

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στην Αρχή Διατήρησης Ενέργειας
και στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Επιμέλεια:
Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:
7/11/2025

Τυπολόγιο

Αρχή Διατήρησης Ενέργειας

Μη-απομονωμένο σύστημα:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \iff \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \sum W_{ext}$$

Απομονωμένο σύστημα:

$$\Delta E_{sys} = 0 \iff \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Δύναμη επαναφοράς:

$$F = -k x$$

Θέση:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

Ταχύτητα:

$$x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \vartheta)$$

Επιτάχυνση:

$$x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta)$$

Γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

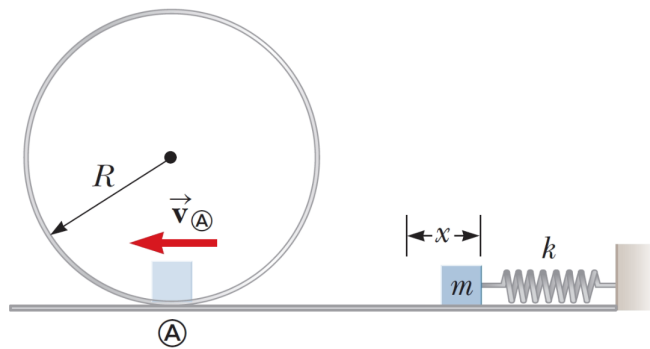
Άσκηση 1

Ένας κύβος μάζας 0.5 kg ωθείται πάνω σε ένα οριζόντιο ελατήριο αμελητέας μάζας μέχρι το ελατήριο να συμπιεστεί κατά απόσταση x . Η σταθερά του ελατηρίου είναι 450 N/m . Ο κύβος αφήνεται ελεύθερος και κινείται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές μέχρι το σημείο A , το οποίο είναι το χαμηλότερο σημείο μιας κατακόρυφης κυκλικής τροχιάς με ακτίνα $R = 1.00 \text{ m}$, και αρχίζει να κινείται ανοδικά. Το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς είναι $v_A = 12.0 \text{ m/s}$ και, καθώς ο κύβος ολισθαίνει ανοδικά, δέχεται μια δύναμη τριβής η οποία έχει κατά μέσο όρο μέτρο 7.00 N .

(α') Ποια είναι η τιμή του x ;

(β') Αν ο κύβος έφτανε στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, ποιο θα ήταν το μέτρο της ταχύτητάς του στο σημείο εκείνο;

(γ') Θα φτάσει ο κύβος στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς ή θα πέσει πριν φτάσει σε αυτό;



Σχήμα 1: Αρχική κατάσταση του συστήματος.

Λύση:

(α') Αρχικά χρειαζόμαστε το έργο που έκανε η δύναμη του ελατηρίου για να μετακινηθεί το σώμα κατά x . Από τον ορισμό:

$$W_F = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_0^x F_s dr = \int_0^x k u dr = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

Μόλις το σύστημα αφεθεί ελεύθερο, το σώμα θα φύγει από το ελατήριο όταν αυτό επανέλθει στη θέση ισορροπίας. Στο σύστημα δεν υπάρχουν τριβές, άρα το έργο του ελατηρίου μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε κινητική ενέργεια του κύβου στο σημείο A , λόγω της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας του συστήματος {κύβος}. Έχουμε λοιπόν στη διαδρομή από τη θέση συμπίεσης ως τη θέση A :

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \iff K_A - K_i = W_{F_s} \iff \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m u_A^2 \quad (2)$$

από όπου προκύπτει:

$$x = u_A \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

και αριθμητικά:

$$x = 12.0 \sqrt{\frac{0.500}{450}} = 0.40 \text{ m} \quad (4)$$

(β') Στη συνέχεια, θέλουμε να δούμε αν ο κύβος θα φτάσει στο αντιδιαμετρικό σημείο του A . Το σύστημα δεν είναι πλέον χωρίς τριβές, επομένως εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη το έργο της τριβής

$$W_{f_k} = -f_k d \quad (5)$$

Αρχικά, πρέπει να βρούμε πόσο είναι η απόσταση d που διένυσε ο κύβος. Καθώς ο κύβος κινείται πάνω στην κυκλική τροχιά, η απόσταση που διανύει πάνω στο τόξο δίνεται από:

$$\Delta s = R\Delta\theta \quad (6)$$

Η γωνία που διαγράφει για να φτάσει στο αντιδιαμετρικό σημείο του A είναι 180° ή π ακτίνια (rad). Άρα:

