

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

Ηλεκτρισμός

Ηλεκτρικό Ρεύμα

Πυκνωτής

Ηλεκτρική Αντίσταση

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος

selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:

12/12/2025

Τυπολόγιο

Ηλεκτρικό Ρεύμα

Ορισμός έντασης ρεύματος:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Πυκνωτής

Χωρητικότητα πυκνωτή:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2)$$

Ισοδύναμη χωρητικότητα σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right) \quad (3)$$

Ισοδύναμη χωρητικότητα σε παράλληλη σύνδεση:

$$C_{eq} = \sum_i C_i \quad (4)$$

Ηλεκτρική Αντίσταση

Νόμος του Ohm:

$$I = \frac{V}{R} \quad (5)$$

Ισοδύναμη αντίσταση σε σειρά:

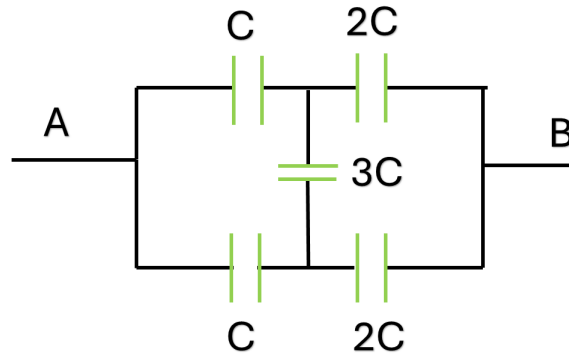
$$R_{eq} = \sum_i R_i \quad (6)$$

Ισοδύναμη αντίσταση σε παράλληλη σύνδεση:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right) \quad (7)$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή που μπορεί να αντικαταστήσει την παρακάτω διάταξη πυκνωτών.



Σχήμα 1: Διάταξη πυκνωτών για υπολογισμό ισοδύναμης χωρητικότητας.

Λύση:

Θεωρούμε ότι στα άκρα A και B εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού V . Λόγω συμμετρίας, τα δύο ενδιάμεσα σημεία (πάνω και κάτω κλαδί) έχουν το ίδιο δυναμικό. Έστω ότι τα ονομάζουμε Γ (πάνω) και Δ (κάτω). Τότε:

$$V_{\Gamma} = V_{\Delta} \implies \Delta V_{3C} = V_{\Gamma} - V_{\Delta} = 0 \quad (8)$$

Άρα ο πυκνωτής $3C$ δεν φορτίζεται (δεν «βλέπει» διαφορά δυναμικού) και μπορεί να παραλειφθεί από τον υπολογισμό της ισοδύναμης χωρητικότητας. Μένουν λοιπόν δύο κλαδιά μεταξύ A και B , το καθένα αποτελούμενο από δύο πυκνωτές σε σειρά: C και $2C$. Για τα κλαδιά σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{\text{σειρ}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{1}{C} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2C} \implies C_{\text{σειρ}} = \frac{2}{3}C \quad (9)$$

Κάθε κλαδί ισοδυναμεί λοιπόν με πυκνωτή

$$C_{\text{κλαδιού}} = \frac{2}{3}C \quad (10)$$

Τα δύο κλαδιά είναι μεταξύ των ίδιων σημείων A και B , άρα είναι σε **παράλληλη** σύνδεση, οπότε:

$$C_{\text{ολ}} = C_{\text{πάνω}} + C_{\text{κάτω}} = \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}C = \frac{4}{3}C \quad (11)$$

Άρα τελικά

$$\boxed{C_{\text{ισοδ}} = \frac{4}{3}C} \quad (12)$$

Άσκηση 2

Φορτίζουμε έναν πυκνωτή άγνωστης χωρητικότητας C_1 σε διαφορά δυναμικού $\Delta V_1 = 100 \text{ V}$ και κατόπιν αποσυνδέουμε τη μπαταρία. Στη συνέχεια τον συνδέουμε παράλληλα με έναν αφόρτιστο πυκνωτή $C_2 = 100 \mu\text{F}$. Μετά τη σύνδεση, η κοινή διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι $\Delta V_f = 30 \text{ V}$. Να βρεθεί η άγνωστη χωρητικότητα C_1 .

