

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

και στα Κύματα

Επιμέλεια:

Έλενα Καλαϊτζή

Ημερομηνία:

14/11/2025

Τυπολόγιο

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Δύναμη επαναφοράς:

$$F = -k x$$

Θέση:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

Ταχύτητα:

$$x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \vartheta)$$

Επιτάχυνση:

$$x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta)$$

Γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Περίοδος:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Μηχανική Ενέργεια:

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

Κυματική

Κυματοσυνάρτηση:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ut) + \phi\right) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

Ταχύτητα διάδοσης:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Κυματαριθμός:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda}$$

Περίοδος:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Μέση ισχύς

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u$$

Άσκηση 1

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής αποτελείται από ένα σώμα μάζας $m = 2$ κιλών δεμένο σε ένα ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m. Όταν $t = 1.0$ s, η θέση και η ταχύτητα του σώματος είναι $x = 0.129$ m και $u = 3.415$ m/s.

(α') Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης;

(β') Πόση ήταν η θέση και η ταχύτητα του σώματος όταν $t = 0$;

Λύση:

(α') Η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ rad/s} \quad (2)$$

Η εξίσωση της στιγμιαίας ταχύτητάς του δίνεται ως

$$u(t) = -\omega A \sin(5\sqrt{2}t + \phi) \quad (3)$$

Για $t = 1.0$, έχουμε

$$x(1.0) = A \cos(5\sqrt{2} + \phi) = 0.129 \quad (4)$$

$$u(1.0) = -5\sqrt{2}A \sin(5\sqrt{2} + \phi) = 3.415 \quad (5)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{3.415}{0.129} = -5\sqrt{2} \tan(5\sqrt{2} + \phi) \quad (6)$$

$$-3.744 = \tan(5\sqrt{2} + \phi) \quad (7)$$

$$5\sqrt{2} + \phi = \tan^{-1}(-3.744) \quad (8)$$

$$\phi = -1.309 - 5\sqrt{2} \quad (9)$$

$$= -8.380 \text{ rad} \quad (10)$$

Άρα από την εξίσωση της θέσης

$$x(1.0) = 0.129 = A \cos(5\sqrt{2} - 8.380) \implies A = 0.4983 \text{ m} \quad (11)$$

(β') Για $t = 0$,

$$x(0.0) = 0.4983 \cos(-8.38) = -0.2502 \text{ m} \quad (12)$$

$$u(0.0) = -5\sqrt{2} \cdot 0.4983 \sin(-8.38) = 3.0472 \text{ m/s} \quad (13)$$

Άσκηση 2

Μια αράχνη μπορεί να καταλάβει πότε ένα έντομο έχει πιαστεί στον ιστό της “αισθανόμενη” τις ταλαντώσεις που προκαλεί στον ιστό το έντομο, όσο παλεύει να απελευθερωθεί. Μάλιστα η αράχνη μπορεί να εκτιμήσει και το μέγεθος του εντόμου που πιάστηκε στον ιστό της, από τη συχνότητα των ταλαντώσεων. Υποθέστε ότι μια μύγα ταλαντώνεται σαν σώμα δεμένο σε ελατήριο όταν πιάνεται στον ιστό της αράχνης. Ποιός είναι ο λόγος της συχνότητας ταλάντωσης μιας μύγας μάζας m σε σχέση με μια μύγα μάζας $2.5m$;

Λύση:

Αν θεωρήσουμε τη μύγα και τον ιστό σαν ένα σύστημα {ελατήριο, σώμα}, τότε η συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

Για μια μύγα μάζας m , έχουμε

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15)$$

ενώ για μια μύγα μάζας $\frac{5}{2}m$, έχουμε

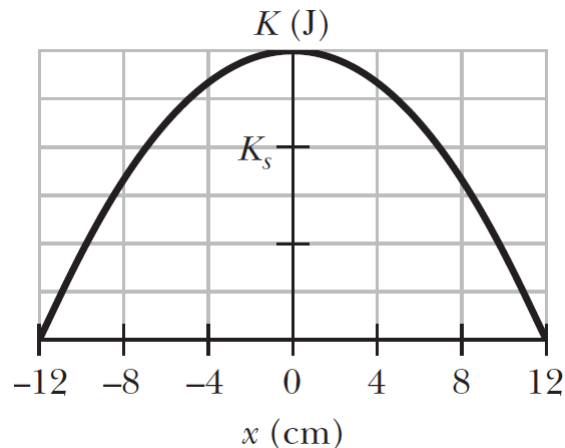
$$\omega_{2.5m} = \sqrt{\frac{k}{\frac{5}{2}m}} \quad (16)$$

Άρα

$$R = \frac{\omega_m}{\omega_{2.5m}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{\frac{k}{\frac{5}{2}m}}} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{\frac{5}{2}m}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = 1.58 \quad (17)$$

Άσκηση 3

Στο Σχήμα 1 αναπαρίσταται η κινητική ενέργεια K ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή ως προς τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας του, x . Η τιμή K_s ισούται με 4.0 J. Πόση είναι η σταθερά του ελατηρίου;



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 3.

Λύση:

Η ολική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή ισούται με

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (18)$$

Όμως όταν ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας του, όλη η ενέργεια εκφράζεται ως κινητική ενέργεια. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η ενέργεια αυτή ισούται με 6.0 J. Άρα η συνολική μηχανική ενέργεια ισούται με 6.0 J. Αντίστοιχα, στις θέσεις $x = \pm 12$ cm, όλη η ενέργεια του ταλαντωτή εκφράζεται ως ελαστική δυναμική ενέργεια, δηλ.