$$d = R\pi \quad (7)$$

Για $R = 1.00$ m προκύπτει:

$$d = \pi \text{ m} \quad (8)$$

Το έργο της τριβής είναι επομένως:

$$W_{f_k} = -f_k d = -f_k \pi R = -7.00 \pi \text{ J} \approx -22.0 \text{ J} \quad (9)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στο σύστημα {κύβος, Γη}, λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή δυναμικής ενέργειας και το έργο της τριβής:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \quad (10)$$

$$K_f - K_i + U_{gf} - U_{gi} = W_{f_k} \quad (11)$$

Με $U_{gi} = mgy_i = mgy_A$ και επιλέγοντας $y_i = 0$, $y_f = 2R$, και $u_i = u_A$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 + mg(2R) = W_f \quad (12)$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μεγέθη:

$$\frac{1}{2}(0.500)u_f^2 - \frac{1}{2}(0.500)(12.0)^2 + (0.500)(9.8)(2 \cdot 1.00) = -22.0 \quad (13)$$

$$0.25u_f^2 + 9.8 = 36.0 - 22.0 \quad (14)$$

$$0.25u_f^2 = 4.2 \quad (15)$$

$$u_f^2 = 16.8 \text{ m/s} \quad (16)$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς είναι περίπου:

$$u_f = 4.10 \text{ m/s} \quad (17)$$

(γ') Για να εξετάσουμε αν ο κύβος θα φτάσει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, πρέπει να ελέγξουμε αν θα μπορέσει να **παραμείνει σε επαφή** με την κυκλική τροχιά κατά την ανοδική του πορεία.

Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, πάνω στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις που έχουν φορά προς το κέντρο της κυκλικής κίνησης: το βάρος $m\vec{g}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{n}$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών δίνει την απαιτούμενη **κεντρομόλο δύναμη** (δεν την έχουμε συζητήσει αλλά προκύπτει από το 2ο νόμο του Newton στην κυκλική κίνηση):

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_r \implies mg + n = ma_r = \frac{mu^2}{R} \quad (18)$$

αφού γνωρίζουμε ότι

$$a_r = \frac{u^2}{R} \quad (19)$$

Για να παραμείνει το σώμα σε επαφή με την τροχιά, πρέπει η δύναμη επαφής να είναι μη αρνητική ($n \geq 0$). Στην οριακή περίπτωση, όταν το σώμα ίσα-ίσα δεν χάνει την επαφή του, έχουμε $n = 0$, οπότε:

$$mg = \frac{mu_{\min}^2}{R} \quad (20)$$

Από όπου προκύπτει η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ψηλότερο σημείο:

$$u_{\min} = \sqrt{gR} \quad (21)$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$u_{\min} = \sqrt{9.8 \cdot 1.0} = 3.13 \text{ m/s} \quad (22)$$

Επειδή η ταχύτητα που υπολογίσαμε προηγουμένως είναι

$$u_f = 4.10 \text{ m/s} > u_{\min} = 3.13 \text{ m/s} \quad (23)$$

ο κύβος διαθέτει επαρκή κινητική ενέργεια ώστε να φτάσει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, **παραμένοντας σε επαφή με αυτή καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του.**

Άσκηση 2

Σώμα μάζας $m = 1.0 \text{ kg}$ είναι προσαρτημένο σε **κατακόρυφο** ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και στη συνέχεια το σώμα απομακρύνεται **κατά** $d = 10 \text{ cm}$ **προς τα κάτω** από τη θέση ισορροπίας και στη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας.

Να υπολογιστούν

(α') η συχνότητα f της ταλάντωσης,

(β') η αρχική φάση θ (μετρήστε την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, θετική προς τα κάτω),

(γ') η **ελάχιστη** και η **μέγιστη** τιμή της συνολικής δύναμης που δέχεται το σώμα κατά την ταλάντωση.

