ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

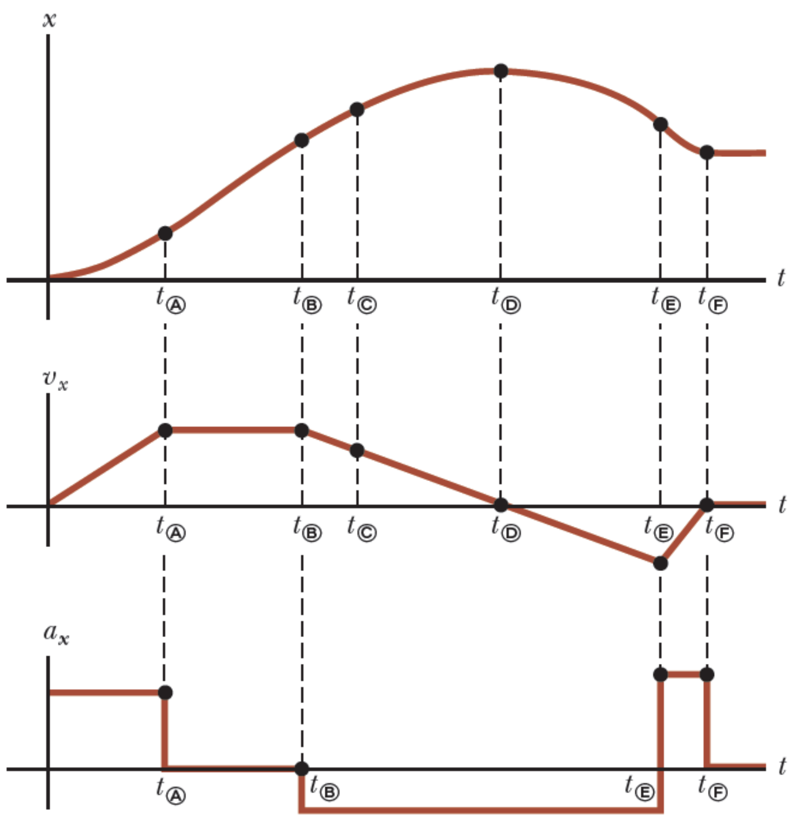
Λύσεις Φροντιστηρίων

1ο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Γνωρίζουμε ότι

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}u_x(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}x(t)\Big) \tag{1}$$

Άρα μπορούμε να ξεκινήσουμε από την επιτάχυνση που μας δίνεται και να βρούμε την ταχύτητα και τη θέση ολοκληρώνοντας ουσιαστικά την καμπύλη επιτάχυνσης μια και δυο φορές, αντίστοιχα. Θεωρούμε το σώμα ως αρχικά ακίνητο. Στο διάστημα $[0, t_A]$, η επιτάχυνση είναι θετική και σταθερή,



άρα η ταχύτητα θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, με θετική κλίση. Ολοκληρώνοντας ξανά, η συνάρτηση θέσης θα είναι δευτεροβάθμια συνάρτηση του χρόνου.

Στο διάστημα $(t_A, t_B]$, η επιτάχυνση μηδενίζεται, άρα η ταχύτητα θα είναι σταθερή πια. Όμοια, η συνάρτηση θέσης θα είναι γραμμική, ως το ολοκλήρωμα της ταχύτητας (ολοκλήρωμα σταθεράς).

Στο διάστημα $(t_B, t_E]$, η επιτάχυνση είναι αρνητική και σταθερή, άρα η ταχύτητα θα είναι ολοκλήρωμα μιας αρνητικής σταθεράς, άρα θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου και μάλιστα με αρνητική κλίση. Επειδή το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μικρότερο από αυτό του διαστήματος $[0, t_A]$, η κλίση της συνάρτησης ταχύτητας θα είναι κατά μέτρο μικρότερη, οπότε η ταχύτητα στο $(t_B, t_E]$ θα μειώνεται πιο αργά απ'ο,τι αυξανόταν στο διάστημα $[0, t_A]$. Η συνάρτηση θέσης θα είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού. Προσέξτε ότι η συνάρτηση ταχύτητας στο $(t_B, t_E]$ θα μηδενιστεί κάποια στιγμή και θα γίνει στη συνέχεια αρνητική, οπότε η συνάρτηση θέσης θα έχει τοπικό μέγιστο στο ίδιο σημείο - το σώμα αλλάζει κατεύθυνση.

Τέλος στο διάστημα $(t_E, t_F]$, η επιτάχυνση είναι σταθερή και θετική, οπότε η ταχύτητα θα γίνει ξανά γραμμική αλλά με θετική κλίση, αντίστοιχα η συνάρτηση θέσης θα είναι ξανά πολυωνυμική.

Άσκηση 2.

