

# Φυσική

Μηχανική, Κυματική, Ηλεκτροσμός

Γιώργος Π. Καφεντζής

Έκδοση 0.78





## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
1.1	Μαθηματικό Υπόβαθρο	7
1.2	Διανύσματα	7
1.2.1	Ιδιότητες Διανυσμάτων	9
1.2.2	Ανάλυση σε συνιστώσες	11
1.2.3	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	15
1.3	Παράγωγος	17
1.4	Ολοκλήρωση	17
1.4.1	Αλλαγή μεταβλητής	20
1.5	Ασκήσεις	22
<b>2</b>	<b>Μηχανική</b>	<b>33</b>
2.1	Εισαγωγή	33
2.2	Κίνηση σε Μια Διάσταση	33
2.2.1	Θέση	33
2.2.2	Μετατόπιση	34
2.2.3	Ταχύτητα	35
2.2.4	Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα	38
2.2.5	Επιτάχυνση	39
2.2.6	Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση	41
2.3	Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις	47
2.3.1	Θέση	47
2.3.2	Μετατόπιση	47
2.3.3	Ταχύτητα	47
2.3.4	Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα	48
2.3.5	Επιτάχυνση	49
2.3.6	Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση	49
2.3.7	Βολή	52

2.3.8	Κυκλική Κίνηση . . . . .	57
2.4	Οι Νόμοι της Κίνησης	60
2.4.1	Δύναμη . . . . .	60
2.4.2	Πρώτος Νόμος του Newton	62
2.4.3	Δεύτερος Νόμος του Newton	63
2.4.4	Τρίτος Νόμος του Newton	65
2.4.5	Ανάλυση με βάση τους Τρεις Νόμους	65
2.4.6	Τροχαλίες και Νήματα . . . . .	67
2.4.7	Δυνάμεις Τριβής . . . . .	72
2.5	Ενέργεια	77
2.5.1	Η δύναμη του ελατηρίου . . . . .	82
2.5.2	Έργο δύναμης ελατηρίου	83
2.5.3	Έργο εξωτερικής δύναμης . . . . .	85
2.5.4	Κινητική Ενέργεια . . . . .	86
2.5.5	Δυναμική Ενέργεια . . . . .	91
2.5.6	Θερμική Ενέργεια . . . . .	93
2.5.7	Διαγράμματα Ενέργειας . . . . .	94
2.5.8	Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις . . . . .	96
2.5.9	Μηχανική Ενέργεια Συστήματος . . . . .	97
2.5.10	Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας . . . . .	102
2.6	Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας	105
2.6.1	Μη Απομονωμένα Συστήματα . . . . .	106
2.6.2	Απομονωμένα Συστήματα . . . . .	107
2.6.3	Ισχύς . . . . .	115
2.7	Ασκήσεις	118
<b>3</b>	<b>Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα . . . . .</b>	<b>167</b>
3.1	Εισαγωγή	167
3.2	Περιοδική Κίνηση	167
3.3	Απλή Αρμονική Ταλάντωση	168
3.3.1	Η κίνηση του σώματος - ελατηρίου ως AAT . . . . .	168
3.3.2	Θέση AAT . . . . .	169
3.3.3	Ταχύτητα και Επιτάχυνση AAT . . . . .	171
3.3.4	Λύση AAT . . . . .	172
3.3.5	Ενέργεια AAT . . . . .	178
3.3.6	Σχέση AAT και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης . . . . .	182
3.3.7	Το εκχρεμές . . . . .	183
3.4	Φθίνουσες Ταλαντώσεις	184
3.5	Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις	186
3.6	Κυματική	187
3.6.1	Κυματοσυνάρτηση . . . . .	188
3.6.2	Ημιτονοειδή Κύματα . . . . .	190
3.6.3	Εγκάρσια Ταχύτητα και Επιτάχυνση . . . . .	194
3.6.4	Ενέργεια και Ισχύς Κύματος . . . . .	195

3.7	Ηχητικά Κύματα	197
3.7.1	Ταχύτητα Διάδοσης Ήχου . . . . .	199
3.7.2	Ένταση Ηχητικών Κυμάτων . . . . .	200
3.7.3	Ηχοστάθμη . . . . .	201
3.7.4	Ψυχοακουστική . . . . .	203
3.7.5	Το Φαινόμενο Doppler . . . . .	205
3.8	Τπέριθεση Κυμάτων	209
3.8.1	Τπέριθεση Ημιτονοειδών Κυμάτων . . . . .	210
3.8.2	Ένταση και Ισχυς . . . . .	214
3.9	Στάσιμα Κύματα	219
3.9.1	Δεσμοί και Αντιδεσμοί . . . . .	219
3.9.2	Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες . . . . .	221
3.9.3	Διακριτήματα . . . . .	222
3.10	Ασκήσεις	225
<b>4</b>	<b>Ηλεκτρισμός . . . . .</b>	<b>243</b>
4.1	Εισαγωγή	243
4.2	Ηλεκτρικές Δυνάμεις	243
4.2.1	Κατηγορίες Τλικών . . . . .	244
4.2.2	Ο Νόμος του Coulomb . . . . .	244
4.3	Ηλεκτρικά Πεδία	249
4.3.1	Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειακών Φορτίων . . . . .	250
4.3.2	Ηλεκτρικό Πεδίο Κατανομής Φορτίου . . . . .	252
4.3.3	Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου . . . . .	261
4.3.4	Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο . . . . .	262
4.4	Ο Νόμος του <b>Gauss</b>	265
4.4.1	Ηλεκτρική Ροή . . . . .	266
4.4.2	Νόμος του Gauss και Σημειακά Φορτία . . . . .	272
4.4.3	Νόμος του Gauss και Κατανομή Φορτίου . . . . .	273
4.4.4	Αγωγοί και Ηλεκτρικό Πεδίο . . . . .	278
4.5	Ηλεκτρικό Δυναμικό	278
4.5.1	Δυναμικό σε Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο . . . . .	280
4.5.2	Ηλεκτρικό Δυναμικό Σημειακών Φορτίων . . . . .	284
4.5.3	Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό . . . . .	288
4.5.4	Ηλεκτρικό Δυναμικό Κατανομής Φορτίου . . . . .	291
4.5.5	Αγωγοί και Ηλεκτρικό Δναμικό . . . . .	294
4.6	Χωρητικότητα	294
4.6.1	Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών . . . . .	297
4.6.2	Κυλινδρικός Πυκνωτής . . . . .	297
4.6.3	Σφαιρικός Πυκνωτής . . . . .	298
4.6.4	Απομονωμένος Αγωγός . . . . .	299
4.6.5	Συνδυασμοί Πυκνωτών . . . . .	300
4.6.6	Ενέργεια Πυκνωτή . . . . .	306

4.7	Ρεύμα και Αντίσταση	308
4.7.1	Το Ηλεκτρικό Ρεύμα . . . . .	310
4.7.2	Πυκνότητα Ρεύματος . . . . .	311
4.7.3	Ειδική Αγωγιμότητα και Ειδική Αντίσταση . . . . .	311
4.7.4	Αντίσταση . . . . .	311
4.7.5	Συνδυασμοί Αντιστάσεων . . . . .	313
4.7.6	Μπαταρίες και Ρεύμα . . . . .	315
4.7.7	Ηλεκτρική Ισχύς . . . . .	316
4.8	Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος	317
4.8.1	Οι Κανόνες του Kirchhoff . . . . .	319
4.8.2	Κυκλώματα RC . . . . .	325
4.9	Ασκήσεις	334

$\sum_{i=0}^n (P_2(x_i) - y_i)^2$   $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$   $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$   
 $\int \int \int_M z dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \left( \int_{\frac{1}{z}}^1 nr dr \right) dr \right) d\varphi$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} + n}{3\sqrt[3]{n^2 + 2n - 1}}$   $\lambda_x - y + z = 1$   
 $x + \lambda y + z = \lambda^2$   $x + y + \lambda z = \lambda^2$   $F_z = 2 \times yz - 1 = 1$   
 $\alpha = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$   $x_1 = \begin{pmatrix} 2p \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $y = \sqrt[3]{x+1}$   $i x = \operatorname{tg} t$   $(1+e^x) y' = e^x$   $y(1) = 1$   
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$   
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$   $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$   
 $\alpha^2 + b^2 = c^2$   
 $\alpha, \beta, \gamma \in C$   
 $f(x) = 2^{-x} + 1, \varepsilon = 0.005$   
 $\lambda_2 = i\sqrt{14}$   
 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$   
 $|x| \neq 0, \mu \neq 0$   
 $\frac{2x}{x^2 + 2y^2} = 2$   $z = \frac{1}{x} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\eta_1 = \lambda_1^2 - 3\lambda_2 +$   
 $\frac{\sin x}{x}$

Οι συνοπτικές αυτές σημειώσεις γράφτηκαν για να εξυπηρετήσουν τους φοιτητές του μαθήματος ΗΥ112-Φυσική I, που δίνεται από το τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Δεδομένου ότι ο συγγραφέας δεν είναι Φυσικός (και δεν απευθύνεται σε τέτοιους), οι σημειώσεις αυτές έχουν μια λιγότερο αυστηρή προσέγγιση, βάζοντας σε πρώτο πλάνο τη διαισθητική ερμηνεία, τις βασικές γενικές γνώσεις, και τη μεθοδολογία λύσεων προβλημάτων, χωρίς να υστερεί στη μαθηματική ακρίβεια ή στη φυσική θεώρηση των πραγμάτων.

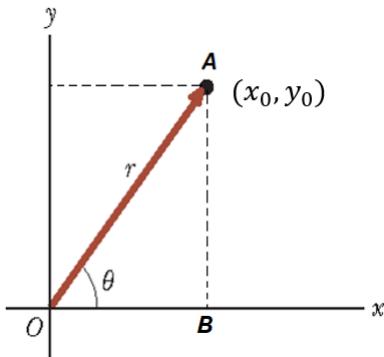
## 1.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο σύνολό της, η Φυσική αξιοποιεί σε πολύ μεγάλο βαθμό τα Μαθηματικά, καθώς τα τελευταία προσφέρουν ένα ολοκληρωμένο και ακριβές πλαίσιο μελέτης της. Κάποια από τα μαθηματικά αυτά ωφελούνται στη συνέχεια ως γνωστά. Όμως, οι “παλινωδίες” του εκπαιδευτικού συστήματος ή καταστάσεις έκτακτης ανάγκης (όπως η πανδημία του Covid19 το 2020) αναγκάζουν πολλές φορές τους φοιτητές να έρχονται στη μελέτη της ύλης της Φυσικής με ελλειπές μαθηματικό υπόβαθρο. Μια προσπάθεια (αρκετά επιφανειακή αλλά που τουλάχιστον προσφέρει ένα ελάχιστο υπόβαθρο) να καλυφθεί αυτή η έλλειψη γίνεται σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο.

## 1.2 Διανύσματα

Μια και το επόμενο κεφάλαιο αποτελεί το ξεκίνημα της μελέτης της Κλασικής Μηχανικής, και συγκεκριμένα της Κινητικής, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος. Σκεφτείτε ότι όταν κινέστε στο σπίτι σας και υλεύτε να περιγράψετε την κίνησή σας αυτή δεν αρκεί να ορίσετε τη ύλη σας στο σπίτι αλλά και το προς τα που κατευθύνεστε (μέσα/έξω από την κουζίνα, μέσα/έξω από το μπαλκόνι, προς/από το υπνοδωμάτιο κλπ). Ένα τέτοιο μέγεθος που περιγράφεται τόσο από έναν αριθμό όσο και από μια “κατεύθυνση” είναι το δίανυσμα. Ένα διάνυσμα δεν είναι τίποτε άλλο από ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλ. ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή και τέλος, με το τέλος του να συμβολίζεται με ένα βέλος, όπως στο Σχήμα 1.1. Ένα τέτοιο διάνυσμα  $\vec{OA}$  έχει τρια χαρακτηριστικά:

- Μέτρο  $|\vec{OA}|$  ή  $OA$ , που δεν είναι τίποτε άλλο από το μήκος του διανύσματος (πάντα θετικός αριθμός)
- Διεύθυνση, η οποία αποτελεί την ευθεία (και όλες τις παράλληλές της) πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα  $\vec{OA}$



Σχήμα 1.1: Διάνυσμα.

- Φορά, η οποία καθορίζεται από το αν το διάνυσμα ξεκινά από το σημείο  $O$  και τερματίζει στο σημείο  $A$  ή το αντίθετο

Πολλές φορές η διεύθυνση και η φορά ονομάζονται με μια λέξη κατεύθυνση.

Όταν - και αυτό θα είναι ο κανόνας στη συνέχεια - ένα διάνυσμα σχεδιάζεται με αρχή το σημείο  $O$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$  και πέρας ένα σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$ , τότε λέμε ότι το διάνυσμα  $\vec{OA}$  έχει συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$ . Η τιμή  $x_0$  ονομάζεται τετμημένη και η  $y_0$  τεταγμένη, με το ζεύγος να ονομάζεται καρτεσιανές συντεταγμένες. Εύκολα μπορούμε να περιγράψουμε λοιπόν ένα διάνυσμα με βάση τις καρτεσιανές του συντεταγμένες στο επίπεδο.

Ένα άλλο δημοφιλές ζεύγος αριθμών που περιγράφουν ένα διάνυσμα είναι οι περίφημες πολικές συντεταγμένες<sup>1</sup> και οι οποίες μπορούν πολύ εύκολα να προκύψουν από τις καρτεσιανές. Δείτε στο Σχήμα 1.1 το ορθογώνιο τρίγωνο  $OAB$  που σχηματίζεται από το διάνυσμα  $\vec{OA}$  και τον οριζόντιο άξονα  $x'$ . Αν γράψουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$  έχουμε

$$\sin(\theta) = \eta(\theta) = \frac{y_0}{r} \quad (1.1)$$

$$\cos(\theta) = \sigma\nu(\theta) = \frac{x_0}{r} \quad (1.2)$$

$$\tan(\theta) = \varepsilon\varphi(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \quad (1.3)$$

με  $r$  την υποτείνουσα του τριγώνου αυτού,  $r = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς  $x_0, y_0$  τις δύο πρώτες σχέσεις:

$$x_0 = r \cos(\theta) \quad (1.4)$$

$$y_0 = r \sin(\theta) \quad (1.5)$$

και έτσι οι καρτεσιανές συντεταγμένες μας γράφονται

$$(x_0, y_0) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad (1.6)$$

Βλέπετε ότι ουσιαστικά οι συντεταγμένες μας εξαρτώνται από το μέτρο του διανύσματος  $\vec{OA}$ , που εδώ ονομάσαμε  $r = |\vec{OA}|$ , και από τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας  $x'$  και το διάνυσμα  $\vec{OA}$ . Αυτή η εξάρτηση μας οδηγεί να γράψουμε τις πολικές συντεταγμένες ως

$$<(r\angle\theta)> \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>Οχι εξ' αιτίας της θερμοκρασίας τους ή κάτι τέτοιο...

με  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Η γωνία  $\theta$  όμως; Πώς τη βρίσκουμε; Μα από την τελευταία σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών της, όπως τους παρουσιάσαμε παραπάνω:

$$\tan(\theta) = \epsilon\varphi(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \implies \theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} \quad (1.8)$$

με  $\tan^{-1}()$  να είναι η συνάρτηση της αντίστροφης εφαπτομένης (ή του τόξου εφαπτομένης), που πολλές φορές γράφεται και ως  $\arctan()$ . Οπότε συνολικά

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} \quad (1.9)$$

Προσέξτε όμως στο παρακάτω παράδειγμα μια επιπλοκή που μπορεί να συμβεί - και πρέπει να ελέγχετε - στην περίπτωση υπολογισμού της γωνίας  $\theta$ .

### Παράδειγμα 1.1:

Βρείτε την πολική μορφή των διανυσμάτων με συντεταγμένες  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  και  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ .

Λύση: Για το διάνυσμα  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  θα έχουμε

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad (1.10)$$

αποτελέσματα που συμβαδίζουν με τη θέση του διανύσματος στο επίπεδο. Για το διάνυσμα  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$  θα έχουμε

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad (!!!) \quad (1.11)$$

πράγμα που προφανώς είναι λάθος, καθώς η γωνία του διανύσματος είναι η  $5\pi/4$  (ή  $-3\pi/4$ ). Το παραπάνω “σφάλμα” οφείλεται στο ότι το τόξο εφαπτομένης επιστρέφει πάντα τιμές στο διάστημα  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Πρέπει να προσθέσετε  $\pm\pi$  στο αποτέλεσμα σας για να καταλήξετε στη σωστή γωνία<sup>2</sup>. Παρ' όλο που υπάρχει σαφής σχέση των προσήμων των  $x_0, y_0$  και του αποτελέσματος της  $\tan^{-1}()$ , για τις ανάγκες μας αρκεί να γνωρίζουμε ότι πρέπει να προσθέτουμε  $\pm\pi$  στο αποτέλεσμά μας αν αυτό δε συμβαδίζει με τη θέση του διανύσματός μας στο επίπεδο.

## 1.2.1 Ιδιότητες Διανυσμάτων

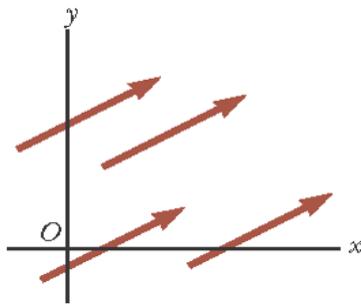
Ας παραθέσουμε τις πιο χρήσιμες ιδιότητες των διανυσμάτων.

- Ισότητα διανυσμάτων: δυο διανύσματα λέγονται ίσα αν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση και φορά (κατεύθυνση). Όλα τα διανύσματα του Σχήματος 1.2 είναι ίσα.
- Πρόσθιση διανυσμάτων: μπορούμε να προσθέσουμε γεωμετρικά δυο διανύσματα αν τοποθετήσουμε την αρχή του ενός στο πέρας του άλλου, όπως στο Σχήμα 1.3(α), όπου το διάνυσμα  $\vec{B}$  έχει τοποθετηθεί στη “μύτη” του διανύσματος  $\vec{A}$ . Το άθροισμα  $\vec{A} + \vec{B}$  είναι το διάνυσμα με αρχή την αρχή του  $\vec{A}$  και πέρας το πέρας του διανύσματος  $\vec{B}$ . Η ίδια φιλοσοφία βρίσκεται πίσω από κάθε άθροισμα διανυσμάτων, όσα κι αν είναι αυτά (Σχήμα 1.3(β)).
- Αντιμεταθετικότητα: η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας μας λέει ότι

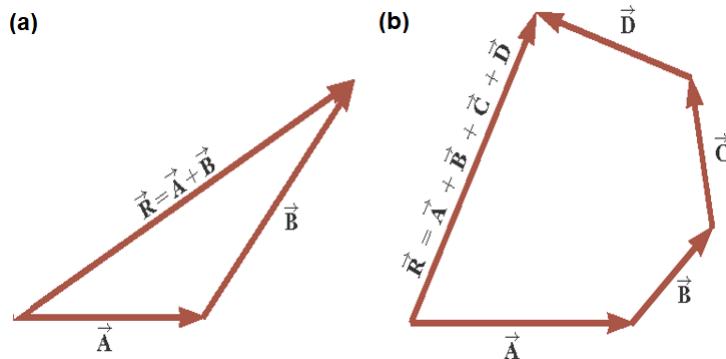
$$\vec{B} + \vec{A} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.12)$$

ή με άλλα λόγια, μπορεί κανείς να προσθέσει το διάνυσμα  $\vec{A}$  στο διάνυσμα  $\vec{B}$  ή το αντίστροφο. Δεν έχει σημασία δηλαδή με ποιά σειρά προσθέτετε δυο ή περισσότερα διανύσματα.

<sup>2</sup>Μπορείτε να σκεφτείτε τη σχέση  $\tan(\theta) = \lambda \iff \theta = k\pi + \tan^{-1}(\lambda), k \in \mathbb{Z}$



Σχήμα 1.2: Ίσα διανύσματα.

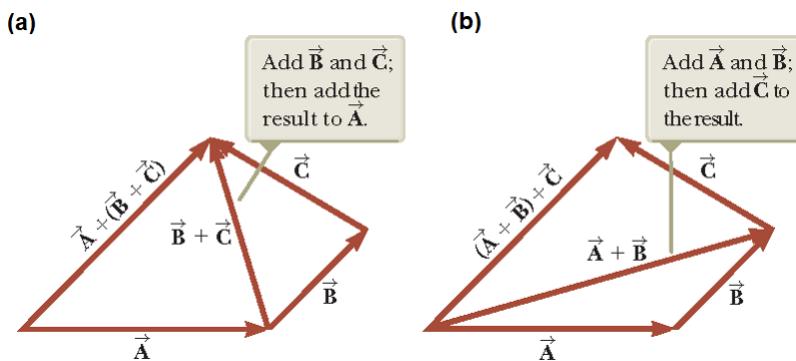


Σχήμα 1.3: Άθροισμα διανυσμάτων.

- Προσεταιριστικότητα: η ιδιότητα της προσεταιριστικότητας μας λέει ότι

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (1.13)$$

ή με άλλα λόγια, ότι το άθροισμα τριών ή περισσότερων διανυσμάτων μπορεί να γίνει με όποια σειρά μας βιολεύει. Δείτε το Σχήμα 1.4.

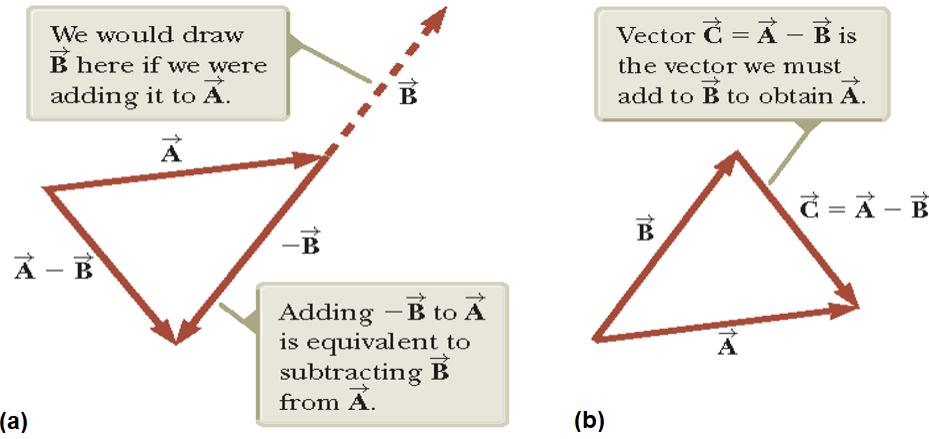


Σχήμα 1.4: Ιδιότητα της προσεταιριστικότητας.

- Αρνητικό διάνυσμα: το αρνητικό διάνυσμα  $-\vec{A}$  ενός διανύσματος  $\vec{A}$  ορίζεται ως το διάνυσμα που όταν προστεθεί στο διάνυσμα  $\vec{A}$  μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ.

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0} \quad (1.14)$$

Με άλλα λόγια, το αρνητικό του διανύσματος  $\vec{A}$  είναι το διάνυσμα με αρχή το πέρας του  $\vec{A}$  και πέρας την αρχή του  $\vec{A}$ . Με χρήση του αρνητικού διανύσματος μπορούμε να ορίσουμε πράξεις όπως η αφαίρεση



Σχήμα 1.5: Αφαίρεση διανυσμάτων.

διανυσμάτων. Δείτε το Σχήμα 1.5(α). Σε αυτό το σχήμα, θέλουμε να βρούμε το διάνυσμα  $\vec{A} - \vec{B}$  ή αλλιώς το διάνυσμα  $\vec{A} + (-\vec{B})$ , αν γνωρίζουμε τα διανύσματα  $\vec{A}, \vec{B}$ . Γνωρίζουμε πως να προσθέτουμε γεωμετρικά διανύσματα, ας το εκμεταλλευτούμε. Σχεδιάζουμε το διάνυσμα  $\vec{B}$  στο πέρας του διανύσματος  $\vec{A}$  σαν να θέλαμε να τα προσθέσουμε. Τότε, σχεδιάζουμε το διάνυσμα  $-\vec{B}$  που είναι το διάνυσμα με ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά από το  $\vec{B}$ . Στη συνέχεια προσθέτουμε γεωμετρικά τα δυο διανύσματα  $\vec{A}$  και  $-\vec{B}$  και βρίσκουμε το αποτέλεσμα. Στο Σχήμα 1.5(β), βλέπετε μια άλλη θεώρηση της αφαίρεσης  $\vec{A} - \vec{B}$ . Εστω ότι τα διανύσματα  $\vec{A}, \vec{B}$  έχουν κοινή αρχή (όπως συμβαίνει συχνά σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ ). Μπορείτε να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{C}$  που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα  $\vec{B}$  για να πάρουμε το διάνυσμα  $\vec{A}$ ; Αυτό είναι το διάνυσμα  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ ! Γιατί; Δείτε:

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{B} + (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{B} - \vec{B} + \vec{A} = \vec{A} \quad (1.15)$$

- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό: η ιδιότητα αυτή μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως

$$\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \implies |\vec{B}| = |m||\vec{A}| \text{ και } \begin{cases} \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, & m > 0 \\ \vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, & m < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

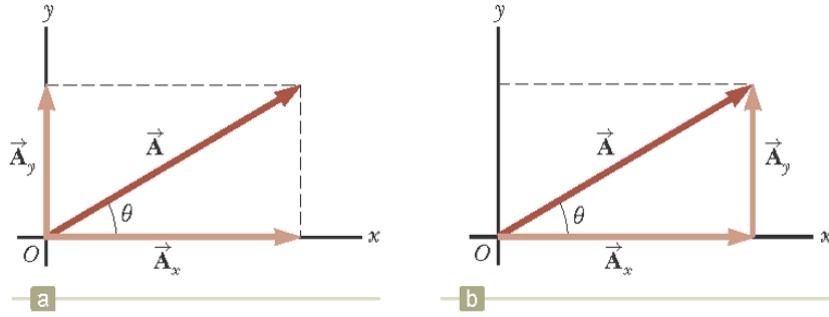
Το σύμβολο  $\uparrow\uparrow$  υποδηλώνει ότι δυο διανύσματα είναι ομόρροπα, δηλ. έχουν ίδια διεύθυνση και φορά, ενώ το σύμβολο  $\uparrow\downarrow$  δηλώνει ότι δυο διανύσματα είναι αντίρροπα, δηλ. έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά. Άρα ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό μεταβάλλει το μέτρο του διανύσματος (αν  $|m| \neq 1$ ), ενώ αν  $m < 0$  τότε του αλλάζει και τη φορά. Σε καμία περίπτωση ο πολλαπλασιασμός με αριθμό δε μεταβάλλει τη διεύθυνση (την ευθεία πάνω στην οποία κείται) του διανύσματος.

### 1.2.2 Ανάλυση σε συνιστώσες

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι με λίγη μελέτη δε θα έχετε πρόβλημα να κατανοήσετε καμία από της παραπάνω ιδιότητες των διανυσμάτων, διότι όπως τις παρουσιάσαμε οι περισσότερες έχουν μόνο γεωμετρική ερμηνεία. Θα θέλαμε να μπορούμε να βάλουμε στο παχνίδι τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που συναντήσαμε στην αρχή. Ένας πολύ βολικός τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι η περίφημη ανάλυση σε συνιστώσες ενός διανύσματος. Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι προηγούμενες ιδιότητες μπορούν να “αριθμητικοποιηθούν”.

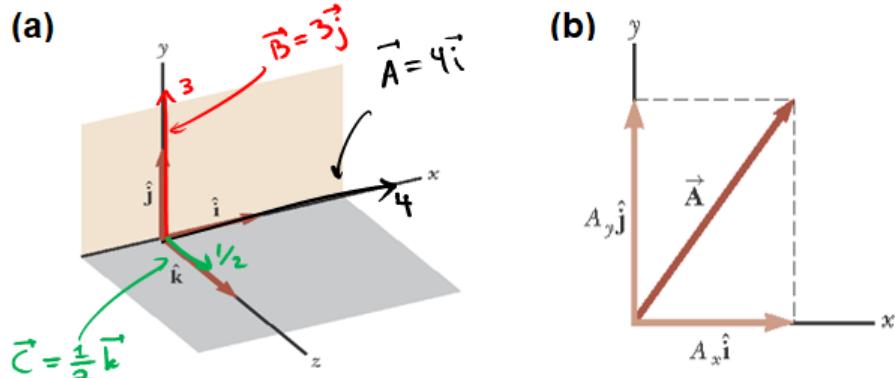
Η ανάλυση σε συνιστώσες βασίζεται σε μια απλή έννοια: την προβολή ενός διανύσματος επάνω στους άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$ . Δείτε το Σχήμα 1.6(a). Αν φέρετε την προβολή του διανύσματος  $\vec{A}$  επάνω στους δυο άξονες (δηλ. το διάνυσμα που ορίζεται αν φέρετε μια κάθετη προς τους άξονες από το πέρας του διανύσματος  $\vec{A}$ ) τότε δημιουργούνται δυο διανύσματα  $\vec{A}_x, \vec{A}_y$ . Αν μεταφέρετε το διάνυσμα  $\vec{A}_y$  παράλληλα έτσι ώστε η αρχή του να συναντήσει το πέρας του διανύσματος  $\vec{A}_x$ , τότε μπορείτε να τα προσθέσετε γεωμετρικά - Σχήμα 1.6(b) - και να δείτε ότι

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (1.17)$$



Σχήμα 1.6: Ανάλυση σε συνιστώσες.