Δίνεται: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Λύση:

Δεδομένα:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad k = 100 \text{ N/m}, \quad d = 0.10 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

(α') Η κυκλική συχνότητα μιας ΑΑΤ δίνεται από:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s}. \quad (24)$$

Η συχνότητα είναι:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59 \text{ Hz}. \quad (25)$$

(β') Θεωρούμε τη θέση ισορροπίας ως σημείο $y = 0$ και **θετική τη φορά προς τα κάτω**. Η εξίσωση της ταλάντωσης είναι:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (26)$$

και η ταχύτητα:

$$u(t) = -A\omega \sin(\omega t + \theta) \quad (27)$$

Αρχικά ($t = 0$) το σώμα βρίσκεται στη θέση $y(0) = +A = +0.10 \text{ m}$ (κάτω από τη θέση ισορροπίας) και αφήνεται ελεύθερο ($u(0) = 0$). Άρα:

$$y(0) = A \cos \theta = +A \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \quad (28)$$

Το σώμα ξεκινά από τη **κάτω ακραία θέση**.

(γ') Θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα είναι:

$$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_{ελ.ατ.} + m\vec{g}. \quad (29)$$

Επειδή πρόκειται για κατακόρυφο ελατήριο, η **θέση ισορροπίας** έχει ήδη μετατοπιστεί ώστε να ισχύει ισορροπία:

$$F_{ολ} = 0 \Leftrightarrow mg = k\Delta l \Leftrightarrow \Delta l = \frac{10}{100} \Leftrightarrow \Delta l = 0.1 \text{ m} \quad (30)$$

Αυτή είναι και η απόσταση του φυσικού μήκους του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας - και βλέπουμε ότι είναι ίση με τη μία ακραία θέση.

Η ελάχιστη τιμή της συνολικής δύναμης θα είναι στη θέση ισορροπίας, καθώς η συνολική δύναμη εκεί είναι μηδέν

$$F_{min} = mg - F_{ελ.ατ.} = 0 \quad (31)$$

Η μέγιστη τιμή απ' την άλλη, θα είναι στην $y = +A$ καθώς εκεί η δύναμη του ελατηρίου έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή της:

$$|F_{ελ}| = k(A + A) = 100(0.1 + 0.1) = 20N \quad (32)$$

Θυμόμαστε το εξής: Η δύναμη ελατηρίου μηδενίζει στη **Θέση Φυσικού Μήκους**, άρα θα γίνεται και μέγιστη στη θέση που είναι και πιο μακριά απ' τη θέση φυσικού μήκους.

Επίσης, καθώς η μία ακραία θέση, ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους, η $F_{ελ}$ θα είναι σε όλη την κίνηση αντίροπη του βάρους. Άρα η ποσότητα $F_{ολ} = mg - ky$, θα γίνεται μέγιστη όταν το y γίνει μέγιστο. Άρα θα είναι όταν η $F_{ελ}$ θα είναι μέγιστη. Άρα

$$F_{max} = mg - F_{ελ} = 10 - 20 = -10N$$

Άρα το μέτρο: $|F_{max}| = 10N$

Συνοπτικά αποτελέσματα:

$$f = 1.6 \text{ Hz}, \quad \theta = 0, \quad F_{min} = 0 \text{ N}, \quad F_{max} = 10 \text{ N}.$$

Άσκηση 3

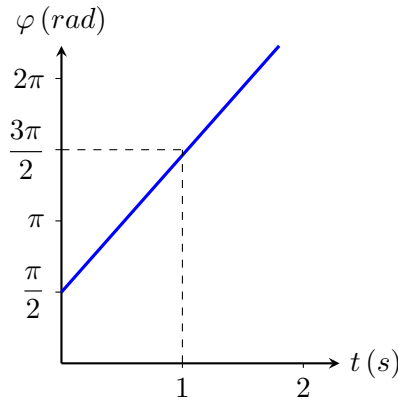
Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 20 \text{ cm}$. Στο διάγραμμα του σχήματος αποδίδεται η μεταβολή της φάσης ϕ της ταλάντωσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο t .

(α') Με τη βοήθεια του διαγράμματος, να προσδιορίσετε την αρχική φάση θ και τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

(β') Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης a_{max} του σώματος.

(γ') Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.



Λύση:

- (α') Η **συνολική** φάση - δηλ. το όρισμα του συνημιτόνου που περιγράφει τη συνάρτηση $x(t)$ - μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης δίνεται ως

$$\varphi = \omega t + \theta \quad (33)$$

Η εξίσωση της γραμμής του διαγράμματος είναι της μορφής $y = Ax + \beta$, όπου η κλίση ισούται με ω και η τομή με τον άξονα των φάσεων (κατακόρυφο) είναι η θ . Για $t = 0$:

$$\varphi(t = 0) = \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (34)$$

Εύρεση κλίσης:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (35)$$

Από το διάγραμμα έχουμε:

$$\omega = \frac{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{1 - 0} = \pi \text{ rad/s} \quad (36)$$

Άρα η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \pi \text{ rad/s} \quad (37)$$

- (β') Μέγιστη επιτάχυνση - παράγωγοι από $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$

Πρώτη παράγωγος (ταχύτητα): Χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας (ή σύνθετης συνάρτησης).

$$\frac{d}{dt} [\cos(\omega t + \theta)] = -\sin(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta) = -\omega \sin(\omega t + \theta) \quad (38)$$

Άρα

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta). \quad (39)$$

εύτερη παράγωγος (επιτάχυνση): Παραγωγίζουμε ξανά το $v(t)$.