Λύση:

Αρχικά, ο φορτισμένος πυκνωτής C_1 έχει φορτίο

$$Q_{\alpha\phi\chi} = C_1 \Delta V_1 = C_1 \cdot 100 \quad (13)$$

Μετά τη σύνδεση με τον αφόρτιστο πυκνωτή C_2 , το συνολικό φορτίο διατηρείται (το σύστημα είναι απομονωμένο) και κατανέμεται στους δύο πυκνωτές. Το τελικό φορτίο είναι:

$$Q_{\text{τελ}} = (C_1 + C_2) \Delta V_f = (C_1 + C_2) \cdot 30 \quad (14)$$

Άρα, από τη διατήρηση του φορτίου:

$$Q_{\alpha\phi\chi} = Q_{\text{τελ}} \implies 100C_1 = 30(C_1 + C_2) \quad (15)$$

Λύνουμε ως προς C_1 :

$$100C_1 = 30C_1 + 30C_2 \iff 100C_1 - 30C_1 = 30C_2 \iff C_1 = \frac{30}{70}C_2 = \frac{3}{7}C_2 \quad (16)$$

Με $C_2 = 100 \mu\text{F}$:

$$C_1 = \frac{3}{7} \cdot 100 \mu\text{F} \approx 42.9 \mu\text{F}. \quad (17)$$

Δηλ.

$$\boxed{C_1 \approx 43 \mu\text{F}} \quad (18)$$

Άσκηση 3 — Φόρτιση και επανασύνδεση πυκνωτών - προχωρημένο θέμα

Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C είναι αρχικά φορτισμένος με φορτίο Q . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τον συνδέουμε στα άκρα ενός αντιστάτη R . Θέλουμε να βρούμε πώς θα μεταβληθεί το φορτίο $q(t)$ και πώς το ρεύμα $i(t)$ στο κύκλωμα.

Λύση:

Κατά την εκφόρτιση ο πυκνωτής δημιουργεί τάση:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (19)$$

Η ίδια αυτή τάση εμφανίζεται στα άκρα της αντίστασης, αλλά με αντίθετο πρόσημο, επειδή ο πυκνωτής προσπαθεί να σπρώξει φορτίο μέσα από την αντίσταση:

$$V_R = -V_C \quad (20)$$

Αλλά η τάση στην αντίσταση είναι:

$$V_R = i(t)R \quad (21)$$

Και το ρεύμα σχετίζεται με το φορτίο:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (22)$$

Άρα:

$$R \frac{dq}{dt} = -\frac{q(t)}{C} \quad (23)$$

Διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{-1}{RC} q \iff \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \quad (24)$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\int_Q^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t d\tilde{t} \quad (25)$$

Μετά την ολοκλήρωση:

$$\ln\left(\frac{q(t)}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \quad (26)$$

Λαμβάνοντας εκθετική μορφή:

$$q(t) = Q e^{-t/(RC)} \quad (27)$$

Άρα το φορτίο του εκφορτιζόμενου πυκνωτή φθίνει εκθετικά με χρονική σταθερά RC . Το ρεύμα ορίζεται ως

$$i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (28)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση για το φορτίο:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(Q e^{-t/(RC)} \right) = -\frac{Q}{RC} e^{-t/(RC)}. \quad (29)$$

Αν γράψουμε $V_0 = Q/C$, τότε

$$i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (30)$$

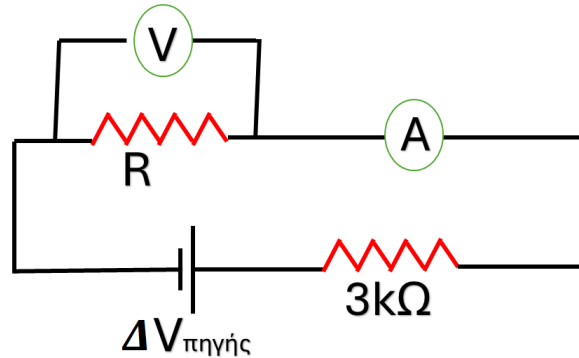
Άσκηση 4

Στην παρακάτω διάταξη, η ένδειξη του ιδανικού βολτόμετρου είναι 6 V και η ένδειξη του ιδανικού αμπερομέτρου είναι 3 mA . Να βρεθούν:

(α') η τιμή της R

(β') η τάση της πηγής $\Delta V_{\text{πηγής}}$

(γ') η τάση στα άκρα του αντιστάτη $3\text{ k}\Omega$



Σχήμα 2: Κύκλωμα για την Άσκηση 4.

