

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στην Αρχή Διατήρηση Ενέργειας

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος

selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:

31/10/2025

Τυπολόγιο

Έργο Δύναμης

Έργο Μίας Μεταβλητής Δύναμης:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Έργο Σταθερής Δύναμης:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos \theta$$

Έργο Βάρους:

$$W_g = mgy_i - mgy_f$$

Έργο Ελατηρίου:

$$W_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

$$\Delta K = K_f - K_i = W_{\omega\lambda}$$

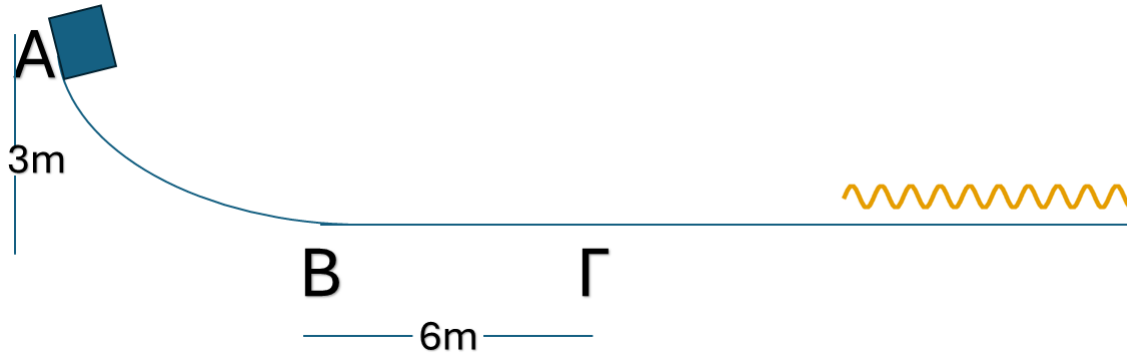
Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\Delta E_{\text{MHX}} = 0 \quad (\text{σε συστήματα χωρίς τριβές})$$

Άσκηση 1

Ένας κύβος μάζας 10.0 kg αφήνεται ελεύθερος από κατάσταση ηρεμίας στο σημείο Α του παρακάτω σχήματος 1. Η διαδρομή δεν έχει τριβές εκτός από το τμήμα μεταξύ των σημείων Β και Γ, το οποίο έχει μήκος 6.0 m . Ο κύβος κινείται καθοδικά, προσκρούει σε ένα ελατήριο με σταθερά 2250 N/m , το συμπιέζει κατά 0.3 m από τη θέση ισορροπίας του, και ακινητοποιείται στιγμιαία. Προσδιορίστε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_k ανάμεσα στον κύβο και την τραχιά επιφάνεια μεταξύ των σημείων Β και Γ. Δίνεται $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



Σχήμα 1: Αρχική κατάσταση.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {κύβος, Γη}, πολυμελές και απομονωμένο. Αρχικά μελετάμε την κίνηση από το Α στο Β. Σ' αυτό το διάστημα δεν ασκείται δύναμη τριβής επάνω στο σύστημα. Ασκείται μόνο το βάρος (από τη Γη) και η κάθετη δύναμη από την καμπύλη επιφάνεια. Η κάθετη δύναμη όμως, όπως έχουμε πει, αφού είναι κάθετη στη φορά της κίνησης δεν παράγει κάποιο έργο. Άρα η μόνη επίδραση στη μεταβολή της κινητικής κατάστασης του σώματος δίνεται μέσω του έργου του βάρους, με τη δύναμη του βάρους να είναι συντηρητική δύναμη. Άρα μπορούμε να γράψουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας με αρχική θέση τη θέση Α και τελική τη θέση Β.

