ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

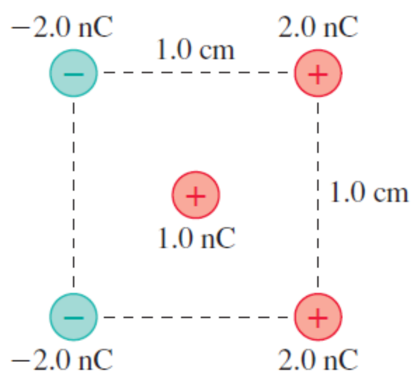
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Αναστασία Πεντάρη

Υποψήφια Διδάκτωρ

Άσκηση 1.
Πόση είναι η δύναμη $\vec{F}$ στο 1 nC φορτίο, βρίσκεται στο μέσο του παρακάτω σχήματος εξαιτίας των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων; Δώστε την απάντηση σας υπό την μορφή συνιστωσών.



Λύση

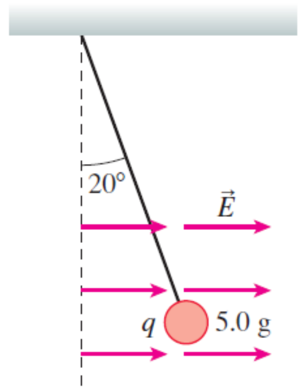
Τοποθετούμε το φορτίο q_1 στην αρχή των αξόνων και τα q_2, q_3, q_4, q_5 στο πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο αντίστοιχα. Η ηλεκτρική ενέργεια στο q_1 είναι το διάνυσμα του αθροίσματων των ηλεκτρικών ενεργειών των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων. Το μέγεθος των περιμετρικών φορτίων είναι το ίδιο και για τα τέσσερα καθώς οι φορτίσεις του είναι ίσες (κατά απόλυτη τιμή) και ισαπέχουν από το q_1. Επομένως

$$F_{2\text{ on }1} = F_{3\text{ on }1} = F_{4\text{ on }1} = F_{5\text{ on }1} = \frac{(9\times10^9\ \mathrm{Nm^2/\ C^2})(2\times10^{-9}\ \mathrm{C})(1\times10^{-4}\ \mathrm{C})}{(0.5\times10^{-2}\ \mathrm{m})^2+(0.5\times10^{-2}\ \mathrm{m})^2} = 3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N}$$

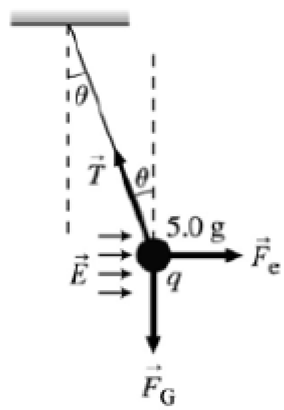
Άρα $\vec{F}_{\text{on }1} = (3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N},$ απομακρυνόμενη από το $q_2) + (3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N},$ απομακρυνόμενη από το $q_3) + (3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N},$ απομακρυνόμενη από το $q_4) + (3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N},$ απομακρυνόμενη από το $q_5)$. Αναλύοντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$\vec{F}_{\text{on }1} = F_{\text{on }1}\Big(\Big[-\cos(45°)\vec{i}-\sin(45°)\vec{j}\Big]+\Big[-\cos(45°)\vec{i}+\sin(45°)\vec{j}\Big]+\Big[-\cos(45°)\vec{i}-\sin(45°)\vec{j}\Big]+\Big[-\cos(45°)\vec{i}+\sin(45°)\vec{j}\Big]\Big) = (3.6\times10^{-4}\ \mathrm{N})(-4\cos(45°)\vec{j} = -1\times10^{-3}\vec{i}\ \mathrm{N}.$$

Άσκηση 2.
Ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = 100000\hat{i}$ N/C προκαλεί σε ένα σωματίδιο 5 g φόρτιση τέτοια ώστε να κρέμεται υπό γωνία $20°$. Πόση είναι η φόρτιση στο σωματίδιο ;



Λύση
Θεωρούμε την φόρτιση του σωματιδίου ότι περιγράφεται ως σημειακή φόρτιση.