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} [-A\omega \sin(\omega t + \theta)] = -A\omega \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta). \quad (40)$$

Ισοδύναμα, επειδή $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$,

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad (41)$$

Μέγιστη τιμή: Το μέγιστο της $|\cos(x)|$ είναι 1, οπότε

$$a_{\max} = \omega^2 A \quad (42)$$

Αριθμητικά με τα δεδομένα της άσκησης:

$$A = 0.20 \text{ m}, \quad \omega = \pi \text{ rad/s}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

οπότε

$$a_{\max} = \omega^2 A = \pi^2 \cdot 0.20 \stackrel{\pi^2 \approx 10}{\approx} 2.0 \text{ m/s}^2. \quad (43)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης:

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta) = -(\pi^2)(0.20) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (44)$$

Επειδή $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$,

$$a(t) = 0.20 \pi^2 \sin(\pi t) \approx 2.0 \sin(\pi t) \quad (45)$$

Άσκηση 4

Η απομάκρυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta).$$

Οι δύο ακραίες θέσεις του σώματος απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 0.8 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x(t = 0) = +0.2 \text{ m}$ και η ταχύτητά του $u(t = 0) = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Να υπολογιστούν:

(α') Το πλάτος A της ταλάντωσης.

(β') Η αρχική φάση θ της ταλάντωσης.

(γ') Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

Λύση:

(α') Οι δύο ακραίες θέσεις απέχουν απόσταση $d = 0.8 \text{ m}$ μεταξύ τους. Με άλλα λόγια $d = 2A \Leftrightarrow A = \frac{d}{2}$. Άρα

$$A = 0.4 \text{ m} \quad (46)$$

(β') Καθώς γνωρίζουμε την απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = 0$ μπορούμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση απομάκρυνσης, να βρούμε την αρχική φάση ως εξής :

$$x(0) = 0.2 \Leftrightarrow 0.4 \cos(\theta) = 0.2 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\pi k \pm \pi/3, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

Άρα

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad (48)$$

Χρειαζόμαστε και τη σχέση

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \theta) \quad (49)$$

η οποία για $t = 0$ γράφεται

$$u(0) = -\omega A \sin(\theta) = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow 0.2\omega \sin(\theta) = \sqrt{3} \quad (50)$$

και άρα

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (51)$$

αφού $\sin(\pi/3) > 0$ ενώ $\sin(-\pi/3) < 0$.

(γ') Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί παραγωγίζοντας τη θέση:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta) \quad (52)$$

και καθώς γνωρίζουμε την ταχύτητα για $t = 0$ μπορούμε να βρούμε και το ω :

$$u(0) = -2\sqrt{3} \iff -0.4 \omega \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} \iff 0.2\omega \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad (53)$$

Άρα

$$\omega = 10 \text{ rad/s} \quad (54)$$

Συμπεράσματα:

1. Σαν **Θέση φυσικού μήκους** ορίζουμε τη θέση όπου το ελατήριο δεν ασκεί καθόλου δύναμη. **Προσοχή!** Η $F_{ελ} = 0$ όχι η απαραίτητα και η $F_{ολ}$!
2. Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου θα κοιτάει **πάντα!** στη **Θέση Φυσικού Μήκους**. Το x ή y που θα έχει ο τύπος της δύναμης επαναφοράς θα μετράει πάντα από τη θέση φυσικού μήκους!
3. Η **Θέση ισορροπίας** ταυτίζεται με τη **Θέση Φυσικού Μήκους** μόνο στο οριζόντιο ελατήριο.
- 4.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (55)$$

Παραγωγίζοντας την (55) έχω :

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A \omega \sin(\omega t + \theta) \quad (56)$$