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{gA \rightarrow B} = 0 \quad (2)$$

$$K_B - K_A + U_{gB} - U_{gA} = 0 \quad (3)$$

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB} \quad (4)$$

- Το σώμα ξεκινάει από την ακινησία. Άρα $K_A = 0$.
- Μπορούμε να θέσουμε το επίπεδο ΒΓ σαν τη στάθμη αναφοράς μας για τη δυναμική ενέργεια. Δηλαδή $U_B = 0$.
- Η αρχική δυναμική ενέργεια θα είναι

$$U_A = mgh = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300 \text{ J} \quad (5)$$

- Η τελική κινητική ενέργεια θα είναι

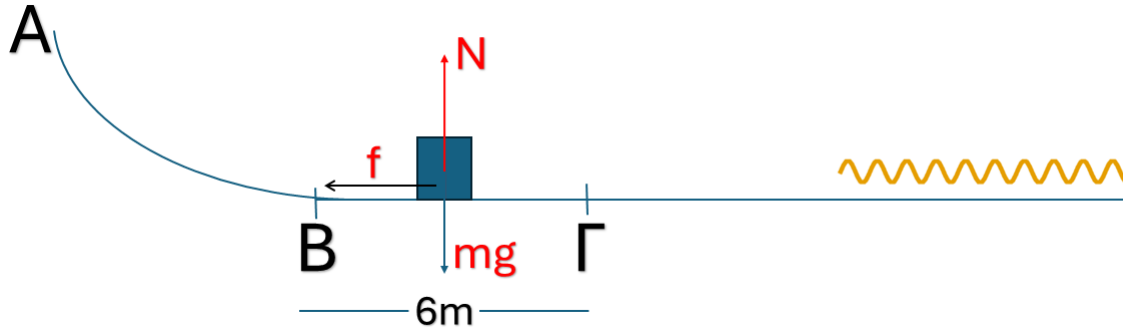
$$K_B = \frac{1}{2} m u_B^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot u_B^2 = 5 u_B^2 \quad (6)$$

Άρα μέσω της σχέσης (4) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την ταχύτητα που έχει το σώμα στη θέση Β :

$$300 = 5 u_B^2 \Leftrightarrow u_B = \sqrt{\frac{300}{5}} \Leftrightarrow u_B = \pm 2\sqrt{15} \text{ m/s} \quad (7)$$

όπου μπορούμε να κρατήσουμε το θετικό πρόσημο, καθώς η ταχύτητα στη θέση B έχει - ως διάνυσμα - την ίδια φορά με τη θετική φορά της κίνησης (προς τα δεξιά)¹.

Πάμε στο κομμάτι BΓ του Σχήματος 2. Το σώμα περιμένουμε να επιβραδυνθεί, καθώς θα του ασκείται τριβή. Θεωρούμε ως σύστημα το {κύβος}, μονομελές και μη απομονωμένο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα



Σχήμα 2: Τμήμα BΓ - Τριβή.

Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου στη διαδρομή $B \rightarrow \Gamma$.

$$\Delta K_{B \rightarrow \Gamma} = W_{ext} \iff K_{\Gamma} - K_B = W_{f_k} \quad (8)$$

- Την κινητική στο B μπορούμε πολύ απλά να την υπολογίσουμε, αφού ξέρουμε την ταχύτητα στο σημείο B:

$$K_B = \frac{1}{2} m u_B^2 = \frac{1}{2} 10 (2\sqrt{15})^2 = 300 \text{ J} \quad (9)$$

- Η κινητική ενέργεια στο Γ μας είναι άγνωστη καθώς δε γνωρίζουμε την ταχύτητα που έχει σ' αυτό το σημείο:

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{2} m u_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2} 10 u_{\Gamma}^2 = 5 u_{\Gamma}^2 \quad (10)$$

- Έργο της τριβής:

$$W_{f_k} = -f_k \Delta x = -6 f_k \quad (11)$$

- Χρειαζόμαστε επίσης και μια σχέση για την τριβή. Γνωρίζουμε ότι $f_k = \mu_k n$. Οπότε χρειαζόμαστε το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{n}$. Στον κατακόρυφο άξονα δεν κινείται το σώμα, άρα ισορροπεί. Από τον 1ο νόμο του Newton

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff m\vec{g} + \vec{n} = \vec{0} \implies n = mg = 98 \text{ N} \quad (12)$$

