

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Στις μονοδιάστατες και δισδιάστατες Ομαλά
Μεταβαλλόμενες Κινήσεις

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος
selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:

10/10/2025

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τυπολόγιο

Ορισμοί Ταχύτητας και Επιτάχυνσης

Μονοδιάστατη κίνηση:

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Δισδιάστατη κίνηση:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j}$$

Εξισώσεις Ομαλής Επιταχυνόμενης Κίνησης σε μία διάσταση (ΕΟΕΧΚ)

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Εξισώσεις Ομαλής Επιταχυνόμενης Κίνησης σε 2 Διαστάσεις (ΕΟΕΧΚ)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Εξισώσεις Ομαλής Επιβραδυνόμενης Κίνησης σε μία διάσταση (ΕΟΕΧΚ)

$$v = v_0 - at$$
$$x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2$$

Εξισώσεις Ομαλής Επιβραδυνόμενης Κίνησης σε 2 Διαστάσεις (ΕΟΕΧΚ)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

(Όλες οι εξισώσεις ισχύουν όταν η επιβραδυνση είναι σταθερή.)

Άσκηση 1

Η θέση ενός σώματος που εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3 \quad (1)$$

Το x μετριέται σε m και το t σε s . Να υπολογιστούν:

(α') Η θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές $t = 1, 2, 3, 4 s$.

(β') Η μετατόπιση του σώματος μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0 s$ και $t = 4 s$.

(γ') Η μέση ταχύτητα του σώματος στο διάστημα από $t = 2 s$ ως $t = 4 s$.

(δ') Να γίνει η γραφική παράσταση $x(t)$ για $t \in [2, 4]$ και να απαντηθεί το προηγούμενο ερώτημα με βάση το διάγραμμα.

Λύση:

(α') Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1):

$$x(1) = 3(1) - 4(1)^2 + 1^3 = 3 - 4 + 1 = 0 m$$

$$x(2) = 3(2) - 4(2)^2 + (2)^3 = 6 - 16 + 8 = -2 m$$

$$x(3) = 3(3) - 4(3)^2 + (3)^3 = 9 - 36 + 27 = 0 m$$

$$x(4) = 3(4) - 4(4)^2 + (4)^3 = 12 - 64 + 64 = 12 m$$

(β') Μετατόπιση:

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = |12 - 0| = 12 m$$

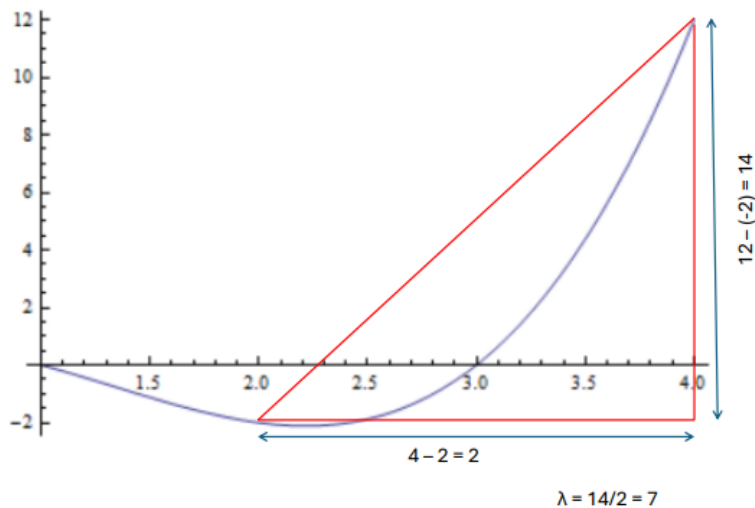
(γ') Μέση ταχύτητα:

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12 - (-2)}{4 - 2} = 7 m/s$$

(δ') Ζωγραφίζουμε την εξίσωση (1) και βρίσκουμε τις θέσεις στις χρονικές στιγμές που μας ενδιαφέρουν:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες θέσεις στις χρονικές στιγμές $t = 2 s$ και $t = 4 s$ μας δίνουν τα δεδομένα για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t)$.

Άσκηση 2

Σε ένα μπαρ, ένας πελάτης γλιστρώνει το άδριο ποτήρι μπύρας του στον πάγκο, ο οποίος έχει ύψος h μ. Πριν προλάβει να το πιάσει ο μπάρμαν, το ποτήρι σκάει σε απόσταση d μ.

