχύτητα $u = 350$ m/s.

(α') Πόσο μακριά βρίσκονται δυο σημεία του κύματος που διαφέρουν κατά $\pi/3$ στη φάση;

(β') Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ δυο μετατοπίσεων ενός σημείου του κύματος, όταν αυτές διαφέρουν χρονικά κατά 0.001 s;

Λύση:

Ένα ημιτονοειδές κύμα δίνεται από τη σχέση

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (20)$$

Για $f = 500$ Hz, $\omega = 2\pi f = 1000\pi$ rad/s και από τη σχέση $u = \lambda f \implies \lambda = \frac{u}{f} = \frac{350}{500} = 0.7$ m και άρα $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.7} = \frac{20\pi}{7}$ rad/m. Επίσης, η περίοδος του κύματος θα είναι $T = \frac{1}{f} = 0.002$ sec. Οπότε

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{20\pi}{7}x \pm 1000\pi t + \phi\right) \quad (21)$$

Έστω ότι το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, δηλ.

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{20\pi}{7}x - 1000\pi t + \phi\right) \quad (22)$$

(α') Τα σημεία του κύματος που απέχουν ένα μήκος κύματος, έχουν διαφορά φάσης 2π . Άρα τα σημεία που έχουν διαφορά φάσης $\pi/3$ θα έχουν μήκος κύματος $\lambda/6 = 0.1167$ m. Εναλλακτικά, για δυο στοιχεία του κύματος, x_1, x_2 , θα πρέπει

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\pi}{3} \quad (23)$$

$$\frac{20\pi}{7}x_2 - \omega t + \phi - \frac{20\pi}{7}x_1 + \omega t - \phi = \frac{\pi}{3} \quad (24)$$

$$\frac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \quad (25)$$

$$\Delta x = \frac{7}{60} = 0.1167 \text{ m} \quad (26)$$

(β') Ξέρουμε ότι ένα σημείο του κύματος εκτελεί Απλή Αρμονική Κίνηση με το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω , αλλά με διαφορετική φάση. Σε χρόνο μιας περιόδου $T = 0.002$ s, η διαφορά φάσης μεταξύ δυο μετατοπίσεων θα είναι 2π . Σε χρόνο $t = 0.001$ s, που αποτελεί το μισό της περιόδου, η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο μετατοπίσεων θα είναι π rad. Εναλλακτικά, αν θέσουμε $x = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, και $t_2 - t_1 = 0.001$ ο δοσμένος χρόνος, τότε

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (27)$$

$$= -1000\pi(t_2 - t_1) \quad (28)$$

$$= -1000\pi \cdot 0.001 = -\pi \text{ rad} \quad (29)$$

που πρακτικά δηλώνει ότι η διαφορά φάσης ισούται με π .

Άσκηση 5

Ένα ηχητικό κύμα της μορφής

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (30)$$

ταξιδεύει με ταχύτητα 343 m/s σε αέριο μέσα σε μακρύ οριζόντιο σωλήνα. Σε κάποια χρονική στιγμή, ένα μόριο αερίου A στη θέση $x = 2$ m λαμβάνει τη μέγιστη μετατόπιση (θετική) από τη θέση ισορροπίας του, που ισούται με $6 \cdot 10^{-9}$ m, ενώ ένα μόριο αερίου B στη θέση $x = 2.07$ m μετατοπίζεται κατά $2 \cdot 10^{-9}$ από τη θέση ισορροπίας του. Όλα τα μόρια μεταξύ των A και B έχουν ενδιάμεσες μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας τους. Πόση είναι η συχνότητα του κύματος;

Λύση:

Έστω ότι η χρονική στιγμή που αναφέρει το πρόβλημα είναι η $t = 0$. Τότε, για το στοιχείο A, θα έχουμε

$$s(x_A, 0) = s_{max} \cos(kx_A + \phi) \iff s(2, 0) = 6 \cdot 10^{-9} \cos(2k + \phi) = 6 \cdot 10^{-9} \quad (31)$$