Άρα

$$W_{f_k} = -6 \mu_k mg = -6 \cdot 98 \cdot \mu_k = -588 \mu_k \quad (13)$$

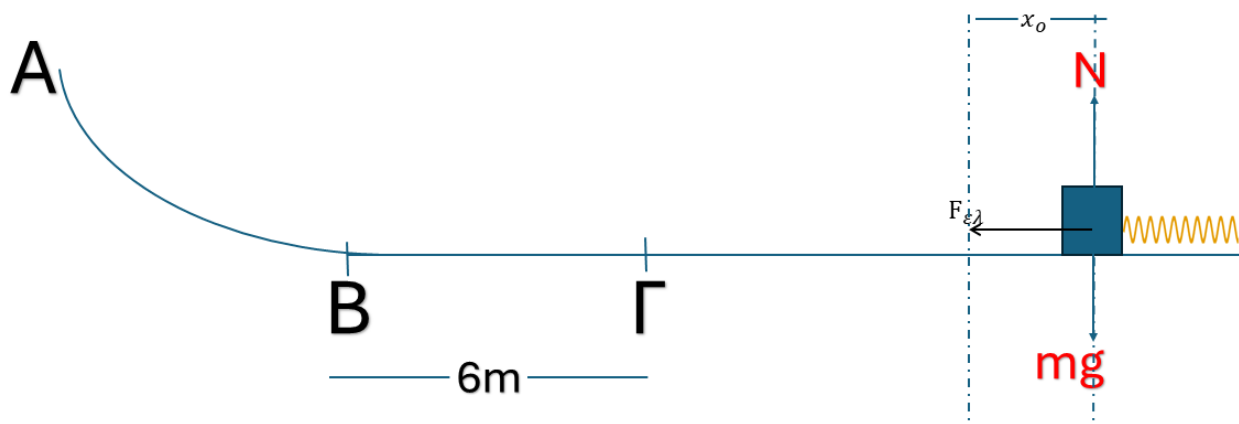
Μπορούμε να επιστρέψουμε στην εξίσωση (8) και να δούμε τι χρειαζόμαστε ακόμα, βάζοντας όλες τις πληροφορίες που υπολογίσαμε έως τώρα:

$$\frac{1}{2} 10 u_{\Gamma}^2 - 300 = 588 \mu_k \quad (14)$$

Δύο άγνωστοι!

Πάμε να μελετήσουμε και το τρίτο κομμάτι της κίνησης, στο Σχήμα 3, να δούμε τι μπορούμε να βγάλουμε: Στο κομμάτι αυτό δεν έχει ξανά δυνάμεις τριβής. Οπότε η ταχύτητα u_{Γ} θα είναι σταθερή μέχρι το σώμα να βρει το ελατήριο. Τι θα μας μεταβάλει την κινητική κατάσταση εδώ; Το έργο της δύναμης του ελατηρίου! Θεωρούμε ως

¹Τα ενεργειακά θεωρήματα βέβαια μας επιστρέφουν το **μέτρο** της ταχύτητας.



Σχήμα 3: Τμήμα Γ - Ελατήριο.

σύστημα το {κύβος}. Στο σύστημα επιδρά ενεργειακά μόνο η δύναμη του ελατηρίου. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή $\Gamma \rightarrow \Delta$.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_s \quad (15)$$

- Κινητική ενέργεια μόλις βρίσκει το ελατήριο:

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{2} m u_{\Gamma}^2 \quad (16)$$

- Κινητική ενέργεια στη θέση Δ ; Μας λέει η εκφώνηση: “το συμπιέζει κατά 0.3 m από τη θέση ισορροπίας του, και ακινητοποιείται στιγμιαία”. Άρα $K_f = 0$.