Το σωματίδιο ισορροπεί στο ηλεκτρικό πεδίο όταν το νήμα σχηματίζει γωνία $20°$ με τον οριζόντιο άξονα. Οι τρείς δυνάμεις που δρούν στην φορτισμένη μπάλα είναι η ηλεκτρική δύναμη του πεδίου, η βαρύτητα και η τάση του νήματος. Από τον δεύτερο νόμο του Newton, για το σωματίδιο, έχουμε $\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}$ και αναλύωντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$(F_{net})_x = T_x + 0\ \mathrm{N} + qE = 0\ \mathrm{N}, \qquad (F_{net})_y = T_y - mg + 0\ \mathrm{N} = 0\ \mathrm{N}$$

Άρα

$$T\sin\theta = qE, \qquad T\cos\theta = mg$$

Διαιρούμε κατά μέλη

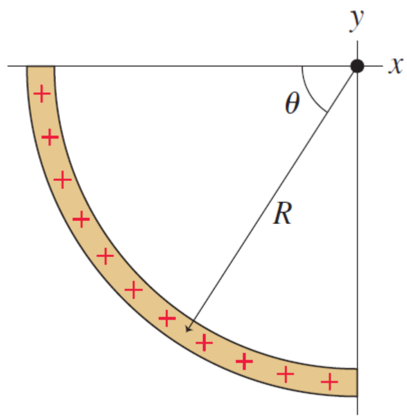
$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} \Rightarrow q = \frac{mg\tan\theta}{E} = \frac{(5\times10^{-3}\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{N/kg})\tan 20°}{100000\ \mathrm{N/C}} = 1.78\times10^{-7}\ \mathrm{C} = 0.18\mu\ \mathrm{C}$$

Άσκηση 3.
Μια πλαστική ράβδος με γραμμική φόρτιση πυκνότητας λ λυγίζεται σε τεταρτοκύκλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων

(α΄) Γράψτε παραστάσεις για τις x και y συνιστώσες στην αρχή των αξόνων, οι οποίες οφείλονται σε μια μικρή φόρτιση υπό γωνία $\hat{\theta}$.

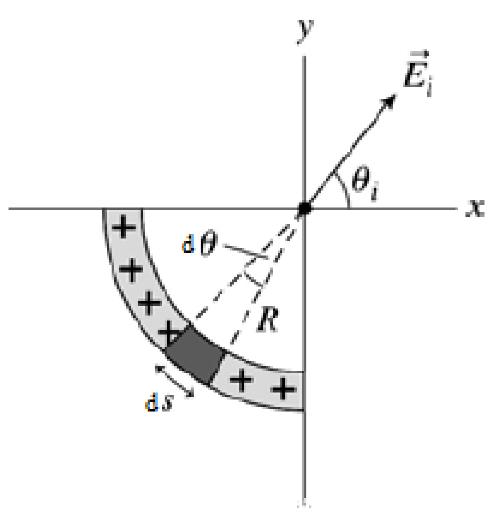
(β΄) Γράψτε, χωρίς να τα υπολογίσετε, τα αόριστα ολοκληρώματα των x και y συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων.

(γ΄) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα και βρείτε το $\vec{E}_{net}$ υπό την μορφή συνιστωσών.



Λύση

Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. Χωρίζουμε την ράβδο σε αρκετά μικρά τμήματα φόρτισης dq και με μήκος τόξου ds.



(α΄) Το τμήμα i δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}_i$ στην αρχή των αξόνων με δύο συνιστώσες

$$d(E_i)_x = dE_i \cos\theta_i \qquad d(E_i)_y = dE_i \sin\theta_i$$

Παρατηρούμε ότι η γωνία $\hat{\theta}_i$ εξαρτάται από την θέση του τμήματος i. Όλα τα τμήματα έχουν απόσταση $r_i = R$ από την αρχή των αξόνων

$$dE_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R}$$

Η πυκνότητα της γραμμικής φόρτισης της ράβδου είναι $\lambda = Q/L$, όπου L είναι το μήκος της ράβδου ($L = \pi R/2$ ως τεταρτοκύκλιο). Αυτό μας επιτρέπει να σχετίσουμε την φόρτιση dq με το μήκος τόξου ds μέσω της σχέσης

$$dq = \lambda ds = \left(\frac{Q}{L}\right) ds = \left(\frac{2Q}{\pi R}\right) ds$$

με $ds = Rd\theta$. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων

$$d(E_i)_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(\frac{2Q}{\pi R}\right) Rd\theta\cos\theta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right) d\theta\cos\theta_i$$
$$d(E_i)_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\sin\theta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(\frac{2Q}{\pi R}\right) Rd\theta\sin\theta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right) d\theta\sin\theta_i$$