(α') Με τι ταχύτητα φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο;

(β') Ποιά είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας όταν φτάνει στο έδαφος;

Λύση:

Διαχωρίζουμε την κίνηση στους δύο άξονες:

(α') **Οριζόντιος άξονας:** Το σώμα θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Δεν υπάρχει τριβή και δε δέχεται καμία εξωτερική δύναμη που να μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση.:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{d}{t} \quad (2)$$

(β') **Κατακόρυφος άξονας:** Το σώμα θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση, καθώς δέχεται τη δύναμη της βαρύτητας που είναι ομόροπη με τη φορά της κίνησης. Άρα η επιτάχυνση της βαρύτητας θα είναι η επιτάχυνση του σώματος. Το σώμα ξεκινάει χωρίς αρχική ταχύτητα σ' αυτό τον άξονα και όπως θα εξηγήσω στη συνέχεια, (λόγο ορισμού των αξόνων), ξεκινάει από το $y = 0$:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

$$v_y = gt \Rightarrow v_y(t) = gt \quad (4)$$

Όπου σταν t_f όρισα το συνολικό χρόνο του φαινομένου της πτώσης του ποτηριού.

- Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 1, η θετική φορά του άξονα x είναι προς τα δεξιά και η θετική φορά του άξονα y προς τα κάτω.
- Η αρχή των αξόνων είναι η θέση όπου το ποτήρι αφήνει το τραπέζι.
- Το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στο διάστημα όπου

$$0 \leq x \leq d$$

και

$$0 \leq y \leq h$$

Υπολογισμός οριζόντιας ταχύτητας

$$v_x = \frac{d}{t_f} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (5)$$

Υπολογισμός χρόνου πτώσης

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (6)$$

Τελική κατακόρυφη ταχύτητα

$$v_y(t_f) = gt_f = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (7)$$

Μέτρο της ταχύτητας

$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(d\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)^2 + (\sqrt{2gh})^2} \quad (8)$$

Κατεύθυνση της ταχύτητας

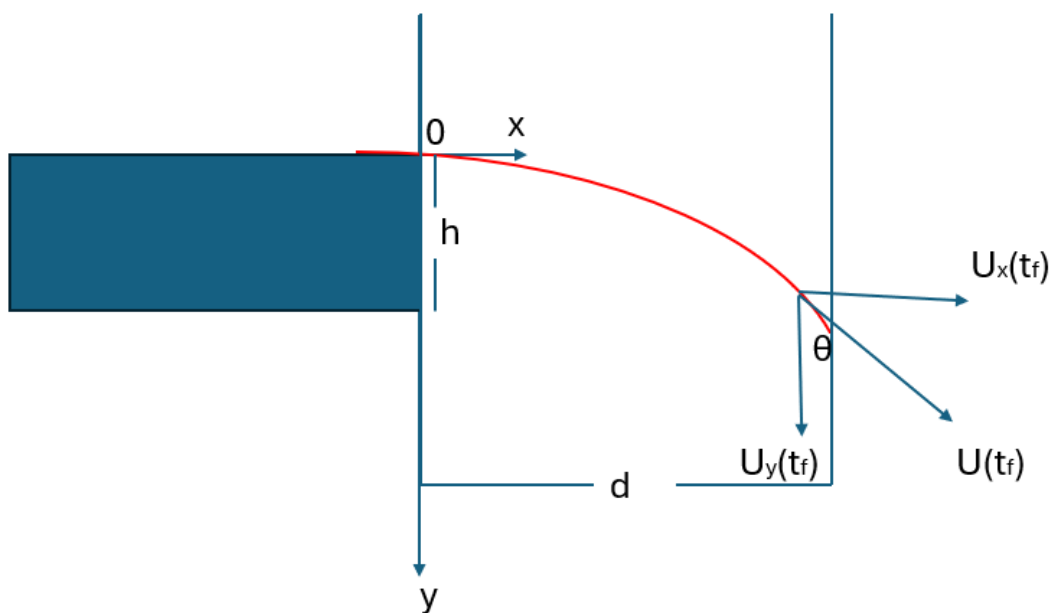
$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(2\frac{h}{d}\right) \quad (9)$$

Παρατήρηση: Ένα ενδιαφέρον σχόλιο αν κοιτάξει κανείς τις παραπάνω πράξεις είναι το εξής: Γιατί στην περίπτωση της μελέτης της κίνησης στον κατακόρυφο άξονα δεν έγραψα τις εξισώσεις ως εξής:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = -gt$$

Επειδή πολύ απλά για να αποφύγω να κουβαλάω αυτο το “−” πήρα τη θετική φορά προς τα κάτω. Οπότε και στους δύο άξονες το σώμα κινείται προς τη θετική φορά, με μηδενική αρχική απομάκρυνση. Οι φυσικοί νόμοι λοιπόν, που έχουν αποδειχτεί περίτρανα ότι ισχύουν, είναι ανεξάρτητοι από τις συμβάσεις που κάνουμε εμείς για να μας διευκολύνουν τις πράξεις. Δοκιμάστε να λύσετε την ίδια άσκηση με τον άξονα ψ να κοιτάει προς τα πάνω.



