ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

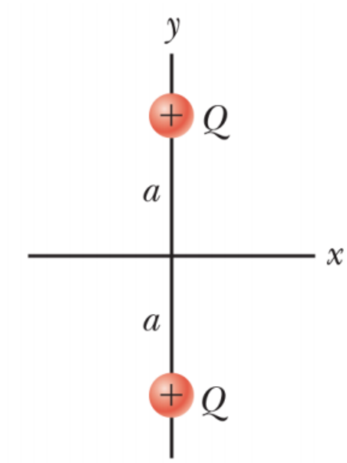
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Άρτεμις Αγιομαυρίτη

Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια

Άσκηση 1.
Δυο σωματίδια με ίδιο φορτίο βρίσκονται αντικρυστά πάνω και κάτω από τον άξονα x, όπως στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(α') Σχεδιάστε, σε μονάδες kQ/a, το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα x στο διάστημα $-3a < x < 3a$.

(β') Θεωρήστε ότι το φορτίο του σωματιδίου που βρίσκεται στο $y = -a$ γίνεται αρνητικό. Σχεδιάστε το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα y στο διάστημα $-4a < y < 4a$.

Λύση:

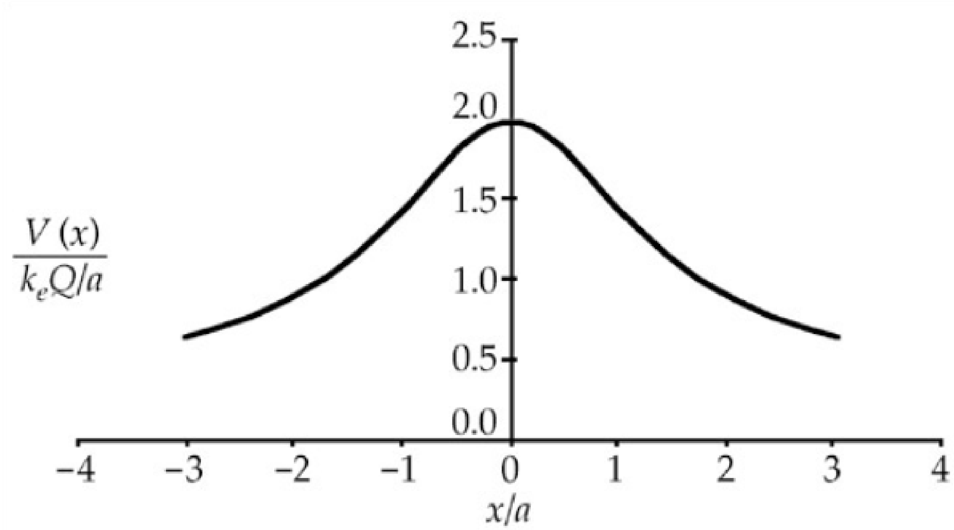
(α') Το δυναμικό από τα δυο φορτία κατά μήκος του άξονα x είναι

$$V(x) = \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + (-a)^2}} \tag{1}$$

$$= \frac{2k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e Q}{a} \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \tag{2}$$

$$\frac{V(x)}{k_e Q/a} = \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \tag{3}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.