Λύση:

Το βολτόμετρο είναι ιδανικό, οπότε δεν διαρρέεται από ρεύμα. Άρα όλο το ρεύμα που δείχνει το αμπερόμετρο ($I = 3\text{ mA}$) διαρρέει τόσο την R όσο και την αντίσταση $3\text{ k}\Omega$ καθώς είναι σειριακά συνδεδεμένες.

(α') Από τον νόμο του Ohm στο τμήμα της R :

$$\Delta V_R = IR \implies R = \frac{\Delta V_R}{I} = \frac{6\text{ V}}{3 \cdot 10^{-3}\text{ A}} = 2 \cdot 10^3\text{ }\Omega = 2\text{ k}\Omega \quad (31)$$

(β') Οι δύο αντιστάτες είναι σε σειρά, άρα το ισοδύναμο της διάταξης είναι

$$R_{\text{ολ}} = R + 3\text{ k}\Omega = 2\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega = 5\text{ k}\Omega \quad (32)$$

Η τάση της πηγής θα είναι:

$$\Delta V_{\text{πηγής}} = IR_{\text{ολ}} = 3 \cdot 10^{-3}\text{ A} \cdot 5 \cdot 10^3\text{ }\Omega = 15\text{ V} \quad (33)$$

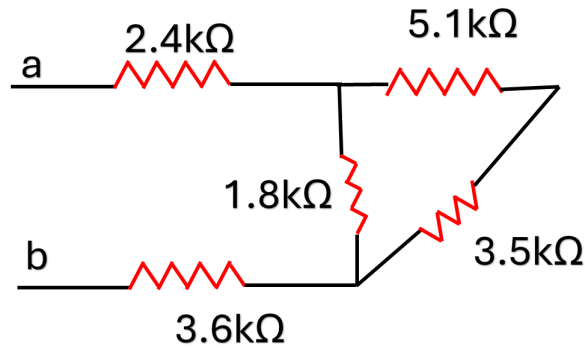
(γ') Η τάση στα άκρα της αντίστασης $3\text{ k}\Omega$:

$$\Delta V_{3\text{ k}\Omega} = I \cdot 3\text{ k}\Omega = 3 \cdot 10^{-3}\text{ A} \cdot 3 \cdot 10^3\text{ }\Omega = 9\text{ V} \quad (34)$$

Πράγματι ισχύει $\Delta V_{\text{πηγής}} = \Delta V_R + \Delta V_{3\text{ k}\Omega} = 6\text{ V} + 9\text{ V} = 15\text{ V}$.

Άσκηση 5

Στο κύκλωμα της παρακάτω εικόνας να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{ab} μεταξύ των σημείων a και b .



Σχήμα 3: Διάταξη αντιστατών μεταξύ των κόμβων a και b .

Λύση:

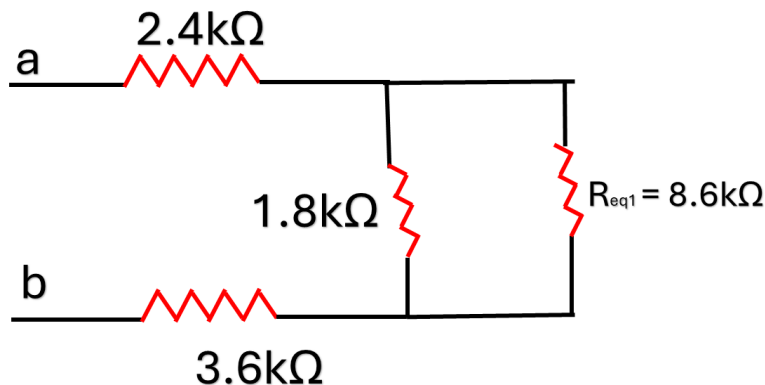
Πρώτα παρατηρούμε ότι οι αντιστάτες $5.1\text{ k}\Omega$ και $3.5\text{ k}\Omega$ είναι σε **σειρά**, άρα η ισοδύναμη αντίστασή τους είναι

$$R_{\text{σειρ}} = 5.1\text{ k}\Omega + 3.5\text{ k}\Omega = 8.6\text{ k}\Omega. \quad (35)$$

