

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στους Νόμους του Newton και στο Έργο Δύναμης

Επιμέλεια:

Ανδρέας Τσακαλίδης

Ημερομηνία:

24/10/2025

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τυπολόγιο

Νόμοι του Newton

1ος Νόμος:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

2ος Νόμος:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

3ος Νόμος:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Δύναμη Στατικής Τριβής:

$$f_s \leq \mu_s n$$

Δύναμη Τριβής Ολίσθησης:

$$f_k = \mu_k n$$

Έργο σταθερής δύναμης:

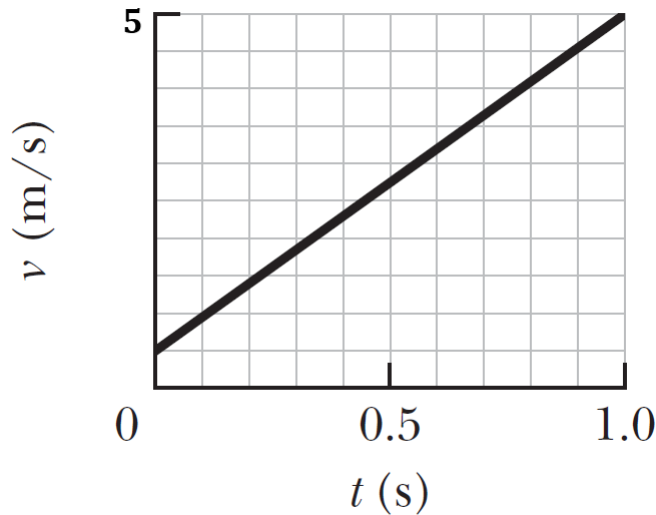
$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos(\theta)$$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Άσκηση 1

Ένα κουτί μάζας $m = 4.1 \text{ kg}$ σπρώχνεται από σταθερή δύναμη σε επίπεδη, μη-λεία, οριζόντια επιφάνεια. Το μέτρο της δύναμης είναι 40.0 N . Το Σχήμα 1 δείχνει την ταχύτητα του κουτιού συναρτήσει του χρόνου t όσο το κουτί κινείται σε νοητό άξονα $x'x$ στην επιφάνεια.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

Ποιός είναι ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κουτί και στην επιφάνεια;

Λύση:

Θεωρούμε ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές (πάνω, δεξιά). Το σώμα επιταχύνεται, όπως βλέπουμε στο σχήμα, λόγω δράσης σταθερής δύναμης $F = 40 \text{ N}$, άρα ισχύει ο 2ος νόμος Newton στον άξονα $x'x$.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \implies F - f_k = ma_x \implies f_k = F - ma_x \quad (1)$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα $y'y$, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \implies n = F_g = mg \quad (2)$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg \quad (3)$$

Από την πρώτη και την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\mu_k mg = F - ma_x \iff \mu_k = \frac{F - ma_x}{mg} \quad (4)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη διαδρομή $A \rightarrow B$, με A τη θέση εκκίνησης ($t = 0$) και B τη θέση μετά από ένα δευτερόλεπτο ($t = 1$). Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, θα ισούται με την κλίση της ευθείας της ταχύτητας ως προς t :

$$a_x = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{5 - 0.5}{1 - 0} = \frac{4.5}{1} = 4.5 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

Οπότε τελικά

$$\mu_k = \frac{40 - 4.1 \cdot 4.5}{4.1 \cdot 9.8} = 0.536 \quad (6)$$

Άσκηση 2

Τρεις δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με

$$\vec{u} = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (-7 \text{ m/s})\vec{j} \quad (7)$$

Δυο από αυτές είναι οι

$$\vec{F}_1 = (2 \text{ N})\vec{i} + (3 \text{ N})\vec{j} + (-2 \text{ N})\vec{k} \quad (8)$$

$$\vec{F}_2 = (-5 \text{ N})\vec{i} + (8 \text{ N})\vec{j} + (-2 \text{ N})\vec{k} \quad (9)$$

Ποιά είναι η τρίτη δύναμη;

Λύση:

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισορροπεί σε όλους τους άξονες. Άρα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \quad (10)$$

δηλ.