- Έργο ελατηρίου:

Γνωρίζουμε ότι $F_s = -kx$: μια δύναμη όπου “κοιτάει” πάντα τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου. Άρα αφού εδώ συμπιέζεται το ελατήριο, η δύναμή του θα αντιτίθεται στην κίνηση. Άρα :

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^{x_f} (-kx) dx = -2250 \int_0^{0.3} x dx \\ &= -2250 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.3} = -2250 \left(\frac{(0.3)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \\ &= -2250 \left(\frac{0.09}{2} \right) = -2250 \cdot 0.045 \\ &= -101.25 \text{ J} \end{aligned}$$

Είναι απόλυτα λογικό να βγει αρνητικό, καθώς η δύναμη ελατηρίου παράγει αρνητικό έργο, δηλαδή φρενάρει το σώμα: αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα {κύβος}. Άρα τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη u_{Γ} από τη σχέση (15), αφού έχουμε υπολογίσει τα πάντα:

$$-\frac{1}{2} 10 u_{\Gamma}^2 = -101.25 \Leftrightarrow u_{\Gamma} = \sqrt{\frac{101.25 \cdot 2}{10}} \quad (17)$$

$$u_{\Gamma} = \pm 4.5 \text{ m/s} \quad (18)$$

όπου πάλι θα κρατήσουμε το θετικό πρόσημο γιατί το σώμα κινούνταν προς τη θετική φορά.

Άρα γυρνώντας τώρα στη σχέση (14), ο μόνος άγνωστος είναι ο συντελεστής τριβής μ_k :

$$\frac{1}{2} 10 \cdot 4.5^2 - 300 = -588 \mu_k \Leftrightarrow \mu_k = -\frac{5 \cdot 4.5^2 - 300}{588} = \frac{300 - 101.25}{588} \quad (19)$$

Άρα

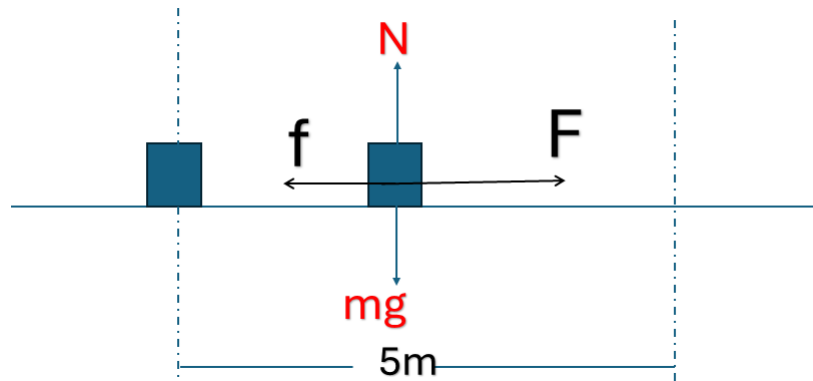
$$\mu_k \approx 0.338$$

Άσκηση 2

Ένα κιβώτιο μάζας 40 kg, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο, ολισθαίνει 5 m πάνω σε ένα τραχύ, οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης, μέτρου 130 N. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι 0.3. Να βρεθούν

- (α') Το έργο που παράγει η ασκούμενη δύναμη.
- (β') Η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας στο σύστημα κιβώτιο-δάπεδο, λόγω τριβής.
- (γ') Το έργο που παράγει η κάθετη δύναμη.
- (δ') Το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη.
- (ε') Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου.
- (ς') Το μέτρο της τελικής ταχύτητας του κιβωτίου.

Λύση:
Δείτε το Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 2.

- (α') Έργο σταθερής δύναμης:

$$W_F = \int_0^5 130 \, dx = 130 [x]_0^5 = 130(5) = 650 \, \text{J} \quad (20)$$

- (β') Η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας λόγω τριβής, πρόκειται ουσιαστικά για τη θερμότητα που παράγει η τριβή στο σύστημα. Δηλαδή για την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής, καθώς ξέρουμε ότι το έργο της τριβής είναι αρνητικό καθώς η δύναμη της τριβής ολίσθησης αντιτίθεται στη μετατόπιση του σώματος.