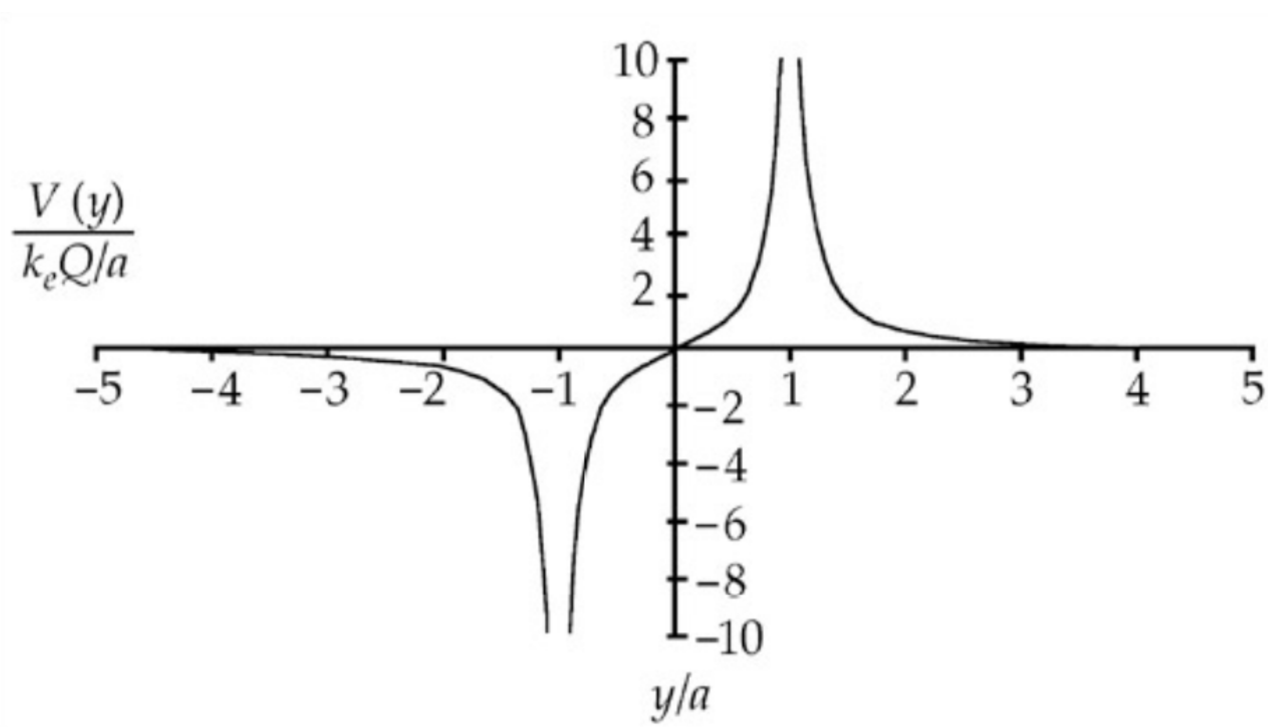


Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 1α.*

(β΄) Το δυναμικό κατά μήκος του y άξονα είναι

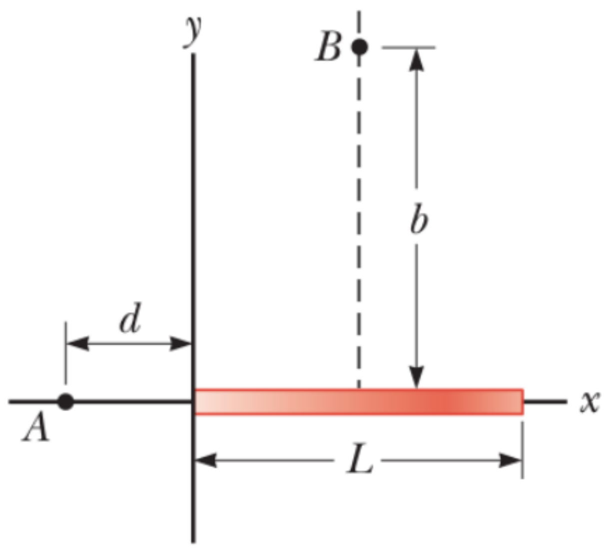
$$\begin{align}
V(x) &= \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{|y-a|} + \frac{-k_e Q}{|y+a|} \tag{4}\\
&= \frac{k_e Q}{a}\Big(\frac{1}{|y/a-1|} - \frac{1}{|y/a+1|}\Big) \tag{5}\\
\frac{V(x)}{k_e Q/a} &= \Big(\frac{1}{|y/a-1|} - \frac{1}{|y/a+1|}\Big) \tag{6}
\end{align}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 1β.*

Άσκηση 2.
Ράβδος μήκους L εκτείνεται κατά μήκος του $x-$άξονα με το αριστερό άκρο της να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, όπως στο Σχήμα 4. Η ράβδος έχει **μη** ομοιόμορφη κατανομή φορτίου $\lambda = ax$, με a μια θετική σταθερά.



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 2.*

(α΄) Ποιές οι διαστάσεις της σταθεράς;

(β΄) Υπολογίστε το δυναμικό στο σημείο Α.

Λύση:

(α΄) Ως γραμμική πυκνότητα φορτίου, η λ έχει μονάδες C/m. Άρα η σταθερά a θα έχει μονάδες C/m^2.