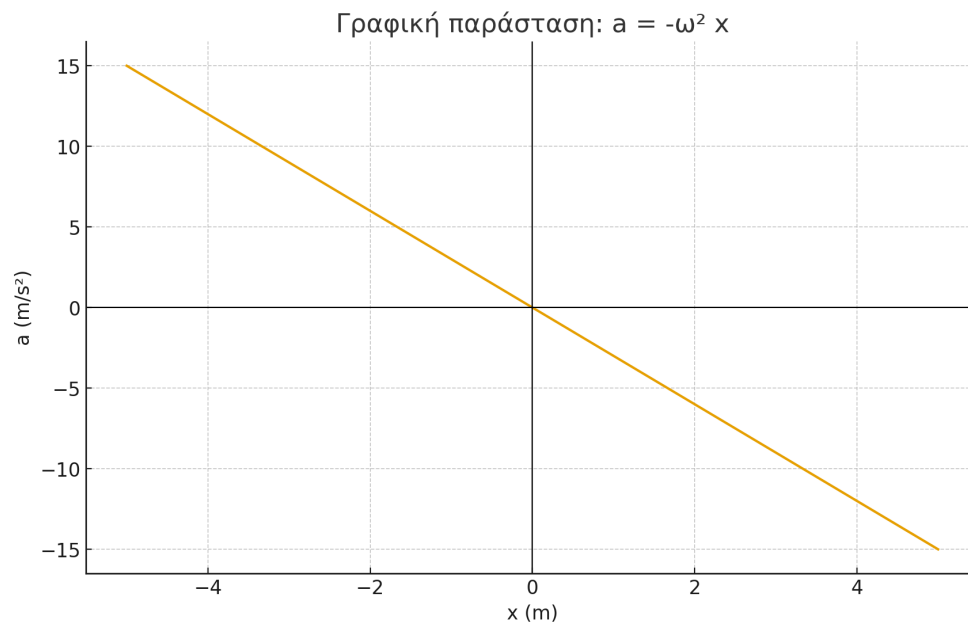
Παραγωγίζοντας την (56) έχω:

$$\frac{dy}{dt} = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta) \quad (57)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (55) και (57) έχω:

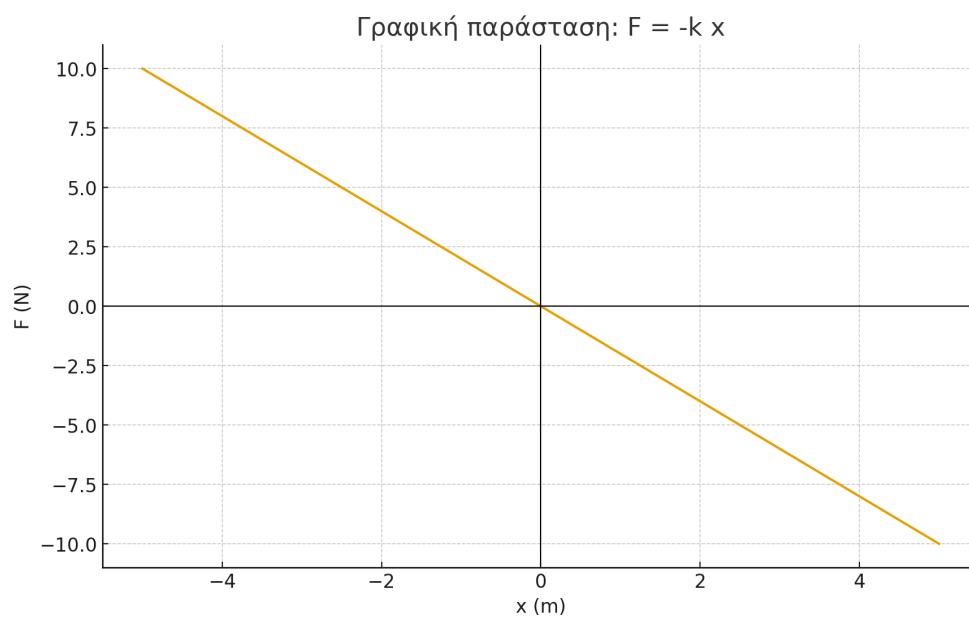
$$a(t) = -\omega^2 x \quad (58)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ επιτάχυνσης και θέσης είναι γραμμική με αρνητική κλίση.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της σχέσης $a = -\omega^2 x$

5. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε και τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς με τη θέση, καθώς $F_{ελ} = -kx$



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της σχέσης $F_{ελ} = -kx$