$$f_k = \mu n = \mu mg = 0.3 \cdot 40 \cdot 10 = 120 \, \text{N} \quad (21)$$

με $n = mg$ να προκύπτει από την ισορροπία του σώματος στον άξονα $y'y$. Οπότε

$$W_{f_k} = -f_k \cdot \Delta x = -120 \cdot 5 = -600 \, \text{J} \quad (22)$$

και άρα στο σύστημα {επιφάνεια, σώμα} θα έχουμε

$$\Delta E_{\text{θερμική}} = 600 \, \text{J} \quad (23)$$

(γ') Το έργο της κάθετης δύναμης θα είναι μηδέν καθώς είναι προφανές ότι: $W_n = \vec{n} d\vec{x} = n \cos(90^\circ) dx = 0$.

(δ') Το έργο του βάρους: για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο ερώτημα: $W_g = m\vec{g} d\vec{x} = mg \cos(-90^\circ) dx = 0$.

(ε') Μεταβολή κινητικής ενέργειας θα ισούται με το άθροισμα του συνολικού έργου των παραπάνω δυνάμεων. Προσοχή όμως ότι εδώ θέλουμε το έργο της τριβής και όχι την απόλυτη τιμή του που υπολογίσαμε προηγουμένως. Θεωρούμε ως σύστημα το {κουτί} και από το ΘΜΚΕΕ θα έχουμε

$$\Delta K = W_{ολ} = W_F + W_{fk} + W_n + W_{F_g} = 650 - 600 = 50 \text{ J} \quad (24)$$

(ζ') Η τελική ταχύτητα μπορεί να βρεθεί, χρησιμοποιώντας ξανά το ΘΜΚΕΕ. Από εκφώνηση, το σώμα ξεκινά από την ακινησία, άρα $K_i = 0$:

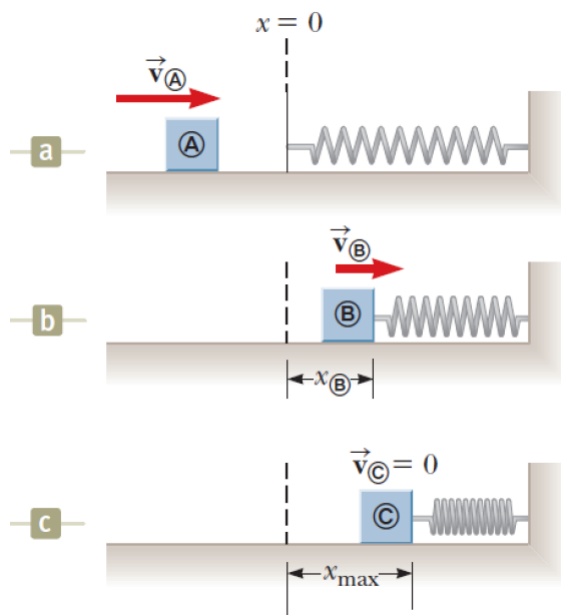
$$K_f - K_i = \frac{1}{2} m u_f^2 - 0 = 50 \implies \frac{1}{2} 40 u_f^2 = 50 \implies 20 u_f^2 = 50 \implies u_f = \sqrt{2.5} \approx 1.58 \text{ m/s} \quad (25)$$

Άσκηση 3

Ένα σώμα μάζας 0.8 kg δέχεται αρχική ταχύτητα $u_A = 1.2 \text{ m/s}$ προς τα δεξιά και συγκρούεται με ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς $k = 50 \text{ N/m}$, όπως στο Σχήμα 5

(α') Υποθέτοντας επιφάνεια χωρίς τριβές, υπολογίστε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β') Υποθέτοντας σταθερή τριβή ολισθήσεως με $\mu_k = 0.5$, αν η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή της επαφής με το ελατήριο είναι $u_A = 1.2 \text{ m/s}$, ποιά είναι τώρα η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;



Σχήμα 5: Σώμα συγκρούεται με ελατήριο.

Λύση:

Επιλέγουμε θετική φορά προς τα δεξιά.