Ένα ακόμα βήμα προς την απλοποίηση της κατάστασης γίνεται αν “εξοπλίσουμε” κάθε άξονα του συστήματος συντεταγμένων με ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Με αυτόν τον τρόπο μπορείτε να εκφράσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στο σύστημα συντεταγμένων συναρτήσει των μοναδιαίων διανύσματων. Για παράδειγμα, στον τριδιάστατο χώρο που ζούμε, χρειαζόμαστε τρια μοναδιαία διανύσματα για να περιγράψουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου (κι έτσι το διάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτό): αν χρεμάσετε μια μπάλα από το ταβάνι ενός μεγάλου, παραλληλόγραμμου δωματίου, πως θα περιγράψετε τη θέση της; Θα πρέπει να μιλήσετε για το πόσο απέχει από τον ένα τοίχο, πόσο από τον κάθετο σε αυτόν, και πόσο από το ταβάνι. Με άλλα λόγια θα μιλήσετε με όρους μήκους, πλάτους, ύψους, και πιθανότατα θα χρησιμοποιήσετε τη μονάδα του ενός μέτρου για να ορίσετε τη θέση της μπάλας. Ακριβώς αυτό το ρόλο του “ενός μέτρου” παίζουν τα μοναδιαία διανύσματα. Έχουμε συμφωνήσει να τα ονομάζουμε  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  και να τα αντιστοιχίζουμε στους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  του τριδιάστατου χώρου, όπως στο Σχήμα 1.7(a). Τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  έχουν τρια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά:



Σχήμα 1.7: Μοναδιαία διανύσματα στο χώρο και στο επίπεδο.

- Έχουν μέτρο μονάδα:  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ .
- Είναι κάθετα μεταξύ τους:  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ,  $\vec{j} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{i} \perp \vec{k}$ .

Ελάχιστες φορές θα μας απασχολήσει ο τριδιάστατος χώρος, οπότε ας μείνουμε στο διδιάστατο επίπεδο, όπου θα χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , όπως στο Σχήμα 1.7(b), όπου μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα  $\vec{A}$  ως

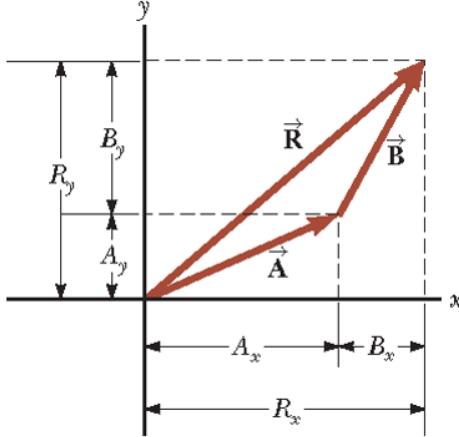
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad (1.18)$$

όπου τώρα τα  $A_x$ ,  $A_y$  είναι οι αριθμητικές τιμές που καταλήγει το πέρας των διανυσμάτων  $A_x \vec{i}$  και  $A_y \vec{j}$  πάνω στους βαθμονομημένους άξονες  $x$ ,  $y$ . Για παράδειγμα, το διάνυσμα  $\vec{A}$  με συντεταγμένες  $(3, -2)$  μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad (1.19)$$

δηλ. οι συνιστώσες του είναι οι  $\vec{A}_x = 3\vec{i}$  και  $\vec{A}_y = -2\vec{j}$ .

Πως είναι χρήσιμη μια τέτοια ανάλυση σε περιπτώσεις αθροίσματος διανυσμάτων; Σκεφτείτε ένα διάνυσμα  $\vec{R}$  το οποίο αποτελείται από το άθροισμα  $\vec{A} + \vec{B}$ , τα οποία σας είναι γνωστά, όπως στο Σχήμα 1.8. Αναλύοντας



Σχήμα 1.8: Ανάλυση σε συνιστώσες στην πρόσθεση διανυσμάτων.

σε συνιστώσες θα έχουμε

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.20)$$

$$= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) + (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) \quad (1.21)$$

Τα διανύσματα που σχετίζονται με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$  ουσιαστικά βρίσκονται στον ίδιο άξονα - τον  $x'$ , ενώ αυτά που σχετίζονται με το  $\vec{j}$  βρίσκονται επάνω στον άξονα  $y'$ . Η πρόσθεση διανυσμάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι τετριμένη γεωμετρικά, καθώς το άθροισμά τους θα βρίσκεται πάλι πάνω στον ίδιο άξονα που βρίσκονται και τα επιμέρους διανύσματα. Καταλαβαίνετε ότι για να βρείτε το άθροισμα τους απλά πρέπει να προσθέσετε τους συντελεστές τους, δηλ.

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} \quad (1.22)$$

$$= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (1.23)$$

$$= \vec{R}_x + \vec{R}_y \quad (1.24)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να εκφράσουμε ένα άθροισμα διανυσμάτων συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων απλά προσθέτουμε μεταξύ τους όλες τις επιμέρους συνιστώσες των διανυσμάτων που εμπλέκονται στο άθροισμα. Άραγε - και για να υμηθούμε τι έχουμε μάθει ως τώρα - πως θα ήταν η πολική μορφή του παραπάνω διανύσματος  $\vec{R}$ ;

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad (1.25)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \left( \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \right) \quad (1.26)$$

### Παράδειγμα 1.2:

Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \quad (1.27)$$

$$\vec{B} = (2\vec{i} - 4\vec{j}) \quad (1.28)$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή.

Λύση: Για την καρτεσιανή

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} \quad (1.29)$$

άρα το διάνυσμα  $\vec{A} + \vec{B}$  περιγράφεται από τις συντεταγμένες  $(4, -2)$ . Η πολική του μορφή περιγράφεται από το μέτρο του και τη γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα, δηλ.

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (1.30)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2}{4} \approx -26.5^\circ \quad (1.31)$$

Σχεδιάστε το διάνυσμα στο επίπεδο και επιβεβαιώστε ότι οι παραπάνω τιμές είναι λογικές.

### Παράδειγμα 1.3:

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά  $25 \text{ m}$  ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το “στέλνει”  $40 \text{ m}$  σε διεύθυνση  $60^\circ$  ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του (Δείτε το Σχήμα 1.9).

(α') Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.

(β') Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης  $\vec{R}$  του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το  $\vec{R}$  με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.

(γ') Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαρφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

Λύση:

(α') Τα διανύσματα της κίνησης φαίνονται στο σχήμα. Για καθένα από αυτά θα έχουμε

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad (1.32)$$

με

$$A_x = A \cos(\theta) = 25 \cos(-45^\circ) = \frac{25\sqrt{2}}{2} \approx 17.7 \text{ m} \quad (1.33)$$

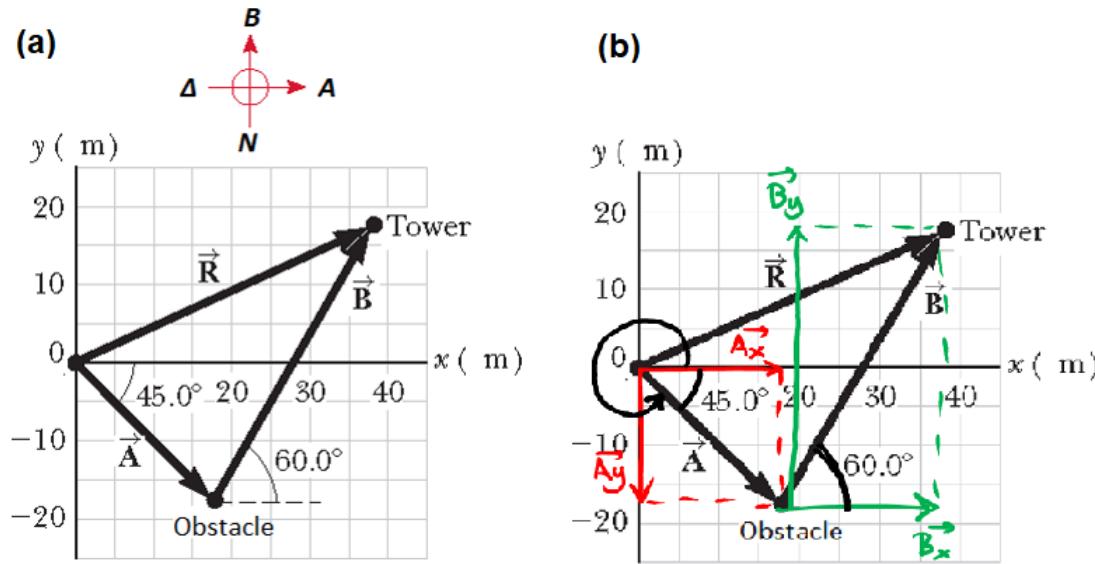
$$A_y = A \sin(\theta) = 25 \sin(-45^\circ) = -\frac{25\sqrt{2}}{2} \approx -17.7 \text{ m} \quad (1.34)$$

Προσέξτε ότι το σχήμα ναι μεν σκιαγραφεί μια γωνία  $45^\circ$  αλλά η πραγματική γωνία είναι  $360 - 45 = 325^\circ$  ή  $-45^\circ$ ! Αντίστοιχα,

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (1.35)$$

με

$$B_x = B \cos(\theta) = 40 \cos(60^\circ) = 40 \frac{1}{2} = 20 \text{ m} \quad (1.36)$$



Σχήμα 1.9: Κίνηση ρομπότ στο αεροδρόμιο.

$$B_y = B \sin(\theta) = 40 \sin(60^\circ) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 34.7 \text{ m} \quad (1.37)$$

(β') Είναι

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (1.38)$$

$$= (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} \quad (1.39)$$

$$= 37.7 \vec{i} + 17.0 \vec{j} \quad (1.40)$$

(γ') Η πορεία του από τον πύργο ελέγχου ως τη συμβολή των αξόνων περιγράφεται από το διάνυσμα

$$\vec{R}' = -\vec{R} \quad (1.41)$$

οπότε

$$\vec{R}' = -\vec{R} = -37.7 \vec{i} - 17.0 \vec{j} \quad (1.42)$$

Οπότε

$$|\vec{R}'| = \sqrt{(-37.7)^2 + (-17.0)^2} \approx 41.35 \text{ m} \quad (1.43)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-17.0}{-37.7} \approx 24.2^\circ \quad (1.44)$$

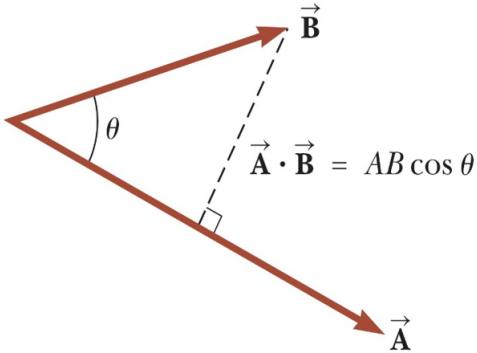
που προφανώς δεν αντιστοιχεί στο διάνυσμα που έχουμε, άρα η σωστή απάντηση είναι  $\theta \approx -155.7^\circ$  ή  $\theta \approx 204.2^\circ$ .

### 1.2.3 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θεωρήστε δυο διανύσματα  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  όπως στο Σχήμα 1.10. Το εσωτερικό γινόμενο τους είναι μια βαθμωτή ποσότητα (αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = AB \cos(\theta) \quad (1.45)$$

με  $\theta$  τη μεταξύ τους γωνία. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $B \cos(\theta)$  δεν είναι άλλη από την προβολή του διανύσματος  $\vec{B}$  επάνω στο  $\vec{A}$ . Η προβολή αυτή μπορεί να γραφεί ως  $\vec{B}_{\perp A} = B \cos(\theta) \vec{A}$ . Άρα το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να διατυπωθεί ως το μέτρο του διανύσματος  $\vec{A}$  επί την προβολή του  $\vec{B}$  στο  $\vec{A}$ . Μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι:



Σχήμα 1.10: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

- Αντιμεταθετικότητα:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Επιμεριστικότητα:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Από τον ορισμό μπορούμε να ζεχωρίσουμε τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

- $\vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}|$
- $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}| |\vec{B}|$

Πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ανάλυση σε συνιστώσες όταν έχουμε να κάνουμε με εσωτερικά γινόμενα; Κατ' αρχάς, από τις ακριβώς προηγούμενες ιδιότητες μπορούμε να εξάγουμε ότι

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (1.46)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \quad (1.47)$$

Με βάση αυτά, αν έχουμε δυο διανύσματα  $\vec{A}, \vec{B}$  που γράφονται ως

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1.48)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad (1.49)$$

τότε το εσωτερικό τους γινόμενο καταλήγει να είναι πολύ απλό!

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.50)$$

Προφανώς για κίνηση στο επίπεδο, η συνιστώσα  $X_z$  δε θα μας απασχολήσει.

#### Παράδειγμα 1.4:

Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ δυο διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \quad (1.51)$$

$$\vec{B} = (-\vec{i} + 2\vec{j}) \quad (1.52)$$

Λύση: Θα έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) \quad (1.53)$$

αλλά δε γνωρίζουμε τη γωνία  $\theta$ ! Οπότε πρέπει να δοκιμάσουμε την εύρεση του εσωτερικού γινομένου με χρήση συνιστωσών και των σχέσεων (1.46, 1.47).

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 4 \quad (1.54)$$

Η γωνία τώρα μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{65}} \approx 60^\circ \quad (1.55)$$

Μπορείτε να σχεδιάσετε τα διανύσματα στο επίπεδο και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα;

### 1.3 Παράγωγος

Αυτή η παράγραφος προσφέρεται ως υπενθύμιση των πολύ βασικών στοιχείων της έννοιας της παραγώγου, ώστε να προχωρήσουμε μετά στην έννοια του ολοκληρώματος. Αν  $f(x)$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $x$  τότε ορίζουμε την παράγωγο  $f'(x)$  ή  $\frac{d}{dx}f(x)$  ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.56)$$

Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση  $f(x)$  συναρτήσει του  $x$  κοντά στο  $x_0$ . Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τη 2η, 3η,  $n$ -οστή παράγωγο και συμβολίζουμε ως

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x), \quad f^{(n)} = \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}f(x) \quad (1.57)$$

Η παράγωγος  $f'(x_0)$  ερμηνεύται γεωμετρικά ως ο συντελεστής της ευθείας που εφάπτεται στη συνάρτηση  $f(x)$  στο σημείο  $x = x_0$ , υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι η παράγωγος είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός. Η εφαπτομένη στο σημείο  $x = x_0$  της συνάρτησης  $f(x)$  γράφεται ως

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.58)$$

Οι παρακάτω πίνακες συνοψίζουν γνωστούς κανόνες παραγώγισης, καθώς και τις παραγώγους κάποιων γνωστών συναρτήσεων που θα μας χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Κανόνες Παραγώγισης			
Κανόνας	Παράγωγος	Κανόνας	Παράγωγος
Άθροισμα	$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$	Σύνθεση	$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$
Πηλίκο	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$	Σταθερά	$c' = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}$
Γινόμενο	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Αντίστροφη	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Πίνακας 1.1: Πίνακας Κανόνων Παραγώγισης.

### 1.4 Ολοκλήρωση

Χαλαρά μιλώντας, η ολοκλήρωση είναι μια πράξη αντίστροφη της παραγώγισης. Θα προσπαθήσουμε σε αυτήν την παράγραφο να δώσουμε τα πολύ βασικά στοιχεία της πράξης της ολοκλήρωσης, καθώς για μια αναλυτική μελέτη θα απαιτούνται μέχρι και ζεχωριστό σύγγραμμα. Ας ξεκινήσουμε με ένα παραδειγμα. Ξέρουμε ότι

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \quad (1.59)$$

## Γνωστές Παράγωγοι

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
$e^{ax}$	$ae^{ax}, a \in \mathbb{R}$	$x^n$	$nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
$\ln(f(x))$	$f'(x) \frac{1}{f(x)}$	$\sin(f(x))$	$f'(x) \cos(f(x))$
$\cos(f(x))$	$-f'(x) \sin(f(x))$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Πίνακας 1.2: Πίνακας Γνωστών Ζευγών Παραγώγων.

Αν θέλαμε να βρούμε ποιά συνάρτηση πρέπει να παραγωγίσουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση  $3x^2$ , τότε η παραπάνω σχέση θα μας έλεγε ότι η αυτή είναι η συνάρτηση  $x^3$ . Συμβολικά

$$\int 3x^2 dx = x^3 \quad (1.60)$$

με  $\int$  το σύμβολο της ολοκλήρωσης. Γενικότερα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης  $F(x)$ , αναζητούμε μια συνάρτηση  $f(x)$  - η οποία ονομάζεται παράγουσα - την οποία αν παραγωγίσουμε θα πάρουμε την  $F(x)$ , δηλ. αναζητούμε μια συνάρτηση  $f(x)$  για την οποία ισχύει

$$f'(x) = F(x) \quad (1.61)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται αόριστο, γιατί δεν ορίζουμε ρητά σε ποιό διάστημα του  $x$  ολοκληρώνουμε - θα καταλάβετε τη διαφορά όταν το συγχρίνουμε παρακάτω με ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Ένα αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το  $x$  εδώ). Το σύμβολο  $dx$  δηλώνει τη μεταβλητή ολοκλήρωσης και δεν παίζει κάποιο ρόλο<sup>3</sup> στην όλη διαδικασία, εκτός από κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είπαμε ότι

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \quad (1.62)$$

Όμως ισχύει και

$$\frac{d}{dx} (x^3 + c) = 3x^2 \quad (1.63)$$

για κάθε  $c \in \mathbb{R}$ , αφού η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν. Άρα είναι πιο σωστό να πούμε ότι:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.64)$$

Πιο γενικά λοιπόν, αν  $F(x) = f'(x)$  θα πρέπει να ισχύει

$$\int F(x) dx = f(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.65)$$

Αντίθετα, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_a^b F(x) dx \quad (1.66)$$

και υπολογίζεται ως

$$\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) \quad (1.67)$$

<sup>3</sup>Μιλώντας χωρίς αυστηρότητα και στα πλαίσια χρήσης του ολοκληρώματος.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα αριθμός και όχι συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος), και προφανώς δεν περιλαμβάνει ποτέ κάποια σταθερά  $c$  στο αποτέλεσμα. Γεωμετρικά, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα από το  $a$  ως το  $b$  μπορεί να ερμηνευτεί ως η “επιφάνεια” κάτω από τη συνάρτηση  $F(x)$ , η οποία ορίζεται από την ευθεία  $x = a$  και την ευθεία  $x = b$ .

Παρακάτω βλέπετε δύο πίνακες με τις πιο γνωστές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και τα πιο χρήσιμα ζεύγη ολοκληρωμάτων.

Γνωστά Ολοκληρώματα

A/A	Ιδιότητα	A/A	Ιδιότητα
1	$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, a \in \mathbb{R}$	2	$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3	$\int_a^a f(x)dx = 0$	4	$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
5	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	6	$\int_a^b cdx = c(b-a)$

Πίνακας 1.3: Πίνακας Ιδιοτήτων Ολοκληρωμάτων.

Γνωστά Ολοκληρώματα

A/A	Ολοκλήρωμα	A/A	Ολοκλήρωμα
1	$\int dx = x + c, c \in \mathbb{R}$	2	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}, n \neq -1$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	4	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
5	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	6	$\int e^x dx = e^x + c$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c$	8	$\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$

Πίνακας 1.4: Πίνακας Γνωστών Ολοκληρωμάτων.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### Παράδειγμα 1.5:

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int (x^2 + 3x + 2)dx, \quad \int_0^1 (x^2 + 3x + 2)dx \quad (1.68)$$

Λύση: Ψάχνουμε μια συνάρτηση  $f(x)$  της οποίας η παράγωγος θα είναι  $x^2 + 3x + 2$ . Ας δοκιμάσουμε την  $x^3 + 3x^2 + 2x$ . Θα είναι

$$(x^3 + 3x^2 + 2x)' = 3x^2 + 6x + 2 \quad (1.69)$$

Βλέπετε ότι η μόνη διαφορά με τη συνάρτηση που ψάχνουμε είναι στους συντελεστές του πολυωνύμου. Θα θέλαμε να λείπει το 3 από το  $3x^2$  και το 6 να ήταν 3 (δηλ. το μισό) στον όρο  $6x$ . Ας δοκιμάσουμε λοιπόν τη

συνάρτηση

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{3}{2}2x + 2 = x^2 + 3x + 2 \quad (1.70)$$

Βρήκαμε λοιπόν τη ζητούμενη συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μας δίνει αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμά μας. Οπότε

$$\int (x^2 + 3x + 2)dx = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)' dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \quad (1.71)$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, δεν αλλάζει σε τίποτα η σκέψη πίσω από τον υπολογισμό του. Η παραπάνω γραμμή μετατρέπεται σε

$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 2)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)' dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{32}{6} \quad (1.72)$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι η επιφάνεια κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $x^2 + 3x + 2$  από το σημείο  $x = 0$  ως το σημείο  $x = 1$  είναι ίση με  $23/6$ .

### Παράδειγμα 1.6:

Τυπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int e^{ax}dx, \int_0^1 e^{ax}dx \quad (1.73)$$

Λύση: Ψάχνουμε μια συνάρτηση  $f(x)$  της οποίας η παράγωγος θα είναι  $e^{ax}$ . Ας δοκιμάσουμε την ίδια συνάρτηση. Είναι

$$(e^{ax})' = (ax)' e^{ax} = ae^{ax} \implies \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' = e^{ax} \quad (1.74)$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η  $f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$ . Οπότε

$$\int e^{ax}dx = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \quad (1.75)$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δεν αλλάζει κάτι στη φιλοσοφία, εκτός από την παραπάνω γραμμή που γίνεται

$$\int_0^1 e^{ax}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a}e^{ax} \Big|_0^1 = \frac{1}{a}(e^a - 1) \quad (1.76)$$

### 1.4.1 Αλλαγή μεταβλητής

Κάποιες φορές τα ολοκληρώματα που θα συναντήσουμε (στον ηλεκτρομαγνητισμό κυρίως) δε θα μπορέσουμε να τα λύσουμε με τη μέθοδο της παράγουσας, όπως παραπάνω. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να καταφύγουμε στη λύση έτοιμων πινάκων ολοκληρωμάτων αλλά πολλές φορές ίσως μια απλή αλλαγή μεταβλητής στο δοσμένο ολοκλήρωμα να μας λύνει τα χέρια.

Η τεχνική αυτή μπορεί να συνοψισθεί ως εξής. Αν

$$\int F(g(x))g'(x)dx \quad (1.77)$$

το ζητούμενο ολοκλήρωμα, τότε μπορούμε να θέσουμε  $u = g(x)$ , με  $du = g'(x)dx$ . Σε περίπτωση ορισμένου ολοκληρώματος με άκρα  $a, b$  τότε  $u_a = g(a)$  και  $u_b = g(b)$ . Έτσι το ολοκλήρωμά μας θα γράφεται

$$\int F(u)du \quad (1.78)$$

ή σε περίπτωση που είναι ορισμένο

$$\int_{u_a}^{u_b} F(u)du \quad (1.79)$$

με  $u = g(x)$ , όπως είπαμε. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 1.7:

Τιπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 2x\sqrt{x^2 + 1}dx \quad (1.80)$$

Λύση: Δεν είναι απλό να βρεί κανείς την παράγουσα της συνάρτησης  $2x\sqrt{x^2 + 1}$ , οπότε μπορεί να καταφύγει σε άλλες τεχνικές όπως η αλλαγή μεταβλητής. Ας θέσουμε

$$u = x^2 + 1 = g(x) \quad (1.81)$$

και χρησιμοποιώντας τις διοσμένες σχέσεις

$$\frac{d}{dx}u = g'(x) = 2x \implies du = 2xdx \quad (1.82)$$

Τα άκρα του ολοκληρώματος μεταβάλλονται ως

$$u_0 = g(0) = 1 \quad (1.83)$$

$$u_1 = g(1) = 2 \quad (1.84)$$

Το ολοκλήρωμά μας τώρα μπορεί να γραφεί ως

$$\int_0^1 2x\sqrt{x^2 + 1}dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}(2xdx) = \int_1^2 \sqrt{u}du \quad (1.85)$$

με το τελευταίο ολοκλήρωμα να υπολογίζεται εύκολα! Θα έχουμε

$$\int_1^2 u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) \quad (1.86)$$

► Θέλετε να δοκιμάσετε τα παρακάτω, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής;

### Παράδειγμα 1.8:

Τιπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \log(e^x + e^{-x}) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.87)$$

$$\int_0^1 xe^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \quad (1.88)$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \quad (1.89)$$

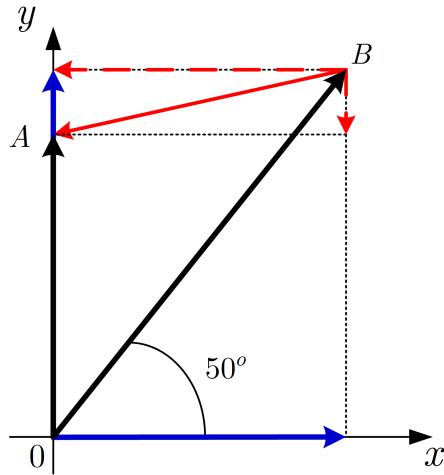
Λύση: Δική σας. :)

## 1.5 Ασκήσεις

### Παράδειγμα 1.9:

Ένας εξερευνητής χειμερινών ορεινών περιοχών πέφτει σε χιονοθύελλα στο δρόμο της επιστροφής του προς την κατασκήνωση. Κανονικά, θα έπρεπε να ταξιδέψει 5.6 χιλιόμετρα βόρεια, αλλά όταν κόπασε η χιονοθύελλα κατάλαβε ότι ταξίδεψε 7.8 χιλιόμετρα υπό γωνία  $50^\circ$  βορειοανατολικά (γωνία με τον άξονα  $x'$ -δύση προς ανατολή). Πόση απόσταση και σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να ταξιδέψει πλέον για να φτάσει στην κατασκήνωση;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 1.11. Ζητούμε το διάνυσμα  $\vec{BA}$  σε πολική μορφή, και παρατηρούμε ότι



Σχήμα 1.11: Σχήμα Ασκησης 1.9.

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} \quad (1.90)$$

Από εκφώνηση ξέρουμε ότι  $|\vec{OA}| = 5.6$  και  $|\vec{OB}| = 7.8$ . Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$\vec{OB} = OB_x \vec{i} + OB_y \vec{j} = OB \cos(50^\circ) \vec{i} + OB \sin(50^\circ) \vec{j} = 5.013 \vec{i} + 5.975 \vec{j} \text{ km} \quad (1.91)$$

$$\vec{OA} = OA_x \vec{i} + OA_y \vec{j} = 0 \vec{i} + OA_y \vec{j} = OA_y \vec{j} = 5.6 \vec{j} \text{ km} \quad (1.92)$$

αφού το  $\vec{OA}$  βρίσκεται πάνω στον άξονα  $y'$ . Ήρα

$$\vec{BA}_x = \vec{OA}_x - \vec{OB}_x = OA_x \vec{i} - OB_x \vec{i} = 0 \vec{i} - OB \cos(50^\circ) \vec{i} = -OB \cos(50^\circ) \vec{i} = -5.013 \vec{i} \quad (1.93)$$

$$\vec{BA}_y = \vec{OA}_y - \vec{OB}_y = OA_y \vec{j} - OB_y \vec{j} = 5.6 \vec{j} - 5.975 \vec{j} = -0.375 \vec{j} \text{ km} \quad (1.94)$$

Ετσι

$$\vec{BA} = -5.013 \vec{i} - 0.375 \vec{j} \text{ km} \quad (1.95)$$

Οπότε

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(-5.013)^2 + (-0.375)^2} = 5.027 \text{ km} \quad (1.96)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-0.375}{-5.013} = 4.3^\circ \quad (1.97)$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στη σωστή γωνία, προσθέτοντας  $\pi$  όμως παίρνουμε  $\theta = 184.3^\circ$ .

