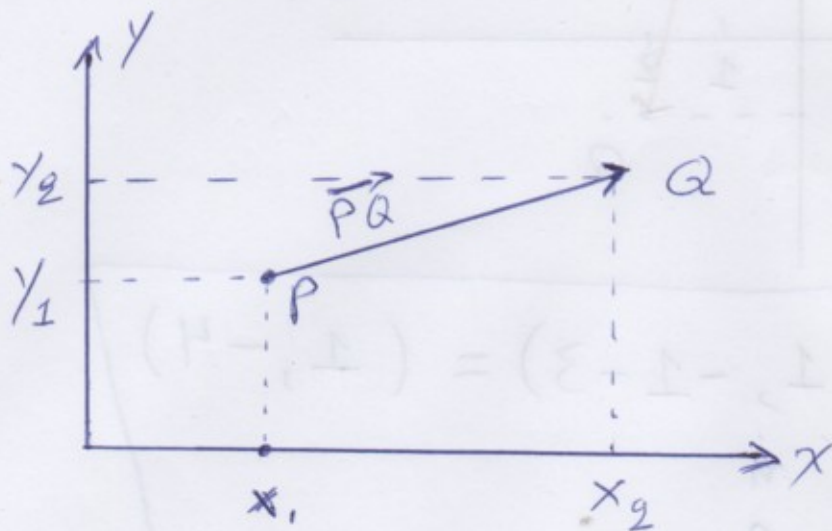


ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Έστω δύο σημεία $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$
τότε το διάνυσμα $\vec{PQ}$ θα οριστεί ως:

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

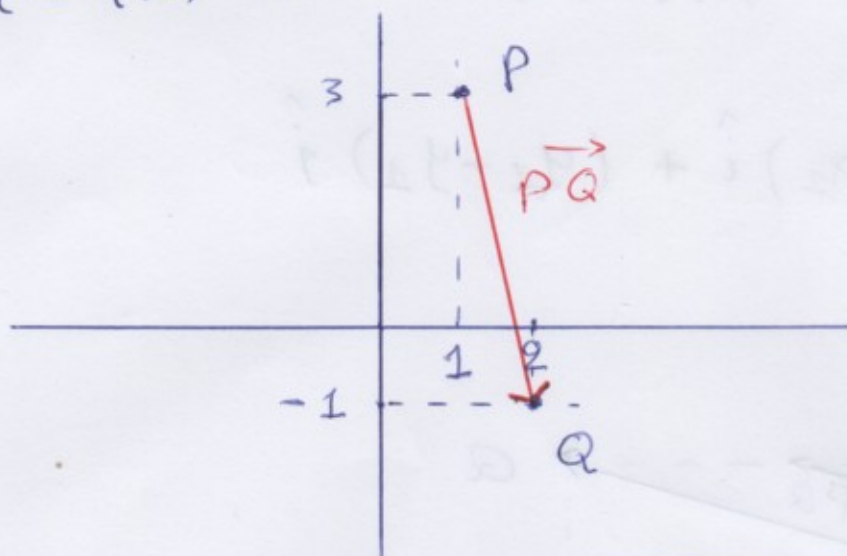


ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ :

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Άσκηση :

$P = (1, 3)$ Να βρεθεί το $\vec{PQ}$
 $Q = (2, -1)$



$$\vec{PQ} = (2 - 1, -1 - 3) = (1, -4)$$

$$\vec{PQ} = \hat{i} - 4\hat{j}$$

Πρόσθεση διανυσμάτων:

$$\vec{u} = (a, b) = a\hat{i} + b\hat{j}, \quad a, b > 0$$

$$\vec{v} = (d, \varepsilon) = d\hat{i} + \varepsilon\hat{j}, \quad d, \varepsilon > 0$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (a+d, b+\varepsilon) = (a+d)\hat{i} + (b+\varepsilon)\hat{j}$$