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 = 6.0 \text{ J} \quad (19)$$

Άρα

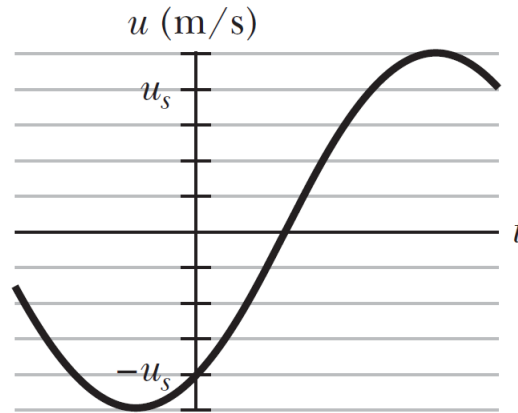
$$12.0 = k(\pm 0.12)^2 \iff k = 833.33 \text{ N/m} \quad (20)$$

Άσκηση 4

Στο Σχήμα 2 αναπαρίσταται η εγκάρσια ταχύτητα $u_y(t)$ ως προς το χρόνο t ενός στοιχείου ενός νήματος, του $x = 0$, όταν ένα κύμα το διαπερνά. Η τιμή του u_s στο σχήμα ισούται με 4.0 m/s. Το κύμα έχει τη γενική μορφή

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (21)$$

Πόση είναι η αρχική του φάση, ϕ ;



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 4.

Λύση:

Η εγκάρσια ταχύτητα δίνεται από την παράγωγο της κυματοσυνάρτησης ως προς t , δηλ.

$$u_y(x, t) = -\omega A \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (22)$$

Για το στοιχείο $x = 0$, έχουμε

$$u_y(0, t) = -\omega A \cos(-\omega t + \phi) \quad (23)$$

και από το σχήμα, για $t = 0$, έχουμε ταχύτητα $u_y(0, 0) = -4.0$ m/s. Οπότε

$$u_y(0, 0) = -\omega A \cos(\phi) = -4.0 \quad (24)$$

Επίσης παρατηρούμε από το σχήμα ότι η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ισούται με 5.0 m/s, οπότε

$$\omega A = 5.0 \quad (25)$$

Άρα τελικά

$$-5 \cos(\phi) = -4.0 \iff \cos(\phi) = \frac{-4}{-5} \implies \phi = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 2\pi k \pm 0.6435 \text{ rad} \quad (26)$$

για $k \in \mathbb{Z}$. Για $k = 0$ παίρνουμε δυο λύσεις

$$\phi = \pm 0.6435 \text{ rad} \quad (27)$$

Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης του Σχήματος 2 στο $t = 0$ είναι θετική – άρα η στιγμιαία επιτάχυνση έχει θετικό πρόσημο για $t = 0$, δηλ.

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}u_y(t) = -\omega^2 A \sin(-\omega t + \phi) \xrightarrow{t=0} a_y(0) = -\omega^2 A \sin(\phi) > 0 \quad (28)$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται μόνο αν $\phi < 0$, γιατί τότε $\sin(\phi) < 0 \implies a_y(0) > 0$. Οπότε επιλέγουμε τη ρίζα

$$\phi = -0.6435 \text{ rad} \quad (29)$$

Άσκηση 5

Η κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.15 \cos(\pi x - 15\pi t) \quad (30)$$

με x, y σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα, περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται σε τεντωμένο νήμα. Πόση είναι η εγκάρσια ταχύτητα για ένα στοιχείο του νήματος όταν αυτό βρίσκεται σε κατακόρυφη μετατόπιση ίση με $y = +0.12$ m;

Λύση:

Η εγκάρσια ταχύτητα δίνεται από την 1η παράγωγο της κυματοσυνάρτησης ως προς t , δηλ.

$$u_y(x, t) = \frac{d}{dt}y(x, t) = 2.25\pi \sin(\pi x - 15\pi t) \quad (31)$$

Ζητούμε την ταχύτητα κάποιου στοιχείου x_0 , του οποίου η κατακόρυφη μετατόπιση ισούται με $y = 0.12$ m. Το στοιχείο αυτό θα ικανοποιεί τις δυο εξισώσεις

$$0.12 = 0.15 \cos(\pi x_0 - 15\pi t) \quad (32)$$

$$u_y(x_0, t) = 2.25\pi \sin(\pi x_0 - 15\pi t) \quad (33)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με 15π παίρνουμε

$$1.8\pi = 2.25\pi \cos(\pi x_0 - 15\pi t) \quad (34)$$

$$u_y(x_0, t) = 2.25\pi \sin(\pi x_0 - 15\pi t) \quad (35)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και τις δυο σχέσεις και προσθέτοντάς τις κατά μέλη

$$3.24\pi^2 + u_y^2(x_0, t) = (2.25\pi)^2 (\cos^2(\pi x_0 - 15\pi t) + \sin^2(\pi x_0 - 15\pi t)) \quad (36)$$

$$3.24\pi^2 + u_y^2(x_0, t) = (2.25\pi)^2 \quad (37)$$

$$u_y^2(x_0, t) = (2.25\pi)^2 - 3.24\pi^2 \quad (38)$$

$$= 5.0625\pi^2 - 3.24\pi^2 \quad (39)$$

$$= 1.8225\pi^2 \quad (40)$$

άρα

$$u_y(x_0, t) = \pm 4.241 \text{ m/s} \quad (41)$$

Μπορούμε να πούμε ότι κατά μέτρο, η εγκάρσια ταχύτητα ισούται με $u_y = 4.241$ m/s.