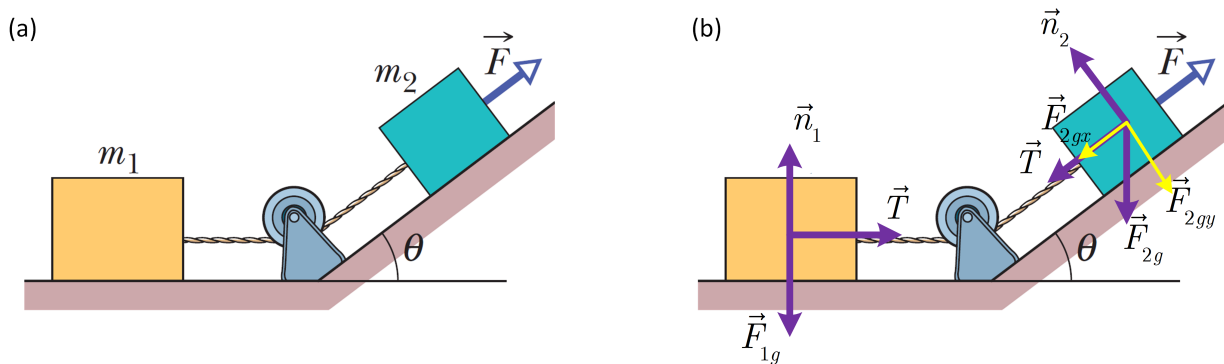
$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\left((2 \text{ N})\vec{i} + (3 \text{ N})\vec{j} + (-2 \text{ N})\vec{k}\right) - \left((-5 \text{ N})\vec{i} + (8 \text{ N})\vec{j} + (-2 \text{ N})\vec{k}\right) \quad (11)$$

$$= (3 \text{ N})\vec{i} + (-11 \text{ N})\vec{j} + (4 \text{ N})\vec{k} \quad (12)$$

Η πληροφορία της ταχύτητας που δίνεται στην εκφώνηση δε μας χρησιμεύει κάπου, δεν έχει σημασία ποιές τιμές έχουν οι συνιστώσες της ταχύτητας για να αποφανθούμε για την 3η δύναμη.

Άσκηση 3

Στο Σχήμα 2(a), μια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 12 N εφαρμόζεται σε ένα κουτί μάζας $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ που βρίσκεται σε επικλινές. Η δύναμη έχει κατεύθυνση παράλληλη με το επικλινές με φορά προς τα πάνω, υπό γωνία $\theta = 37^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Το κουτί συνδέεται με νήμα με ένα άλλο κουτί μάζας $m_1 = 3.0 \text{ kg}$ που βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.

Το οριζόντιο επίπεδο και το επικλινές είναι λεία, η τροχαλία είναι αβαρής και χωρίς τριβές, και το νήμα είναι ανελαστικό και αβαρές. Πόση είναι η τάση του νήματος;

Λύση:

Επιλέγουμε δυο συστήματα αξόνων, ένα για κάθε κουτί. Για το μπεζ κουτί, ο x -άξονας είναι παράλληλος στο οριζόντιο επίπεδο, ενώ για το πράσινο κουτί ο άξονας x' είναι παράλληλος στο κεκλιμένο. Οι θετικές φορές είναι

οι συμβατικές. Ας ξεκινήσουμε από το μπεζ κουτί, μάζας m_1 . Ασκούνται τρεις δυνάμεις επάνω του, η δύναμη από το επίπεδο, $\vec{n}_1$, η δύναμη από το νήμα (η τάση του νήματος) $\vec{T}$, και η δύναμη του βάρους $\vec{F}_{g1}$, όπως στο Σχήμα 2(b). Το κουτί επιταχύνεται προς τα δεξιά, άρα στον άξονα $x'x$ ισχύει ο 2ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m_1 \vec{a}_x \iff \vec{T} = m_1 \vec{a}_x \implies T = m_1 a_x \quad (13)$$

Ψάχνουμε αυτήν την τάση του νήματος, που είναι ίση σε μέτρο με την τάση που εφαρμόζεται στο πράσινο κουτί, μάζας m_2 . Σε αυτό το κουτί τώρα, ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους F_{g2} (που αναλύεται σε δυο συνιστώσες), η τάση του νήματος, $\vec{T}$, η κάθετη δύναμη από το κεκλιμένο $\vec{n}_2$, και η δύναμη $\vec{F}$. Για το κουτί αυτό, έχουμε επιτάχυνση στον άξονα $x'x$ (παράλληλος με το κεκλιμένο, όπως είπαμε). Η επιτάχυνση αυτή θα είναι η ίδια με την επιτάχυνση του κουτιού μάζας m_1 , καθώς τα σώματα κινούνται “μαζί”, αφού τροχαλίες και νήματα είναι ιδανικά. Άρα ισχύει ο 2ος νόμος του Newton σε αυτό το κουτί:

$$\sum \vec{F}_x = m_2 \vec{a}_x \iff \vec{T} + \vec{F} + \vec{F}_{g2x} = m_2 \vec{a}_x \implies F - T - F_{g2x} = m_2 a_x \iff a_x = \frac{F - T - F_{g2x}}{m_2} \quad (14)$$