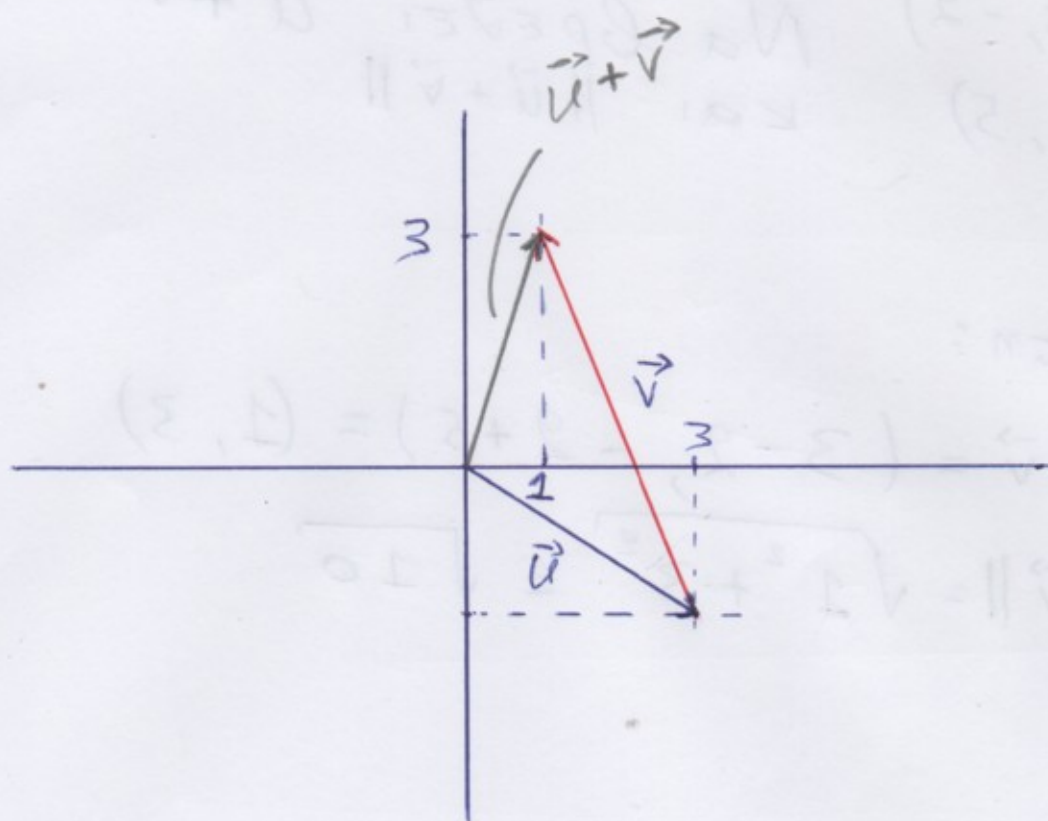
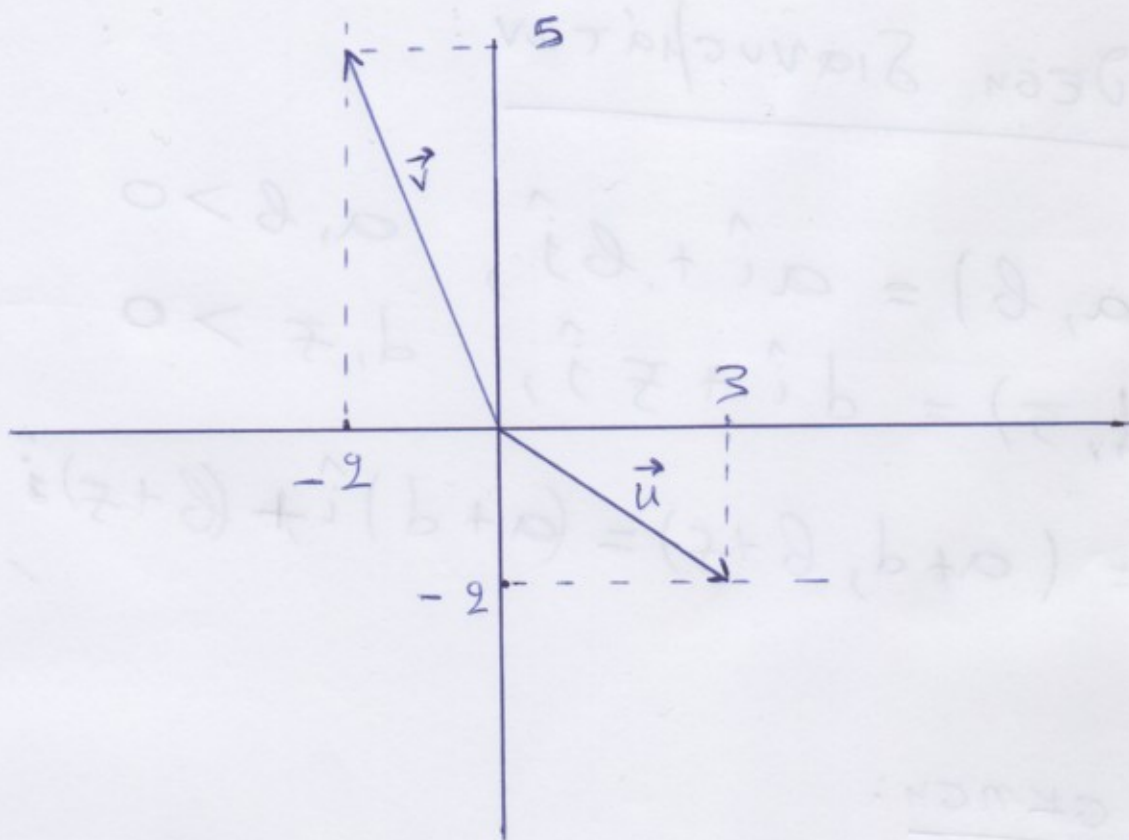
Άσκηση:

$$\begin{array}{ll} \vec{u} = (3, -2) & \text{Να βρεθεί } \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{v} = (-2, 5) & \text{και } \|\vec{u} + \vec{v}\|. \end{array}$$

Λύση:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3-2, -2+5) = (1, 3)$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$



Πολλαπλασιασμός με αριθμό

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$k \vec{u} = (k u_1, k u_2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\begin{aligned} |k \vec{u}| &= \sqrt{(k u_1)^2 + (k u_2)^2} = \\ &= \sqrt{k^2 (u_1^2 + u_2^2)} = k \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \\ &= k |\vec{u}| \end{aligned}$$

Άσκηση:

$$\vec{u} = (3, -2)$$

$$\vec{v} = (-2, 5)$$

Να βρεθούν συνιστώσες και μέτρα των:

a) $3\vec{u}$, b) $-2\vec{v}$, γ) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

$$a) 3\vec{u} = 3(3, -2) = (9, -6)$$

$$|3\vec{u}| = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$$

$$b) -2\vec{v} = -2(-2, 5) = (4, -10)$$

$$|-2\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116}$$

$$d) \quad 2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(3, -2) - 3(-2, 5) =$$

$$= (6, -4) - (-6, 15) =$$

$$= (12, -19)$$

$$|2\vec{u} - 3\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 19^2} = \sqrt{505}$$

Aufgaben:

$$A = (1, 1)$$

$$B = (2, 0)$$

$$C = (-1, 3)$$

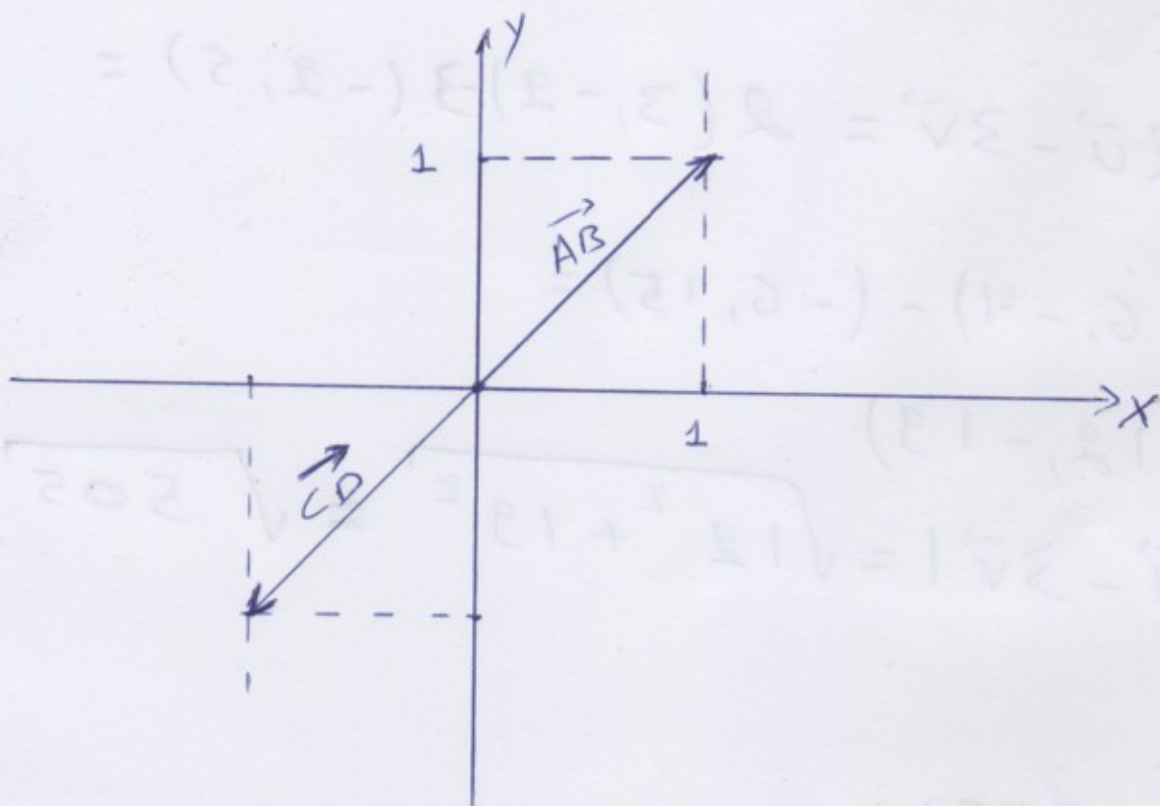
$$D = (-2, 2)$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = ?$$

$$\vec{AB} = (2-1, 0-1) = (1, -1)$$

$$\vec{CD} = (-2-(-1), 2-3) = (-1, -1)$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = (1-1, -1-1) = (0, -2)$$



Answer

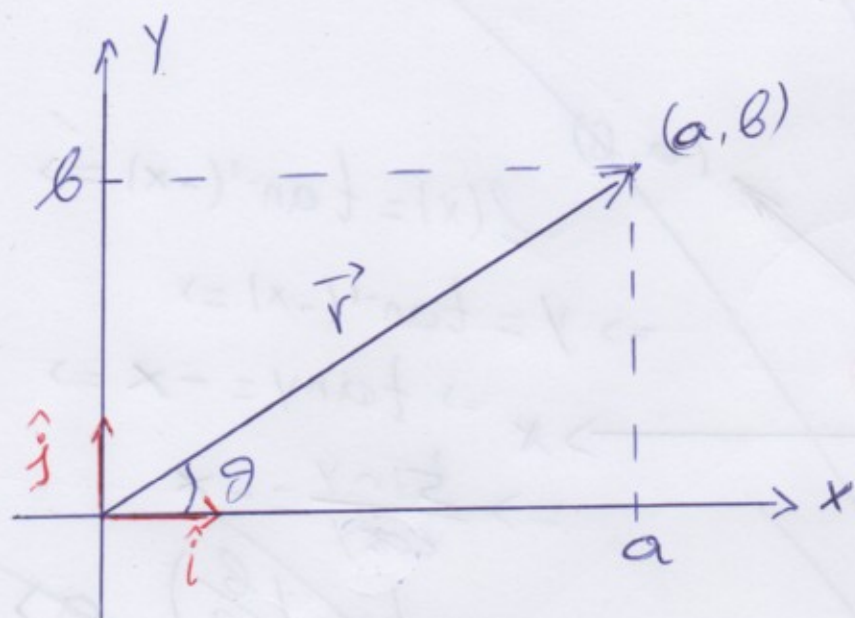
$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{z}$$