(α΄) Αν $t_1 = 0$ και $t_2 = 2$ s, τότε είναι

$$u_{x_1} = 40 - 5t_1^2 = 40\text{m/s} \tag{2}$$
$$u_{x_2} = 40 - 5t_2^2 = 20\text{m/s} \tag{3}$$

Η μέση επιτάχυνση είναι

$$a_{x,avg} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{x_2} - u_{x_1}}{t_2 - t_1} = -10\ \text{m/s}^2 \tag{4}$$

(β΄) Η επιτάχυνση για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή πρέπει να βρεθεί μέσω υπολογισμού της στιγμιαίας επιτάχυνσης, η οποία είναι η παράγωγος της συνάρτησης της στιγμιαίας ταχύτητας (που μας δίνεται) ως προς το χρόνο, δηλ.

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = -10t \tag{5}$$

Άρα για $t = 2$, $a(2) = -20\ \text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.

(α΄) Εύκολα βρίσκουμε από το τυπολόγιο της επιταχυνόμενης κίνησης ότι

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \tag{6}$$

οπότε

$$a_x = \frac{u_{xf} - u_{xi}}{t} = \frac{0 - 63}{2} = -31.5\ \text{m/s}^2 \tag{7}$$

(β΄) Από το τυπολόγιό μας, στο διάστημα αυτό των δυο δευτερολέπτων μεταξύ της στιγμής που ακουμπά στο διάδρομο και της στιγμής που ακινητοποιείται θα έχουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t = 0 + 0.5 \times 63 \times 2 = 63\ \text{m} \tag{8}$$

Άσκηση 4.

Ορίζουμε ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που ο αστυνομικός μοτοσυκλετιστής ξεκινά και ορίζουμε ως σημείο αναφοράς της θέσης $x = 0$ τη θέση του αστυνομικού πριν ξεκινήσει. Σε αυτή τη στιγμή ($t = 0, x = 0$), το αμάξι έχει προχωρήσει ήδη 45 μέτρα, αφού έχει περάσει ένα δευτερόλεπτο. Άρα, η αρχική θέση του αμαξιού είναι $x_{icar} = 45$ m.

Το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα η θέση του για κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται ως

$$x_{car} = x_{icar} + u_{xcar}t = 45 + u_{xcar}t \tag{9}$$

ενώ ο αστυνομικός εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, και η θέση του για κάθε χρονική στιγμή t θα δινεται ως

$$x_{fcop} = x_{icop} + u_{xicop}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{10}$$

αφού η αρχική θέση του θεωρείται μηδέν και η αρχική του ταχύτητα επίσης.

Έτσι, για να βρούμε πότε οι θέσεις τους θα συμπέσουν (αυτό ζητάει το ερώτημα), θα είναι

$$\begin{aligned} x_{cop} &= x_{car} && (11)\\ \frac{1}{2}a_x t^2 &= 45 + u_{xcar}t && (12)\\ t &= \frac{u_{xcar} \pm \sqrt{u_{xcar}^2 + 2\times 45a_x}}{a_x} && (13) \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$t = 31 \text{ s} \tag{14}$$

Άσκηση 5.

(α΄) Έστω ότι η χελώνα προχωρά απόσταση D πριν ο λαγός ξαναμπεί στον αγώνα. Όταν γίνεται αυτό, ο λαός πρέπει να τρέξει 200 m σε 8 m/s, ενώ η χελώνα προχωρά απόσταση $(1000 - D)$ με 0.2 m/s. Καθένας έχει τον ίδιο χρόνο για να τελειώσει τον αγώνα, αφού τερματίζουν μαζί. ΆΡα

$$\Delta t = \frac{200}{8} = \frac{1000 - D}{0.2} \Longrightarrow D = 995 \text{ m} \tag{15}$$

Άρα η χελώνα βρίσκεται σε απόσταση $1000 - 995 = 5$ m από τη γραμμή τερματισμού όταν ο λαγός επανέρχεται στον αγώνα.

(β΄) Και οι δυο ξεκινούν τον αγώνα την ίδια χρονική στιγμή $t = 0$. Ο λαγός φτάνει τη θέση των 800 μέτρων σε χρόνο $t = 800/8 = 100$ s. Η χελώνα φτάνει τα 995 μέτρα σε χρόνο $t = 995/0.2 = 4975$ s. Ο λαγός κοιμόταν για διάστημα $\Delta t = 4975 - 100 = 4875$ s.

Άσκηση 6.

(α΄) Έστω $t_0 = 0$ η στιγμή εκκίνησης του ταξιδιού και t_s ο χρόνος που διένυσε μέχρι τη στάση ταξιδεύοντας με σταθερή ταχύτητα $u = 89.5$ km/h, δηλ. με $u = 24.86$ m/s. Τα 22 λεπτά αντιστοιχούν σε 1320 δευτερόλεπτα, ενώ η μέση ταχύτητα των 77.8 χιλιομέτρων την ώρα αντιστοιχεί σε 21.61 m/s. Η μέση του ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320 - t_0} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320} \tag{16}$$

Άρα η απόσταση που διένυσε είναι

$$\Delta x = u_{avg}\Delta t = u_{avg}(t_s + 1320) \tag{17}$$

Για όσο ταξίδευε με σταθερή ταχύτητα u, θα είναι

$$\Delta x = u(t_s - t_0) = ut_s \tag{18}$$

Προφανώς οι αποστάσεις Δx είναι ίδιες και στις δυο σχέσεις, άρα εξισώνοντας έχουμε

$$u_{avg}(t_s + 1320) = ut_s \Longleftrightarrow 21.6 \times (t_s + 1320) = 24.86 \times t_s \Longleftrightarrow t_s = \frac{28512}{3.26} = 8746 \text{ s} \tag{19}$$

που αντιστοιχεί σε $t_s = 2.44$ ώρες. Άρα ο συνολικός χρόνος ταξιδιού είναι $t_{total} \approx 2.44 + 0.37 = 2.81$ ώρες.