(α') Έστω ότι το σύστημα μας είναι το {ελατήριο, σώμα}. Το σύστημα αυτό είναι πολυμελές και απομονωμένο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ελατήριο είναι η δύναμη του ελατηρίου, η δύναμη του βάρους, και η δύναμη του

επιπέδου στο ελατήριο. Οι δυο τελευταίες δεν παράγουν έργο, ως κάθετες στη μετατόπιση του σώματος. Η δύναμη που απομένει, του ελατηρίου, είναι συντηρητική, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΜΕ.

$$K_A + U_{sA} = K_C + U_{sC} \quad (26)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (27)$$

$$x_{max}^2 = \frac{mu_A^2}{k} \quad (28)$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{mu_A^2}{k}} \quad (29)$$

$$\approx 0.15 \text{ m} \quad (30)$$

(β') Θεωρούμε νέο σύστημα το {σώμα}. Υπάρχει πλέον μη συντηρητική δύναμη στο σύστημα, και το αυτό είναι μη απομονωμένο. Προστίθεται η δύναμη της τριβής στις δυνάμεις που αναφέραμε στο προηγούμενο ερώτημα. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ.

$$\Delta K_{A \rightarrow C} = \sum W_{ext} \quad (31)$$

$$K_C - K_A = W_{fk} + W_s \quad (32)$$

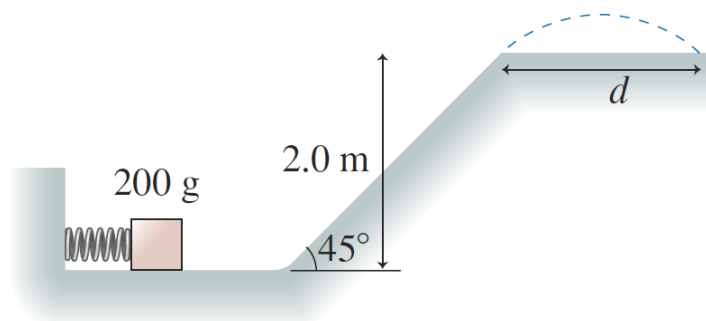
$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 = -f_k \Delta x + 0 - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (33)$$

$$50x_{max}^2 + 7.84x_{max} - 1.15 = 0 \quad (34)$$

Λύσεις του τριωνύμου αποτελούν οι $x_{max1} = 0.092 \text{ m}$ και $x_{max2} = -0.25 \text{ m}$, εκ των οποίων αποδεχόμαστε την πρώτη λόγω του ότι είναι θετική, όπως πρέπει να είναι βάσει σχήματος και επιλεγμένης θετικής φοράς.

Άσκηση 4

Το ελατήριο του Σχήματος 6 έχει σταθερά $k = 1000 \text{ N/m}$.

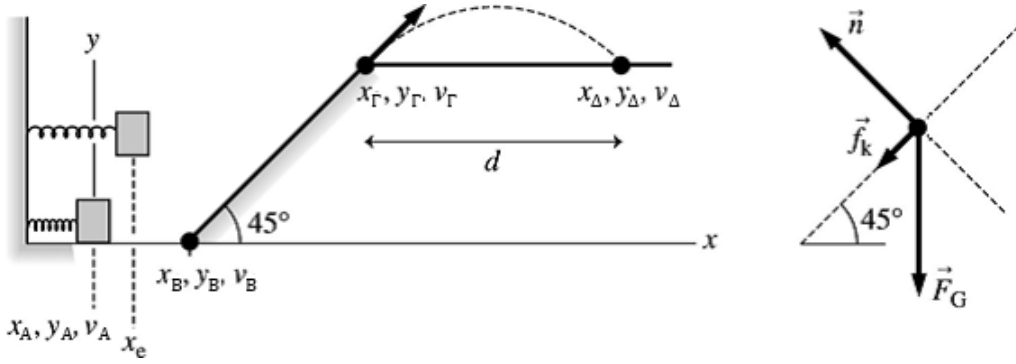


Σχήμα 6: Ελατήριο και σώμα.