**Παράδειγμα 1.10:**

Ένα μυρμήγκι, που έχει “τρελαθεί” από την αφύσικη ζέστη του Ηρακλείου, κινείται βαριεστημένα σε ένα  $xy$  επίπεδο. Πραγματοποιεί τέσσερις στάσεις, με συντεταγμένες  $(30, 40)$ ,  $(b_x, -70)$ ,  $(-20, c_y)$ ,  $(-80, -70)$  (όλες εκφρασμένες σε cm). Η συνολική μετατόπιση των τεσσάρων στάσεων του έχει συντεταγμένες  $(-140, -20)$ .

(α') Βρείτε τα  $b_x$ ,  $c_y$ .

(β') Ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση (γωνία σε σχέση με οριζόντιο άξονα) της συνολικής του μετατόπισης;

Λύση:

Κάθε ζεύγος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μετατόπισης. Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί στις επιμέρους συνιστώσες και γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των  $x$ -συνιστώσων πρέπει να ισούται με τη  $x$ -συνιστώσα της συνολικής μετατόπισης. Ακριβώς το ίδιο και για την  $y$ -συνιστώσα.

(α') Στον  $x$ -άξονα

$$30 + b_x - 20 - 80 = -140 \iff b_x = -70.0 \text{ cm} \quad (1.98)$$

και στον  $y$ -άξονα

$$40 - 70 + c_y - 70 = -20 \iff c_y = 80.0 \text{ cm} \quad (1.99)$$

(β') Η συνολική μετατόπιση έχει συντεταγμένες  $(-140.0, -20.0)$  οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-140)^2 + (-20)^2} = 141.42 \text{ cm} \quad (1.100)$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης με τον άξονα  $x'$  είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-20}{-140} \approx 8.13^\circ \quad (1.101)$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στο σωστό αποτέλεσμα γιατί το διάνυσμα  $(-140, -20)$  βρίσκεται στο 3o τεταρτημόριο ενώ η γωνία που βρήκαμε μόλις στο 1o, οπότε προσθέτοντας  $180^\circ$  παίρνουμε

$$\theta = 188.13^\circ \quad (1.102)$$

**Παράδειγμα 1.11:**

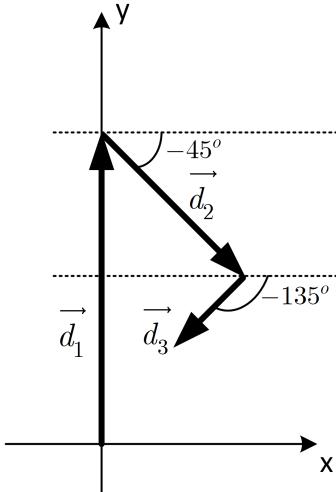
Στο γνωστό παιχνίδι του γκολφ, έχετε τρεις προσπάθειες για να βάλετε το μπαλόκι μέσα στην τρύπα, χτυπώντας το διαδοχικά. Μια και δεν είστε και ο Tiger Woods, εξαντλείτε όλες σας τις προσπάθειες. Στο πρώτο χτύπημα, το μπαλόκι μετακινείται  $3.66$  μέτρα βόρεια, στο δεύτερο  $1.83$  μέτρα νοτιοανατολικά, και στο τελευταίο (που βάζετε και το μπαλόκι στην τρύπα)  $0.91$  νοτιοδυτικά. Υποθέτοντας γωνίες  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = -45^\circ$ ,  $\theta_3 = -135^\circ$ , ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της μετατόπισης που απαιτείται ώστε το μπαλόκι να καταλήξει στην τρύπα με την πρώτη προσπάθεια;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.90, και έχοντας  $d_1 = 3.66$ ,  $d_2 = 1.83$ ,  $d_3 = 0.91$ , αναλύουμε σε συνιστώσες και έχουμε

$$d_x = d_1 \cos(\theta_1) + d_2 \cos(\theta_2) + d_3 \cos(\theta_3) \quad (1.103)$$

$$= d_1 \cos(90^\circ) + d_2 \cos(-45^\circ) + d_3 \cos(-135^\circ) \quad (1.104)$$

$$= 0.65 \text{ m} \quad (1.105)$$



Σχήμα 1.12: Χτυπήματα golf.

και

$$d_y = d_1 \sin(\theta_1) + d_2 \sin(\theta_2) + d_3 \sin(\theta_3) \quad (1.106)$$

$$= d_1 \sin(90^\circ) + d_2 \sin(-45^\circ) + d_3 \sin(-135^\circ) \quad (1.107)$$

$$= 1.72 \text{ m} \quad (1.108)$$

Οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{0.65^2 + 1.72^2} = 1.83 \text{ m} \quad (1.109)$$

Τέλος η γωνία θα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1.72}{0.65} = 69.3^\circ \quad (1.110)$$

η οποια είναι σωστή, καθώς το διάνυσμα  $\vec{d}$  βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.**Παράδειγμα 1.12:**

Ένας ταχυδρόμος οδηγεί το φορτηγό που παραδίδει τα δέματα κατά μήκος της διαδρομής που φαίνεται στο Σχήμα 1.13. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε συνιστώσες, υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση (σε σχέση με τον άξονα  $x'$ ) της συνολικής μετατόπισής του.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 1.14. Θέτουμε τη συμβολή των αξόνων στην αρχή του διανύσματος  $\vec{A}$ . Αναλύοντας κάθε διάνυσμα σε συνιστώσες, θα έχουμε

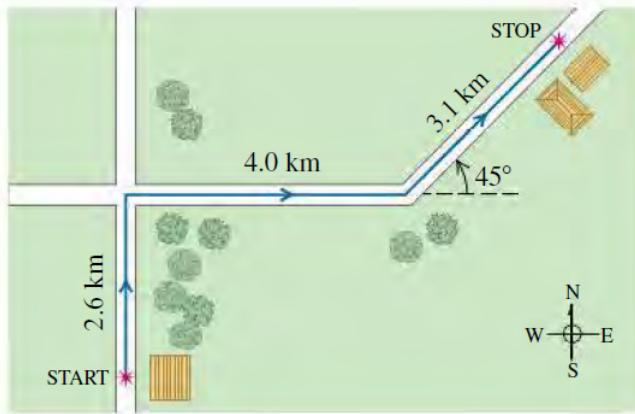
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \quad (1.111)$$

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + C_x \vec{i} + C_y \vec{j} \quad (1.112)$$

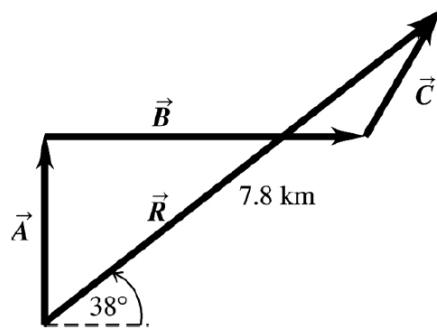
Από το σχήμα

$$A_x = 0 \quad (1.113)$$

$$B_y = 0 \quad (1.114)$$



Σχήμα 1.13: Σχήμα Ασκησης 1.12.



Σχήμα 1.14: Λύση Ασκησης 1.12.

οπότε

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + C_x \vec{i} + C_y \vec{j} \quad (1.115)$$

και άρα

$$R_x = B_x + C_x \quad (1.116)$$

$$R_y = A_y + C_y \quad (1.117)$$

με

$$B_x = 4.0, C_x = C \cos(45^\circ) = 3.1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.55\sqrt{2}, A_y = 2.6, C_y = C \sin(45^\circ) = 3.1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.55\sqrt{2} \quad (1.118)$$

Άρα

$$R_x = 1.55\sqrt{2} + 4.0 = 6.192 \quad (1.119)$$

$$R_y = 2.6 + 1.55\sqrt{2} = 4.782 \quad (1.120)$$

Έτσι

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6.192^2 + 4.782^2} = 7.823 \text{ m} \quad (1.121)$$

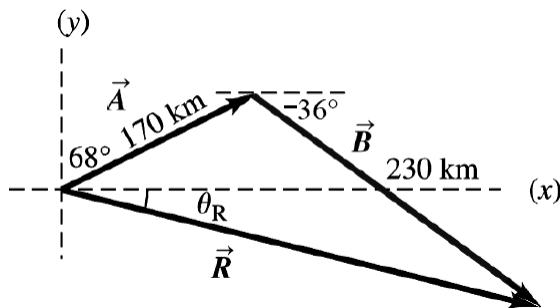
$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 37.678^\circ \quad (1.122)$$

Παράδειγμα 1.13:

Ένα αεροπλάνο απογειώνεται από το Ηράκλειο και πετά 170 χιλιόμετρα υπό γωνία  $22^\circ$ , μετά στρίβει και πετά άλλα 230 χιλιόμετρα υπό γωνία  $-36^\circ$ , και τελικά εκτελεί αναγκαστική προσγείωση σε ένα μικρό νησί. Όταν το αεροδρόμιο στείλει αποστολή διάσωσης, σε ποιά κατεύθυνση και πόσο μακριά πρέπει αυτό να πετάξει ώστε να φτάσει κατ' ευθείαν στο αεροσκάφος; Όλες οι γωνίες είναι με αναφορά τον άξονα  $x'$ .

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 1.15. Θέτουμε τη συμβολή των αξόνων στο αεροδρόμιο. Έστω  $\vec{R}$  το διάνυσμα της συνολικής



Σχήμα 1.15: Σχήμα Άσκησης 1.13.

μεταπόπισης. Αναλύοντας σε συνιστώσες, θα έχουμε

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.123)$$

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (1.124)$$

με

$$A_x = A \cos(22^\circ) = 157.62, B_x = B \cos(-36^\circ) = 186.07, A_y = A \sin(22^\circ) = 63.683, B_y = B \sin(-36^\circ) = -135.19 \quad (1.125)$$

Αριθμούμενα

$$R_x = A_x + B_x = 343.69 \quad (1.126)$$

$$R_y = A_y + B_y = -71.507 \quad (1.127)$$

Έτσι

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 351.05 \text{ km} \quad (1.128)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = -11.753^\circ \quad (1.129)$$

Παράδειγμα 1.14:

Έστω δύο διανύσματα

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ m} \quad (1.130)$$

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \text{ m} \quad (1.131)$$

Βρείτε

- (α') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος  $\vec{a}$
- (β') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος  $\vec{b}$
- (γ') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος  $\vec{a} + \vec{b}$
- (δ') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος  $\vec{b} - \vec{a}$
- (ε') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος  $\vec{a} - \vec{b}$
- (φ') τη γωνία μεταξύ του διανύσματος  $\vec{b} - \vec{a}$  και του  $\vec{a} - \vec{b}$

Λύση:

(α') Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m} \quad (1.132)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{4} = -36.87^\circ \quad (1.133)$$

(β') Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m} \quad (1.134)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ \quad (1.135)$$

(γ') Θα είναι

$$\vec{a} + \vec{b} = 10\vec{i} + 5\vec{j} \text{ m} \quad (1.136)$$

οπότε

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.137)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{10} = 26.565^\circ \quad (1.138)$$

(δ') Θα είναι

$$\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} \text{ m} \quad (1.139)$$

οπότε

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.140)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{11}{2} = 79.69^\circ \quad (1.141)$$

(ε') Θα είναι

$$\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} - 11\vec{j} \text{ m} \quad (1.142)$$

οπότε

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.143)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-11}{-2} = 259.69^\circ \quad (1.144)$$

(φ') Παρατηρούμε ότι

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \quad (1.145)$$

άρα τα διανύσματα είναι αντίθροπα, και η μεταξύ τους γωνία θα είναι ίση με  $180^\circ$ .

Παράδειγμα 1.15:

Τρια διανύσματα δίνονται ως

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad (1.146)$$

$$\vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \quad (1.147)$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad (1.148)$$

Υπολογίστε τα

$$(\alpha') \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(\beta') \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Λύση:  
 $\frac{\Lambda}{(\alpha')}$  Είναι

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \quad (1.149)$$

$$= (3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \quad (1.150)$$

$$= 3 \times 1 + 3 \times (-2) + (-2) \times 3 = -9 \quad (1.151)$$

(β') Είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}) \quad (1.152)$$

$$= 3 \times (-3) + 3 \times (-6) + (-2) \times 1 = -29 \quad (1.153)$$

Παράδειγμα 1.16:

Το διάνυσμα  $\vec{B}$  προστίθεται στο διάνυσμα  $\vec{A}$  και το αποτέλεσμα είναι  $6\vec{i} + \vec{j}$ . Αν το  $\vec{B}$  αφαιρεθεί από το  $\vec{A}$  το αποτέλεσμα είναι  $-4\vec{i} + 7\vec{j}$ . Ποιό είναι το μέτρο του  $\vec{A}$  και ποιό του  $\vec{B}$ ;

Λύση:  
 $\frac{\Lambda}{\Theta \alpha}$  είναι

$$\vec{B} + \vec{A} = 6\vec{i} + \vec{j} \quad (1.154)$$

και

$$\vec{A} - \vec{B} = -4\vec{i} + 7\vec{j} \quad (1.155)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$2\vec{A} = 2\vec{i} + 8\vec{j} \implies \vec{A} = \vec{i} + 4\vec{j} \quad (1.156)$$

Αριθμούντας κατά μέλη

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123 \quad (1.157)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη

$$2\vec{B} = 10\vec{i} - 6\vec{j} \implies \vec{B} = 5\vec{i} - 3\vec{j} \quad (1.158)$$

Αριθμούντας

$$|\vec{B}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = 5.831 \quad (1.159)$$

**Παράδειγμα 1.17:**

Σας δίνονται δυο διανύσματα  $\vec{a} = 5\vec{i} - 6.5\vec{j}$  και  $\vec{b} = 3.5\vec{i} - 7\vec{j}$ . Ένα τρίτο διάνυσμα  $\vec{c}$ , βρίσκεται στο  $xy$  επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{a}$  και το εσωτερικό του γινόμενο με το διάνυσμα  $\vec{b}$  ισούται με 15. Βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{c}$ .

Λύση:

Έστω  $\vec{a} = 5\vec{i} - 6.5\vec{j}$  και  $\vec{b} = 3.5\vec{i} - 7\vec{j}$ , ενώ  $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$ . Ισχύει ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \iff 5c_1 - \frac{13}{2}c_2 = 0 \quad (1.160)$$

γιατί καθετότητα σημαίνει εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Επίσης

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 15 \iff \frac{7}{2}c_1 - 7c_2 = 15 \quad (1.161)$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\vec{c} = -\frac{390}{49}\vec{i} - \frac{300}{49}\vec{j} \quad (1.162)$$

**Παράδειγμα 1.18:**

Τηλογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων ως προς  $x$ :

$$(\alpha') \quad y(x) = \ln(\cos(x))$$

$$(\beta') \quad y(x) = [\ln(x^2 + 1)]^2 - \ln[(x^2 + 1)^2]$$

$$(\gamma') \quad y(x) = (3x - 2)^4(5x^2 + 3)^{2/3}$$

$$(\delta') \quad y(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

Λύση:

( $\alpha'$ )

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\ln(\cos(x)) = (\cos(x))' \frac{1}{\cos(x)} = -\sin(x) \frac{1}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad (1.163)$$

( $\beta'$ )

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\left([\ln(x^2 + 1)]^2 - \ln[(x^2 + 1)^2]\right) = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)]^2 - \frac{d}{dx}\ln[(x^2 + 1)^2] \quad (1.164)$$

$$= 2(x^2 + 1)' \ln(x^2 + 1) \frac{1}{x^2 + 1} - 2(x^2 + 1)' \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{4x}{x^2 + 1} \ln(x^2 + 1) - \frac{4x}{x^2 + 1} \quad (1.165)$$

$$= \frac{4x(\ln(x^2 + 1) - 1)}{x^2 + 1} \quad (1.166)$$

( $\gamma'$ )

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}(3x - 2)^4(5x^2 + 3)^{2/3} = (5x^2 + 3)^{2/3} \frac{d}{dx}[(3x - 2)^4] + (3x - 2)^4 \frac{d}{dx}[(5x^2 + 3)^{2/3}] \quad (1.167)$$

$$= 12(3x - 2)^3(5x^2 + 3)^{2/3} + \frac{2}{3}(5x^2 + 3)^{-1/3}(10x)(3x - 2)^4 \quad (1.168)$$

$$= 12(3x - 2)^3(5x^2 + 3)^{2/3} + \frac{2}{3} \frac{(10x)(3x - 2)^4}{(5x^2 + 3)^{1/3}} \quad (1.169)$$

$$= \frac{12(3x-2)^3(5x^2+3)}{(5x^2+3)^{1/3}} + \frac{2}{3} \frac{(10x)(3x-2)^4}{(5x^2+3)^{1/3}} \quad (1.170)$$

$$= \frac{36(3x-2)^3(5x^2+3) + 2(10x)(3x-2)^4}{3(5x^2+3)^{1/3}} \quad (1.171)$$

$$= \frac{4(3x-2)^3(60x^2-10x+27)}{3(5x^2+3)^{1/3}} \quad (1.172)$$

(δ')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2+2)'(x^2-1) - (x^2-1)'(x^2+2)}{(x^2-1)^2} \quad (1.173)$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{6x}{(x^2-1)^2} \quad (1.174)$$

**Παράδειγμα 1.19:**

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha') \int_{-2}^0 (x^2-4)^2 dx$$

$$(\beta') \int_1^2 \left(2x^3 + \frac{5}{x^4}\right) dx$$

$$(\gamma') \int \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(\delta') \int \left[ \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) \right] dx$$

Λύση:  
(α')

$$\int_{-2}^0 (x^2-4)^2 dx = \int_{-2}^0 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \int_{-2}^0 x^4 dx - 8 \int_{-2}^0 x^2 dx + 16 \int_{-2}^0 dx \quad (1.175)$$

$$= \frac{x^5}{5} \Big|_{x=-2}^{x=0} - 8 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-2}^{x=0} + 16x \Big|_{x=-2}^{x=0} \quad (1.176)$$

$$= 0 + \frac{32}{5} - 8(0 + \frac{8}{3}) + 16(0 + 2) = \frac{256}{15} \quad (1.177)$$

(β')

$$\int_1^2 \left(2x^3 + \frac{5}{x^4}\right) dx = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 \frac{5}{x^4} dx = 2 \int_1^2 x^3 dx + 5 \int_1^2 x^{-4} dx \quad (1.178)$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1}^{x=2} + 5 \frac{-x^{-3}}{3} \Big|_{x=1}^{x=2} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{215}{24} \quad (1.179)$$

(γ')

$$\int \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{x}} dx = \int (2x+1)(x-1)x^{-1/2} dx = \int (2x^{3/2} - x^{1/2} - x^{-1/2}) dx \quad (1.180)$$

$$= 2 \int x^{3/2} dx - \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx \quad (1.181)$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2} + c_1 - \frac{2}{3}x^{3/2} + c_2 - 2x^{-1/2} + c_3 \quad (1.182)$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} + c \quad (1.183)$$

(δ')

$$\int \left[ \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) \right] dx = \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx \quad (1.184)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + c_1 - \frac{1}{x} + c_2 - \log(|x|) + c_3 \quad (1.185)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \log|x| + c \quad (1.186)$$





## 2. Μηχανική

### 2.1 Εισαγωγή

#### 2.2 Κίνηση σε Μια Διάσταση

Ως μονοδιάστατη ή κίνηση σε μια διάσταση ορίζουμε την κίνηση ενός σώματος σε έναν οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα. Ως σώμα υπεωρούμε ένα αδιάστατο σωματίδιο, δηλ. ένα σωματίδιο με απειροστά μικρό μέγεθος. Το σώμα όπως το ορίσαμε αποτελεί ένα μοντέλο πραγματικών σωμάτων, με μη αμελητέες διαστάσεις. Παρ' ότι τα πραγματικά σώματα δεν είναι αδιάστατα, το μοντέλο που υιοθετούμε εδώ είναι ιδιαίτερα αποδοτικό, βολικό, και χρήσιμο - οπότε όταν το εφαρμόζουμε σε κάθε πρόβλημα που θα μας απασχολήσει.

Η κινητική - κι όχι μόνο η μονοδιάστατη - καθορίζεται από λίγους ορισμούς, ιδιαίτερα απλούς και εύκολους, που όμως χρειάζονται προσοχή. Αυτοί είναι:

1. Η θέση ενός σώματος
2. Η μετατόπιση ενός σώματος
3. Η ταχύτητα ενός σώματος
4. Η επιτάχυνση ενός σώματος

##### 2.2.1 Θέση

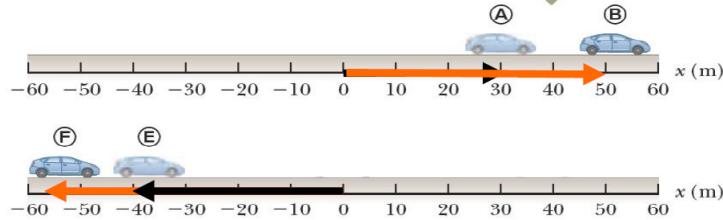
Η θέση  $\vec{x}$  ενός σώματος επάνω στον άξονα αναφοράς δεν είναι τίποτε άλλο από ένα διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με το σημείο αναφοράς (συχνά το 0). Η θέση αποτελεί διανυσματικό μέγεθος: η διεύθυνση του διανύσματος θέσης όταν είναι υποχρεωτικά παράλληλη της ευθείας που γίνεται η κίνηση. Θα υεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται επάνω σε ένα βαθμονομημένο άξονα και το πρόσημο του σημείου που βρίσκεται το σώμα όταν μας υποδηλώνει τη φορά του διανύσματος θέσης. Η θέση του σώματος μπορεί να είναι θετική ή αρνητική - ως αλγεβρική τιμή. Θετική τιμή σημαίνει ότι το διάνυσμα ζεκινά από ένα σημείο αναφοράς και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα. Αντίθετα έχουν τα πράγματα για την αρνητική τιμή. Για παράδειγμα, τα διανύσματα θέσης

$$\vec{x} = 2\vec{i}, \vec{x} = 4\vec{j} \quad (2.1)$$

υποδηλώνουν ένα σώμα που βρίσκεται στις θετικές τιμές ενός οριζόντιου ή κατακόρυφου άξονα. Αντίθετα, τα διανύσματα θέσης

$$\vec{x} = -2\vec{i}, \vec{x} = -4\vec{j} \quad (2.2)$$

υποδηλώνουν ένα σώμα που βρίσκεται στις αρνητικές τιμές ενός οριζόντιου ή κατακόρυφου άξονα. Δείτε το Σχήμα 2.1, όπου ένα σώμα (αυτοκίνητο μεν, αλλά θεωρείται ως σημείο δε) βρίσκεται σε διαφορετικές θέσεις επάνω σε έναν οριζόντιο άξονα, και έχουμε σημειώσει τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης, τα οποία ξεκινούν πάντα από το σημείο 0. Βλέπετε ότι σε θετικά σημεία του βαθμονομημένου άξονα, το διάνυσμα θέσης έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά ενώ σε αρνητικά σημεία του άξονα η κατεύθυνση του είναι προς τα αριστερά. Η



Σχήμα 2.1: Διανύσματα θέσης σε μονοδιάστατη κίνηση.

θέση μπορεί να είναι μεταβαλλόμενο διάνυσμα ως προς το χρόνο  $t$ , οπότε αρκετές φορές θα το γράψουμε ως  $\vec{x}(t)$ .

### 2.2.2 Μετατόπιση

Η μετατόπιση  $\Delta\vec{x}$  αφορά τη μεταβολή θέσης ενός σώματος. Ας δούμε τον ορισμό:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i \quad (2.3)$$

με τους δείκτες  $i, f$  να υποδηλώνουν τις λέξεις initial-αρχική και final-τελική, για τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης. Οπότε το  $\vec{x}_f$  είναι ένα διάνυσμα που δηλώνει την τελική θέση ενός σωματιδίου και  $\vec{x}_i$  το διάνυσμα αρχικής θέσης του σωματιδίου. Άρα η μετατόπιση αποτελεί τη διαφορά δύο διανυσμάτων - ως εκ τούτου, αποτελεί κι αυτή ένα διάνυσμα! Ως τέτοιο, θα έχει κι αυτό μέτρο, διεύθυνση, και φορά, όπως κάθε διάνυσμα: η διεύθυνση του θα είναι αναγκαστικά παράλληλη του άξονα κίνησης, το μέτρο του θα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος, ενώ η φορά της θα εξαρτάται από ένα πρόσημο. Ποιό πρόσημο; Ας κάνουμε μια απλή σύμβαση:

- Αν

$$\Delta\vec{x} = x_f \vec{i} - x_i \vec{i} = (x_f - x_i) \vec{i} \quad (2.4)$$

τότε αν  $x_f - x_i > 0$ , τότε το σώμα κινήθηκε από τα αριστερά προς τα δεξιά, και άρα το διάνυσμα μετατόπισης θα “χοιτάζει” προς τα δεξιά.

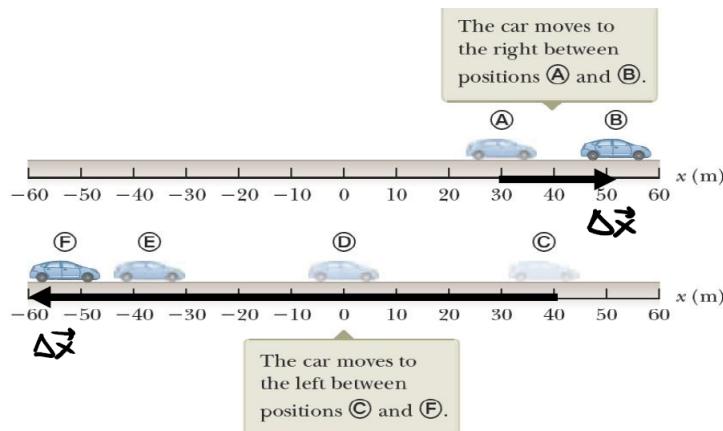
- Αν

$$\Delta\vec{x} = x_f \vec{i} - x_i \vec{i} = (x_f - x_i) \vec{i} \quad (2.5)$$

τότε αν  $x_f - x_i < 0$ , το σώμα κινήθηκε από τα δεξιά προς τα αριστερά, και άρα το διάνυσμα μετατόπισης θα “χοιτάζει” προς τα αριστερά.

Οι τιμές  $x_i, x_f$  όπως παρουσιάστηκαν στα παραπάνω δύο σημεία δεν αποτελούν διανύσματα αλλά την τιμή του βαθμονομημένου άξονα στην οποία βρίσκεται το σώμα στην αρχική και στην τελική του θέση. Δείτε το Σχήμα 2.2. Στο επάνω σχήμα, η τιμή  $x_i$  του σώματος είναι 30 m ενός η τιμή  $x_f$  είναι 50 m. Οπότε

$$\Delta x = x_f - x_i = 50 - 30 = 20 \text{ m} \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.2: Διάνυσμα μετατόπισης.

που είναι θετική ποσότητα, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το σώμα μετατοπίστηκε προς τα δεξιά, δηλ.  $\Delta\vec{x} = 20\vec{i}$  m. Αντίθετα, στο κάτω σχήμα η τιμή  $x_i$  του σώματος είναι 40 m ενός η τιμή  $x_f$  είναι -60 m. Οπότε

$$\Delta x = x_f - x_i = -60 - 40 = -100 \text{ m} \quad (2.7)$$

που είναι αρνητική ποσότητα, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το σώμα μετατοπίστηκε προς τα αριστερά, δηλ.  $\Delta\vec{x} = -100\vec{i}$  m.

Προσέξτε το εξής σημείο: η μετατόπιση  $\Delta\vec{x}$  δεν είναι το ίδιο με την απόσταση  $d$  που διανύει ένα σώμα. Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα: ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας προπονείται σε ένα στάδιο που διαθέτει μόνο έναν ευθύγραμμο τάπητα. Ο αθλητής πραγματοποιεί πολλά “πάνω-κάτω” στον τάπητα και μπορούμε εύκολα να υποθέσουμε ότι η απόσταση που διανύει αντιστοιχεί σε μερικά χιλιόμετρα. Αν όμως υποθέσουμε ότι η αρχική του θέση είναι στην εκχίνηση του τάπητα και η τελική του θέση ξανά εκεί (αφού τελειώνοντας την προπόνηση επιστρέφει ξανά στην αριθμητική), τότε η μετατόπιση του είναι μηδενική, καθώς τα διανύσματα αρχικής και τελικής θέσης είναι τα ίδια! Ακόμα όμως κι αν τελειώσει την προπόνηση του σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο του ευθύγραμμου τάπητα, το διάνυσμα μετατόπισης δε θα είναι μηδενικό αλλά σίγουρα το μέτρο του θα είναι πολύ μικρότερο της συνολικής απόστασης που διένυσε κατά την προπόνηση του.<sup>1</sup>

### 2.2.3 Ταχύτητα

Η έννοια της ταχύτητας σας είναι περισσότερο γνωστή από την καθημερινότητα. Ταχύτητα σημαίνει ουσιαστικά πόσο γρήγορα τρέχετε, δηλ. πόσο γρήγορα μεταβάλλετε τη θέση σας. Με άλλα λόγια, πόσο μεταβάλλεται η θέση σας σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα - άφα στην έννοια της ταχύτητας υπεισέρχεται και η έννοια του χρόνου. Ας ξεκινήσουμε από τη μέση ταχύτητα, που ορίζεται ως

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Από τον παραπάνω ορισμό, καταλαβαίνετε ότι η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα κι αυτή: έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά. Το μέτρο της αποτελεί το μέτρο του λόγου  $\Delta\vec{x}/\Delta t$ , η διεύθυνση είναι παράλληλη του άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση, και η φορά είναι όμοια με τη φορά του διανύσματος μετατόπισης  $\Delta\vec{x}$ . Γιατί; Γιατί προφανώς ο παρονομαστής  $\Delta t$  είναι πάντα θετικός, οπότε δε μεταβάλλει τη φορά του διανύσματος του αριθμητή.