Αυτή η αντίσταση $R_{\text{σειρ}}$ βρίσκεται **παράλληλα** με τον αντιστάτη $1.8\text{ k}\Omega$. Η ισοδύναμη αντίσταση αυτών των δύο αντιστάσεων ορίζεται ως R_{eq1} και είναι:

$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{1.8\text{ k}\Omega} + \frac{1}{8.6\text{ k}\Omega} \Rightarrow R_{eq1} = \frac{1.8 \cdot 8.6}{1.8 + 8.6}\text{ k}\Omega \simeq 1.49\text{ k}\Omega. \quad (36)$$

Η παραπάνω απλοποίηση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

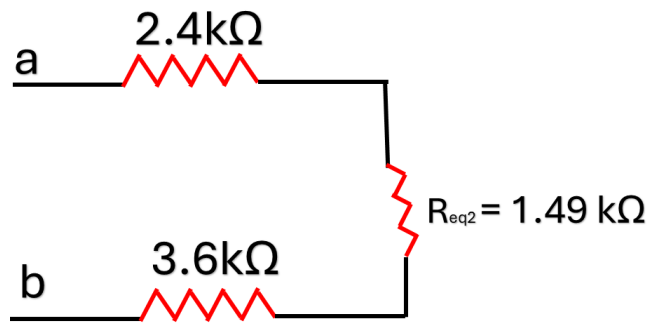


Σχήμα 4: Αντιστάτες $5.1\text{ k}\Omega$ και $3.5\text{ k}\Omega$ σε σειρά, σε παράλληλη σύνδεση με τον $1.8\text{ k}\Omega$.

Στη συνέχεια, οι αντιστάτες $2.4\text{ k}\Omega$, R_{eq1} και $3.6\text{ k}\Omega$ είναι συνδεδεμένοι **σε σειρά** μεταξύ των σημείων a και b . Η νέα ισοδύναμη αντίσταση ορίζεται ως R_{eq2} :

$$R_{eq2} = 2.4\text{ k}\Omega + R_{eq1} + 3.6\text{ k}\Omega = 2.4\text{ k}\Omega + 1.49\text{ k}\Omega + 3.6\text{ k}\Omega \simeq 7.49\text{ k}\Omega. \quad (37)$$

Η ενδιάμεση μορφή του κυκλώματος φαίνεται στο σχήμα 5.

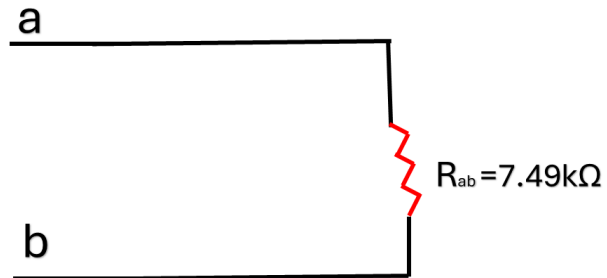


Σχήμα 5: Ισοδύναμο κύκλωμα με αντίσταση R_{eq2} σε σειρά.

Τέλος, η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των σημείων a και b είναι:

$$R_{ab} = R_{eq2} \simeq 7.49 \text{ k}\Omega. \quad (38)$$

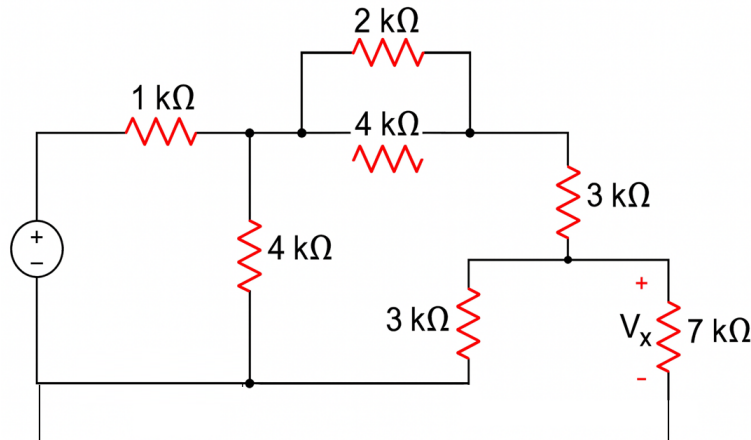
και φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6: Τελικό ισοδύναμο κύκλωμα με αντίσταση R_{ab} .

Άσκηση 6

Να βρεθεί η συνολική αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος.

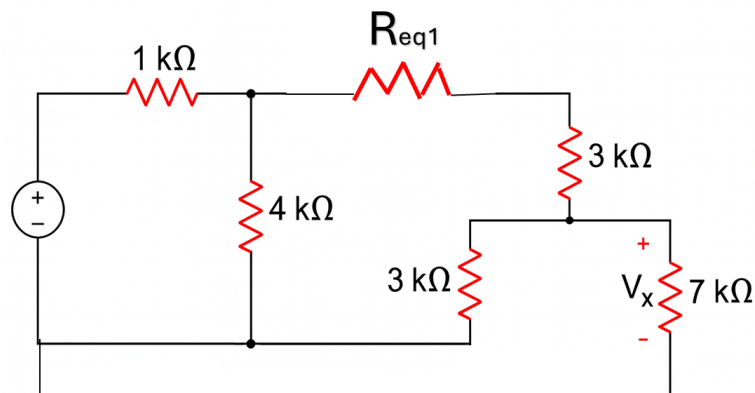


Σχήμα 7: Κύκλωμα άσκησης 6.

Λύση:

Βήμα 1: Με μια πρώτη ματιά βλέπουμε ότι οι αντιστάτες $R = 2\text{ k}\Omega$ και $R = 4\text{ k}\Omega$ βρίσκονται σε **παράλληλη σύνδεση** (έχουν δύο άκρα κοινά), άρα έχουν ίδια τάση.

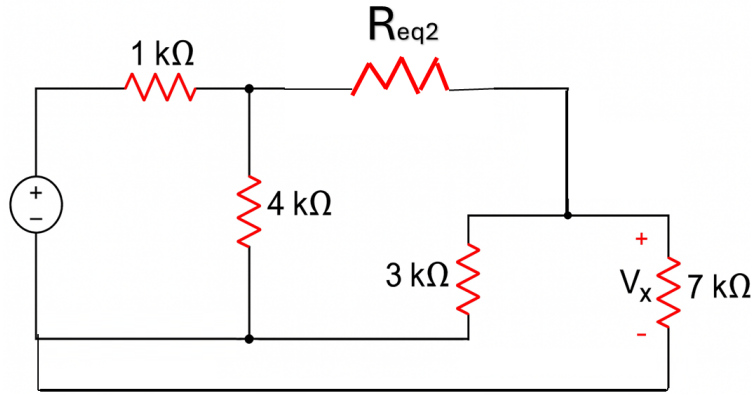
$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{2\text{ k}\Omega} + \frac{1}{4\text{ k}\Omega} \Rightarrow R_{eq1} = \frac{(2)(4)}{2+4}\text{ k}\Omega = \frac{8}{6}\text{ k}\Omega = \frac{4}{3}\text{ k}\Omega \quad (39)$$



Σχήμα 8: Παράλληλη σύνδεση των αντιστατών $2\text{ k}\Omega$ και $4\text{ k}\Omega$.