(β΄) Θεωρήστε ένα μικρό κομμάτι της ράβδου στη θέση x και μήκους dx. Το ποσό φορτίου που βρίσκεται σε αυτό είναι $\lambda dx = axdx$. Η απόστασή του από το σημείο Α είναι $d + x$, άρα η συνεισφορά του ηλεκτρικού δυναμικού στο σημείο Α είναι

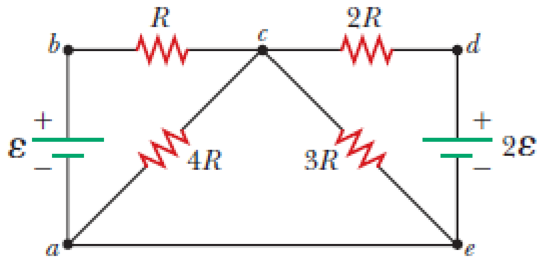
$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{axdx}{d+x} \tag{7}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενικό δυναμικό στο άπειρο, για να βρούμε το δυναμικό στο σημείο Α πρέπει να ολοκληρώσουμε όλες τις συνεισφορές από όλα τα μικρά τμήματα ράβδου, από το $x = 0$ ως το $x = L$. Έτσι,

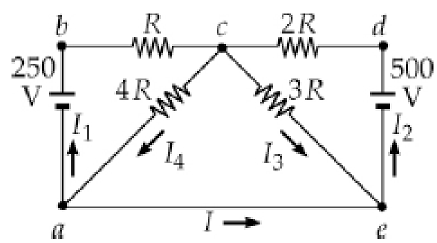
$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{k_e ax}{d+x} dx & (8) \\ &= \int_d^{d+L} \frac{k_e a(u-d)}{u} du & (9) \\ &= k_e a \int_d^{d+L} du - k_e ad \int_d^{d+L} \frac{1}{u} du & (10) \\ &= k_e a(d+L-d) - k_e ad(\ln(d+L) - \ln(d)) & (11) \\ &= k_e a \Big[L - d \ln\Big(1 + \frac{L}{d}\Big)\Big] & (12) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή κάναμε αλλαγή μεταβλητής $u = d + x \Longrightarrow du = dx$, $u_1 = d$, $u_2 = d + L$.

Άσκηση 3.
Βρείτε την κατεύθυνση και την ποσότητα του ρεύματος, για $R = 1.00$ kV και $e = 250$ V, ανάμεσα στο a και στο e στο οριζόντιο καλώδιο στο παρακάτω σχήμα.

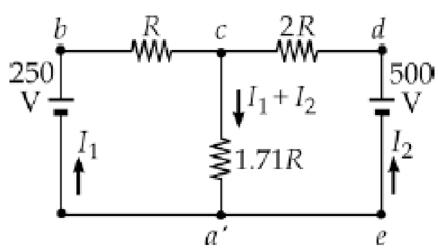


Λύση:
Για τις ακόλουθες κατευθύνσεις των ρευμάτων, το κύκλωμα μας γίνεται όπως στο Σχήμα 5. Συν-



Σχήμα 5: *Σχήμα Άσκησης 3α.*

δυάζοντας τις δύο παράλληλες αντιστάσεις το κύκλωμα μας λαμβάνει την μορφή του Σχήματος 6. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchoff και για τους δύο βρόχους έχουμε



Σχήμα 6: *Σχήμα Άσκησης 3β.*

$$(2.71R)I_1 + (1.71R)I_2 = 250V$$
$$(1.71R)I_1 + (3.71R)I_2 = 500V$$

όπου $R = 1000\Omega$. Επομένως οι λύσεις των δύο εξισώσεων είναι $I_1 = 10.0$ mA και $I_2 = 130.0$ mA. Άρα $V_c - V_a = (I_1 + I_2)(1.71R) = 240V$. Συνεπώς

$$I_4 = \frac{V_c - V_a}{4R} = \frac{240V}{4000\Omega} = 60.0 \text{ mA}$$

Τέλος από τον νόμο του Kirchoff για το σημείο a έχουμε

$$I = I_4 - I_1 = 60.0 \text{ mA} - 10.0 \text{ mA} = +50.0 \text{ mA}$$

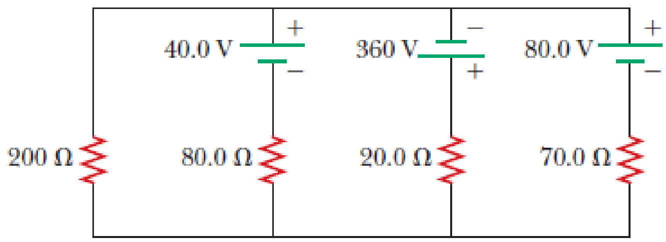
ή $I = 50$ mA από το σημείο a προς το σημείο e.