Παρατηρήστε ότι απαιτούνται δύο σημεία για τον ορισμό της μέσης ταχύτητας: ένα αρχικό και ένα τελικό, όπως και στον ορισμό της μετατόπισης.

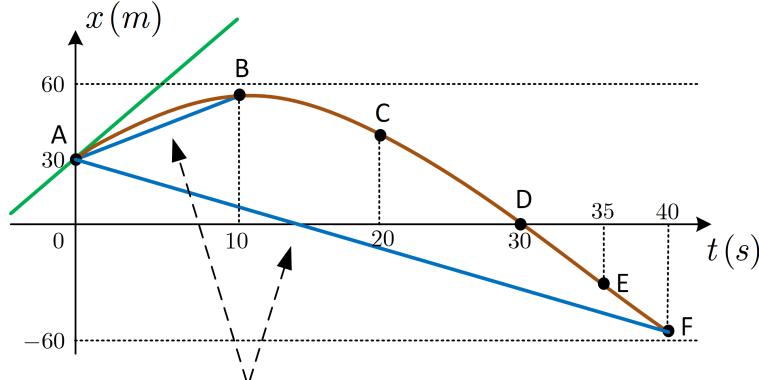
Ενώ λοιπόν η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα, η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος και ορίζεται από το λόγο

$$s_{avg} = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.9)$$

<sup>1</sup>Απλά μην πείτε ποτέ σε έναν αθλητή δρόμων ότι στην προπόνηση του η μετατόπιση του ήταν μηδενική :-)

όπου  $d$  η απόσταση που διένυσε το σώμα. Προσέξτε τη λεπτή διαφορά - σκεφτείτε ξανά το παράδειγμα με το δρομέα: ο δρομέας που προπονείται πάνω-κάτω σε ευθύγραμμο τάπητα ξεκινά και τελειώνει την προπόνηση του από την αφετηρία. Το διάνυσμα της μετατόπισης του είναι μηδενικό, και έτσι και η μέση του ταχύτητα είναι μηδενική. Προφανώς η μέση αριθμητική ταχύτητα του είναι πολύ διαφορετική του μηδενός.

Ας δούμε κατάρχας ένα παράδειγμα. Δείτε το Σχήμα 2.3. Βλέπετε ένα διάγραμμα θέσης ενός σώματος



Ευθείες  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AF}$ : Η κλίση τους ισούται με τη μέση ταχύτητα

Σχήμα 2.3: Διάγραμμα θέσης - χρόνου σώματος.

συναρτήσει του χρόνου. Το σώμα ξεκινά στη θέση (A), η οποία είναι  $x_A = 30 \text{ m}$ , στην οποία και πατάμε το χρονόμετρο μας ( $t = 0$ ). Στην συνέχεια το σώμα κινείται στη θέση (B), (C), κλπ, ως και τη θέση (F). Ας πάρουμε τις θέσεις (A), (B). Η τιμή της μέσης ταχύτητας θα είναι

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{55 - 30}{10 - 0} = 2.5 \text{ m/s} \quad (2.10)$$

δηλ.  $\vec{u}_{avg} = 2.5\vec{i} \text{ m/s}$ , με φορά ίδια με τη φορά του διανύσματος  $\vec{x}$ .

Αν τώρα φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (A), (B), τότε αυτό βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση - μαντέψτε -  $\lambda = 2.5!$  Δε θα σας κάνει εντύπωση αν σκεφτείτε ότι έχετε δύο σημεία με συντεταγμένες (A)  $(t_1, x_1)$ , (B)  $(t_2, x_2)$  και σχηματίζετε το λόγο  $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ , που είναι ακριβώς ο συντελεστής ευθείας της ευθείας που περνά από τα (A), (B). Ταυτόχρονα, είναι και ο ορισμός της μέσης ταχύτητας!

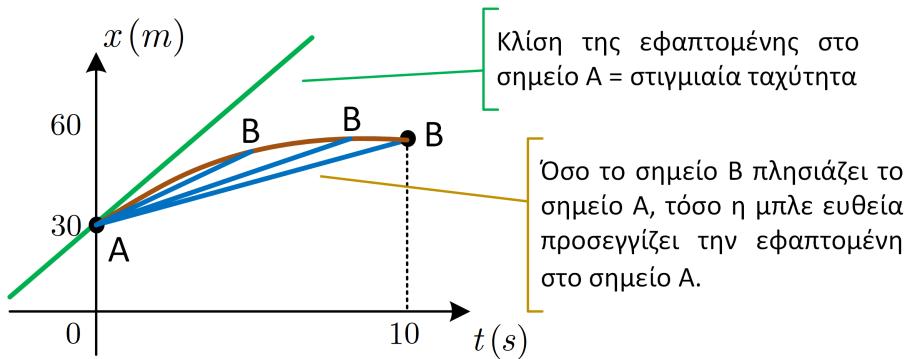
Αν επίσης φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (A), (F), τότε αυτό βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση  $\lambda = -9/4!$  Επιβεβαιώστε ότι πράγματι η μέση ταχύτητα έχει την τιμή  $-9/4 \text{ m/s}$ , με το πρόσημο να δηλώνει ότι το σώμα κινήθηκε από δεξιά προς τα αριστερά.

Η μέση ταχύτητα είναι πρακτικά το διάνυσμα της μετατόπισης πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό  $1/\Delta t$ , δηλ. είναι ένα διάνυσμα ακριβώς όπως η μετατόπιση αλλά είτε μεγαλύτερου είτε μικρότερου μήκους. Η μέση ταχύτητα όπως και η μέση αριθμητική ταχύτητα έχουν μια έννοια "μέσου όρου" καθώς εκφράζουν μεταβολές θέσης ανά χρονικό διάστημα μεταξύ δύο θέσεων, οι οποίες συνήθως απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Σε μια μεγάλη μετατόπιση λοιπόν, που το σώμα μπορεί να αλλάζει συνεχώς θέση, και η οποία μπορεί να εκτελείται σε σημαντικό χρονικό διάστημα, η μέση (αριθμητική) ταχύτητα δε μας δίνει καμιά πληροφορία για τι συνέβη στο σώμα σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές, ανάμεσα στην αρχική,  $t_i$ , και στην τελική,  $t_f$ , χρονική στιγμή. Αυτή την πληροφορία μας τη δίνει η στιγμιαία ταχύτητα, η οποία ορίζεται ως

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \quad (2.11)$$

Παρατηρήστε απ'τον ορισμό ότι η στιγμιαία ταχύτητα όχι μόνο είναι διάνυσμα αλλά φαίνεται να υπολογίζεται από την παράγωγο του διανύσματος θέσης! Παράγωγος διανύσματος - ακούγεται τρομακτικό αλλά δεν είναι. ☺

Στο ίδιο σχήμα (Σχ. 2.3) έχουμε σχεδιάσει και μια τρίτη ευθεία, με πράσινο χρώμα, την οποία αξίζει να εξετάσουμε ξεχωριστά, στο Σχήμα 2.4. Παρατηρήστε ότι πλησιάζουμε το σημείο (B) όλο και πιο κοντά στο



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα θέσης - χρόνου σώματος μεταξύ (A), (B).

σημείο (A). Τι σημαίνει αυτό; Ότι μετράμε πιο μικρές χρονικές μεταβολές  $\Delta t$ . Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε μια μετατόπιση και μια μέση ταχύτητα του σώματος οι οποίες συνέβησαν σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Τι θα συμβεί αν το σημείο (B) πλησιάσει πάρα πολύ το σημείο (A); Σημαίνει ότι οι μετρήσεις μας θα είναι χρονικά πολύ κοντά μεταξύ τους. Ακόμα περισσότερο, τι θα συμβεί αν το σημείο (B) πλησιάσει “απειροστά κοντά” το σημείο (A); Τότε προφανώς οι χρονικές στιγμές που μετράμε τείνουν να ταυτιστούν, οπότε  $\Delta t \rightarrow 0$ , δηλ. υπολογίζουμε πλέον το  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , το οποίο είναι το όριο του λόγου μεταβολής της θέσης ως προς το χρόνο. Με άλλα λόγια, είναι η πρώτη παράγωγος της θέσης ως προς το χρόνο! Όπως γνωρίζετε ήδη, η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο μας δίνει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας που περνά από το σημείο. Ταυτόχρονα, μας δίνει και τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος στο σημείο αυτό!

Ας επαληθεύσουμε όλα τα παραπάνω σε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.1:

Έστω ότι ένα σώμα κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = -4t + 2t^2 \quad (2.12)$$

με  $x(t)$  τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή  $t$  σε μέτρα,  $t$  το χρόνο σε δευτερόλεπτα, όπως στο Σχήμα 2.5.

- (α') Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα  $t = 0$  ως  $t = 1$  και από  $t = 1$  ως  $t = 3$  s.
- (β') Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δύο διαστήματα.
- (γ') Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή  $t = 2.5$  s.

Λύση:

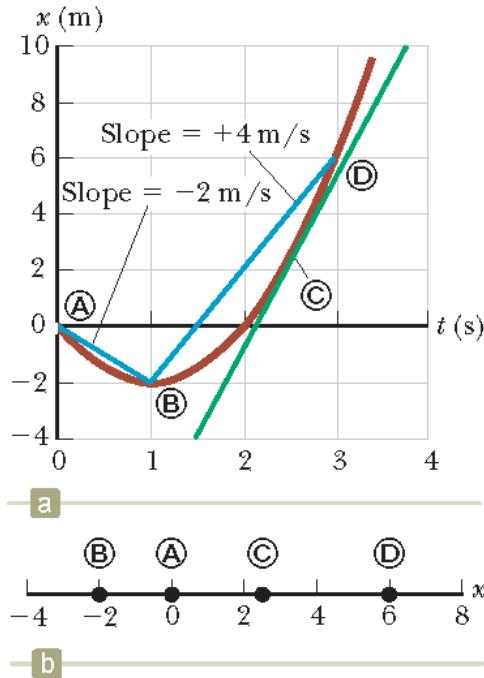
(α') Για τη μετατόπιση έχουμε

$$\Delta x = x_{t=1} - x_{t=0} = -2 - 0 = -2 \text{ m} \quad (2.13)$$

και

$$\Delta x = x_{t=3} - x_{t=1} = -12 + 18 - (-2) = 8 \text{ m} \quad (2.14)$$

Οπότε από τα πρόσημα καταλαβαίνουμε ότι η κίνηση (A)  $\rightarrow$  (B) είναι μια κίνηση από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ η κίνηση (B)  $\rightarrow$  (D) είναι μια κίνηση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τελικά,  $\Delta \vec{x}_{0 \rightarrow 1} = -2 \vec{i}$  m και  $\Delta \vec{x}_{1 \rightarrow 3} = 8 \vec{i}$  m.



Σχήμα 2.5: Παραδειγμα κίνησης σε οριζόντιο άξονα.

(β') Αντίστοιχα, η μέση ταχύτητα δίνεται ως

$$u_{avg} = \frac{x_{t=1} - x_{t=0}}{1 - 0} = \Delta x_{0 \rightarrow 1} = -2 \text{ m/s} \quad (2.15)$$

και

$$u_{avg} = \frac{x_{t=3} - x_{t=1}}{3 - 1} = \Delta x_{1 \rightarrow 3} = 4 \text{ m/s} \quad (2.16)$$

Επιβεβαιώστε από το σχήμα ότι πράγματι οι κλίσεις των ευθειών έχουν τις τιμές που πρέπει. Οπότε  $\vec{u}_{avg}^{0 \rightarrow 1} = -2\vec{i}$  m/s και  $\vec{u}_{avg}^{1 \rightarrow 3} = 4\vec{i}$  m/s.

(γ') Για τη στιγμιαία ταχύτητα όμως χρειαστεί να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση  $x(t)$  ή να βρούμε την εφαπτομένη ευθεία στο  $t = 2.5$ . Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τη δεύτερη λύση - προσεγγιστικά, από το σχήμα - οπότε ας δούμε την πρώτη.

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t \quad (2.17)$$

Για  $t = 2.5$ , έχουμε  $u(2.5) = 6$  m/s, και άρα η ταχύτητα όμως είναι της μορφής  $\vec{u}(2.5) = 6\vec{i}$  m/s.

#### 2.2.4 Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τη περίπτωση όπου ένα σώμα κινείται υπό σταθερή ταχύτητα. Αν η τελευταία είναι σταθερή τότε η μέση ταχύτητα ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα - καταλαβαίνετε γιατί; Αν λοιπόν  $u_x = u_{avg} =$  σταθερή, τότε

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \iff \Delta x = u_{avg} \Delta t \iff x_f - x_i = u_{avg} \Delta t \iff x_f = x_i + u_{avg} \Delta t \quad (2.18)$$

και αν συμβολίσουμε ως  $u$  την ταχύτητα

$$x_f = x_i + u(t_f - t_i) \iff x_f = x_i + ut_f \quad (2.19)$$

αν υεωρήσουμε ότι  $t_i = 0$ , δηλ. ότι πατήσαμε το χρονόμετρο στη θέση  $x_i$ . Το μέτρο αυτης της ταχύτητας είναι σταθερό, όπως είπαμε, και ισούται με

$$u = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.20)$$

με  $d$  το μήκος της απόστασης που διανύθηκε. Οπότε

Σχέσεις Ευθύγραμμης Κίνησης με Σταθερή Ταχύτητα	
A/A	Σχέση
1	$x_f = x_i + ut$

Πίνακας 2.1: Πίνακας Σχέσεων Κίνησης με Σταθερή Ταχύτητα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.2:

Κατά τη διάρκεια ενός δυνατού φταρνίσματος, τα μάτια σας μπορεί να κλείσουν για περίπου 0.5 s. Αν οδηγείτε ένα αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα 90 km/h και φταρνιστείτε, πόσο μακριά θα κινηθεί το αυτοκίνητό σας κατά το φτάρνισμα;

Λύση:

Θεωρούμε ευθύγραμμη την κίνησή μας, με  $x_i = 0$  και  $t_i = 0$  τη στιγμή που ξεκινάμε το φτάρνισμα, και  $x_f = 0.5$  s όταν σταματάμε το φτάρνισμα. Η ταχύτητά μας είναι σταθερή και ίση με  $u_x = 90$  km/h, δηλ.  $u_x = 25$  m/s. Άρα από την εξίσωση ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή ταχύτητα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t = 0 + 25 \cdot 0.5 = 12.5 \text{ m} \quad (2.21)$$

### 2.2.5 Επιτάχυνση

Όπως ακριβώς ορίσαμε την ταχύτητα ως το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θέση ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου, δε θα ήταν αραίο να ορίσουμε το αντίστοιχο για την ταχύτητα, δηλ. πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα; Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της επιτάχυνσης.

Ας ξεκινήσουμε από τη μέση επιτάχυνση, ακολουθώντας ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με τις έννοιες της ταχύτητας. Η μέση επιτάχυνση ορίζεται ως

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i} \quad (2.22)$$

ξανά με τους δείκτες  $i, f$  να δηλώνουν μια αρχική και μια τελική μέτρηση. Η μέση επιτάχυνση είναι επίσης διάνυσμα, αφού η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Επίσης, η αλγεβρική τιμή της διατηρεί το ίδιο πρόσημο με τη μεταβολή της ταχύτητας, αφού ο όρος  $1/\Delta t$  είναι πάντα θετικός, κι άρα έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα της  $\Delta \vec{u}$ .

Συνεχίζοντας, μπορούμε να ορίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση ως το λόγο μεταβολής της ταχύτητας όταν οι χρονικές στιγμές που παίρνουμε τις μετρήσεις μας σχεδόν συμπίπτουν, δηλ. όταν  $\Delta t \rightarrow 0$ :

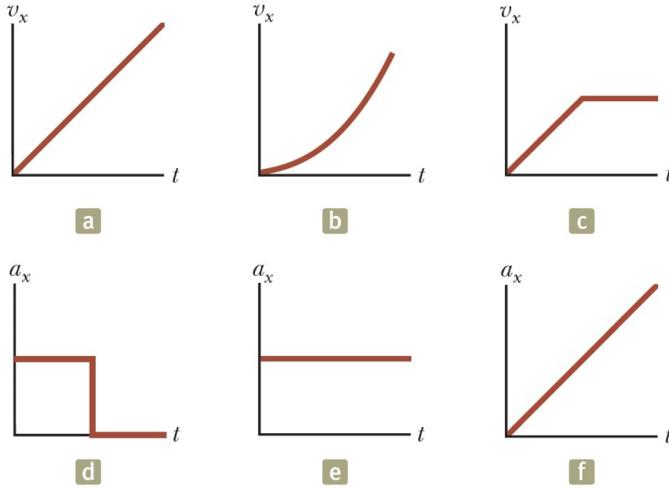
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) \quad (2.23)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης  $\vec{x}$  ως προς το χρόνο, οπότε

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) \quad (2.24)$$

Παράδειγμα 2.3:

Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας - επιτάχυνσης στα παρακάτω σχήματα του Σχήματος 2.6.



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα γραφημάτων ταχύτητας - επιτάχυνσης.

Λύση: Ξέρουμε ότι η επιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας. Οπότε για την ταχύτητα του Σχήματος 2.6(a), ξέρουμε ότι η παράγωγος της είναι μια σταθερά, δηλ. η επιτάχυνση που της αντιστοιχεί φαίνεται στο Σχήμα 2.6(e). Επίσης, το Σχήμα 2.6(b) δείχνει ένα πιθανότατα δευτεροβάθμιο πολυωνύμο του  $t$ . Η παράγωγος του θα είναι ένα πρωτοβάθμιο πολυωνύμο του  $t$ , άρα μια πλάγια ευθεία, δηλ. το Σχήμα 2.6(f). Τέλος, το Σχήμα 2.6(c) δείχνει μια ταχύτητα που περιγράφεται από μια πλάγια ευθεία ακολουθούμενη από μια σταθερή συνάρτηση του  $t$ . Παραγωγίζοντας τμηματικά, καταλήγουμε στην επιτάχυνση που περιγράφεται από το Σχήμα 2.6(d).

Παράδειγμα 2.4:

Η θέση ενός σώματος δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3 \quad (2.25)$$

- (α') Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο.
- (β') Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο.
- (γ') Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή  $t_0$  που το σωματίδιο είχε  $u(t_0) = 0$ ;

Λύση:

(α') Η συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Γνωρίζουμε ότι

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(4 - 27t + t^3) = -27 + 3t^2 \quad (2.26)$$

(β') Η συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία επιτάχυνση. Γνωρίζουμε ότι

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(-27 + 3t^2) = 6t \quad (2.27)$$

(γ') Μπορούμε εύκολα πλέον να δούμε αν υπάρχει κάποιο  $t_0$  όπου  $u(t_0) = 0$ , αν λύσουμε την εξίσωση

$$3t_0^2 - 27 = 0 \iff t_0^2 - 9 = 0 \iff t_0 = \pm 3 \text{ s} \quad (2.28)$$

Επιλέγουμε τη θετική χρονική στιγμή  $t_0 = 3$  s.

### 2.2.6 Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση. Όπως μπορείτε να καταλάβετε από όσα μόλις διαβάσατε στην προηγούμενη παράγραφο, στην περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης, η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου  $t$ , ενώ η συνάρτηση θέσης ως προς το χρόνο θα είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου  $t$ .

Η κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση μπορεί να περιγραφεί από αρκετές εξισώσεις, εν αντιθέσει με την κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα, η οποία είχε μόνο μια εξισώση περιγραφής. Ας δούμε όλες αυτές τις εξισώσεις συνοπτικά:

Σχέσεις Ευθύγραμμα Επιταχυνόμενης Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$u_f = u_i + at$	2	$u_{avg} = (u_i + u_f)/2$
3	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t$	4	$x_f = x_i + u_{avg}t$
5	$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2$	6	$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i)$

Πίνακας 2.2: Πίνακας Σχέσεων Επιταχυνόμενης Κίνησης.

Ας τις αποδείξουμε:

- Λόγω σταθερής επιτάχυνσης,

$$a_{avg} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_f - u_i}{t_f - t_i} \quad (2.29)$$

Αν θεωρήσουμε ότι μετράμε το χρόνο μας από την αρχική θέση  $x_i$ , τότε  $t_i = 0$  και αν θέσουμε  $t_f = t$ , τότε

$$a = \frac{u_f - u_i}{t} \implies u_f = u_i + at \quad (2.30)$$

- Η επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι γραμμική συνάρτηση του  $t$ . Για δυο οποιαδήποτε σημεία στην ευθεία

$$u_{avg} = \frac{u_i + u_f}{2} \quad (2.31)$$

- Από την προηγούμενη σχέση πολλαπλασιάζοντας με  $t$  έχουμε

$$u_{avg}t = \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \iff x_f - x_i = \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \iff x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \quad (2.32)$$

- Από τη Σχέση (2.31) και τη Σχέση (2.32) έχουμε εύκολα

$$x_f = x_i + u_{avg}t \quad (2.33)$$

- Από τις δύο σχέσεις που έχουμε ήδη αποδείξει

$$u_f = u_i + at \quad (2.34)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \quad (2.35)$$

έχουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(2u_i + at)t = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.36)$$

## 6. Λύνοντας τη σχέση

$$u_f = u_i + at \quad (2.37)$$

ως προς  $t$  έχουμε

$$t = \frac{u_f - u_i}{a} \quad (2.38)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_f + u_i)t \quad (2.39)$$

παίρνουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_f + u_i) \frac{u_f - u_i}{a} \quad (2.40)$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i) \quad (2.41)$$

Προσέξτε ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι αλγεβρικές. Τα πρόσημα ότι σας καθοδηγήσουν στη σωστή φορά των διανυσμάτων. Μια τυπική σύμβαση που ακολουθείται είναι να ορίζετε τη θετική φορά αυτή προς τα δεξιά, και μην ξεχνάτε να ορίζετε τα σημεία αναφοράς σας (δηλ. από ποιό σημείο μετράτε τη θέση του σώματος - δηλ. που θεωρείτε ότι  $x = 0$  - και το σημείο όπου πατάτε το χρονόμετρό σας και μελετάτε το εκάστοτε πρόβλημα - δηλ. πότε ισχύει  $t = 0$ ). Πολλές φορές αυτά τα δύο ταυτίζονται αλλά όχι πάντα.

Μια ιδιαίτερα δημοφιλής κίνηση σε μια διάσταση είναι η ελεύθερη πτώση. Στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης έχουμε ως σταθερή επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , με φορά προς τα κάτω. Οι εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες (αντικαθιστάτε το  $x$  με το  $y$ ). Συνήθως ως θετική φορά ορίζεται η κατακόρυφη προς τα πάνω, οπότε η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας αντικαθίσταται ως  $-9.8 \text{ m/s}^2$  στις εξισώσεις που είδαμε. Δείτε τον παρακάτω Πίνακα 2.3.

Σχέσεις Ελεύθερης Πτώσης			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$u_f = u_i + gt$	2	$u_{avg} = (u_i + u_f)/2$
3	$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t$	4	$y_f = y_i + u_{avg}t$
5	$y_f = y_i + u_i t + \frac{1}{2}gt^2$	6	$u_f^2 = u_i^2 + 2g(y_f - y_i)$

Πίνακας 2.3: Πίνακας Σχέσεων Ελεύθερης Πτώσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### Παράδειγμα 2.5:

Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$  και κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι  $50 \text{ m}$ . Δείτε το Σχήμα 2.7.

(α') Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

(β') Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

(γ') Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέψει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

(δ') Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν  $t = 5$ .

Λύση:

Θεωρούμε υθετική φορά προς τα πάνω, οπότε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $\vec{g}$  θα “δείχνει” προς τα κάτω. Επίσης θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση (A) - εκεί πατάμε το χρονόμετρό μας και ως προς αυτή τη θέση ορίζουμε τις μετρήσεις μας (είναι δηλαδή το σημείο  $(0,0)$  της κίνησης).

(α') Για τη διαδρομή (A)  $\rightarrow$  (B), έχουμε

$$u_B = u_A + gt = 20 + (-9.8)t \quad (2.42)$$

Στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα είναι μηδενική, δηλ.  $u_B = 0$ , οπότε

$$0 = 20 - 9.8t \implies t \approx 2.04 \text{ s} \quad (2.43)$$

(β') Στη διαδρομή (A)  $\rightarrow$  (B) έχουμε

$$y_B = y_A + u_A t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.44)$$

Γνωρίζουμε ότι  $y_A = 0$ ,  $u_A = 20 \text{ m/s}$ ,  $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $t \approx 2.04 \text{ s}$ , οπότε

$$y_B \approx 20.4 \text{ m} \implies \vec{y}_B = 20.4 \vec{j} \text{ m} \quad (2.45)$$

Δείτε τον πίνακα με τις εξισώσεις της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση.

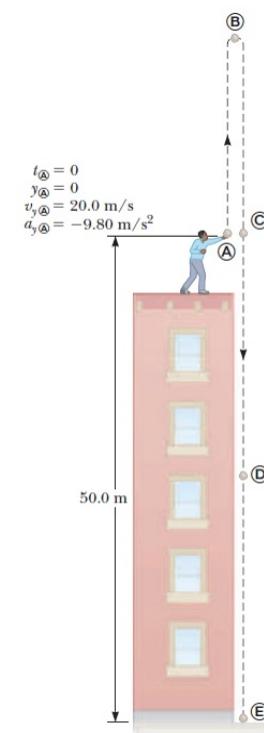
Μπορείτε να λύσετε το παραπάνω ερώτημα με κάποια άλλη από αυτές;

(γ') Θα διανύσουμε τη διαδρομή (A)  $\rightarrow$  (C), οπότε

$$u_C^2 = u_A^2 + 2g(y_C - y_A) \quad (2.46)$$

$$= 20^2 - 2 \cdot 9.8(0 - 0) = 20^2 \quad (2.47)$$

$$u_C = \pm 20 \text{ m/s} \quad (2.48)$$



Επιλέγουμε τη λύση  $u_C = -20 \text{ m/s}$  γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας “δείχνει” προς την αντίθετη φορά από τη υθετική! Οπότε  $\vec{u}_C = -20 \vec{j} \text{ m/s}$ .

(δ') Έστω (D) το σημείο που βρίσκεται η μπάλα για  $t = 5 \text{ s}$ . Επιλέγουμε τη διαδρομή (A)  $\rightarrow$  (D), κι εκεί έχουμε

$$u_D = u_A + gt = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29 \text{ m/s} \implies \vec{u}_D = -29 \vec{j} \text{ m/s} \quad (2.49)$$

και

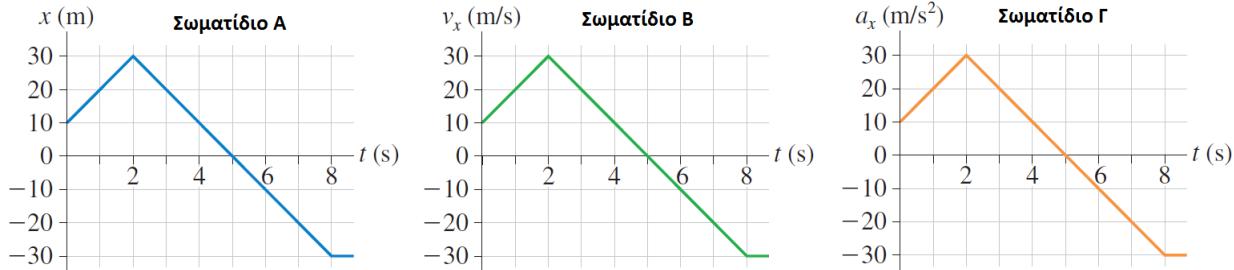
$$y_D = y_A + u_A t + \frac{1}{2} g t^2 \Big|_{t=5} = 0 + 20t - \frac{9.8}{2} t^2 \Big|_{t=5} = -22.5 \text{ m} \implies \vec{y}_D = -22.5 \vec{j} \text{ m} \quad (2.50)$$

Βλέπετε ότι οι απαντήσεις έχουν νόημα από φυσικής άποψης (σωστά πρόσημα).