Σχήμα 2: Καμπύλη πτώσης ποτηριού

Άσκηση 3

Γνωρίζετε ότι πολύ πολύ μικρά σωματίδια ή οργανισμοί, όπως οι ιοί, είναι αόρατοι στο ανθρώπινο μάτι, ακόμα και με τη χρήση ενός κοινού μικροσκοπίου. Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο μπορεί να καταστήσει ορατούς τέτοιους οργανισμούς, χρησιμοποιώντας ακτίνες ηλεκτρονίων αντί για ακτίνες φωτός. Οι “φακοί” ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου αποτελούνται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που ελέγχουν την ακτίνα ηλεκτρονίων. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας εφαρμογής, θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο που ταξιδεύει προς την αρχή ενός συστήματος αναφοράς και με κατεύθυνση επάνω στον x -άξονα (αλλά σκεφτείτε το ως κίνηση σε επίπεδο xy) με αρχική ταχύτητα

$$\vec{v} = v_{in}\vec{i}$$

Όταν περνάει από την περιοχή του x -άξονα που ξεκινάει από το $x = 0$ (οπότε και θεωρούμε ότι αρχίζουμε να το μελετάμε) ως το $x = d$ το ηλεκτρόνιο υφίσταται επιτάχυνση

$$\vec{a} = \alpha_x\vec{i} + \alpha_y\vec{j}$$

Όπου α_x και α_y σταθερές. Θεωρώντας

$$u_i = 1.8 \cdot 10^7 m/s$$

$$\alpha_x = 8 \cdot 10^{14} m/s^2$$

$$\alpha_y = 1.6 \cdot 10^{15} m/s^2$$

Για τη θέση $x = d = 0.01m$ να βρεθούν:

(α') Η θέση του ηλεκτρονίου στο xy επίπεδο.

(β') Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε μορφή διανύσματος.

(γ') Το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου.

(δ') Η κατεύθυνση της ταχύτητας του ηλεκτρονίου. (δηλ. η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x).

Λύση:

Πριν ξεκινήσουμε την επίλυση καλό είναι να δούμε πρώτα την κίνηση στον κάθε άξονα:

- Άξονας x : Το σώμα εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση. Άρα θα ισχύουν:

$$x(t) = x_0 + u_{0x}t + \frac{1}{2}\alpha_x t^2 \iff x(t) = u_{in}t + \frac{1}{2}\alpha_x t^2 \quad (10)$$

$$u_x(t) = u_{0x} + \alpha_x t \iff u_x(t) = u_{in} + \alpha_x t \quad (11)$$

Κάνουμε αντικατάσταση τις σταθερές που μας δίδονται απ' την εκφώνηση:

$$x(t) = 1.8 \cdot 10^7 t + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{14} t^2 \quad (12)$$

$$u_x(t) = 1.8 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^{14} t \quad (13)$$

- Άξονας y : Το σώμα εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση. Άρα θα ισχύουν:

$$y(t) = y_0 + u_{0y}t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \iff y(t) = \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \quad (14)$$

$$u_y(t) = u_{0y} + \alpha_y t \iff u_y(t) = \alpha_y t \quad (15)$$

Ομοίως με πριν:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot 1.6 \cdot 10^{15} t^2 \quad (16)$$

$$u_y(t) = 1.6 \cdot 10^{15} t \quad (17)$$

(α') Θέλουμε τη θέση του σωματιδίου όταν $x = d = 0.01m$, άρα θα βρούμε πρώτα τη χρονική στιγμή (t_d) που περνάει από το $x = d$ μέσω της σχέσης (12):

$$0.01 = 1.8 \cdot 10^7 t_d + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{14} t_d^2$$

$$t_d = 5.5 \cdot 10^{-10} s \text{ or } t_d = -4.5 \cdot 10^{-8} s$$

Όπου φυσικά θα κρατήσουμε τη θετική τιμή γιατί μετράμε χρόνο.