Άσκηση 4.

Στο κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 7, βρείτε

α) Την ένταση του ρεύματος που διαπερνά την κάθε αντίσταση.

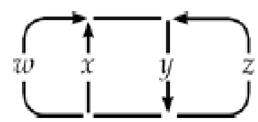
β) Την διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης των 200 Ω.



Σχήμα 7: *Σχήμα Άσκησης 4.*

Λύση:

Το κύκλωμα βάσει των ρευμάτων μπορεί να πάρει την μορφή του Σχήματος 8, όπου $y = w + x + z$.



Σχήμα 8: *Σχήμα Άσκησης 4β.*

Από το καινούργιο κύκλωμα προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{cases} -200w + -40.0 + 80.0x &= 0 \\ -80.0x + 40.0 + 360 - 20.0y &= 0 \\ +360 - 20.0y - 70.0z + 80.0 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 2.5w + 0.5 \\ 20 &= 4x + 1y \\ 22 &= 1y + 3.5y \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε την σχέση $y = w + x + z$, οπότε

$$\begin{cases} x &= 2.5w + 0.5 \\ 20 &= 4x + 1(w + x + z) \\ 22 &= 1(w + x + z) + 3.5y \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε το x

$$\begin{cases} 20 &= 5(2.5w + 0.5) + 1w + 1z \\ 22 &= 1w + 1(2.5w + 0.5) + 4.5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17.5 &= 13.5w + 1z \\ 21.5 &= 3.5w + 4.5z \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $z = 17.5 - 13.5w$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη έχουμε $w = 1$.

α) Αντικαθιστώντας στις σχέσεις που βρίκαμε για τις αντιστάσεις w, x, y και z παίρνουμε

$w = 1$ A στην αντίσταση των 200 Ω με κατεύθυνση προς τα πάνω

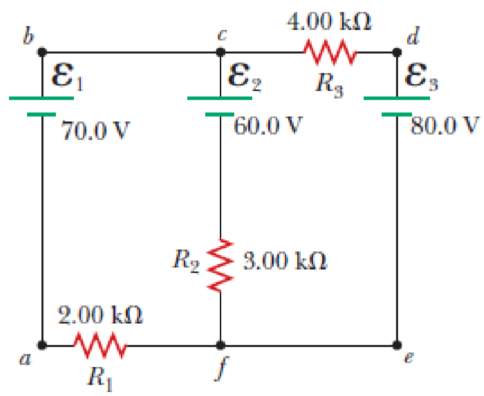
$x = 3$ A στην αντίσταση των 80 Ω με κατεύθυνση προς τα πάνω

$y = 8$ A στην αντίσταση των 20 Ω με κατεύθυνση προς τα κάτω

$z = 4$ A στην αντίσταση των 70 Ω με κατεύθυνση προς τα πάνω β) Για την αντίσταση των 200 Ω βρίσκουμε ότι,

$$\Delta V = IR = (1A)(200\Omega) = 200V$$

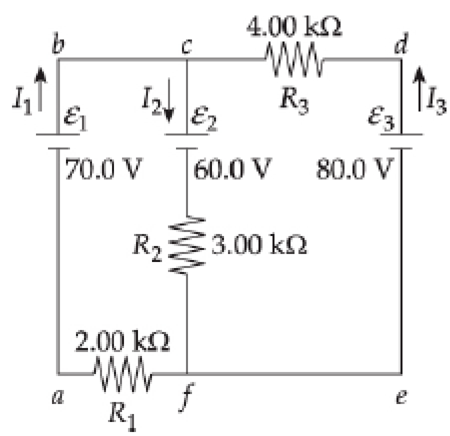
Άσκηση 5.
Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff να βρείτε α) την ένταση του ρεύματος σε κάθε αντίσταση του Σχήματος 9 και β) να βρείτε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων e και f.