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μερικές ενδιαφέρουσες εναλλακτικές: λύστε ξανά τα ερωτήματα (γ-δ) με διαφορετικές αρχικές θέσεις διαδρομής. Επίσης, μπορείτε να τα λύσετε υποθέτοντας ότι  $t = 0$  όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση (B). Τα αποτελέσματα σας πρέπει να είναι τα ίδια - είτε αριθμητικά είτε νοηματικά!

### Παράδειγμα 2.6:

Τρία σωματίδια κινούνται κατά μήκος του άξονα  $x$ , με καθένα να ξεκινά με αρχική ταχύτητα  $u_0 = 10 \text{ m/s}$  τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Στο Σχήμα 2.8, το γράφημα για το σωματίδιο A συνιστά ένα γράφημα θέσης - χρόνου, το γράφημα για το σωματίδιο B συνιστά ένα γράφημα ταχύτητας - χρόνου, ενώ το γράφημα Γ συνιστά ένα γράφημα επιτάχυνσης - χρόνου. Βρείτε την ταχύτητα καθενός σωματιδίου τη χρονική στιγμή  $t = 7 \text{ s}$ . Μη χρησιμοποιήστε εξισώσεις κίνησης, παρά μόνο τη γεωμετρία των γραφημάτων.



Σχήμα 2.8: Διαγράμματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης vs χρόνου.

Λύση:

Διάγραμμα A: Ξέρουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο. Το διάγραμμα θέσης του σωματιδίου A είναι μια πλάγια ευθεία από  $t = 2$  ως  $t = 8 \text{ s}$ . Η κλίση της είναι  $-10 \text{ m/s}$ , που είναι η ταχύτητα του σωματιδίου για  $t = 7 \text{ s}$  (και για κάθε  $t$  από 2 ως 8). Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει κίνηση προς χαμηλότερες τιμές του άξονα  $x$ .

Διάγραμμα B: Η ταχύτητα του σωματιδίου B για  $t = 7 \text{ s}$  μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το διάγραμμα, μια και αυτό είναι διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου, δηλ. στιγμιαίας ταχύτητας. Η ταχύτητα για  $t = 7 \text{ s}$  είναι  $-20 \text{ m/s}$ .

Διάγραμμα Γ: Ξέρουμε ότι η ταχύτητα για το σωματίδιο Γ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης επιτάχυνσης - χρόνου, η οποία συνάρτηση μας είναι διαθέσιμη στο γράφημα Γ. Όμως η ολοκλήρωση σημαίνει πρακτικά την επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση της επιτάχυνσης. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα για  $t = 7 \text{ s}$  μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$u_f = u_i + \text{εμβαδόν της καμπύλης επιτάχυνσης μεταξύ } t_i \text{ και } t_f.$$

Αυτό το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: το εμβαδό μεταξύ  $t = 0$  και  $t = 2 \text{ s}$  είναι  $40 \text{ m/s}$ , το εμβαδό μεταξύ  $t = 2 \text{ s}$  και  $t = 5 \text{ s}$  είναι  $45 \text{ m/s}$  και το αντίστοιχο μεταξύ  $t = 5 \text{ s}$  και  $t = 7 \text{ s}$  είναι  $-20 \text{ m/s}$ . Συνολικά, για  $t_i = 0$  και  $t_f = 7 \text{ s}$ , η ταχύτητα είναι  $10 + 40 + 45 - 20 = 75 \text{ m/s}$ .

### Παράδειγμα 2.7:

Μια Porsche προκαλεί ένα Honda σε έναν αγώνα ταχύτητας σε  $400 \text{ μέτρα}$ . Επειδή η επιτάχυνση της Porsche είναι  $3.5 \text{ m/s}^2$ , ενώ αυτή του Honda είναι  $3.0 \text{ m/s}^2$ , το Honda παίρνει προβάδισμα στην αρετηρία κατά  $1.0 \text{ s}$ . Ποιό αυτοκίνητο θα κερδίσει τον αγώνα;

Λύση: Θεωρούμε ως χρονικό σημείο αναφοράς τη στιγμή που ξεκινά η Porsche. Τότε, το Honda έχει ήδη ξεκινήσει - ένα δευτερόλεπτο νωρίτερα. Ο χρόνος που απαιτείται για την Porsche βρίσκεται από τη σχέση

$$x_P = x_{P_0} + u_{P_0}t + \frac{1}{2}a_P t^2 \quad (2.51)$$

$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.5t^2 \quad (2.52)$$

$$t = 15.1 \text{ s} \quad (2.53)$$

Για το Honda, είναι αντίστοιχα

$$x_H = x_{H_0} + u_{H_0}t + \frac{1}{2}a_H(t+1)^2 \quad (2.54)$$

$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3(t+1)^2 \quad (2.55)$$

$$t = 15.3 \text{ s} \quad (2.56)$$

Άρα η Porsche κερδίζει. Προσέξτε ότι αν θεωρήσουμε ώς χρονική αναφορά το χρόνο εκκίνησης του Honda, δε θα μπορούσαμε να εφαρμούσουμε τις εξισώσεις για την Porsche, αφού για το πρώτο δευτερόλεπτο, το αμάξι θα ήταν ακίνητο, και μετά θα έκανε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Συνολικά, η κίνηση αυτή ΔΕΝ περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις!

### Παράδειγμα 2.8:

Θεωρήστε ότι σας προκαλούν στο παρακάτω παιχνίδι. Ένας φίλος σας κρατά ένα χαρτονόμισμα των 50 ευρώ από την άκρη του, ενώ εσείς τοποθετείτε τον αντίχειρα και το δείκτη του ενός χεριού σας στο κέντρο του χαρτονομίσματος, χωρίς να το ακουμπάτε όμως, όπως στο Σχήμα 2.9. Χωρίς να σας προειδοποιήσει, ο φίλος σας αφήνει το χαρτονόμισμα να πέσει προς το έδαφος. Για να κερδίσετε το χαρτονόμισμα, πρέπει να το πιάσετε στον αέρα χωρίς να κινήσετε καθόλου τον καρπό ή το χέρι σας, παρά μόνο να κλείσετε τα δυο δαχτυλά σας (αντίχειρα και δείκτη). Υποθέστε ότι η αντίδρασή σας είναι η μέση αντίδραση ενός ανθρώπου, δηλαδή 0.2 s, το μήκος του χαρτονομίσματος των 50 ευρώ είναι 14 cm, η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη είναι  $g_{earth} = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

- (α') Πιστεύτε ότι μπορείτε να κερδίσετε ένα τέτοιο παιχνίδι υπό αυτές τις συνθήκες;
- (β') Πόσο θα έπρεπε να ήταν το μήκος ενός χαρτονομίσματος για να μπορούσατε να έχετε ελπίδες υπό αυτές τις συνθήκες;

- (γ') Αν παίζατε το ίδιο παιχνίδι στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη, όπου η βαρύτητα έχει μέτρο  $g_{mars} = 0.37 g_{earth} \text{ m/s}^2$ , πιστεύετε ότι θα κερδίζατε;



Σχήμα 2.9: Παιχνίδι με χαρτονόμισμα.

Λύση:

- (α') Το χαρτονόμισμα ξεκινά από ηρεμία,  $u_i = 0$ , και πέφτει με επιτάχυνση  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , λόγω βαρύτητας. Μας ενδιαφέρει η άνω άκρη του, και θεωρούμε ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται εκεί. Για μια μέση αντίδραση 0.2 s, μπορούμε να βρούμε την απόσταση που θα διανύσει το σωματίδιο (δηλ. η άνω άκρη του χαρτονομίσματος) πέφτοντας, δηλ.

$$y_f = y_i + u_i t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.57)$$

$$\Delta y = u_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.58)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.59)$$

$$\Delta y = -0.2 \text{ m} \quad (2.60)$$

Το χαρτονόμισμα διανύει απόσταση πέφτοντας ίση με 20 cm, μέχρι να κλείσουμε τα δάχτυλά μας. Η απόσταση μεταξύ του δαχτύλου σας και της κορυφής του χαρτονομίσματος είναι 7 cm. Άρα δεν μπορούμε να κερδίσουμε το παιχνίδι.

(β') Με βάση τα παραπάνω, θα έπρεπε να είναι το λιγότερο 40 cm, ώστε σε 0.2 s να διανύσει πέφτοντας 20 cm, και να μπορέσουμε να το πιάσουμε οριακά.

(γ') Για την επιφάνεια του Άρη, το ίδιο παιχνίδι θα έδινε

$$y_f = y_i + u_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.61)$$

$$\Delta y = u_i t - \frac{1}{2} g_{mars} t^2 \quad (2.62)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 0.37 g_{earth} \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.63)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 0.37 \cdot 9.8 \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.64)$$

$$\Delta y = -0.07252 \text{ m} \quad (2.65)$$

Ξανά, δε θα μπορούσαμε να το πιάσουμε, ή θα το πιάναμε οριακά αν είχαμε ελάχιστα γρηγορότερη αντιδραση από 0.2 s.

### Παράδειγμα 2.9:

Το είδος εντόμου *Philaenus spumarius* (Σχήμα 2.10) θεωρείται ο καλύτερος άλτης του ζωϊκού βασιλείου. Για να εκτελέσει ένα άλμα, το έντομο αυτό μπορεί να επιταχύνει στα 4 km/s<sup>2</sup> (!!) μέσα σε μια απόσταση 2 mm, για να δυναμώσει τα ειδικά διαμορφωμένα πόδια του<sup>a</sup>. Θεωρήστε ότι η επιτάχυνσή του είναι σταθερή και αγνοήστε τη βαρυτική επιτάχυνση.

(α') Βρείτε την ταχύτητα με την οποία το έντομο “απογειώνεται”.

(β') Μέσα σε πόσο χρονικό διάστημα καταφέρνει να φτάσει αυτήν την ταχύτητα;

(γ') Πόσο ψηλά θα μπορούσε να φτάσει ένα τέτοιο έντομο, απουσία αντίστασης του αέρα;

<sup>a</sup> Μη φοβάστε, τρέφεται με χυμούς από τα φυτά, ενώ θεωρείται και αρκετά διαδεδομένο είδος στον κόσμο...



Σχήμα 2.10: Το είδος εντόμου *Philaenus spumarius*.

Λύση: Η κίνηση του εντόμου είναι ομαλά επιταχυνόμενη σε έναν καταχόρυφο άξονα.  
(α') Από τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta y \quad (2.66)$$

η ταχύτητα του εντόμου αφού τεντώσει τα πόδια του θα είναι

$$u_f = \sqrt{u_i^2 + 2a\Delta y} = 4 \text{ m/s} \quad (2.67)$$

(β') Ο χρόνος που απαιτείται για να πιάσει την παραπάνω ταχύτητα είναι

$$u_f = u_i + at \implies t = \frac{u_f - u_i}{a} = 1 \text{ ms} \quad (2.68)$$

(γ') Η μετατόπιση προς τα πάνω (το άλμα δηλαδή) του εντόμου από το σημείο όπου τα πόδια του εγκαταλείπουν το έδαφος και του σημείου ανώτατου ύψους όπου έχει στιγμιαία μηδενική ταχύτητα ( $u_f = 0$ ) είναι

$$\Delta y = \frac{u_f^2 - u_i^2}{-2g} = 0.816 \text{ m} \quad (2.69)$$

Στην πραγματικότητα, φτάνει περίπου στα 0.7 m.

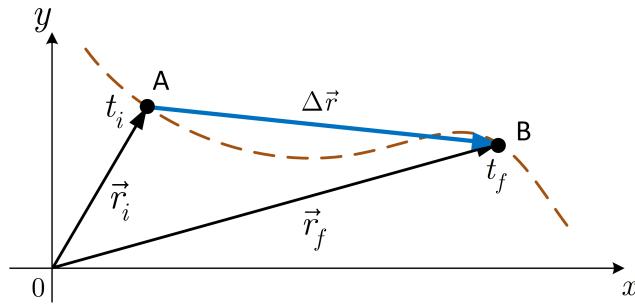
## 2.3 Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Μπορούμε πλέον να περάσουμε στην κίνηση σε δυο διαστάσεις, ή αλλιώς, την κίνηση σε ένα επίπεδο. Ο διδιάστατος χώρος κάνει ιδιαίτερη χρήση διανυσμάτων αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες, όπως θα δούμε. Οπωσδήποτε η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι υπερ-πολύτιμη!

### 2.3.1 Θέση

Θα ακολουθήσουμε την ίδια ροή με τη μονοδιάστατη κίνηση, γιατί μέσω των ομοιοτήτων και των διαφορών θα κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση της διδιάστατης κίνησης. Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου. Στις δυο διαστάσεις χρειαζόμαστε το διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$ , που είναι ένα διάνυσμα που ξεκινά από το O (0,0) και καταλήγει στη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy. Στο Σχήμα 2.11 βλέπετε δυο διανύσματα θέσης  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{r}_f$ . Ένα διάνυσμα θέσης μπορεί να περιγραφεί με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων, όπως

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2.70)$$



Σχήμα 2.11: Διανύσματα θέσης.

### 2.3.2 Μετατόπιση

Όπως και στη μονοδιάστατη κίνηση, μπορούμε να ορίσουμε τη μετατόπιση  $\Delta\vec{r}$ , που ορίζεται ως

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (2.71)$$

δηλ. είναι η διανυσματική διαφορά μεταξύ της τελικής και της αρχικής θέσης. Βλέπετε το διάνυσμα μετατόπισης  $\Delta\vec{r}$  στο Σχήμα 2.11. Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του σώματος από τη θέση (A) ως τη θέση (B).

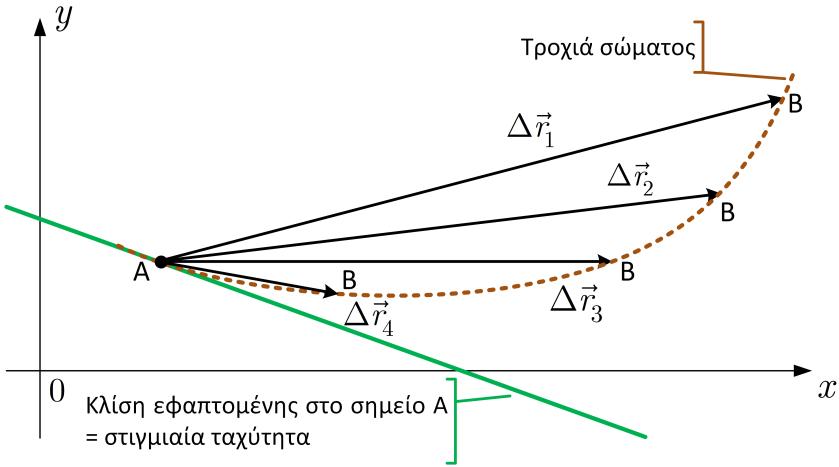
### 2.3.3 Ταχύτητα

Ορίζουμε τη μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ως

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad (2.72)$$

Όπως είναι εμφανές - και πρέπει να έχετε μάθει τώρα πλέον ☺ - η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το  $\Delta \vec{r}$ . Παρατηρήστε την ομοιότητα του ορισμού με τη μονοδιάστατη κίνηση. Ως διάνυσμα που εξαρτάται από τη μετατόπιση  $\Delta \vec{r}$ , είναι κι αυτό ανεξάρτητο της διαδρομής.

Αν θέλαμε να μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός σώματος που κινείται στο  $xy$  επίπεδο κάθε χρονική στιγμή  $t$ , τότε το μέγεθος της στιγμιαίας ταχύτητας θα μας είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Όμοια με τη μονοδιάστατη κίνηση, μπορούμε να το εξάγουμε ως εξής. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία, A και B, όπως στο Σχήμα 2.12. Αν αρχίσουμε να μελετάμε την κίνησή του σε όλο



Σχήμα 2.12: Στιγμιαία ταχύτητα.

και πιο κοντινές στο σημείο A αποστάσεις, δηλ. μετακινώντας το σημείο B όλο και πιο κοντά στο A, τότε οι αντίστοιχες μετατόπισεις θα είναι  $\Delta \vec{r}_1$ ,  $\Delta \vec{r}_2$ ,  $\Delta \vec{r}_3$  κλπ, όπως στο Σχήμα 2.12. Προσέξτε ότι όσο πλησιάζουμε κοντά στο σημείο A, δηλ. όσο η μετατόπιση γίνεται όλο και μικρότερη, η κατεύθυνση του διανύσματος της,  $\Delta \vec{r}$ , πλησιάζει όλο και περισσότερο την κατεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο A. Αν το σημείο B πλησιάσει απειροστά κοντά, τότε μετράμε τη μέση ταχύτητα σε απειροστά κοντινές χρονικές στιγμές, έτσι ώστε  $\Delta t \rightarrow 0$ . Αυτή ακριβώς είναι η στιγμιαία ταχύτητα:

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \quad (2.73)$$

με  $\vec{r}(t)$  να είναι μια συνάρτηση της θέσης του σώματος ως προς το χρόνο. Η κατεύθυνση του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στο σημείο στο οποίο τη μετράμε. Ξανά, προσέξτε την ομοιότητα με τη μονοδιάστατη κίνηση.

### 2.3.4 Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η περίπτωση όπου ένα σώμα κινείται υπό σταθερή ταχύτητα. Αν η τελευταία είναι σταθερή τότε η μέση ταχύτητα ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα - πρέπει να σας είναι πλέον προφανές αυτό. Αν λοιπόν  $u = u_{avg} =$  σταθερή, τότε

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \iff \Delta \vec{r} = \vec{u}_{avg} \Delta t \iff \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{u}_{avg} \Delta t \iff \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_{avg} \Delta t \quad (2.74)$$

και αν συμβολίσουμε ως  $\vec{u}$  την ταχύτητα

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}(t_f - t_i) \iff \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}t_f \quad (2.75)$$

αν θεωρήσουμε ότι  $t_i = 0$ , δηλ. ότι πατήσαμε το χρονόμετρο στη θέση  $\vec{r}_i$ .

### 2.3.5 Επιτάχυνση

Όπως ακριβώς ορίσαμε την ταχύτητα ως το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θέση ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου, δε θα ήταν ενδιαφέρον να ορίσουμε το αντίστοιχο για την ταχύτητα, δηλ. πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα; Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της επιτάχυνσης.

Ας ξεκινήσουμε από τη μέση επιτάχυνση, ακολουθώντας ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με τις έννοιες της ταχύτητας. Η μέση επιτάχυνση ορίζεται ως

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i} \quad (2.76)$$

Η μέση επιτάχυνση είναι επίσης διάνυσμα, αφού η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Επίσης, η αλγεβρική τιμή της διατηρεί το ίδιο πρόσημο με τη μεταβολή της ταχύτητας, αφού ο όρος  $1/\Delta t$  είναι πάντα θετικός, κι άρα έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα της  $\Delta \vec{u}$ .

Συνεχίζοντας, μπορούμε να ορίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση ως το λόγο μεταβολής της ταχύτητας όταν οι χρονικές στιγμές που παίρνουμε τις μετρήσεις μας σχεδόν συμπίπτουν, δηλ. όταν  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) \quad (2.77)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης  $\vec{r}$  ως προς το χρόνο, οπότε

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) \quad (2.78)$$

### 2.3.6 Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη κίνησης στο επίπεδο υπό σταθερή επιτάχυνση, όμοια με τη μονοδιάστατη κίνηση. Εδώ σιγά σιγά αρχίζουν να έρχονται στο προσκήνιο τα πλεονεκτήματα της γνώσης της μονοδιάστατης κίνησης.

Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω “αρχή”:

Διαιρεί και Βασίλευε - Ανάλυση σε Συνιστώσες

Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες: τον οριζόντιο άξονα  $x'$  και τον κατακόρυφο άξονα  $y'$ .

Έτσι, η κίνηση που συμβαίνει στον έναν άξονα δεν επηρεάζει τον άλλο!

Ας περιγράψουμε τις εξισώσεις που κυβερνούν τη διδιάστατη κίνηση, ξεκινώντας από τους ορισμούς που δώσαμε νωρίτερα. Γνωρίζουμε το διάνυσμα θέσης, το οποίο μπορεί να γραφεί με βάση τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2.79)$$

Είδαμε μόλις πριν ότι

$$\vec{u}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}) = u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} \quad (2.80)$$

Βλέπουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα αποτελείται από τις στιγμιαίες ταχύτητες στους επιμέρους άξονες, για τις οποίες ξέρουμε ότι

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \quad (2.81)$$

$$u_y = u_{y_i} + a_y t \quad (2.82)$$

Αντικαθιστώντας

$$\vec{u}(t) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = (u_{x_i} + a_x t) \vec{i} + (u_{y_i} + a_y t) \vec{j} \quad (2.83)$$

$$= (u_{x_i} \vec{i} + u_{y_i} \vec{j}) + (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) t \quad (2.84)$$

$$= \vec{u}_i + \vec{a} t \quad (2.85)$$

Αυτή είναι η πρώτη σχέση που περιγράφει τη στιγμιαία ταχύτητα στο επίπεδο.

Ξεκινώντας ξανά από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \quad (2.86)$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  από τις γνωστές μας σχέσεις της μονοδιάστατης κίνησης, ωστόσο

$$\vec{r}(t) = \left( x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \right) \vec{i} + \left( y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \right) \vec{j} \quad (2.87)$$

$$= (x_i \vec{i} + y_i \vec{j}) + (u_{x_i} \vec{i} + u_{y_i} \vec{j}) t + \frac{1}{2} (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) t^2 \quad (2.88)$$

$$= \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (2.89)$$

που είναι η δεύτερη ενδιαφέρουσα σχέση που περιγράφει την κίνηση ενός σώματος στο επίπεδο υπό σταθερή επιτάχυνση.

Ας τις γράψουμε μαζί στον Πίνακα 2.4.

Σχέσεις Ευθύγραμμα Επιταχυνόμενης Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση

A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\vec{u}(t) = \vec{u}_i + \vec{a} t$	2	$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

Πίνακας 2.4: Πίνακας Διανυσματικών Σχέσεων Επιταχυνόμενης Κίνησης σε Δυο Διαστάσεις.

Ωρα για μερικά παραδείγματα ☺

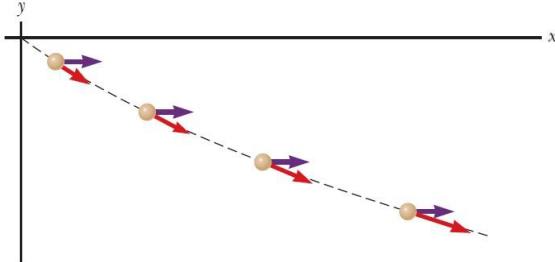
### Παράδειγμα 2.10:

Ένα σωματίδιο κινείται στο  $xy$  επίπεδο, ξεκινώντας από το  $(0,0)$  και με αρχική ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$  στον  $x$ -άξονα, και  $-15 \text{ m/s}$  στον  $y$ -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον  $x$ -άξονα με μέτρο  $a_x = 4 \text{ m/s}^2$ , όπως στο Σχήμα 2.13.

(α') Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

(β') Βρείτε την ταχύτητας μέτρο και κατεύθυνση όταν  $t = 5$ , δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των  $x$ .

(γ') Βρείτε τις  $x, y$  συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , και το διάνυσμα θέσης  $r(t)$ .



Σχήμα 2.13: Παράδειγμα κίνησης στο επίπεδο.

Λύση:

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στον  $\dot{x}'x$  και ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα (μηδενική επιτάχυνση) στον  $y'y$  άξονα. Επιλέγουμε τις συμβατικές θετικές φορές για τους δύο άξονες (δεξιά και επάνω).

(α') Από τη σχέση

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t \quad (2.90)$$

$$= (u_{x_i} \vec{i} + u_{y_i} \vec{j}) + (a_x \vec{i} + a_y \vec{j})t \quad (2.91)$$

$$= (20\vec{i} - 15\vec{j}) + (4\vec{i} + 0\vec{j})t \quad (2.92)$$

$$= (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j} \quad (2.93)$$

δηλ.

$$\vec{u}(t) = (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.94)$$

(β') Από το προηγούμενο ερώτημα, για  $t = 5$  s έχουμε

$$\vec{u}(5) = 40\vec{i} - 15\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.95)$$

οπότε το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \approx 42.7 \text{ m/s} \quad (2.96)$$

και η γωνία του με τον άξονα  $x'x$  είναι

$$\theta(5) = \tan^{-1} \frac{-15}{40} \approx -21 \text{ μοίρες} \quad (2.97)$$

(γ') Ας μελετήσουμε την κίνηση κατά άξονες:

- Στον  $y$ -άξονα, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, οπότε ισχύει η μόνη σχέση που γνωρίζουμε

$$y_f = y_i + u_y t = -15t \text{ m} \quad (2.98)$$

- Στον  $x$ -άξονα, η κίνηση είναι ευθύγραμμη υπό σταθερή επιτάχυνση, οπότε

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 20t + 2t^2 \quad (2.99)$$

Οπότε

$$x(t) = 20t + 2t^2 \quad (2.100)$$

$$y(t) = -15t \quad (2.101)$$

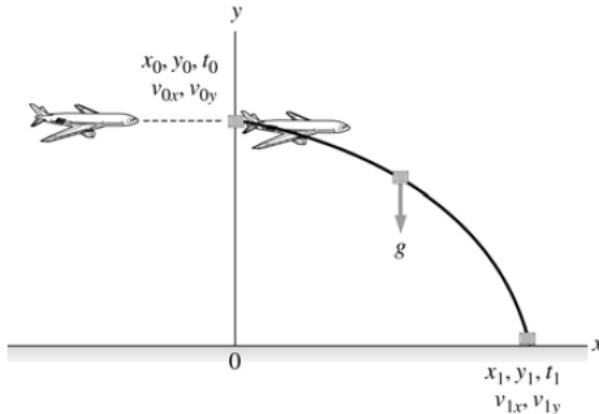
και έτσι το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (20t + 2t^2)\vec{i} - 15t\vec{j} \text{ m} \quad (2.102)$$

### Παράδειγμα 2.11:

Ένα αεροπλάνο της NASA θέλει να ρίξει ένα πακέτο με προμήθειες (φαγητό, εργαλεία) σε επιστήμονες που δουλεύουν σε ένα παγόβουνο στη Γροιλανδία. Το αεροπλάνο πετά 100 μέτρα πάνω από το παγόβουνο με ταχύτητα 150 m/s. Οι επιστήμονες κατασκεύασαν ένα μικρό στόχο στο έδαφος για να δείξουν στον πιλότο που πρέπει να ρίξει το πακέτο. Πόσα μέτρα πριν το στόχο πρέπει να γίνει η ρίψη ώστε να πέσει το πακέτο στο σωστό σημείο;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.14. Η κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο άξονες, οριζόντιο και κατακόρυφο.



Σχήμα 2.14: Αεροπλάνο που ρίχνει προμήθειες.

Επιλέγουμε θετική φορά κίνησης προς τα πάνω και προς τα δεξιά για τους δύο άξονες αντίστοιχα. Το σημείο ρίψης θα έχει μεταβλητές με δείκτη 0 ενώ το σημείο προσγείωσης θα έχει μεταβλητές με δείκτη 1. Η διαδρομή του πακέτου είναι από το σημείο ρίψης προς το σημείο προσγείωσης. Θεωρούμε σημείο αναφοράς ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) το σημείο ρίψης του πακέτου, οπότε και θεωρούμε ότι  $t_0 = 0$ . Για την κίνηση στον οριζόντιο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα, έχουμε

$$x_1 = x_0 + u_{0x}t_1 = 0 + 150t_1 = 150t_1 \quad (2.103)$$

Από την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, έχουμε

$$y_1 = y_0 + u_{0y}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 \iff 0 = 100 + 0 - \frac{1}{2}9.8t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{200}{9.8}} = 4.518 \text{ s} \quad (2.104)$$

Από τις παραπόνω σχέσεις, έχουμε

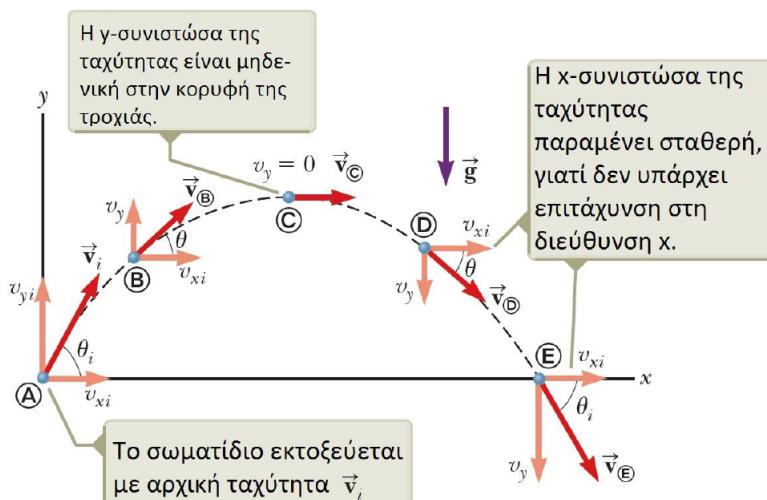
$$x_1 \approx 678 \text{ m} \quad (2.105)$$

## 2.3.7 Βολή

Μια πολύ κλασική κίνηση στο διδιάστατο χώρο είναι η βολή - η κίνηση μιας πέτρας όταν την πετάτε στη θάλασσα, ενός βλήματος που φεύγει από όπλο στραφυμένο στον αέρα, κλπ. Η μελέτη της δεν είναι διαφορετική από όσα έχουμε δει ως τώρα στην κίνηση σε δυο διαστάσεις, αλλά λόγω της φύσης της έχει μερικά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που είναι καλό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων, καθώς μας απλοποιούν ιδιαίτερα το χειρισμό της. Τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι τα εξής:

- Αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα (πράγμα που συνήθως κάνουμε), η επιτάχυνση της κίνησης στον  $x$  άξονα είναι μηδενική. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά για τον άξονα αυτό.
- Η επιτάχυνση της κίνησης στον  $y$  άξονα είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $\vec{g} = -9.8 \vec{j}$  m/s<sup>2</sup>. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω για τον άξονα αυτό.
- Η γωνία  $\theta$  που εκτελείται η βολή ικανοποιεί τη σχέση  $0 < \theta < \pi/2$ .