Η x -συνιστώσα του βάρους δίνεται ως

$$F_{g2x} = F_{g2} \sin(\theta) = m_2 g \sin(\theta) \quad (15)$$

άρα

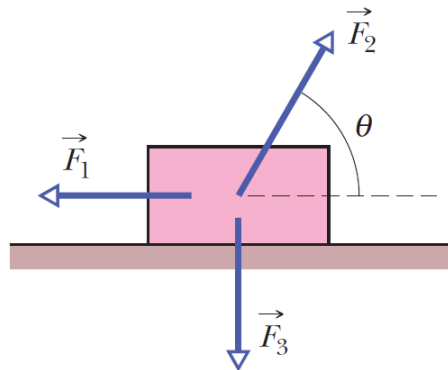
$$a_x = \frac{F - T - m_2 g \sin(\theta)}{m_2} \quad (16)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση της τάσης T , παίρνουμε

$$T = m_1 a_x = m_1 \frac{F - T - m_2 g \sin(\theta)}{m_2} = \frac{m_1 F - m_1 m_2 g \sin(\theta)}{m_1 + m_2} = 4.59 \text{ N} \quad (17)$$

Άσκηση 4

Στο Σχήμα 3 βλέπετε τρεις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα κουτί που κινείται προς τα *αριστερά* κατά 3.0 m σε λεία επιφάνεια. Οι δυνάμεις έχουν μέτρο $F_1 = 5$, $F_2 = 9$, $F_3 = 3$ N, και η γωνία του σχήματος ισούται με $\theta = \pi/3$. Κατά τη μετατόπιση του κουτιού, πόσο είναι το συνολικό έργο που παράγεται από τις τρεις δυνάμεις επάνω στο κουτί;



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 4.

Λύση:

Οι δυνάμεις είναι σταθερές, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης. Θεωρούμε θετική φορά προς τα *αριστερά*, που είναι και η φορά της κίνησης, και έχουμε

$$W_{F_1} = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{x} = F_1 \Delta x \cos(0) = 15 \text{ J} \quad (18)$$

και

$$W_{F_2} = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{x} = F_2 \Delta x \cos(\pi - \theta) = -F_2 \Delta x \cos(\theta) = -\frac{27}{2} \text{ J} \quad (19)$$

και

$$W_{F_3} = \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{x} = 0 \quad (20)$$

λόγω καθετότητας των δυο διανυσμάτων. Άρα το συνολικό έργο δίνεται ως

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 = 15 - \frac{27}{2} = 1.5 \text{ J} \quad (21)$$

Άσκηση 5

Μια δύναμη μεταβαλλόμενου μέτρου δρα σε ένα σώμα με διεύθυνση παράλληλη στον άξονα $x'x$ και δίνεται από τη σχέση

$$F = F_0 \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \quad (22)$$

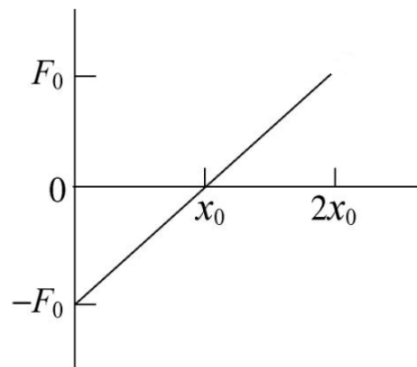
με F_0, x_0 σταθερές. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη πάνω στο σώμα κατά την κίνησή του από $x = 0$ ως $x = 2x_0$, με δυο τρόπους: (α) από το γράφημα της F , και (β) χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα.

Λύση:

Αναδιατάσσοντας λίγο την εξίσωση της δύναμης βλέπουμε ότι

$$F = \frac{F_0}{x_0} (x - x_0) = \lambda(x - x_0) = \lambda x - \lambda x_0 \quad (23)$$

με $\lambda = \frac{F_0}{x_0}$ η κλίση της ευθείας, που είναι σταθερή. Άρα πρόκειται για μια ευθεία που περνά από το σημείο $(0, -F_0)$ και από το $(x_0, 0)$. Δείτε το Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 5.

Έχουμε δυο επιφάνειες που περικλείουν οι ευθείες $x = 0$, $x = x_0$ και η γραφική παράσταση $F(x)$, και οι οποίες αποτελούν ορθογώνια τρίγωνα. Η μια επιφάνεια βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ και η άλλη επάνω. Επειδή οι πλευρές τους είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι επιφάνειες τους (κατ' απόλυτη τιμή). Οπότε το συνολικό έργο θα είναι μηδέν. Αν ολοκληρώναμε τη συνάρτηση για να βρούμε τις επιφάνειες θα είχαμε

$$W = \int_0^{2x_0} \lambda(x - x_0) dx = \lambda \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2x_0} - \lambda x_0 x \Big|_0^{2x_0} \quad (24)$$

$$= \lambda \frac{4x_0^2}{2} - 0 - \lambda 2x_0^2 + 0 \quad (25)$$

$$= \lambda 2x_0^2 - 2\lambda x_0^2 = 0 \quad (26)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.