(β΄) Οι x, y συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου για ολόκληρη την ράβδο είναι τα ολοκληρώματα της προηγούμενης ερώτησης από $\theta = 0$ rad έως $\theta = \pi/2$ rad. Άρα

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right)\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right)\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta$$

(γ΄) Επιλύουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 \qquad \int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = [-\sin\theta]_0^{\pi/2} = -\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 1$$

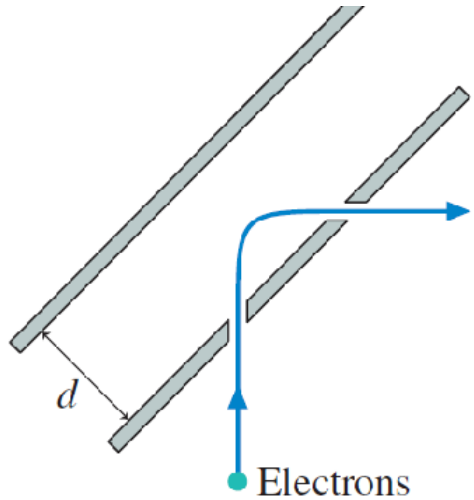
Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi R^2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Άσκηση 4.
Χρειάζεται να κάνουμε μια δέσμη ηλεκτρονίων να στρίψει κατα $90°$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της διάταξης του παρακάτω σχήματος. Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 3×10^{-17} J εισέρχεται απο μια μικρή οπή από το κάτω μέρος της διάταξης.

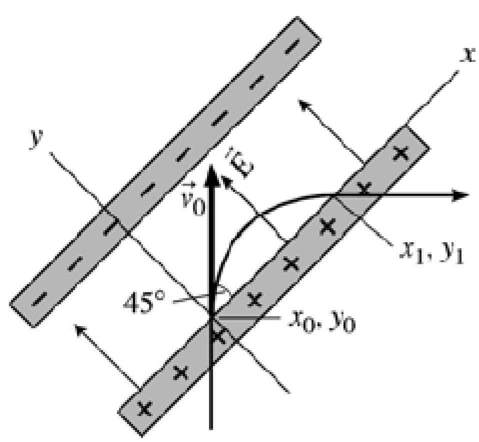
(α΄) Πως θα πρέπει να είναι φορτισμένες οι δύο πλάκες ώστε το ηλεκτρόνιο να στρίψει δεξιά ;

(β΄) Πόσο μέγεθος πρέπει να έχει το ηλεκτρικό πεδίο αν το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από οπή η οποία βρίσκεται 1 cm μακρυά από την οπή εισόδου ;



Λύση

Το ηλεκτρικό πεδίο στην διάταξη είναι ομοιόμορφο, επομένως τα ηλεκτρόνια θα έχουν σταθερή επιτάχυνση.



(α΄) Η πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης θα έχει θετική φόρτιση. Το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να απωθηθεί από την πλάκα του άνω μέρους, δηλαδή θα πρέπει να έχει αρνητική φόρτιση. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα, άρα η κατεύθυνση του ηλεκτρονίου $\vec{a}$ είναι προς την πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος.

(β΄) Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων xy ώστε ο άξονας $x'x$ να είναι παράλληλος με την πλάκα, που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης. Η αρχή των αξόνων είναι το σημείο εισόδου του ηλεκτρονίου. Τότε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, που είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο, είναι $\vec{a} = a\vec{j}$. Για την κινητική ενέργεια έχουμε $K = \frac{1}{2}mv_0^2 = 3 \times 10^{-17}$ J η οποία μας δίνει αρχική ταχύτητα $v_0 = (2\ \mathrm{K/m})^{1/2} = 8.115 \times 10^6$ m/s. Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας, στην αρχική κατάσταση, είναι

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s} \qquad v_{y0} = v_0 \sin 45° = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Ποια επιτάχυνση $\vec{a}$ επιτρέπει στο ηλεκτρόνιο να περάσει από το σημείο $(x_1, y_1) = (1\ \text{cm}, 0\ \text{cm})$; Για τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$x_1 = x_0 + v_{x0}t_1 + \frac{1}{2}a_x t_1^2 = v_{x0}t_1 = 0.01\ \text{m} \qquad y_1 = y_0 + v_{y0}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 = 0\ \text{m}$$