Μπορούμε να δούμε το Σχήμα 2.15 για να καταλάβουμε περισσότερα αναλύοντας την τροχιά της κίνησης. Αν



Σχήμα 2.15: Βολή.

υποθέσουμε ότι το σώμα που βάλλεται εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα  $\vec{u}_i$  υπό γωνία  $\theta_i$ , όπως στη θέση (Α), τότε αναλύοντας το διάνυσμα της ταχύτητας σε συνιστώσες, έχουμε

$$\vec{u}_{x_i} = u_{x_i} \vec{i} = u_i \cos(\theta_i) \vec{i} \quad (2.106)$$

$$\vec{u}_{y_i} = u_{y_i} \vec{j} = u_i \sin(\theta_i) \vec{j} \quad (2.107)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η  $x$ -συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερή και' όλη τη διάρκεια της τροχιάς. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως είπαμε, δεν υπάρχει επιτάχυνση στην κίνηση στο  $x$ -άξονα. Με άλλα λόγια, όσον αφορά τον οριζόντιο άξονα το σώμα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα  $\vec{u}_{x_i}$ . Η μοναδική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση με σταθερή ταχύτητα είναι η

$$\vec{x}_f = \vec{x}_i + \vec{u}_{x_i} t \implies x_f = x_i + u_{x_i} t \quad (2.108)$$

Παρατηρήστε ότι στα στιγμιότυπα (Α), (Β), (C) η  $y$ -συνιστώσα της ταχύτητας μειώνεται διαρκώς ώς ότου μηδενίστεί στη θέση (C). Σε όλο το κομμάτι αυτό της κίνησης, η ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\vec{u}_y = \vec{u}_{y_i} + \vec{g}t \implies u_y = u_{y_i} - gt \quad (2.109)$$

Στο υπόλοιπο της τροχιάς της κίνησης - στιγμιότυπα (C), (D), (E) - η y-συνιστώσα της ταχύτητας μεγαλώνει κατά μέτρο και έχει φορά προς τα κάτω, μέχρι το σημείο επιστροφής (E) όπου η γωνία πτώσης είναι ίδια με την αρχική γωνία  $\theta_i$ , και δεδομένου ότι η x-συνιστώσα δεν αλλάζει, δεν μπορεί να αλλάζει και η y-συνιστώσα. Οπότε η στιγμιαία ταχύτητα σε αυτή τη θέση είναι ίδια σε μέτρο με την αρχική ταχύτητα. Οπότε η y-συνιστώσα κίνησης περιγράφεται από τις γνωστές μας σχέσεις της επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση:

$$\vec{u}_{y_f} = \vec{u}_{y_i} + \vec{g}t \implies u_{y_f} = u_{y_i} - gt \quad (2.110)$$

$$\vec{u}_{avg} = \frac{1}{2}(\vec{u}_{y_i} + \vec{u}_{y_f}) \implies u_{avg} = \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f}) \quad (2.111)$$

$$\vec{y}_f = \vec{y}_i + \frac{1}{2}(\vec{u}_{y_i} + \vec{u}_{y_f})t \implies y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f})t \quad (2.112)$$

$$\vec{y}_f = \vec{y}_i + \vec{u}_{avg}t \implies y_f = y_i + u_{avg}t \quad (2.113)$$

$$\vec{y}_f = \vec{y}_i + \vec{u}_{y_i}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \implies y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.114)$$

$$\vec{u}_{y_f}^2 = \vec{u}_{y_i}^2 + 2\vec{g}(\vec{y}_f - \vec{y}_i) \implies u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i) \quad (2.115)$$

Ας γράψουμε τις δύο διανυσματικές σχέσεις της διδιάστατης κίνησης, προσαρμοσμένες στη βολή. Δείτε τον Πίνακα 2.5.

Βλέπετε ότι δεν έχουν καμία διαφορά με αυτές που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μόνο που πλέον

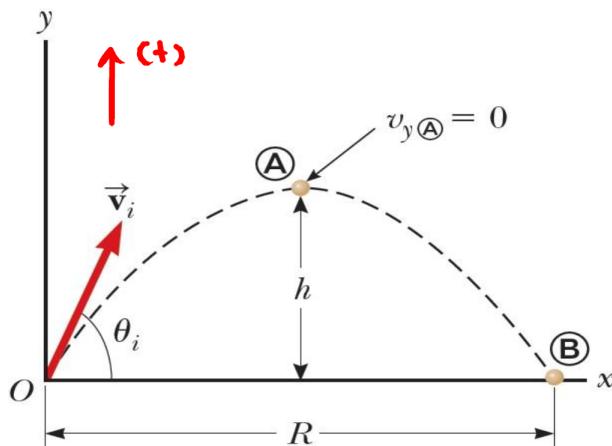
Διανυσματικές Εξισώσεις Βολής			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\vec{u}(t) = \vec{u}_i + \vec{g}t$	2	$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Πίνακας 2.5: Διανυσματικές εξισώσεις βολής.

ξέρουμε εξ' αρχής την πληροφορία της επιτάχυνσης (το μέτρο της οποίας μπορεί όμως να αλλάζει, είτε σε διαφορετικές περιοχές της Γης είτε σε ειδικές καταστάσεις - συνήθως όμως θα θεωρούμε ότι ισούται με  $9.8 \text{ m/s}^2$ , εκτός αν τα δεδομένα μας λένε κάτι διαφορετικό).

Εύρος Βολής

Το εύρος βολής θεωρείται η απόσταση  $R$  μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και του σημείου πτώσης, όπως στο Σχήμα 2.16. Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας στο σημείο που ξεκινά η βολή. Στον



Σχήμα 2.16: Εύρος και Μέγιστο Ύψος βολής.

$x$ -άξονα, η κίνηση του σώματος είναι με σταθερή ταχύτητα, οπότε

$$x_f = x_i + u_x t \iff x_f - x_i = u_x t \iff R = u_x t = u_i \cos(\theta_i) t \quad (2.116)$$

Στον  $y$ -άξονα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση, οπότε

$$y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.117)$$

$$0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.118)$$

$$\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \quad (2.119)$$

$$\frac{1}{2} g t = u_i \sin(\theta_i) \quad (2.120)$$

$$t = \frac{2 u_i \sin(\theta_i)}{g} \quad (2.121)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2 u_i \sin(\theta_i)}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} \quad (2.122)$$

Έτσι

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} \quad (2.123)$$

Μπορείτε να αποδείξετε ότι συμπληρωματικές τιμές της αρχικής γωνίας  $\theta_i$  οδηγούν σε ίδια τιμή του εύρους βολής;

Μέγιστο Ύψος Βολής

Το μέγιστο ύψος βολής θεωρείται το μέγιστο κατακόρυφο ύψος που φτάνει ένα σώμα που βάλλεται. Με άλλα λόγια, το ύψος  $h$  όπου  $\bar{y}_h = 0$ , όπως στο Σχήμα 2.16. Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας στο σημείο που ξεκινά η βολή. Γνωρίζουμε ότι για την  $y$ -συνιστώσα της κίνησης στη βολή από την αρχική θέση  $(0,0)$  ως τη θέση μέγιστου ύψους ισχύει

$$y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.124)$$

$$h = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.125)$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.126)$$

Επίσης μεταξύ των ίδιων θέσεων ισχύει

$$u_{y_f} = u_{y_i} - g t \iff t = \frac{u_{y_i}}{g} \quad (2.127)$$

Αντικαθιστώντας

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left( \frac{u_{y_i}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{u_{y_i}}{g} \right)^2 \quad (2.128)$$

και εφόσον  $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ , καταλήγουμε ότι

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} \quad (2.129)$$

Συνολικά λοιπόν για το εύρος και το ύψος βολής θα έχουμε τις σχέσεις του Πίνακα 2.6.

Ας δούμε ένα πράδειγμα:

## Εξισώσεις Ύψους και Εύρους Βολής

Ποσότητα	$\Sigma \chiέση$	Ποσότητα	$\Sigma \chiέση$
Ύψος	$h = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g}$	Εύρος	$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$

Πίνακας 2.6: Ύψος και εύρος βολής.

## Παράδειγμα 2.12:

Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40 μοιρών με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 μέτρων από το καλάθι. Το ύψος του είναι 2.0 μέτρα και το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 μέτρα<sup>α'</sup>.



Σχήμα 2.17: Ο Γιάννης.

- (α') Ποιά είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
- (β') Με ποιά ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλώ (υποθέστε ότι αρχεί η μπάλα να φτάσει τη στεφάνη);
- (γ') Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;
- (δ') Τι υποθέσεις πρέπει να κάνετε ώστε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του εύρους βολής  $R$  για να βρείτε την αρχική ταχύτητα;

<sup>α'</sup>Στην πραγματικότητα, τα αντίστοιχα ύψη είναι 2.11 και 3.05 μέτρα.

## Λύση:

- (α') Η επιτάχυνση της μπάλας είναι σταθερή και ίση με  $\vec{g} = -9.8 \vec{j}$  m/s<sup>2</sup> σε όλη τη διάρκεια της τροχιάς της, αν θεωρήσουμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Η επιτάχυνση δεν αλλάζει σε διαφορετικά σημεία της τροχιάς - η ερώτηση είναι σκόπιμα παραπλανητική. ☺
- (β') Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση Ο, δηλ. τη θέση που η μπάλα φεύγει από τα χέρια του Γιάννη. Η μπάλα καταλήγει στο καλάθι στη θέση Α. Στον άξονα  $x$  της κίνησης της μπάλας, η μπάλα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα

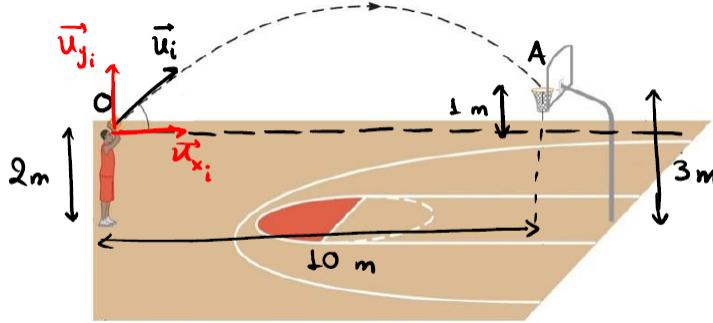
$$x_A = x_O + u_{x_0} t \iff 10 = 0 + u_O \cos(\theta_O) t \implies t = \frac{10}{u_O \cos(40)} \quad (2.130)$$

Στον  $y$ -άξονα, η μπάλα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (της βαρύτητας). Τότε, η θέση της μπάλας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$y_A = y_O + u_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.131)$$

$$1 = 0 + u_O \sin(\theta_O) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.132)$$

$$1 = u_O \sin(40) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.133)$$



Σχήμα 2.18: Ο Γιάννης σουτάρει.

και αντικαθιστώντας το χρόνο  $t$ , έχουμε

$$1 = 10 \tan(40) - \frac{1}{2} g \frac{100}{u_O^2 \cos^2(40)} \implies u_O = 10.7 \text{ m/s} \quad (2.134)$$

(γ') Το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα είναι

$$h = \frac{u_O^2 \sin^2(\theta_O)}{2g} = 2.4 \text{ m} \quad (2.135)$$

Προσέξτε, η μέτρηση αυτή γίνεται με σημείο αναφοράς το ύψος του Γιάννη. Συνολικά, μετρώντας από το έδαφος, το μέγιστο ύψος είναι  $h = 2 + 2.4 = 4.4 \text{ m}$ .

(δ') Για να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του εύρους βολής, πρέπει να υποθέσουμε ότι το ύψος της στεφάνης είναι κι αυτό 2.0 m ή ότι ο Γιάννης σουτάρει από ύψος 3.0 m, ώστε η θέση Ο και η θέση A να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο παράλληλο με το έδαφος. Αν υποθέσουμε, πιο ρεαλιστικά, ότι ο Γιάννης σουτάρει την μπάλα από ύψος 3.0 μέτρων, τότε η θέση Ο και η θέση A συνδέονται με μια ευθεία παράλληλη στο έδαφος. Τότε το εύρος βολής θα μας δίνει

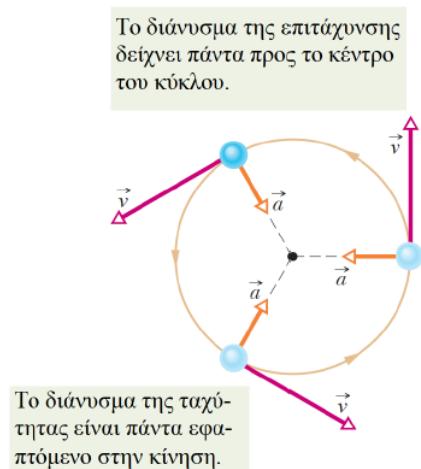
$$R = \frac{u_O^2 \sin(2\theta_O)}{g} \iff 10 = \frac{u_O^2 \sin(80)}{9.8} \implies u_O = \sqrt{\frac{98}{\sin(80)}} = 9.97 \text{ m/s} \quad (2.136)$$

Γιατί το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό με το ερώτημα (β);

### 2.3.8 Κυκλική Κίνηση

Η κυκλική κίνηση είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση μονοδιάστατης κίνησης όπου το σώμα κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο που απέχει  $r$  από το κέντρο της κίνησης, όπως στο Σχήμα 2.19. Μας ενδιαφέρει η ομαλή κυκλική κίνηση, όπου η αριθμητική ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή. Όπως καταλαβαίνετε από το Σχήμα 2.19, η ταχύτητα - ως διάνυσμα - δεν είναι σταθερη και μάλιστα είναι πάντα εφαπτόμενη στην καμπύλη της κίνησης με φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης. Αφού η ταχύτητα λοιπόν δεν είναι σταθερή, το σώμα επιταχύνεται! Η επιτάχυνση του αυτή είναι σταθερή κατά μέτρο και έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο Σχήμα 2.19, η οποία είναι ακτινικά "προς τα μέσα", προς το κέντρο του κύκλου. Προφανώς κι εδώ, η επιτάχυνση ως διανυσματικό μέγεθος δεν είναι σταθερό. Η τόσο σημαντική αυτή επιτάχυνση δε θα μπορούσε να μην έχει όνομα: κεντρομόλος επιτάχυνση. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο

$$a = \frac{u^2}{r} \quad (2.137)$$



Σχήμα 2.19: Σώμα σε κυκλική κίνηση.

με  $u$  το μέτρο της ταχύτητας και  $r$  την ακτίνα του κύκλου.

Πόσο χρόνο άραγε χρειάζεται ένα σώμα να διατρέξει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά; Το μήκος του κύκλου είναι  $2\pi r$ , και η ταχύτητα κίνησης έχει μέτρο  $u$ , άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται είναι

$$T = \frac{2\pi r}{u} \quad (2.138)$$

Η τόσο σημαντική αυτή χρονική ποσότητα ονομάζεται περίοδος.

Τέλος, καταλαβαίνετε από τις παραπάνω σχέσεις ότι ανάλογα την απόσταση  $r$  από το κέντρο του κύκλου, η ταχύτητα ενός σώματος

$$u = \frac{2\pi r}{T} \quad (2.139)$$

πρέπει να αλλάζει αν θέλουμε να διατρέχουμε τον κύκλο σε ίδιο χρονικό διάστημα (ίδια περίοδο)  $T$ . Όμως εκτός της ταχύτητας υπάρχει ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες και το οποίο μέγεθος είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το κέντρο του κύκλου. Ο λόγος

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.140)$$

ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα και ισούται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση. Μπορείτε εύκολα να δείξετε (χάντε το!) ότι

$$u = r\omega \quad (2.141)$$

$$a = r\omega^2 \quad (2.142)$$

### Παράδειγμα 2.13:

Οι δορυφόροι που εκτοξεύονται στο διάστημα τοποθετούνται σε κυκλική τροχιά με τέτοιο τρόπο ώστε να μένουν συνεχώς πάνω από ένα σταθερό σημείο της Γης όσο αυτή γυρίζει. Αυτές οι τροχιές ονομάζονται γεωσύγχρονες τροχιές. Η ακτίνα της Γης είναι  $6.37 \times 10^6$  m και το ύψος του δορυφόρου σε γεωσύγχρονη τροχιά είναι  $3.58 \times 10^7$  m. Βρείτε την ταχύτητα και το μέτρο της επιτάχυνσης ενός δορυφόρου σε μια τέτοια τροχιά. Θεωρήστε ότι ένας δορυφόρος εκτελεί μια πλήρη περιστροφή μέσα σε 24 ώρες.

Λύση: Ο δορυφόρος εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 ώρες, δηλ. σε  $T = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$  s. Η ακτίνα της κίνησης του δορυφόρου με βάση το κέντρο της Γης είναι  $r = 6.37 \times 10^6 + 3.58 \times 10^7 = 4.22 \times 10^7$  m. Έτσι, η ταχύτητα του δορυφόρου έχει μέτρο

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 3.07 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (2.143)$$

και διεύθυνση που εφάπτεται στην καμπύλη της κίνησης και φορά προς τη φορά κίνησης του δορυφόρου. Η επιτάχυνση θα έχει μέτρο

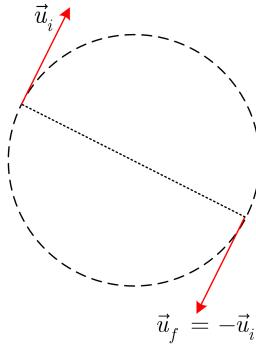
$$a = \frac{u^2}{r} = 0.223 \text{ m/s}^2 \quad (2.144)$$

με κατεύθυνση ακτινικά προς το κέντρο της Γης.

#### Παράδειγμα 2.14:

Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς αυτή αυξάνεται μπορεί να συμβεί μια κατάσταση γνωστή ως g-LOC, όπου ο πιλότος χάνει τις αισθήσεις του λόγω της προώθησης του αίματος από τον εγκέφαλο στα πόδια, πράγμα που προκαλεί εγκεφαλική υποξία. Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα  $\vec{u}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$  m/s για χρόνο  $t = 24$  s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα  $\vec{u}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$  m/s;

Λύση: Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα εισόδου είναι αντίρροπο με το διάνυσμα εξόδου. Αυτό μπορεί να συμβεί αν το σκάφος εκτελέσει τη μισή διαδρομή της περιφέρειας του κύκλου. Δείτε το Σχήμα 2.20. Από τα



Σχήμα 2.20: Αεροσκάφος σε κυκλική κίνηση.

δεδομένα, έχουμε  $t = T/2 = 24$  s. Επίσης

$$u = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.31 \text{ m/s} \quad (2.145)$$

Η ακτίνα της κίνησης είναι

$$r = \frac{u}{2\pi} T = 4891 \text{ m} \quad (2.146)$$

Οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης θα είναι

$$a = \frac{u^2}{r} = 83.81 \text{ m/s}^2 \quad (2.147)$$

που αντιστοιχεί σε περίπου 8.7 g.

## 2.4 Οι Νόμοι της Κίνησης

Ως τώρα μελετήσαμε κινήσεις σωμάτων: ορίσαμε θέσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις, αλλά δε μας ενδιέφερε καθόλου το αίτιο της κίνησης. Ήρθε η ώρα να μελετήσουμε κι αυτό! ☺ Μπορούμε να βρούμε κίνητρο για την ενασχόλησή μας με την αιτία της κίνησης αν θέσουμε κάποια ερωτήματα:

- Γιατί αλλάζει η κίνηση ενός αντικειμένου;
- Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
- Γιατί είναι συνήθως πιο εύκολο να κινήσουμε ένα μικρό από ένα μεγάλο αντικείμενο;

Κλειδιά για τις απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα είναι δυο έννοιες:

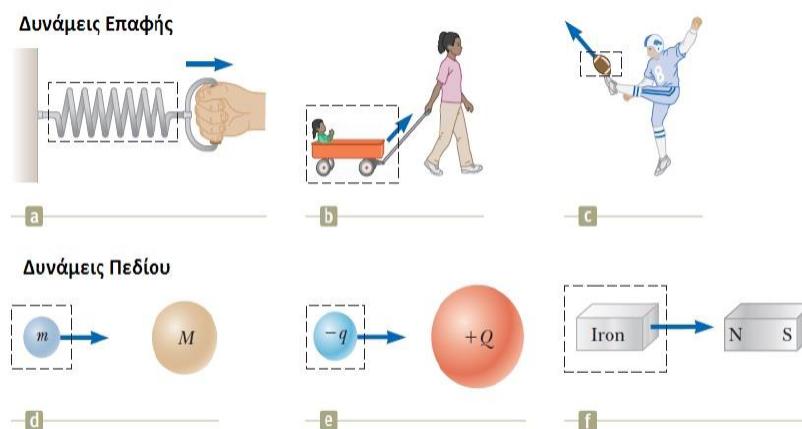
- Δύναμη - **Force - F** που ασκείται στο αντικείμενο που κινείται
- Μάζα - **Mass - m** του αντικειμένου

Ας τις δούμε μια-μια και ας τις αναλύσουμε.

### 2.4.1 Δύναμη

Η έννοια της δύναμης μας είναι γνωστή από την καθημερινότητά μας. Όταν πετάμε μια μπάλα, σπρώχνουμε μια ντουλάπα, ή ανοίγουμε ένα συρτάρι ουσιαστικά αλληλεπιδρούμε με αντικείμενα μέσω μυικής δράσης, δηλ. τους ασκούμε κάποια δύναμη, με αποτέλεσμα να αλλάζουμε την κινητική τους κατάσταση: αλλάζουμε την ταχύτητά τους! Άρα ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι μια δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα αλλάζει πάντα την ταχύτητά του; Όχι! Γιατί στα προηγούμενα παραδείγματα η μπάλα μπορεί να είναι πάρα πολύ βαριά, η ντουλάπα μεγάλη και γεμάτη ρούχα, ενώ το συρτάρι μπορεί να είναι κλειδωμένο. Όμως μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι αν κάτι προκαλεί την αλλαγή στην κινητική κατάσταση ενός αντικειμένου, αυτό είναι η παρουσία δυνάμεων.

Σύμφωνα με την κλασική θεώρηση της Φυσικής υπάρχουν δυο κατηγορίες δυνάμεων: δυνάμεις επαφής και δυνάμεις πεδίου. Η φωτογραφία του Σχήματος 2.21 είναι ιδιαίτερα επεξηγηματική για το είδος των κατηγοριών αυτών. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η κατηγοριοποίηση της Εικόνας 2.21 είναι κάπως παρωχημένη. Σήμερα,



Σχήμα 2.21: Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις πεδίου.

οι επιστήμονες έχουν ταξινομήσει τις δυνάμεις σε τέσσερις θεμελιώδεις κατηγορίες:

- (α') βαρυτικές,
- (β') ηλεκτρομαγνητικές,
- (γ') ασθενείς πυρηνικές, και
- (δ') ισχυρές πυρηνικές.

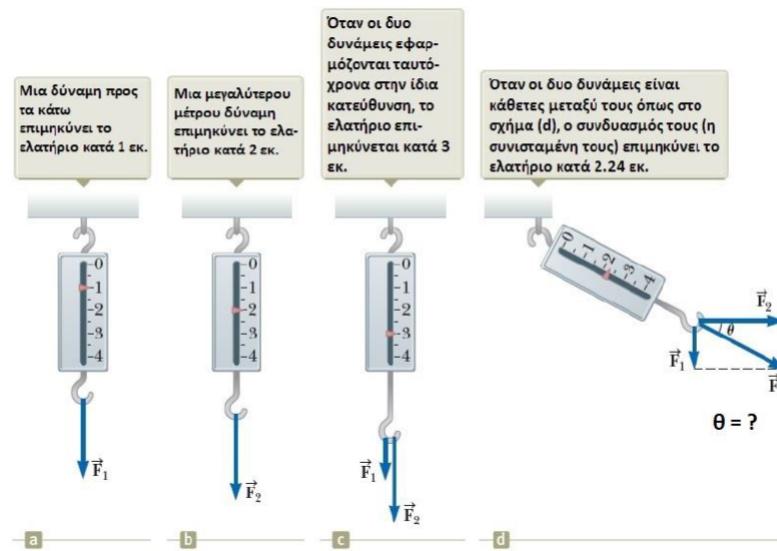
Παρατηρήστε ότι πολλές κοινές από την καθημερινότητά σας δυνάμεις όπως η ώθηση (σπρώξιμο) και η έλξη (τράβηγμα), δυνάμεις τάσης νημάτων και ελατηρίου, και δυνάμεις τριβής δε φαίνεται να ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μία από αυτές τις δυνάμεις είναι στην πραγματικότητα μια εκδήλωση κάποιας ή κάποιων από τις παραπάνω θεμελιώδεις δυνάμεις.

Για παράδειγμα, σκεφτείτε μια μπάλα που στέκεται ακίνητη σε ένα οριζόντιο τραπέζι. Θα δούμε στην συνέχεια ότι στην μπάλα ασκούνται δύο δυνάμεις: η δύναμη του βάρους της και η κάθετη δύναμη που ασκεί το τραπέζι σε αυτή. Έχει δειχθεί ότι η κάθετη αυτή δύναμη - στο ατομικό επίπεδο - περιγράφεται ως εκδήλωση της ηλεκτρικής δύναμης μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων μέσα στα άτομα των δύο επιφανειών σε επαφή (μπάλα - τραπέζι). Επειδή το βάρος της μπάλας “πιέζει” την επιφάνεια τραπεζιού στην οποία στηρίζεται, τα άτομα στην επιφάνεια του τραπεζιού συμπιέζονται και απομακρύνονται από τις ύσεσις ισορροπίας τους. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των υποατομικών σωματιδίων δημιουργούν δυνάμεις “επαναφοράς” που “πιέζουν” προς τα πάνω την μπάλα σε μια προσπάθεια να αποκαταστήσουν την ισορροπία στην ατομική κλίμακα.

Επίσης, θα μιλήσουμε σύντομα για δυνάμεις τάσης σε νήματα (σχοινιά) και δυνάμεις ελατηρίου επάνω σε σώματα. Στην πραγματικότητα, αυτές είναι το αποτέλεσμα παρόμοιων παραμορφώσεων στις υποατομικές διατάξεις ισορροπίας. Όταν εφαρμόζεται τάση σε ένα σχοινί, οι συνεκτικές ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων στο σχοινί προκαλούν τη μετάδοση της δύναμης, από σωματίδιο σε σωματίδιο, στο άλλο όχρο του σχοινιού και σε οποιοδήποτε αντικείμενο είναι δεμένο το σχοινί. Ομοίως, όταν τα ελατήρια τεντώνονται ή συμπιέζονται, τα υποατομικά σωματίδια ασκούν ανομοιόμορφες ηλεκτρικές δυνάμεις το ένα στο άλλο για να επαναφέρουν το ελατήριο στην κατάσταση ισορροπίας του (κατάσταση φυσικού μήκους του). Η τριβή είναι επίσης ένα παράδειγμα ηλεκτρικής δύναμης στο ότι, καθώς δύο επιφάνειες βρίσκονται σε στενή επαφή μεταξύ τους, υπάρχουν ηλεκτρικές έλξεις μεταξύ των υποατομικών σωματιδίων σε αυτές. Πρέπει να εφαρμοστούν άλλες δυνάμεις για να “σπάσουν” αυτούς τους προσωρινούς δεσμούς και να προκαλέσουν ολίσθηση - και άρα κίνηση - μεταξύ των επιφανειών. Η τυπική μονάδα μέτρησης της δύναμης του Διεθνούς Συστήματος (S.I.) είναι το 1 Newton, ανεξάρτητα από το είδος της δύναμης που μετράται. Πολύ σύντομα θα δούμε με τι ισούται αυτή η μονάδα μέτρησης. Στην περίπτωση πολύ γνωστών σας δυνάμεων όπως η τριβή, οποιαδήποτε μέτρηση δύναμης είναι στην πραγματικότητα η μέτρηση των συσσωρευτικών επιπτώσεων εκατομμυρίων ηλεκτρικών δυνάμεων που δρουν ταυτόχρονα.