$$\begin{aligned} A &= (1, 1) \\ B &= (2, 0) \\ C &= (-1, 3) \\ D &= (-2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2-1, 0-1) = (1, -1) \\ \vec{CD} &= (-2-(-1), 2-3) = (-1, -1) \\ \vec{AB} + \vec{CD} &= (1-1, -1-1) = (0, -2) \end{aligned}$$

Γωρία

$$\vec{r} = (a, b) = a\hat{i} + b\hat{j}$$



$$\tan \vartheta = \frac{b}{a} \Rightarrow \vartheta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), a > 0$$

$$\vartheta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right), a < 0, b \geq 0$$

$$\vartheta = -\pi + \arctan(b/a), a < 0, b < 0$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, a = 0, b > 0$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{2}, a = 0, b < 0$$

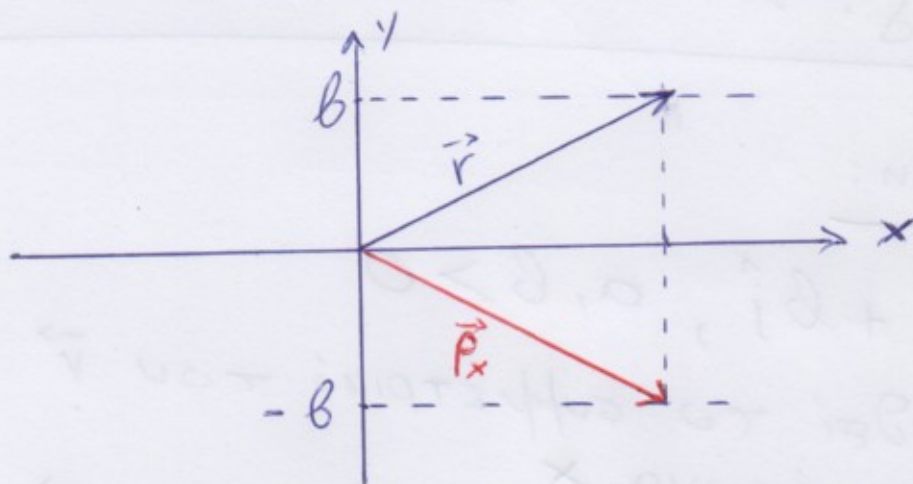
Άσκηση:

$$\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}, \quad a, b > 0$$

- α) Να βρεθεί το συγγετρικό του $\vec{r}$ ως προς τον άξονα x .
- β) Να βρεθεί το συγγετρικό του $\vec{r}$ ως προς τον άξονα y .
- γ) Να βρεθούν οι γωνίες των δύο παραπάνω.