Από την εξίσωση στον άξονα $x'x$ βρίσκουμε $t_1 = x_1/v_{x0} = 1.742 \times 10^{-9}$ s. Συνεπώς από την εξίσωση στον άξονα $y'y$ έχουμε

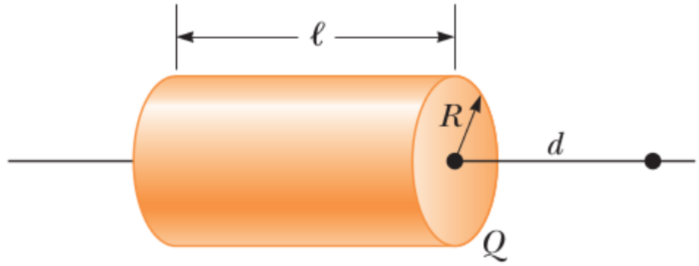
$$a = -\frac{2v_{y0}t_1}{t_1^2} = -6.59 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$$

Όμως η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$a = \frac{F_{\text{elec}}}{m} = \frac{q_{\text{elec}}E}{m} = -\frac{eE}{m} \Rightarrow E = -\frac{ma}{e} = -\frac{(9.11 \times 10^{-31}\text{kg})(-6.59 \times 10^{15}\text{m/s}^2)}{1.6 \times 10^{-19}\text{C}} = 37500\text{N/C}$$

Άσκηση 5.

(α') Στο παρακάτω σχήμα, ο κυλινδρικός φλοιός ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο Q, και έχει ύψος l. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση d δεξιά του.



Hint: Θεωρήστε τον φλοιό ως ένα σύνολο από φορτισμένα δακτυλίδια. Το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί ένα δακτυλίδι πάνω στην ευθεία που περνάει απ'Α το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση: $E = k_e Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$

(β') Αντί για φλοιό, θεωρήστε ένα συμπαγή κύλινδρο με ίδιες διαστάσεις όπως προηγουμένως και φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο του, και ξαναλύστε το πρόβλημα.

Hint: Θεωρήστε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο από φορτισμένους δίσκους. Το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί ένας δίσκος πάνω στην ευθεία που περνάει απ'Α το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση: $E = \frac{2k_eQ}{R^2}\left(1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right)$

Λύση

(α') Ορίζουμε ως $x = 0$ το σημείο που ζητείται το πεδίο. Ένας δακτύλιος με πάχος dx έχει φορτίο Qdx/l, και παράγει πεδίο στο ζητούμενο σημείο που δίνεται ως

$$d\vec{E} = \frac{k_e x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l}\vec{i} \tag{1}$$

Το συνολικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int_d^{d+l} \frac{k_e x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l}\vec{i} && (2)\\
&= \frac{k_eQ\vec{i}}{2l}\int_d^{d+l}(x^2+R^2)^{-3/2}2xdx && (3)\\
&= \frac{k_eQ\vec{i}}{2l}\frac{(x^2+R^2)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_d^{l+d} && (4)\\
&= \frac{k_eQ}{2l}\left[\frac{1}{(d^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2+R^2)^{1/2}}\right]\vec{i} && (5)
\end{aligned}$$

(β') Σκεφτείτε τον κύλινδρο σαν ένα σύνολο από δίσκους, καθένας με πάχος dx, φορτίο Qdx/l και επιφανειακό φορτίο $\sigma = Qdx/\pi R^2 l$. Ένας δίσκος παράγει πεδίο

$$d\vec{E} = \frac{2\pi k_e Q dx}{\pi R^2 l}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right)\vec{i} \tag{6}$$

Οπότε το συνολικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int_d^{d+l} \frac{2k_e Q dx}{R^2 l}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right)\vec{i} && (7)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[\int_d^{d+l} dx - \frac{1}{2}\int_d^{d+l}(x^2+R^2)^{-1/2}2x dx\right]\vec{i} && (8)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[x\Big|_d^{d+l} - \frac{1}{2}\frac{(x^2+R^2)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_d^{d+l}\right]\vec{i} && (9)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[l + (d^2+R^2)^{1/2} - ((d+l)^2+R^2)^{1/2}\right]\vec{i} && (10)
\end{aligned}$$