Παρ' όλα τα παραπάνω, εμείς θα μελετήσουμε δυνάμεις στο “μακροσκοπικό” τους επίπεδο, χωρίς να μας απασχολεί ιδιαίτερα τι συμβαίνει στο “μικροσκοπικό” επίπεδο. Η δύναμη λοιπόν είναι η αιτία μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος. Είναι η δύναμη μονόμετρο μέγεθος; Μπορούμε να το ελέγξουμε πειραματικά. Δείτε το Σχήμα 2.22. Αν τραβήξουμε ένα ελατήριο προς τα κάτω με μια δύναμη μέτρου  $F_1$ , τότε αυτό θα επιμηκυνθεί, έστω, κατά 0.01 m. Αν το τραβήξουμε με μεγαλύτερη δύναμη  $F_2$ , τότε αυτό θα επιμηκυνθεί έστω κατά 0.02 m. Τώρα αν εφαρμόσουμε τις δύο αυτές δυνάμεις ταυτόχρονα, το ελατήριο θα επιμηκυνθεί κατά 0.03 m. Τέλος, αν οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, η συνολική (ή συνισταμένη δύναμη επιμηκύνει το ελατήριο κατά 0.024 m. Το μέτρο αυτής της δύναμης εξαρτάται από τη γωνία  $\theta$  ανάμεσα στις δύο δυνάμεις. Μπορούμε να βρούμε ότι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-F_1}{F_2} \quad (2.148)$$



Σχήμα 2.22: Η διανυσματική φύση της δύναμης.

και αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι ανάλογη της μετατόπισης του ελαστηρίου από τη θέση ισορροπίας - κάτι που πράγματι ισχύει, όπως θα διύμε αργότερα - τότε

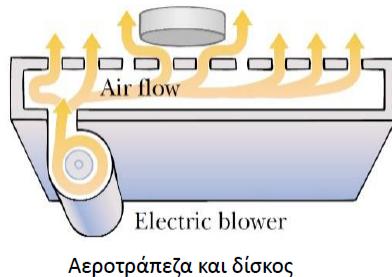
$$\theta = \tan^{-1} \frac{-kx_1}{kx_2} = -\tan^{-1} \frac{x_1}{x_2} = -\tan^{-1} \frac{0.01}{0.02} = -\tan^{-1} \frac{1}{2} \approx -26.6^\circ \quad (2.149)$$

Είναι εμφανές λοιπόν από το απλό αυτό πείραμα ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος: έχει μέτρο, διεύθυνση, και φορά.

Τηπεύθυνος για όλη τη θεωρία αλληλεπιδράσεων μέσω δύναμης είναι ο Isaac Newton, Άγγλος φυσικός και μαθηματικός. Θεωρείται ο πατέρας της Κλασικής Φυσικής καθώς διατύπωσε τα εργαλεία και τις έννοιες για τη μελέτη του φυσικού κόσμου, βασισμένος στις παρατηρήσεις του Galileo και του Kepler. Μεταξύ άλλων, είναι διάσημος για τη διατύπωση των περίφημων τριών Νόμων της Κίνησης. Αξίζει φυσικά να τους γνωρίσουμε.

#### 2.4.2 Πρώτος Νόμος του Newton

Φανταστείτε μια αεροτράπεζα (ένα τραπέζι που φυσά αέρα κάθετα στην επιφάνεια του) και ένα δίσκο, όπως στο Σχήμα 2.23. Η αεροτράπεζα προσομοιώνει μια επιφάνεια χωρίς τριβές, δηλ. κρατά το δίσκο σε ελάχι-



Σχήμα 2.23: Αεροτράπεζα και δίσκος.

στη απόσταση από την επιφάνεια της ώστε να μην ασκείται κάποια δύναμη στο δίσκο και αυτός να μπορεί να κινείται ελεύθερα. Αν τοποθετήσουμε απαλά το δίσκο στην αεροτράπεζα, αυτός θα παραμείνει ακίνητος. Εμείς, ως παρατηρητές της όλης κατάστασης, είμαστε ακίνητοι δίπλα στην αεροτράπεζα: δεν πειράζουμε την αεροτράπεζα ή το δίσκο, ούτε αλληλεπιδρούμε με όποιον άλλο τρόπο μαζί τους. Η αεροτράπεζα, ο δίσκος, κι

εμείς συνιστούμε ένα λεγόμενο σύστημα αναφοράς. Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα αντικείμενο δεν αλληλεπιδρά με άλλα αντικείμενα και έχει μηδενική επιτάχυνση ονομάζεται αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Αν τώρα ανέβουμε σε ένα τρένο μάζι με την αεροτράπεζα και το δίσκο, και παρατηρήσουμε την ίδια διάταξη ενώ το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα, είμαστε ξανά σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ξανά, δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ μας και η επιτάχυνση του δίσκου είναι μηδενική. Άρα, οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι κι αυτό αδρανειακό.

Σκεφτείτε όμως την παρακάτω κατάσταση: το τρένο αρχίζει ξαφνικά να επιταχύνει. Επιταχύνει μάλιστα ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης. Έτσι, ένας παρατηρητής στο έδαφος, εκτός του τρένου, θα σας πει ότι - παρ' όλο που για σας μέσα στο τρένο ο δίσκος φαίνεται να επιταχύνει, καθώς ολισθάνει πάνω από την αεροτράπεζα με τον ίδιο τρόπο που ολισθάνουν τα χαρτιά που βάζετε στο ταμπλώ του αυτοκινήτου όταν ξεκινάτε σταματημένοι/ες σε ένα φανάρι - ο ίδιος βλέπει μεν το δίσκο να ολισθάνει ως προς το τραπέζι, αλλά ως προς το έδαφος κινείται με την ίδια ταχύτητα! Έτσι, παρόλο που για μας ως επιβάτες του τρένου, το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της Γης και έτσι εμείς παρατηρούμε μια φαινομενική επιτάχυνση του δίσκου ως προς εμάς, καθιστώντας έτσι το σύστημα αναφοράς μας ως μη αδρανειακό, υπάρχει ένα άλλο σύστημα αναφοράς που να είναι αδρανειακό. Η τάση ενός αντικειμένου να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης ονομάζεται αδράνεια.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε τον Πρώτο Νόμο του **Newton**: απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ένα αντικείμενο σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία και ένα αντικείμενο σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα παραμένει σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Με άλλα λόγια, όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα αντικείμενο (ή το σύνολο των δυνάμεων που επιδρούν έχει διανυσματικό άθροισμα μηδέν), η επιτάχυνση του αντικειμένου είναι μηδενική. Η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω Νόμου είναι η εξής:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (2.150)$$

Ως τώρα λοιπόν έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια δύναμη
- Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος

#### 2.4.3 Δεύτερος Νόμος του **Newton**

Σας είναι προφανές από την καθημερινή εμπειρία σας ότι διαφορετικά αντικείμενα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησης τους. Με άλλα λόγια, αντιστέχονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησης τους. Έχετε αναρωτηθεί το γιατί; Αν ναι, σίγουρα γνωρίζετε την απάντηση: γιατί έχουν διαφορετική μάζα. Η μάζα είναι ιδιότητα ενός σώματος που ορίζεται “πόση” αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητας του. Η μονάδα μέτρησης της μάζας στο S.I. είναι το κιλό - kg. Η έννοια της μάζας λοιπόν παίζει καθοριστικό ρόλο στη διατύπωση του Δεύτερου Νόμου του **Newton**. Μόλις λίγες γραμμές πριν, ο 1ος Νόμος του Newton μας εξήγησε τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν δεν ασκούνται δυνάμεις επάνω του. Αμέσως τώρα θα διατυπώσουμε το 2ο Νόμο, όπου και θα διούμε τι συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται επάνω στο σώμα.

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση ενός σώματος είναι

- ευθέως ανάλογη της συνολικής δύναμης  $\sum \vec{F}$  που ασκείται στο σώμα
- αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του,  $m$

Με μαθηματικά, οι παραπάνω παρατηρήσεις διατυπώνονται ως

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad (2.151)$$

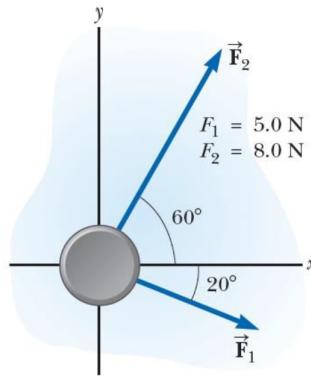
που γράφεται στην πιο γνώριμη σας μορφή

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.152)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να βρούμε και τη μονάδα μέτρησης της δύναμης: είναι  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ , που για προφανείς λόγους ονομάστηκε Newton και συμβολίζεται με το γράμμα N. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.15:

Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τον χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα 2.24. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



Σχήμα 2.24: Παράδειγμα 2ου Νόμου Newton.

Λύση: Ο πάγος προσομοιώνει επιφάνεια χωρίς τριβές. Η επιτάχυνση θα είναι προς την ίδια κατεύθυνση με τη συνισταμένη των δυνάμεων. Θεωρούμε το δίσκο να βρίσκεται στη συμβολή ενός συστήματος αξόνων και νιούθετούμε τη θετική φορά καθενός. Από το 2o Νόμο του Newton θα έχουμε

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (2.153)$$

οπότε αρκεί να βρούμε τις επιμέρους συνιστώσες της επιτάχυνσης. Στην προσπάθεια μας αυτή θα πρέπει να δουλέψουμε κατά άξονες και να εφαρμόσουμε το 2o Νόμο του Newton σε αυτούς. Ας αναλύσουμε τις δυνάμεις σε άξονες, όπως στο Σχήμα 2.25. Στον άξονα x, θα έχουμε

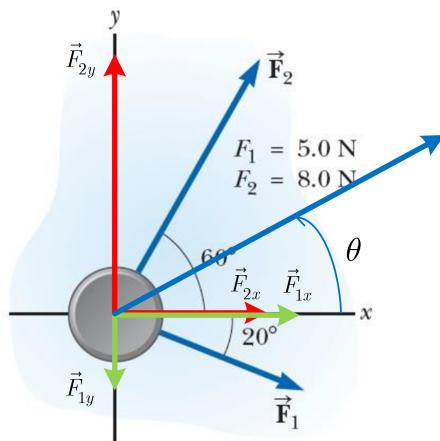
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \implies F_{1x} + F_{2x} = ma_x \implies a_x = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{m} \quad (2.154)$$

$$\iff a_x = \frac{F_1 \cos(20) + F_2 \cos(60)}{0.3} = 29 \text{ m/s}^2 \quad (2.155)$$

Όμοια, στον άξονα y, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \implies F_{2y} - F_{1y} = ma_y \implies a_y = \frac{F_{2y} - F_{1y}}{m} \quad (2.156)$$

$$\iff a_y = \frac{F_2 \sin(60) - F_1 \sin(20)}{0.3} = 17 \text{ m/s}^2 \quad (2.157)$$



Σχήμα 2.25: Παράδειγμα 2ου Νόμου Newton - ανάλυση σε άξονες.

Οπότε

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = 29 \vec{i} + 17 \vec{j} \text{ m/s}^2 \quad (2.158)$$

Μπορούμε να βρούμε αν θέλουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης ως

$$|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \approx 33.6 \text{ m/s}^2 \quad (2.159)$$

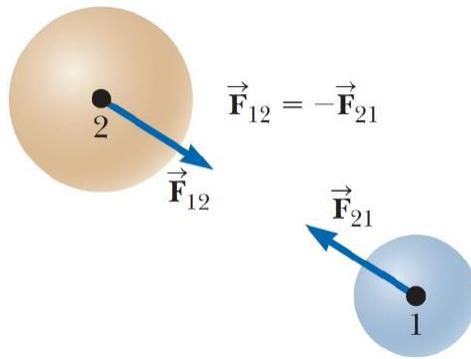
$$\theta = \tan^{-1} \frac{17}{29} \approx 30.3^\circ \quad (2.160)$$

#### 2.4.4 Τρίτος Νόμος του Newton

Ο Τρίτος Νόμος του **Newton** είναι ίσος ο πιο γνωστός απ' όλους, καθώς αποδίδεται εκλαϊκευμένα με τη φράση “δράση - αντίδραση”. Πιο τυπικά, αν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη  $\vec{F}_{12}$  που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση από τη δύναμη  $\vec{F}_{21}$  που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1, δηλ.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.161)$$

Δείτε το Σχήμα 2.26.



Σχήμα 2.26: Τρίτος Νόμος του Newton.

#### 2.4.5 Ανάλυση με βάση τους Τρεις Νόμους

Το “οπλοστάστιο” των τριών νόμων είναι ιδιαίτερα πολύτιμο στην ανάλυση πάφα πολλών προβλημάτων. Αν υμηθούμε την Κινητική, είχαμε παρουσιάσει δύο μοντέλα:

- κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα
- κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Μπορούμε σε αυτά τα δυο να προσθέσουμε άλλα δυο μοντέλα, τα οποία βασίζονται σε όσα έχουμε συζητήσει σε αυτήν την παράγραφο:

- σώμα σε ισορροπία ( $\vec{a} = 0$ )
- σώμα σε επιτάχυνση λόγω εξωτερικών δυνάμεων ( $\vec{a} \neq 0$ )

Στην πρώτη περίπτωση, η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να είναι μηδενική

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (2.162)$$

Στη δεύτερη περίπτωση, η επιτάχυνση πρέπει να είναι μη μηδενική, οπότε

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.163)$$

### Παράδειγμα 2.16:

Ένας νεαρός τραβά ένα κιβώτιο όπως στο Σχήμα 2.27.

- (α') Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο.  
 (β') Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο.



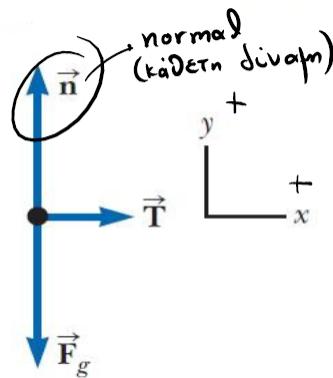
Σχήμα 2.27: Παράδειγμα δυνάμεων και μοντέλων.

Λύση: Με βάση όσα έχουμε πει, μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα δυνάμεων του προβλήματος για να απλοποιήσουμε την κατάσταση και να διευκολυνθούμε στη λύση. Δείτε το Σχήμα 2.28. Στο κιβώτιο ασκείται δύναμη  $\vec{T}$  από το νεαρό, που το τραβά προς τα δεξιά. Επίσης, ασκείται η δύναμη  $\vec{n}$  η οποία είναι η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στο κιβώτιο ως αντίδραση στη δύναμη  $\vec{F}_g$  που ασκεί το κιβώτιο στο έδαφος εξ' αιτίας του βάρους του. Η δύναμη  $\vec{n}$  ονομάζεται normal-κάθετη δύναμη. Έτσι, το διάγραμμα δυνάμεων περιλαμβάνει τρεις δυνάμεις. Μπορούμε τώρα να απαντήσουμε στις ερωτήσεις.

- (α') Το κιβώτιο επιταχύνεται μόνο στον οριζόντιο άξονα, λόγω της δύναμης που του ασκεί ο νεαρός. Έτσι, στον  $x$ -άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{T} = m\vec{a}_x \implies a_x = \frac{T}{m} \quad (2.164)$$

Στον  $y$ -άξονα, το κιβώτιο ισορροπεί, οπότε δεν επιταχύνεται, άρα  $a_y = 0$ .



Σχήμα 2.28: Διάγραμμα δυνάμεων.

(β') Στον  $y$ -άξονα, το κιβώτιο ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{n} + \vec{F}_g = 0 \implies n = F_g \quad (2.165)$$

Έτσι η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο κιβώτιο ισούται με τη δύναμη του βάρους του κιβωτίου.

Το προηγούμενο παράδειγμα είναι αρκετά απλό αλλά δείχνει ζεκάνθαρα μερικά πολύ βασικά σημεία που εφαρμόζονται σε πλειάρδα προβλημάτων. Τα σημεία αυτά είναι τα εξής:

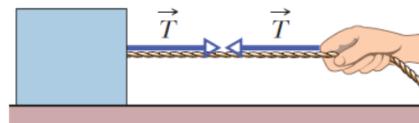
1. Σε ένα πρόβλημα, είναι απολύτως δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικούς άξονες. Στο προηγούμενο πρόβλημα
  - Ισορροπία στον άξονα  $y$
  - Επιτάχυνση στον άξονα  $x$
2. Σε ένα πρόβλημα, είναι απολύτως δυνατό (και επιθυμητό πολλές φορές) να περιγραφεί η κίνηση ενός σώματος από πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης - την ίδια στιγμή! Στο προηγούμενο πρόβλημα
  - Σώμα υπό επίδραση δύναμης στον άξονα  $x$
  - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα  $x$

Πρέπει να είστε σε θέση να αναγνωρίζετε τόσο τα διαφορετικά μοντέλα κατά άξονες όσο και τα πολλαπλά μοντέλα στον ίδιο άξονα.

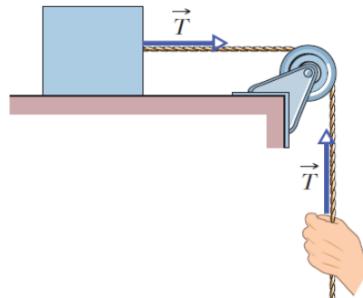
#### 2.4.6 Τροχαλίες και Νήματα

Σε πολλά προβλήματα που θα συναντήσουμε, θα δούμε να συμμετέχουν στην κίνηση ενός σώματος διάφορα νήματα (το θεωρητικό μοντέλο των καλωδίων, των αλυσιδών, και των σχοινιών) και τροχαλίες (κυλινδρικά μέρη που περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα).

Έστω ένα τεντωμένο νήμα (ή καλώδιο ή σχοινί ή άλλο παρόμοιο) που δένεται σε ένα σώμα, όπως στο Σχήμα 2.29. Θεωρούμε το νήμα ως αβάρες (με αμελητέα μάζα σε σχέση με τα υπόλοιπα σώματα) και ανελαστικό (δεν “τεντώνεται” και δε “συμπιέζεται”, εκτός αν το πρόβλημα αναφέρει ρητά κάτι διαφορετικό). Αν τραβήξουμε το σώμα μέσω του νήματος με το χέρι μας, το νήμα τραβά το σώμα με δύναμη  $\vec{T}$  με κατεύθυνση μακριά από το σώμα και κατά μήκος του νήματος. Αντίστοιχα, μια δύναμη ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης κατεύθυνσης ασκείται πάνω στο χέρι μας. Η δύναμη αυτή συχνά αναφέρεται ως τάση του νήματος και συμβολίζεται



Σχήμα 2.29: Σώμα και νήμα.

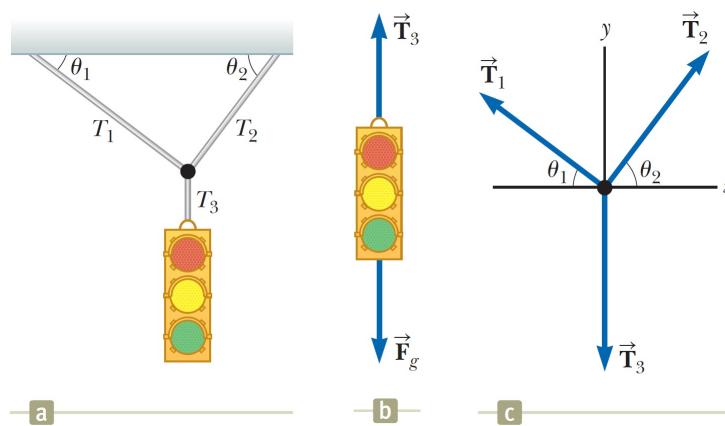


Σχήμα 2.30: Τροχαλία, σώμα, και νήμα.

με  $\vec{T}$ . Αντίστοιχα, δείτε την τροχαλία του Σχήματος 2.30. Θεωρούμε επίσης τις τροχαλίες ως αβαρείς και λείες (χωρίς τριβές) κατά την κύλισή τους. Όπως παρατηρείτε, ισχύουν τα ίδια φαινόμενα όπως και με το οριζόντιο νήμα του Σχήματος 2.29 αλλά αυτή τη φορά οι δυο τάσεις δεν είναι συνευθειακές. Εξακολουθούν όμως να έχουν το ίδιο μέτρο.

### Παράδειγμα 2.17:

Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δύο καλώδια, όπως στο Σχήμα 2.31. Οι γωνίες  $\theta_1, \theta_2$  είναι ίσες με 37° και 53° μοίρες αντίστοιχα. Τα πάνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν δύναμη μεγαλύτερη από 100 N (το καθένα). Μπορεί να συμβεί αυτό; Σας δίνεται ότι  $\cos(37^\circ) = \sin(53^\circ) = 0.8$ ,  $\cos(53^\circ) = \sin(37^\circ) = 0.6$ .



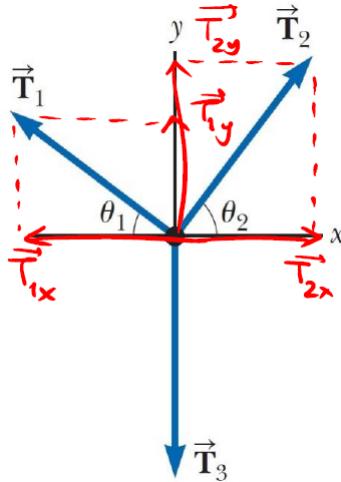
Σχήμα 2.31: Φανάρι και καλώδια.

Λύση: Το συνολικό Σχήμα 2.31(a) είναι όμορφο αλλά δε μας βοηθά ιδιαίτερα στη λύση. Ας το χωρίσουμε σε δύο υποσχήματα, στο Σχήμα 2.31(b) και στο Σχήμα 2.31(c), δηλ. επικεντρωνόμαστε στο φανάρι και στη ζεύξη των καλωδίων. Ας υπολογίσουμε τις τάσεις  $T_1, T_2$  που ασκούν τα καλώδια στο φανάρι. Αν έστω μια από αυτές είναι μεγαλύτερη από 100 N τότε το αντίστοιχο καλώδιο θα σπάσει. Υποθέτουμε ότι το όλο σύστημα

ισορροπεί στιγμιαία. Στο φανάρι ασκείται η δύναμη του βάρους  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  και η τάση  $\vec{T}_3$  λόγων του καλωδίου που το κρατά. Επειδή υπάρχει ισορροπία στον κατακόρυφο αυτό άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F} = 0 \iff \vec{T}_3 + \vec{F}_g = 0 \implies \vec{T}_3 - \vec{F}_g = 0 \implies \vec{T}_3 = \vec{F}_g = mg = 122 \text{ N} \quad (2.166)$$

Θεωρώντας ψητική φορά προς τα πάνω (οπότε το  $\vec{F}_g$  θα έχει αρνητικό πρόσημο κατά τη μετατροπή του σε αλγεβρική τιμή). Αυτή είναι η πρώτη σχέση μας. Μεταφερόμαστε στο Σχήμα 2.31(γ) τώρα. Εδώ έχουμε τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ζεύξη των σχοινιών: τις τάσεις  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$ ,  $\vec{T}_3$ , με την τελευταία να οφείλεται στη δύναμη του βάρους του φαναριού. Επειδή οι δυνάμεις δεν είναι μεταξύ τους κάθετες, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αναλύσουμε κατά άξονες τις τάσεις  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$ . Δείτε το Σχήμα 2.32. Στον άξονα  $x$ , ισχύει



Σχήμα 2.32: Φανάρι και καλώδια: διάγραμμα δυνάμεων.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \iff \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = 0 \implies -T_{1x} + T_{2x} = 0 \implies T_{1x} = T_{2x} \quad (2.167)$$

και αφού

$$T_{1x} = T_1 \cos(\theta_1) \quad (2.168)$$

$$T_{2x} = T_2 \cos(\theta_2) \quad (2.169)$$

έχουμε - αντικαθιστώντας τις τιμές

$$T_1 \cos(\theta_1) = T_2 \cos(\theta_2) \implies T_1 = \frac{3}{4} T_2 \quad (2.170)$$

Στον  $y$  άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_3 = 0 \implies T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0 \implies T_3 = T_{1y} + T_{2y} \quad (2.171)$$

και αφού

$$T_{1y} = T_1 \sin(\theta_1) \quad (2.172)$$

$$T_{2y} = T_2 \sin(\theta_2) \quad (2.173)$$

έχουμε

$$122 = T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) = 0.6T_1 + 0.8T_2 \quad (2.174)$$

Από τις δύο σχέσεις που καταλήξαμε μελετώντας τους δύο άξονες, λύνουμε ως προς  $T_1$ ,  $T_2$  και παίρνουμε

$$T_1 = 73.4 \text{ N} \text{ και } T_2 = 97.4 \text{ N} \quad (2.175)$$

Άρα τελικά κανένα σχοινί δε θα σπάσει.

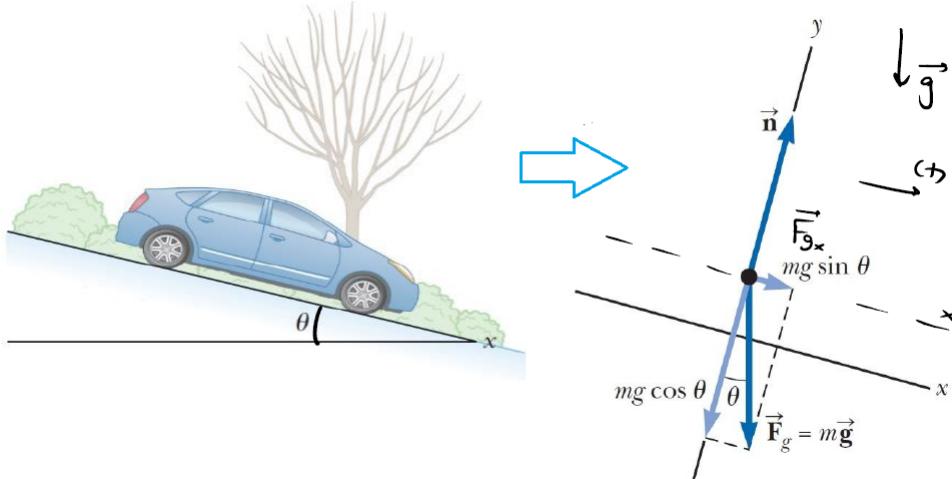
Παράδειγμα 2.18:

Ένα αυτοκίνητο μάζας  $m$  αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\theta$ .

(α') Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

(β') Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου που απέχει απόσταση  $d$  από το τέρμα του, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα και πώς ταχύτητα θα έχει όταν φτάσει εκεί;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.33. Μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα δυνάμεων του προβλήματος, όπως το



Σχήμα 2.33: Αυτοκίνητο σε κεκλιμένο.

βλέπετε στο Σχήμα 2.33. Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η δύναμη του βάρους,  $\vec{F}_g$ , και η δύναμη του δαπέδου επάνω στο αυτοκίνητο,  $n$ . Η τελευταία είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται το σώμα (αυτοκίνητο). Για να αναλύσουμε το πρόβλημα, είναι βολικό να δουλέψουμε κατά άξονες. Επιλέγουμε ως οριζόντιο άξονα τον άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο, και ως κατακόρυφο άξονα έναν άξονα κάθετο στον προηγούμενο. Η δύναμη  $\vec{n}$  είναι ήδη παράλληλη με τον κατακόρυφο άξονα ενώ η δύναμη του βάρους  $\vec{F}_g$  όχι, οπότε θα την αναλύσουμε κατά άξονες σε  $F_{gx}$  και  $F_{gy}$ .