Σχήμα 9: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Λύση:

α) Σημειώνουμε τα ρεύματα στο παραπάνω σχήμα και παίρνουμε το Σχήμα 10 όπου εφαρμόζο-



Σχήμα 10: *Σχήμα Άσκησης 5α.*

ντας τον νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο $abcdea$ έχουμε

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - R_2I_2 - R_1I_1 = 0 \Rightarrow 70V - 60V - (3k\Omega)I_1 - (3k\Omega)I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 5mA - 1.5I_2$$

Ομοίως για τον βρόχο $edcfe$

$$\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 - R_2I_2 - R_3I_3 = 0 \Rightarrow 80V - 60V - (4k\Omega)I_1 - (3k\Omega)I_2 = 0 \Rightarrow I_3 = 5mA - 0.75I_2$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff για το σημείο c παίρνουμε

$$I_2 = I_3 + I_1 \Rightarrow I_2 = 3.08 \text{ mA}$$

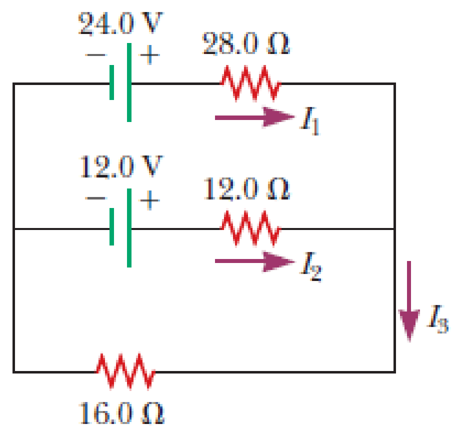
Συνεπώς $I_1 = 0.385$ mA και $I_3 = 2.69$mA.

β) Κατευθυνόμαστε από το σημείο c προς το σημείο f,

$$V_f - V_c = -\mathcal{E}_2 - R_2 I_2 = -60V - (3 \times 10^3 \Omega)(3.08 \times 10^{-3} A) = -69.2V$$

ή $|\Delta V|_{cf} = 69.2$ V, όπου το σημείο c έχει το υψηλότερο δυναμικό.

Άσκηση 6.
Στο κύκλωμα να βρείτε



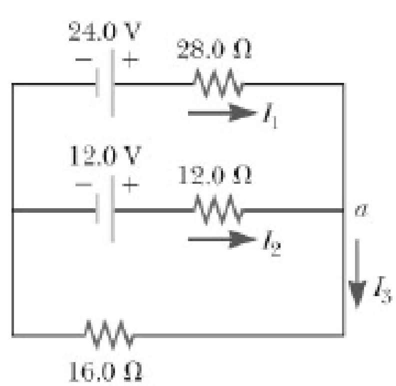
Σχήμα 11: *Σχήμα Άσκησης 6.*

α) Την ένταση του ρεύματος σε κάθε αντίσταση.

β) Την ισχύ που παραδίδεται σε κάθε αντίσταση.

Λύση:

α) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Kirchhoff στο σημείο a



Σχήμα 12: *Σχήμα Άσκησης 6a.*

έχουμε

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{13}$$

Από τον κανόνα του βρόχου στον κάτω βρόχο έχουμε

$$12 - 12I_2 - 16I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = 1 - \frac{4I_3}{3} \tag{14}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του βρόχου για τον βρόχο που σχηματίζει την περίμετρο του κυκλώματος έχουμε

$$24 - 28I_1 - 16I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{24 - 16I_3}{28} \tag{15}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (14) και (15) στην (13) και παίρνουμε

$$I_3 = \frac{24 - 16I_3}{28} + 1 - \frac{4I_3}{3} \Rightarrow I_3 = 0.639 \text{ A}$$

Επομένως οι εξισώσεις (14) και (15) δίνουν

$$I_2 = 0.148 \text{ A και } I_1 = 0.492 \text{ A}$$

β) Η ισχύς που παραδίδεται σε καθεμία από τις αντιστάσεις είναι

$$P_{28\Omega} = I_1^2 R_{28\Omega} = (0.492A)^2(28\Omega) = 6.77 \text{ W}$$

$$P_{12\Omega} = I_2^2 R_{12\Omega} = (0.148A)^2(12\Omega) = 0.261 \text{ W}$$

$$P_{16\Omega} = I_3^2 R_{16\Omega} = (0.639A)^2(16\Omega) = 6.54 \text{ W}$$