Άρα τώρα μπορούμε να βρούμε και τη θέση του σωματιδίου στον y άξονα χρησιμοποιώντας της σχέση (13) και $t = t_d$:

$$y(5.5 \cdot 10^{-10}) = \frac{1}{2} \cdot 1.6 \cdot 10^{15} \cdot 5.5^2 \cdot 10^{-20}$$

$$y(5.5 \cdot 10^{-10}) = 2.42 \cdot 10^{-4} m$$

Διάνυσμα θέσης για $t = 5.5 \cdot 10^{-10} s$:

$$\vec{r}(5.5 \cdot 10^{-10}) = \vec{i} \cdot 0.01 + \vec{j} \cdot 2.42 \cdot 10^{-4} m$$

(β') Για την ταχύτητα αρκεί να αντικαταστήσουμε $t = t_d$ στις σχέσεις (13) και (17) :

$$u_x(5.5 \cdot 10^{-10}) = 1.8 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^{14} \cdot 5.5 \cdot 10^{-10} \iff u_x(5.5 \cdot 10^{-10}) = 1.844 \cdot 10^7 m/s$$

$$u_y(5.5 \cdot 10^{-10}) = 1.6 \cdot 10^{15} \cdot 5.5 \cdot 10^{-10} \iff u_y(5.5 \cdot 10^{-10}) = 8.8 \cdot 10^5 m/s$$

Διάνυσμα ταχύτητας για $t = 5.5 \cdot 10^{-10} s$:

$$\vec{u}(5.5 \cdot 10^{-10}) = \vec{i} \cdot 1.844 \cdot 10^7 + \vec{j} \cdot 8.8 \cdot 10^5 m/s$$

(γ') Μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας για $t = 5.5 \cdot 10^{-10} s$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1.844 \cdot 10^7)^2 + (8.8 \cdot 10^5)^2} = 1.85 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

(δ') Κατεύθυνση της ταχύτητας για $t = 5.5 \cdot 10^{-10} s$:

$$\tan(\theta) = \frac{u_y}{u_x} = \frac{8.8 \cdot 10^5}{1.844 \cdot 10^7} \approx 0.35$$

$$\tan^{-1}(0.35) \approx 2.73^\circ$$

Άσκηση 4

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{r} = (t^2 + t)\vec{i} + (3t - 2)\vec{j} \quad (18)$$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω διανύσματα και τα μέτρα τους, για τη χρονική στιγμή $t = 2s$:

(α') Ταχύτητα

(β') Επιτάχυνση

Λύση:

(α')

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} = \vec{i} \frac{d}{dt}(t^2 + t) + \vec{j} \frac{d}{dt}(3t - 2)$$

$$\vec{u} = \vec{i}(2t + 1) + \vec{j} 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(2t + 1)^2 + 3^2}$$

Άρα για $t = 2s$ έχω:

$$u(\vec{2}) = \vec{i}(2 \cdot 2 + 1) + \vec{j}3 = \vec{i}5 + \vec{j}3 \text{ m/s}$$

$$\|u(\vec{2})\| = \sqrt{(2 \cdot 2 + 1)^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.8 \text{ m/s}$$

(β')

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} = \vec{i} \frac{d}{dt}(2t + 1) + \vec{j} \frac{d}{dt}(3)$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} \text{ m/s}^2$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2} = 2 \text{ m/s}^2$$

Όπου βλέπουμε ότι η επιτάχυνση δεν έχει κάποια χρονική εξάρτηση. Άρα και για τη χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει $t = 2 \text{ s}$ θα έχει την τιμή 2 m/s^2 με φορά προς τη θετική φορά του οριζόντιου άξονα.

Άσκηση 5

Έχετε τα παρακάτω ερωτήματα:

- (α') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε μία μπάλα κατακόρυφα ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50m$;
- (β') Πόσο χρόνο βρίσκεται στον αέρα μέχρι να επιστρέψει στο χέρι μας;
- (γ') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε ένα ψυγείο (!) κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε μέγιστο ύψος $50 m$ από το έδαφος; Πόσο διαφέρει η απάντησή σας από το (1) ερώτημα;
Δίνεται $g = 10 m/s^2$

Λύση:

- (α') Η μπάλα θα εκτελέσει μονοδιάστατη κίνηση στον κατακόρυφο άξονα. Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση καθώς η επιτάχυνση της βαρύτητας την επιβραδύνει.
Μέγιστο ύψος τι σημαίνει; Σημαίνει ότι θα φτάσει μέχρι εκεί και θα σταματήσει.
Άρα γνωρίζουμε ότι η μέγιστη απομάκρυνση της μπάλας θα είναι το μέγιστο ύψος:

$$y_{max}(t = t_m) = h = 50m$$

Και γνωρίζουμε επίσης ότι θα φτάσει έως εκεί και θα σταματήσει. Άρα

$$v(t = t_m) = 0$$

όπου t_m η χρονική στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία στις σχέσεις της Ευθύγραμμης Ομαλά Επιβραδυνόμενης Κίνησης έχω:

$$0 = u_0 - 10t_m \iff t_m = \frac{u_0}{10} \quad (19)$$

$$y = u_0 t_m - \frac{1}{2} 10 t_m^2 \quad (20)$$

Χρησιμοποιώντας την (19) στην (20) έχω :

$$\frac{u_0^2}{10} - \frac{1}{2} 10 \frac{u_0^2}{100} = 50 \iff u_0 = 10\sqrt{10} m/s$$