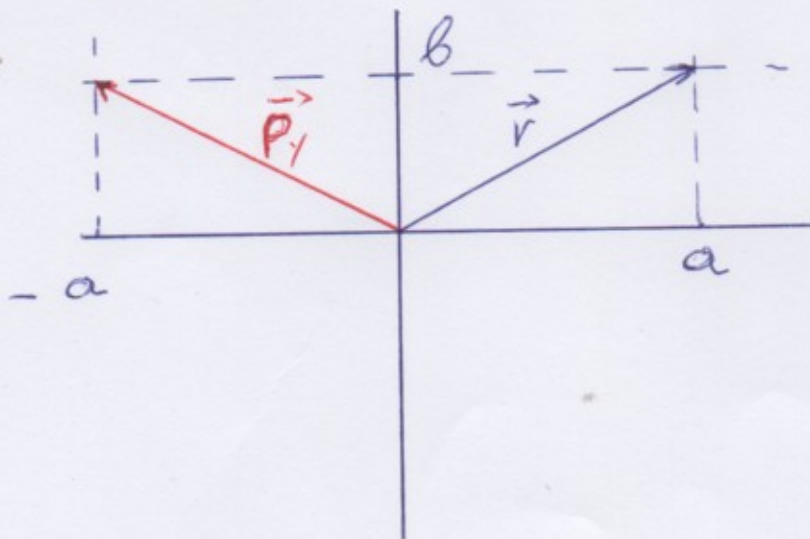
a) Συμμετρικό ως προς x :

Ισο x αντίθετο y : $\vec{p}_x = a\hat{i} - b\hat{j}$



b) Συμμετρικό ως προς y :

Ισο y αντίθετο x : $\vec{p}_y = -a\hat{i} + b\hat{j}$



$$8) \vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}, a, b > 0$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan(b/a)}$$

$$\vec{p}_x = a\hat{i} - b\hat{j} = a\hat{i} + (-b)\hat{j} = A\hat{i} + B\hat{j}$$

$$A \equiv a, B \equiv -b$$

$$B \text{ et } \theta \text{ sont } : A > 0, B < 0$$

$$\text{'Apa: } \tan \theta_x = \frac{B}{A} \Rightarrow \theta_x = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_x = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_x = -\arctan(b/a)}$$

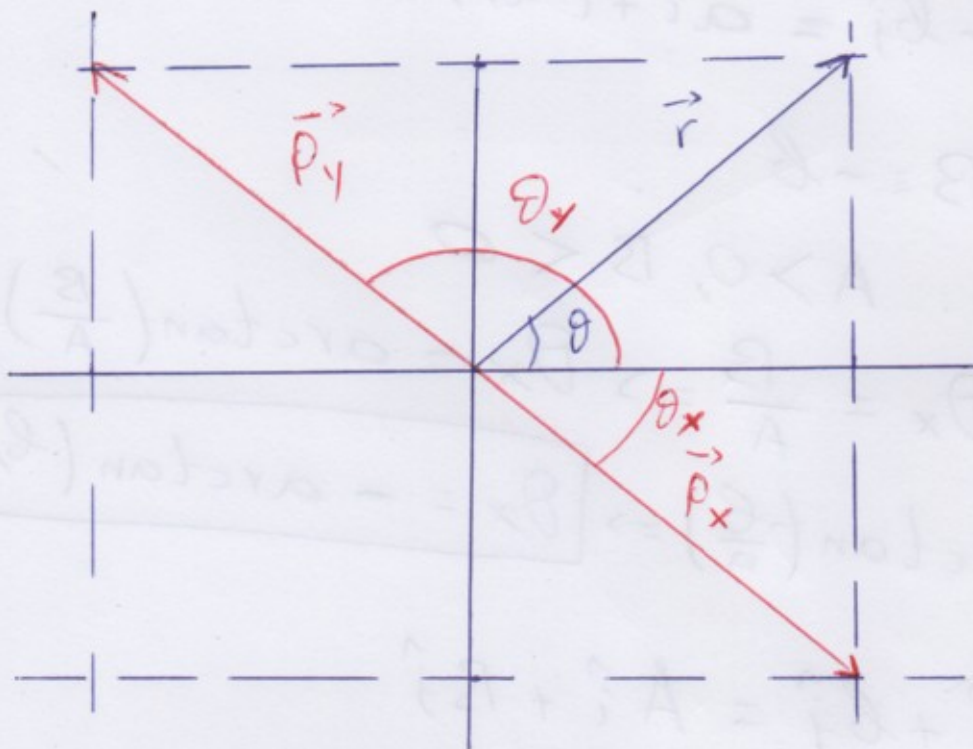
$$\vec{p}_y = -a\hat{i} + b\hat{j} = A\hat{i} + B\hat{j}$$