Συμπιέζεται κατά 15 εκατοστά και στη συνέχεια εκτοξεύει ένα σώμα μάζας 0.2 kg . Η οριζόντια επιφάνεια είναι χωρίς τριβές, αλλά το κεκλιμένο έχει τριβές και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου είναι $\mu_k = 0.2$. Πόση απόσταση d διανύει το σώμα στον αέρα;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 7. Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα}. Θεωρούμε 4 σημεία, τα (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_Γ, y_Γ) , (x_Δ, y_Δ) . Το σύστημα είναι μη απομονωμένο και μονομελές. Τοποθετούμε το σύστημα συντεταγμένων στο ελεύθερο άκρο του συμπιεσμένου ελατηρίου που έρχεται σε επαφή με το σώμα. Επειδή η οριζόντια επιφάνεια στο κάτω μέρος της ράμπας



Σχήμα 7: Ελατήριο και σώμα και διαγράμματα δυνάμεων.

είναι λεία, το έργο της δύναμης του ελατηρίου θα μετατράπεί στο 100% του σε κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση B , δηλ. στη διαδρομή $A \rightarrow B$ θα ισχύει το ΘΜΚΕΕ:

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_s \iff K_B - K_A = \frac{1}{2} k x_A^2 - 0 \iff K_B = \frac{1}{2} k x_A^2 \quad (35)$$

Μπορούμε στη συνέχεια να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή $B \rightarrow \Gamma$.

$$\Delta K_{B \rightarrow \Gamma} = W_{F_g} + W_{f_k} \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} m u_\Gamma^2 - \frac{1}{2} k x_A^2 = 0 - m g y_\Gamma - f_k \Delta s \quad (37)$$

$$\frac{1}{2} m u_\Gamma^2 = -m g y_\Gamma - f_k \Delta s + \frac{1}{2} k x_A^2 \quad (38)$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\Delta s = \frac{y_\Gamma}{\sin(\pi/4)} \quad (39)$$

και γνωρίζουμε ότι $f_k = \mu_k n = \mu_k m g \cos(\pi/4)$, λόγω της ισορροπίας του σώματος στον άξονα $y'y$. Οπότε

$$\frac{1}{2} m u_\Gamma^2 = -m g y_\Gamma - f_k \Delta s + \frac{1}{2} k x_A^2 \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} m u_\Gamma^2 = -m g y_\Gamma - \mu_k m g \cos(\pi/4) \frac{y_\Gamma}{\sin(\pi/4)} + \frac{1}{2} k x_A^2 \quad (41)$$

$$u_\Gamma = \sqrt{\frac{k}{m} x_A^2 - 2 \mu_k g y_\Gamma - 2 \mu_k g y_\Gamma \cot(\pi/4)} \quad (42)$$

$$= 8.091 \text{ m/s} \quad (43)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την απόσταση $d = x_\Delta - x_\Gamma$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης στη διαδρομή $\Gamma \rightarrow \Delta$, όπου το σώμα εκτελεί βολή. Θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων με $x_\Gamma = y_\Gamma = 0$, $t_\Gamma = 0$, και έστω t ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να καλύψει τη διαδρομή. Στον άξονα $y'y$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε θα είναι

$$y_\Delta = y_\Gamma + u_{y_\Gamma} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (44)$$

$$0 = 0 + u_\Gamma \sin(\pi/4) t - 4.9 t^2 \quad (45)$$

$$t(u_\Gamma \sin(\pi/4) - 4.9 t) = 0 \quad (46)$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι οι $t = 0$ ή $t = 1.168 \text{ s}$. Στον άξονα $x'x$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, άρα από την εξίσωση της κινητικής

$$x_\Delta = x_\Gamma + u_{x_\Gamma} t \iff d = x_\Delta - x_\Gamma = u_\Gamma \cos(\pi/4) (1.168) = 6.7 \text{ m} \quad (47)$$