ενώ για το στοιχείο B θα είναι

$$s(x_B, 0) = s_{max} \cos(kx_B + \phi) \iff s(2.07, 0) = 6 \cdot 10^{-9} \cos(2.07k + \phi) = 2 \cdot 10^{-9} \quad (32)$$

Για να βρούμε τη συχνότητα, δεδομένης της ταχύτητας διάδοσης, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u = \lambda f \quad (33)$$

άρα χρειαζόμαστε το μήκος κύματος λ . Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι

$$\cos(2k + \phi) = 1 \iff 2k + \phi = 0 \iff \phi = -2k \quad (34)$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη

$$3 \cos(2.07k + \phi) = 1 \iff \cos(2.07k + \phi) = \frac{1}{3} \iff 2.07k + \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.231 \quad (35)$$

και άρα

$$2.07k - 2k = 1.231 \iff 0.07k = 1.231 \iff k = 17.585 \quad (36)$$

και από τη σχέση

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \iff \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.357 \text{ m} \quad (37)$$

Τέλος, η εξίσωση (33) μας δίνει

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{343}{0.357} = 960.78 \text{ Hz} \quad (38)$$

Άσκηση 6

Ένας ακίνητος ανιχνευτής κίνησης στέλνει ηχητικά κύματα συχνότητας 0.15 MHz προς όλες τις κατευθύνσεις. Ένα φορτηγό πλησιάζει τον ανιχνευτή με ταχύτητα 45 m/s. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του ήχου ισούται με 343 m/s.

(α') Ποιά είναι η συχνότητα που λαμβάνει ο οδηγός του φορτηγού;

(β') Ποιά είναι η συχνότητα που λαμβάνει πίσω ο ανιχνευτής κίνησης, αν υποθέσετε ότι τώρα το φορτηγό ανακλά τα κύματα που λαμβάνει, δηλ. αποτελεί κινούμενη πηγή ήχου;

Λύση:

(α') Ο οδηγός του φορτηγού θεωρείται κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή και ο ανιχνευτής κίνησης είναι ακίνητη πηγή ηχητικών κυμάτων. Από την εξίσωση Doppler έχουμε

$$f_{driver} = \frac{u + u_0}{u} f = \frac{343 + 45}{343} 0.15 = 0.169 \text{ MHz} \quad (39)$$

(β') Το φορτηγό ανακλά τα κύματα που λαμβάνει, άρα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μια δευτερεύουσα πηγή, κινούμενη προς ακίνητο παρατηρητή, με συχνότητα εκπομπής τη συχνότητα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα

$$f_{motion-detector} = \frac{u}{u - u_s} f_{driver} = \frac{343}{343 - 45} \frac{343 + 45}{343} 0.15 = \frac{388}{298} 0.15 = 0.1953 \text{ MHz} \quad (40)$$

Άσκηση 7

Μια ισοτροπική πηγή ήχου εκπέμπει ηχητικό κύμα έντασης 0.008 W/m^2 σε απόσταση 10 m από αυτή.

(α') Πόση είναι η ένταση του ήχου στα 5.0 μέτρα από την πηγή;

(β') Πόση είναι η ηχοστάθμη στα 10 μέτρα από την πηγή;

Λύση:

Η ένταση του ήχου που εκπέμπει ισοτροπικά μια πηγή σε απόσταση r δίνεται ως

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (41)$$

με P_{avg} τη μέση ισχύ της πηγής.

(α') Αν $r_1 = 10 \text{ m}$ και $r_2 = 5 \text{ m}$, τότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{\frac{P}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (42)$$

η οποία δίνει

$$\frac{0.008}{I_2} = \frac{25}{100} \iff I_2 = 0.008 \cdot 4 = 0.032 \text{ W/m}^2 \quad (43)$$

(β') Η ηχοστάθμη δίνεται από τη σχέση

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \quad (44)$$

με I_0 την ένταση αναφοράς στα 1000 Hz , που είναι 10^{-12} W/m^2 . Άρα

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log_{10}(8 \cdot 10^9) \quad (45)$$

$$= 10 \log_{10} 8 + 10 \log_{10} 10^9 = 90 + 10 \log_{10} 8 \quad (46)$$

$$= 9.03 + 90 = 99.03 \text{ dB} \quad (47)$$