(β΄) Η απόσταση που ταξίδεψε είναι

$$\Delta x = ut_s = 218370 \text{ m} \approx 218 \text{ km} \tag{20}$$

Άσκηση 7.
Έχουμε αρχικά ότι $u_i = 2 \times 10^4$ m/s και $u_f = 6 \times 10^6$ m/s, και ότι $x_f - x_i = 1.5 \times 10^{-2}$ m. Δε γνωρίζουμε την επιτάχυνση αρχικά (μας ζητείται στη συνέχεια), οπότε θα χρειαστούμε έναν τύπο με ταχύτητες και θέσεις μόνο.

(α΄) Είναι

$$x_f - x_i = 0.5(u_f - u_i)t \tag{21}$$
$$t = \frac{2(x_f - x_i)}{u_f - u_i} \approx 5 \times 10^{-9} \text{ s} \tag{22}$$

(β΄) Επιλέγουμε από το τυπολόγιό μας τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{23}$$

αφού έχει το ζητούμενο άγνωστο (επιτάχυνση) και όλα τα άλλα στοιχεία είναι γνωστά.

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{24}$$
$$a_x = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2(x_f - x_i)} \approx 1.2 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \tag{25}$$

Εναλλακτικά,

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{26}$$
$$x_f - x_i = u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{27}$$
$$a_x = 2\frac{x_f - x_i - u_{x_i}t}{t^2} \tag{28}$$
$$= 2\frac{1.5 \times 10^{-2} - 2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-9}}{25 \times 10^{-18}} \tag{29}$$
$$\approx 1.2 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \tag{30}$$

Άσκηση 8.

(α΄) Η συνάρτηση θέσης είναι δευτεροβάθμια και από το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου καταλαβαίνουμε ότι έχει ολικό μέγιστο, οπως στο Σχήμα 1.

Άρα αυτό σημαίνει ότι σε κάποιο σημείο της καμπύλης (στο ολικό μέγιστο) αυτής το σώμα ακινητοποιείται και αλλάζει κατεύθυνση. Το ολικό μέγιστο βρίσκεται αν θέσουμε την παράγωγο της συνάρτησης ίση με το μηδέν. Όμως η παράγωγος της συνάρτησης θέσης ειναι η στιγμιαία ταχύτητα! Άρα το σώμα αλλάζει κατεύθυνση όταν

$$\frac{d}{dt}x(t) = u(t) = 0 \tag{31}$$

το οποίο συμβαίνει όταν

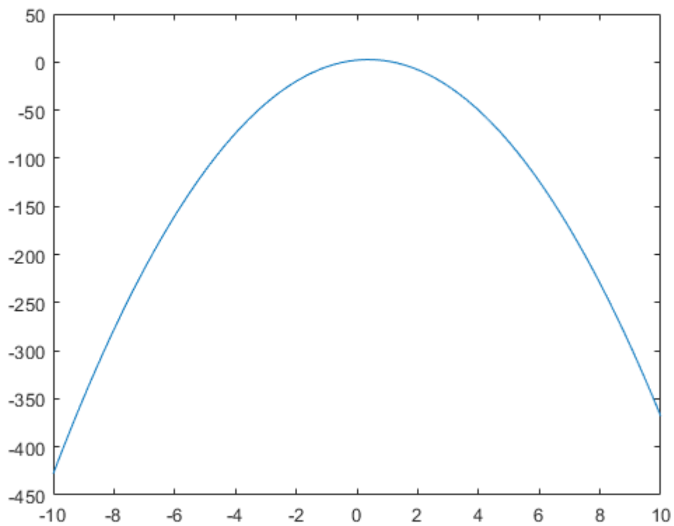
$$u(t) = 3 - 8t \Longrightarrow t = 3/8 \text{ s} \tag{32}$$

Η θέση του τότε είναι

$$x(3/8) = 2 + 3 \times 3/8 - 4 \times (3/8)^2 = 2.56 \text{ m} \tag{33}$$

(β΄) Όταν $x_f = x_i$, από τη σχέση

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2 \tag{34}$$



Σχήμα 1: *Τροχιά συνάρτησης $x(t)$ ως προς t.*

έχουμε ότι ο χρόνος είναι

$$t = -\frac{2u_{x_i}}{a} \tag{35}$$

Έτσι, το σώμα επιστρέφει στην αρχική του θέση σε χρόνο

$$t = \frac{-2 \times 3}{-8} = 0.75 \text{ s} \tag{36}$$

και η ταχύτητά του είναι

$$u(0.75) = 3 - 8 \times 0.75 = -3 \text{ m/s} \tag{37}$$