Βήμα 2: Η R_{eq1} είναι **σε σειρά** με τον αντιστάτη $3\text{ k}\Omega$

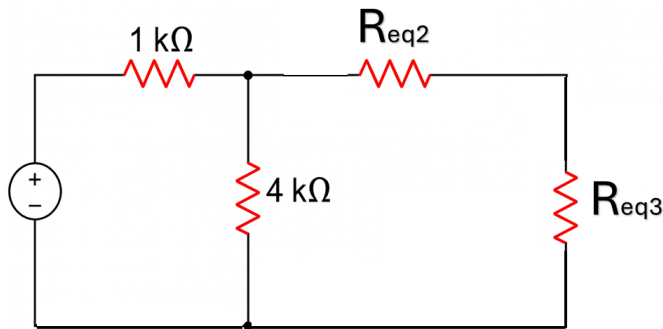
$$R_{eq2} = \frac{4}{3} + 3 \Leftrightarrow R_{eq2} = \frac{13}{3}\text{ k}\Omega \quad (40)$$



Σχήμα 9: Κύκλωμα μετά την αντικατάσταση του R_{eq1} .

Βήμα 3: Πάμε να εστιάσουμε στους αντιστάτες των $3k\Omega$ και $7k\Omega$. Προσέξτε ότι το πάνω τους άκρο συνδέεται με τον R_{eq2} . Το άλλο άκρο και των δύο συνδέεται κατευθείαν με την πηγή, χωρίς να παρεμβάλλεται κάποιο άλλο στοιχείο. Με άλλα λόγια αν συνδέαμε ένα βολτόμετρο θα βλέπαμε ίδια τάση. Άρα οι δύο αντιστάτες είναι παράλληλοι:

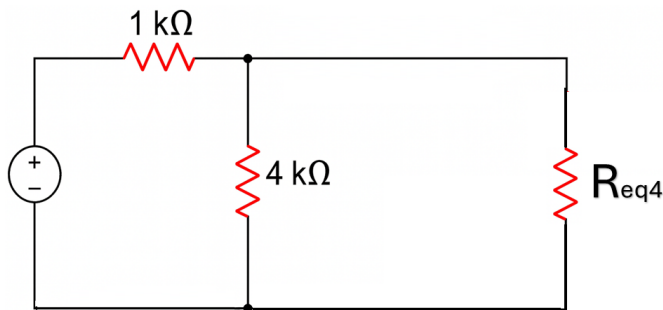
$$\frac{1}{R_{eq3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \Leftrightarrow R_{eq3} = 2.1k\Omega \quad (41)$$



Σχήμα 10: Παράλληλη σύνδεση των αντιστατών $3k\Omega$ και $7k\Omega$.

Βήμα 4: Πολύ εύκολα βλέπουμε τώρα ότι οι R_{eq2} και R_{eq3} είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Άρα:

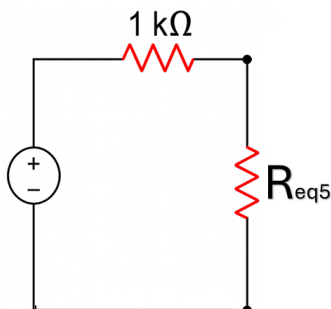
$$R_{eq4} = R_{eq2} + R_{eq3} \Leftrightarrow R_{eq4} = \frac{13}{3} + 2.1 \Leftrightarrow R_{eq4} \approx 6.43k\Omega$$



Σχήμα 11: Κύκλωμα μετά την αντικατάσταση του R_{eq2} .

Βήμα 5: Με τον ίδιο συλλογισμό βλέπουμε ότι η R_{eq4} είναι σε παράλληλη σύνδεση με τον $4k\Omega$.

$$\frac{1}{R_{eq5}} = \frac{1}{R_{eq4}} + \frac{1}{4} \iff R_{eq5} \approx 2.46k\Omega \quad (42)$$



Σχήμα 12: Τελική σειριακή σύνδεση αντιστατών.

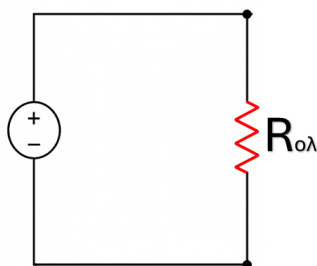
Βήμα 6: Τέλος, οι αντιστάσεις $1k\Omega$, R_{eq5} είναι **σε σειρά**.

$$R_{o\lambda} = R_{eq5} + 1 \iff R_{o\lambda} = 1 + 2.46 \quad (43)$$

δηλ.

$R_{o\lambda} \approx 3.46k\Omega$

(44)



Σχήμα 13: Τελικό ισοδύναμο κύκλωμα.