Όπου προφανώς κράτησα τη θετική ρίζα. Μπορώ να υπολογίσω και το χρόνο που χρειάστηκε η μπάλα να φτάσει στο μέγιστο ύψος μέσω της (19), αφού τώρα γνωρίζω την αρχική ταχύτητα:

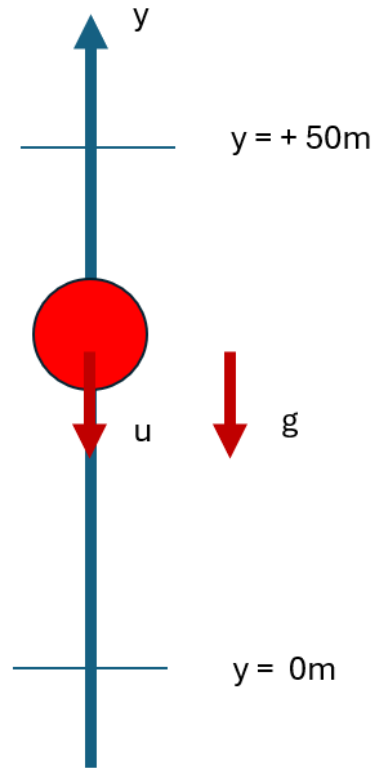
$$t_m = \sqrt{10} s$$

- (β') Ο συνολικός χρόνος που θα βρίσκεται η μπάλα στον αέρα θα είναι όσος ο χρόνος που χρειάστηκε να φτάσει στο μέγιστο ύψος t_m συν το χρόνο που θα χρειαστεί να ξαναπέσει.
Στο κατέβασμα η μπάλα κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα! Βρίσκεται ήδη στην απομάκρυνση $y = +50m$.
Η επιτάχυνση της βαρύτητας τώρα επιταχύνει την κίνηση!
Άρα αν ορίσουμε το χρόνο t_s για να φτάσει από μέγιστο σημείο στο χέρι μας ξανά θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$y = y_0 + u_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$u(t) = u_0 - g t$$

Πριν αντικαταστήσω τις αρχικές και τελικές συνθήκες ας μείνουμε λίγο στο γεγονός γιατί οι σχέσεις έχουν αυτό το " - " και όχι " + " όπως γνωρίζουμε στην επιταχυνόμενη κίνηση. Το παρακάτω σχήμα θα μας βοηθήσει:



Σχήμα 3: Κατακόρυφη κίνηση μπάλας.

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα με την επιτάχυνση κατά την κάθοδο έχουν την ίδια φορά, όμως αντίθετη με τη φορά που έχουμε θέσει τους άξονες. Μπορούμε προφανώς για το δεύτερο μισό της άσκησης να θέσουμε τον άξονα προς τα κάτω και να έχουμε τις σχέσεις με θετικό πρόσημο. Σε κάθε περίπτωση θέλει προσοχή, αλλά στο τέλος πρέπει να μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Προχωράμε λοιπόν θέτοντας

$$u_0 = 0$$

$$y(t_s) = 0$$

$$y_0 = +50m$$

Έχουμε:

$$0 = 50 - \frac{1}{2} 10 t_s^2 \iff t_s = \sqrt{10}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος που βρισκόταν η μπάλα στον αέρα:

$$t_{all} = t_m + t_s = 2\sqrt{10} \text{ s}$$

(γ') Για να απαντήσω το ερώτημα, μπορώ προφανώς να κάνω τις ίδιες πράξεις με παραπάνω. Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση στην άνοδο. Στη συνέχεια Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη στην κάθοδο και να βρω τα ίδια νούμερα. Γιατί όμως; Τα δύο σώματα που διαφέρουν μόνο; Μα φυσικά στη μάζα. Προφανώς

$$M_{fridge} \gg m_{ball}$$

Βλέπουμε όμως ότι οι εξισώσεις μας είναι ανεξάρτητες! από τη μάζα των σωμάτων!