$$A \equiv -a, B \equiv b, A < 0, B > 0$$

$$\tan \theta_y = \frac{B}{A} \Rightarrow \theta_y = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + \pi$$

$$\boxed{\theta_y = -\arctan(b/a) + \pi}$$

Βλέπουμε: $\theta_x = -\theta$
 $\theta_y = -\theta + \pi$



Θέλουμε να δούμε αν ισχύει : $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$, αν δηλαδή είναι περιττή συνάρτηση.

$$y = \tan^{-1}(-x) \Leftrightarrow \tan(y) = \tan(\tan^{-1}(-x)) \Leftrightarrow \\ \tan(y) = -x$$

Χρησιμοποίησα προφανώς την ιδιότητα αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

$$\tan(y) = -x \Leftrightarrow (-1)\tan(y) = (-1)(-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\tan(y) = x$$

$$x = -\tan(y) \text{ , (1)}$$

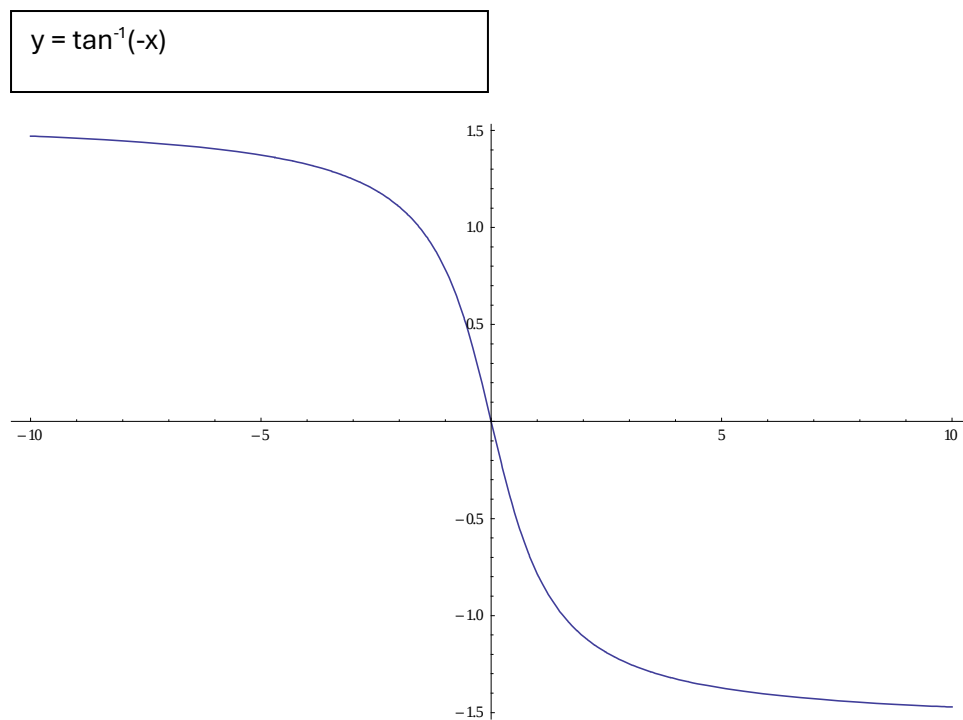
Γνωρίζουμε ότι η $\tan(x)$ είναι περιττή συνάρτηση :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \text{ , (2)}$$

$$\text{Άρα (1),(2) : } x = \tan(-y)$$

Εφαρμόζω πάλι την $\tan^{-1}$ και στα δύο μέρη:

$$\tan^{-1} x = -y \Leftrightarrow y = -\tan^{-1}(x)$$



$$y = \tan^{-1}(x)$$