(α') Η κίνηση πραγματοποιείται στον  $x$ -άξονα. Μόνο μια δύναμη ασκείται κατά μήκος του  $x$ -άξονα, η  $\vec{F}_{gx}$ . Από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε

$$\vec{F}_{gx} = F_g \sin(\theta) \vec{i} \implies F_{gx} = mg \sin(\theta) \quad (2.176)$$

Το αυτοκίνητο επιταχύνεται στον άξονα  $x$ , οπότε ισχύει

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{gx} = m\vec{a}_x \implies F_{gx} = ma_x \implies mg \sin(\theta) = ma_x \implies a_x = g \sin(\theta) \quad (2.177)$$

Προφανώς δεν υπάρχει κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, οπότε  $\vec{a}_y = 0$ . Συνολικά λοιπόν

$$\vec{a} = g \sin(\theta) \vec{i} \quad (2.178)$$

(β') Το πρόβλημα ζητάει χρόνο  $t$ , οπότε επιβάλλεται να υψηληθούμε τις εξισώσεις της κινητικής! Στον άξονα  $x$ , το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύει

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.179)$$

$$d = 0 + 0t + \frac{1}{2}g \sin(\theta) t^2 \quad (2.180)$$

$$t^2 = \frac{2d}{g \sin(\theta)} \quad (2.181)$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} \quad (2.182)$$

Για την ταχύτητα στο τέρμα του κεχλιμένου θα έχουμε

$$u_f = u_i + a_x t = 0 + g \sin(\theta) t = g \sin(\theta) \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} = \sqrt{2dg \sin(\theta)} \quad (2.183)$$

### Παράδειγμα 2.19:

Οι ζώνες ασφαλείας και οι αερόσακοι σώζουν τις ζωές μας μειώνοντας τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω στον οδηγό και στους επιβάτες κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης. Τα μοντέρνα αυτοκίνητα σχεδιάζονται ώστε να έχουν στο μπροστινό μέρος την περίφημη “ζώνη θράυσης”, η οποία είναι η περιοχή του αυτοκινήτου που καταστρέφεται εύκολα και απορροφά έτσι το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος της σύγκρουσης. Κατά τη σύγκρουση, η καμπίνα του επιβάτη επιβραδύνεται σε μια απόσταση περίπου 1 μέτρου, όσο το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου θρυμματίζεται. Ένας επιβάτης που φορά ζώνη ασφαλείας επιβραδύνεται μαζί με το αυτοκίνητο. Αντίθετα, ένας επιβάτης που δε φορά ζώνη θα συνεχίσει να κινείται προς τα εμπρός κατά τη σύγκρουση, και μάλιστα χωρίς απώλεια ταχύτητας (1ος Νόμος του Newton), μέχρι να χτυπήσει στο τζάμι ή στο ταμπλώ του αυτοκινήτου. Αυτές οι επιφάνειες έχουν σχεδιαστεί να είναι άκαμπτες, κι έτσι ο δύντυχος επιβάτης επιβραδύνεται μόλις για 5 χιλιοστά (!!).

- (α') Ένας επιβάτης μάζας 60 κιλών πρόκειται να υποστεί σύγκρουση. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή της σύγκρουσης είναι 15 m/s. Εκτιμήστε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον επιβάτη αν φοράει ζώνη.
- (β') Εκτιμήστε τη συνισταμένη δύναμη που τελικά σταματά τον επιβάτη αν αυτός δε φορά ζώνη.
- (γ') Πώς συγχρίνονται αυτές οι παραπάνω τιμές με το βάρος του επιβάτη;
- (δ') Ποιό το ηθικό δίδαγμα του προβλήματος; ☺

Λύση: Θεωρούμε ότι ο επιβάτης κινείται προς τα δεξιά και ευθύγραμμα, είτε λόγω της επιβράδυνσης που δημιουργείται από τη ζώνη και τον αερόσακο είτε λόγω της επιβράδυνσης που δημιουργείται από το τζάμι ή το ταμπλώ του αυτοκινήτου.

- (α') Για να εφαρμόσουμε το 2ο Νόμο του Newton, χρειάζεται να υπολογίσουμε την επιτάχυνση. Από τις εξισώσεις κίνησης

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \implies a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = \frac{0 - 15^2}{2\Delta x} = -112.5 \text{ m/s}^2 \quad (2.184)$$

οπότε

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies F = ma = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = 60 \cdot (-112.5) = -6750 \text{ N} \quad (2.185)$$

Άρα η συνισταμένη δύναμη θα είναι μέτρου 6750 N, με φορά προς τα αριστερά.

- (β') Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση όπως πριν

$$F = ma = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = 60 \cdot \frac{0 - 15^2}{2 \cdot 0.005} = -1350000 \text{ N} \quad (2.186)$$

Άρα η δύναμη θα είναι τώρα 1350000 N, με φορά προς τα αριστερά.

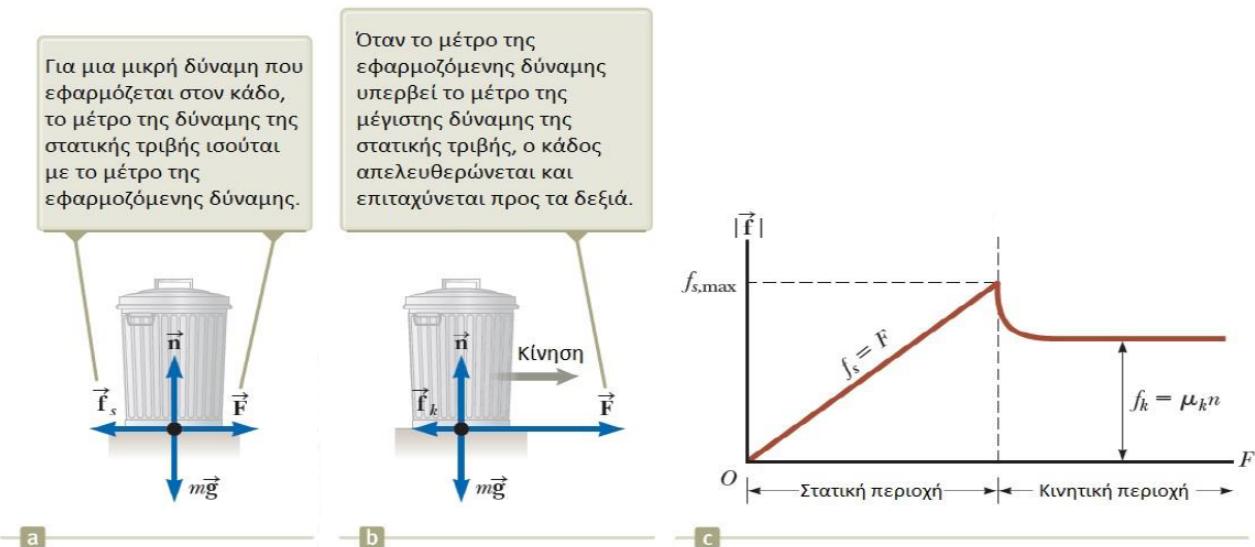
- (γ') Το βάρος του επιβάτη είναι  $B = 60 \cdot 9.8 = 588 \text{ N}$ . Η δυνάμεις στα παραπάνω ερωτήματα είναι 11.5 και 2300 φορές το βάρος του επιβάτη, αντίστοιχα.
- (δ') Μην ξεχνάτε να φοράτε ζώνη!

#### 2.4.7 Δυνάμεις Τριβής

Ως τώρα έχουμε δει αρκετά πράγματα για την κίνηση και τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω σε σώματα. Ας φέρουμε τις γνώσεις μας λίγο πιο κοντά στην πραγματικότητα, βάζοντας στο παιχνίδι τις δυνάμεις τριβής - τις οποίες αγνοήσαμε ως τώρα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικές γιατί, μεταξύ πολλών άλλων, αποτελούν το λόγο που μπορούμε και περπατάμε, που γράφουμε με το μολύβι ή το στυλό σε ένα χαρτί, που τα κορδόνια των παπούτσιών μας παραμένουν δεμένα όταν τα δένουμε, κλπ. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η δύναμη τριβής είναι μια δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος που εφάπτεται σε μια επιφάνεια. Άρα είναι μια δύναμη που εγείρεται σε ένα σώμα λόγω της επαφής του με μια επιφάνεια.

Την πάρονταν διάφορα είδη τριβής, όπως η στατική τριβή, η τριβή ολίσθησης, η τριβή ρευστών, κλπ. Εμείς θα ασχοληθούμε με τις δυο πρώτες: τη στατική τριβή και την τριβή ολισθήσεως.

Δείτε το Σχήμα 2.34(α). Έστω ότι προσπαθούμε να κινήσουμε οριζόντια ένα βαρύ κάδο, σπρώχνοντάς



Σχήμα 2.34: Δύναμη τριβής.

τον. Ας χρησιμοποιήσουμε τη διαίσθησή μας: ασκούμε μια οριζόντια δύναμη  $\vec{F}$  αλλά έστω ότι αυτή η δύναμη δεν είναι ικανή να κινήσει τον κάδο. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι λόγω της ισορροπίας του κάδου (αφού είναι ακίνητος), πρέπει να ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton στον άξονα  $x'$ . Στον άξονα αυτό, θα έχουμε τη δύναμη που ασκούμε εμείς στον κάδο, την  $\vec{F}$ , και αναγκαστικά πρέπει να υπάρχει και άλλη μια δύναμη, έστω  $\vec{f}_s$ , η οποία έχει ίδιο μέτρο κι αντίθετη κατεύθυνση με τη δύναμη  $\vec{F}$ , έτσι ώστε ο κάδος να ισορροπεί. Αν βάλουμε παραπάνω δύναμη, δηλ. αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης  $\vec{F}$  αλλά πάλι δεν μπορούμε να κινήσουμε τον κάδο, τότε καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να απεξήμηκε και το μέτρο της  $\vec{f}_s$  έτσι ώστε να ισχύει ξανά η ισορροπία στον  $x'$  άξονα. Αυτή η δύναμη  $\vec{f}_s$  ονομάζεται δύναμη στατικής τριβής. Άρα η στατική τριβή αποτελεί μια δύναμη  $\vec{f}_s$  που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που προσπαθεί να την προκαλέσει, και ασκείται στον κάδο όσο αυτός δεν κινείται. Με άλλα λόγια, προσπαθούμε να κινήσουμε τον κάδο χωρίς να τα καταφέρνουμε εφαρμόζοντας μια δύναμη  $\vec{F}$  σε αυτόν. Αυτή η δύναμη  $\vec{F}$  ισούται κατά μέτρο με τη δύναμη στατικής τριβής  $\vec{f}_s$ . Προφανώς η φορά της καθεμιάς είναι αντίθετη της άλλης, όπως αναφέραμε. Όσο λοιπόν ισχύει  $F = f_s$ , ο κάδος δεν κινείται, παρ' όλα αυτά υπάρχει η στατική τριβή που εμποδίζει ακριβώς την κίνηση αυτή<sup>2</sup>. Όταν το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης  $\vec{F}$  ξεπεράσει ένα κατώφλι, τότε ο κάδος απελευθερώνεται και επιταχύνεται προς τα δεξιά, όπως στο Σχήμα 2.34(β). Από εκείνη τη στιγμή και μετά, η στατική τριβή  $\vec{f}_s$  μετατρέπεται στη λεγόμενη τριβή ολισθήσεως  $\vec{f}_k$ . Η τελευταία σχετίζεται πάντα με ένα σώμα σε κίνηση και μπορεί να αποδειχθεί

<sup>2</sup>Εν αντιθέσει με τη διαίσθησή μας ότι δυνάμεις τριβείς αναπτύσσονται μόνο σε περιπτώσεις κίνησης και όχι ακινησίας.

ότι το μέτρο της δίνεται ως

$$f_k = \mu_k n \quad (2.187)$$

με  $\mu_k$  το λεγόμενο συντελεστή τριβής ολισθήσεως και  $n$  το μέτρο της κάθετης δύναμης από το έδαφος στον κάδο. Προφανώς, όσο ο κάδος δεν κινείται, θα πρέπει να ισχύει

$$f_s \leq \mu_s n \quad (2.188)$$

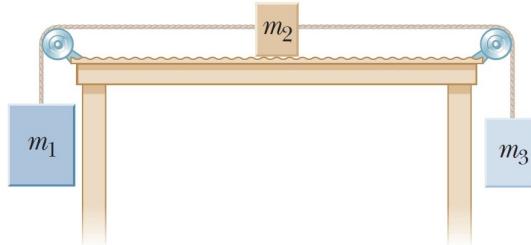
με  $\mu_s$  το λεγόμενο συντελεστή στατικής τριβής. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει, και τότε λέμε ότι η στατική τριβή παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της. Προσέξτε, οι σχέσεις αυτές είναι αλγεβρικές και όχι διανυσματικές (πως όμως μπορούσαν να είναι διανυσματικές άλλωστε; οι δυνάμεις  $\vec{f}_s$ ,  $\vec{f}_k$ , και  $\vec{n}$  βρίσκονται σε διαφορετικούς άξονες). Οι τιμές των συντελεστών τριβής  $\mu_s$ ,  $\mu_k$  εξαρτώνται από το είδος των επιφανειών που εφάπτονται. Η διεύθυνση της δύναμης τριβής (οποιασδήποτε εκ των δύο) είναι πάντα παράλληλη με την επιφάνεια στην οποία εφάπτεται το σώμα και η φορά της είναι πάντα αντίθετη στην κίνηση (ή στην προσπάθεια κίνησης) σε σχέση με την επιφάνεια.

Η προσέγγιση που περιγράψαμε αποτελεί ένα απλό αλλά λειτουργικό μοντέλο τριβής. Στην πραγματικότητα η δύναμη τριβής αποτελεί το διανυσματικό άνθροισμα πολλών δυνάμεων που συμβαίνουν σε ατομικό επίπεδο μεταξύ των επιφανειών που εφάπτονται. Όμως μια τόσο λεπτομερής περιγραφή δε μας είναι πρακτικά χρήσιμη.

#### Παράδειγμα 2.20:

Τρια σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη ελαστικό σχοινί επάνω σε ένα τραπέζι, όπως στο Σχήμα 2.35. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας  $m_2$  και στο τραπέζι είναι 0.35. Τα σώματα έχουν μάζες  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , και  $m_3 = 2 \text{ kg}$ , ενώ οι τροχαλίες είναι αβαρείς και χωρίς τριβές.

- (α') Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.
- (β') Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης κάθε σώματος.
- (γ') Βρείτε τις τάσεις  $T_{12}$ ,  $T_{32}$  των σχοινιών στα δύο σώματα που χρέμονται.



Σχήμα 2.35: Τρια σώματα δεμένα με σχοινί.

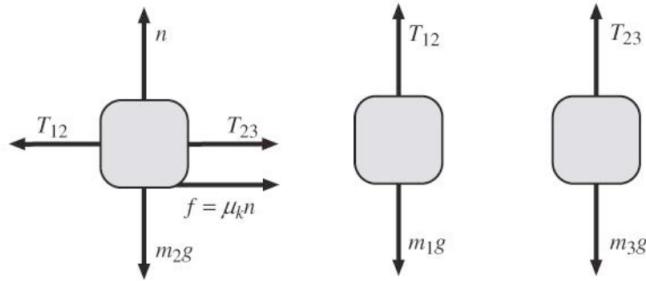
Λύση: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα όπως στο Σχήμα 2.36.

- (α') Δείτε το Σχήμα 2.36.
- (β') Ας συμβολίσουμε με  $a$  το μέτρο της επιτάχυνσης  $-a\vec{j}$  του σώματος  $m_1$ , της επιτάχυνσης  $-a\vec{i}$  του σώματος  $m_2$ , και της επιτάχυνσης  $+a\vec{j}$  του  $m_3$ . Επίσης, έστω  $\vec{T}_{12}$  την τάση του αριστερού νήματος, και  $\vec{T}_{23}$  την τάση του δεξιού νήματος. Για το σώμα  $m_1$ , έχουμε επιτάχυνση στον  $y$ -άξονα, οπότε είναι

$$\sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y \quad (2.189)$$

$$\vec{T}_{12} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a} \quad (2.190)$$

$$T_{12} - m_1 g = -m_1 a \quad (2.191)$$



Σχήμα 2.36: Τρια σώματα δεμένα με σχοινί - Δυνάμεις.

Για το σώμα  $m_2$ , αφού κινείται επιταχυνόμενα στον  $x$ -άξονα, είναι

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x \quad (2.192)$$

$$\vec{T}_{12} + \vec{f}_k + \vec{T}_{23} = m_2 \vec{a}_x \quad (2.193)$$

$$-T_{12} + f_k + T_{23} = -m_2 a \quad (2.194)$$

$$-T_{12} + \mu_k n + T_{23} = -m_2 a \quad (2.195)$$

και αφού ισορροπεί στον  $y$ -άξονα,

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2.196)$$

$$\vec{n} + m_2 \vec{g} = \vec{0} \quad (2.197)$$

$$n - m_2 g = 0 \quad (2.198)$$

$$n = m_2 g \quad (2.199)$$

Με όμοια διαδικασία, για το σώμα  $m_3$  που επιταχύνεται στον κατακόρυφο άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m_3 \vec{a}_y \quad (2.200)$$

$$T_{23} - m_3 g = m_3 a \quad (2.201)$$

Έχουμε τρεις εξισώσεις

$$-T_{12} + 39.2 = 4a \quad (2.202)$$

$$T_{12} - 0.35(9.8) - T_{23} = a \quad (2.203)$$

$$T_{23} - 19.6 = 2a \quad (2.204)$$

Οι οποίες αν προστεθούν κατά μέλη δίνουν

$$a = 2.31 \text{ m/s}^2 \quad (2.205)$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω για το  $m_1$ , αριστερά για το  $m_2$ , επάνω για το  $m_3$ .

(γ') Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε

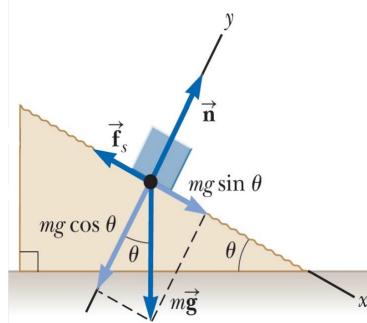
$$T_{12} = 30 \text{ N} \quad (2.206)$$

$$T_{23} = 24.2 \text{ N} \quad (2.207)$$

Παράδειγμα 2.21:

Θεωρούμε ακίνητο σώμα μάζας  $m$  τοποθετημένο σε επιφάνεια με τριβές υπό γωνία  $\theta$ . Αυξάνουμε τη γωνία  $\theta$  μέχρι το σώμα να ολισθήσει. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε το συντελεστή  $\mu_s$  μετρώντας την κρίσιμη γωνία  $\theta_c$  στην οποία το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθάνει.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.37. Επιλέγουμε σύστημα αξόνων στο οποίο ο  $x$ -άξονας είναι παράλληλος στο



Σχήμα 2.37: Παράδειγμα με τριβές σε κεκλιμένο.

κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα ισορροπεί και στους δύο άξονες. Το διάγραμμα δυνάμεων είναι ήδη σχεδιασμένο στο σχήμα, όπου έχει αναλυθεί κάθε δύναμη στους άξονες μας. Ξέρουμε ότι οριακά ισχύει

$$f_s = \mu_s n \quad (2.208)$$

οπότε πρέπει να εκφράσουμε τη σχέση αυτή με γνωστές μεταβλητές του προβλήματος. Στον  $x$ -άξονα, το σώμα ισορροπεί οπότε

$$\sum \vec{F}_x = 0 \iff \vec{f}_s + \vec{F}_{gx} = 0 \implies -f_s + F_{gx} = 0 \implies F_{gx} = f_s = \mu_s n \iff mg \sin(\theta) = \mu_s n \quad (2.209)$$

Στον  $y$ -άξονα, το σώμα ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{n} + \vec{F}_{gy} = 0 \implies n - F_{gy} = 0 \implies n = F_{gy} = mg \cos(\theta) \quad (2.210)$$

Από τις δύο σχέσεις που καταλήξαμε, έχουμε

$$\mu_s mg \cos(\theta) = mg \sin(\theta) \iff \mu_s \cos(\theta) = \sin(\theta) \iff \mu_s = \tan(\theta) \quad (2.211)$$

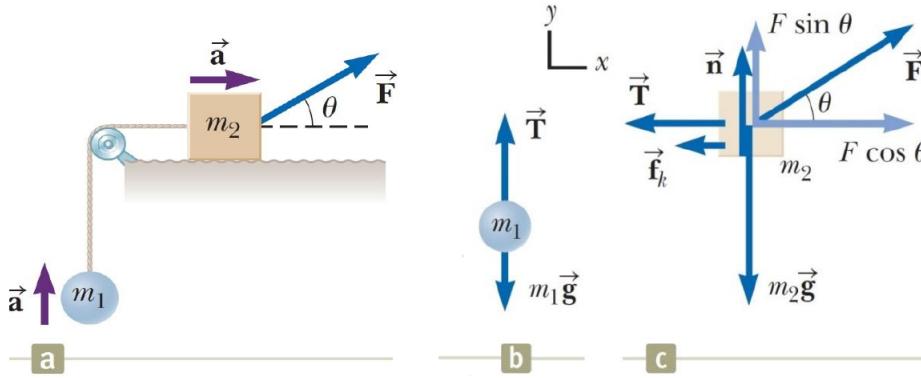
με την τελευταία σχέση να ισχύει αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με  $\cos(\theta)$ , γιατί  $\theta \in (0, \pi/2)$  όπου το συνημίτονο είναι μη μηδενικό. Καταλήξαμε λοιπόν στη σχέση

$$\mu_s = \tan(\theta) \quad (2.212)$$

Όταν  $\theta = \theta_c$ , δηλ. το σώμα μόλις ετοιμάζεται να ολισθήσει, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_s$ .

Παράδειγμα 2.22:

Σώμα μάζας  $m_2$  σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές συνδέεται με μια μπάλα μάζας  $m_1$  μέσω αβαρούς/ανελαστικού σχοινιού και αβαρούς, λείου τροχού, όπως στο Σχήμα 2.38(α). Μια δύναμη  $F$  ασκείται υπό γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο επίπεδο επάνω στο σώμα και αυτό ολισθάνει προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι  $\mu_k$ . Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο αντικειμένων.



Σχήμα 2.38: Παράδειγμα με τριβές σε οριζόντιο επίπεδο.

Λύση: Οι επιταχύνσεις των δυο σωμάτων είναι διαφορετικές (ως διανύσματα) αλλά έχουν το ίδιο μέτρο, λόγω της παρουσίας αβαρών και ανελαστικών σχοινιών και λείας τροχαλίας. Με άλλα λόγια, τα σώματα  $m_1, m_2$  κινούνται “μαζί”. Το ίδιο ισχύει και για τις τάσεις νημάτων για τα δυο σώματα: διαφορετικές ως διανύσματα αλλά με το ίδιο μέτρο. Τα διαγράμματα δυνάμεων φαίνονται στα Σχήματα 2.38(β-γ), ενώ έχει γίνει και η ανάλυση των απαραίτητων δυνάμεων κατά άξονες. Ας ξεκινήσουμε με το σώμα που χρέμεται. Το σώμα μάζας  $m_1$  επιταχύνεται προς τα πάνω, άρα

$$\sum \vec{F}_y = m_1 \vec{a}_y \iff \vec{T} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a} \implies T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a \implies T = m_1(a + g) \quad (2.213)$$

Στον  $x$ -άξονα, το σώμα  $m_2$  επιταχύνεται, δηλαδή.

$$\sum \vec{F}_x = m_2 \vec{a}_x \iff \vec{T} + \vec{f}_k + \vec{F}_x = m_2 \vec{a}_x \implies F \cos(\theta) - T - \mu_k n = m_2 a_x = m_2 a \quad (2.214)$$

Αντικαθιστώντας την τάση  $T$  του νήματος, έχουμε

$$F \cos(\theta) - m_1(a + g) - \mu_k n = m_2 a \iff a = \frac{F \cos(\theta) - m_1 g - \mu_k n}{m_1 + m_2} \quad (2.215)$$

Στον  $y$ -άξονα, το σώμα  $m_2$  ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{n} + \vec{F}_y + m_2 \vec{g} = 0 \implies n + F \sin(\theta) = m_2 g \implies n = m_2 g - F \sin(\theta) \quad (2.216)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση της επιτάχυνσης

$$a = \frac{F \cos(\theta) - m_1 g - \mu_k(m_2 g - F \sin(\theta))}{m_1 + m_2} \quad (2.217)$$

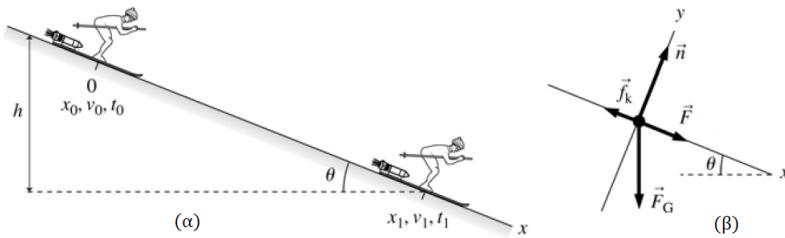
που είναι και το ζητούμενο.

### Παράδειγμα 2.23:

Ο Πάνος, που έχει μάζα 75 kg, ολισθαίνει με τα ενισχυμένα τζετ-σκι του από την κορυφή μιας χιονισμένης πλαγιάς γωνίας 10 μοιρών, με ύψος 50 m, όπως στο Σχήμα 2.39(α). Τα τζετ-σκι του παρέχουν μια σταθερή ώθηση 200 N. Η ταχύτητα του Πάνου στο τέλος της πλαγιάς είναι 40 m/s. Δείξτε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του χιονιού και των τζετ-σκι είναι  $\mu_k = 0.165$ .

Λύση: Από το ύψος και τη γωνία που μας δίνεται, έχουμε ότι το μήκος του κεκλιμένου είναι

$$\frac{h}{\Delta x} = \sin \theta \Rightarrow \Delta x = \frac{h}{\sin \theta} \quad (2.218)$$



Σχήμα 2.39: Ολίσθηση με τζετ-σκι.

Δείτε το Σχήμα 2.39(β), όπου έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον Πάνο, θεωρώντας θετική φορά προς την κατάβαση της πλαγιάς. Ο Πάνος δεν επιταχύνει στον άξονα  $y$ , άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο του Newton για να βρούμε τη δύναμη από το κεκλιμένο στον Πάνο.

$$\sum \vec{F}_y = 0 \implies n - F_g \cos \theta = 0 \implies n = F_g \cos \theta = mg \cos \theta = 724N \quad (2.219)$$

Από τις γνωστές εξισώσεις κίνησης έχουμε ότι ο Πάνος θα έχει επιτάχυνση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow a_x = \frac{u_f^2}{2\Delta x} = 2.78 \text{ m/s}^2 \quad (2.220)$$

Από το 2ο νόμο του Newton στον άξονα  $x$  και από τη σχέση  $f_k = \mu_k n$  έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x \implies \sum F_x = F_g \sin \theta + F - f_k = ma_x \Rightarrow \mu_k = \frac{mg \sin \theta + F - ma_x}{n} = 0.165 \quad (2.221)$$

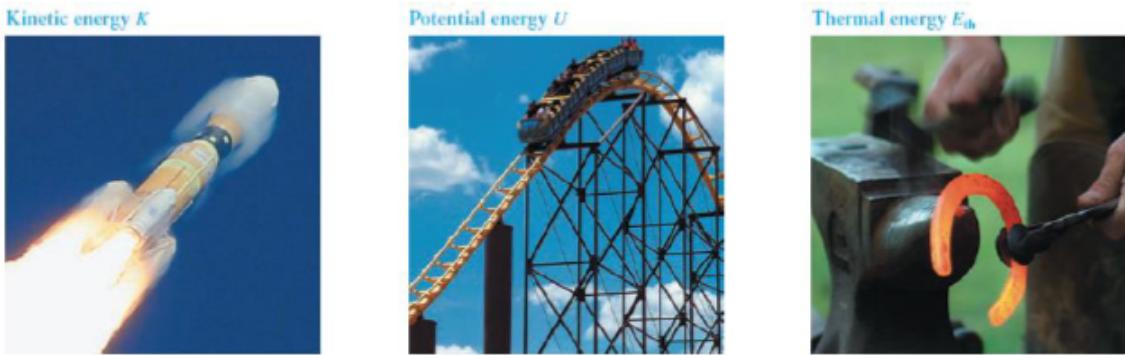
## 2.5 Ενέργεια

Με όσα έχουμε δει ως τώρα για την Μηχανική, το οπλοστάσιο μας αποτελείται από έννοιες όπως η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, και η δύναμη. Χρησιμοποιώντας παράλληλα τις εξισώσεις της κίνησης και του τρεις Νόμους του Newton, μπορούμε να λύσουμε πάρα πολλά προβλήματα... θεωρητικά. Στην πράξη, αντιμετωπίζουμε πολλές φορές δύσκολίες καθώς η πολυτλοχότητα διαφόρων προβλημάτων ανεβαίνει σημαντικά. Χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση, που θα κάνει τη λύση των προβλημάτων αυτών πιο απλή.

Οι έννοιες που θα συζητήσουμε θα σας φανούν οικείες, αλλά θα τις προσεγγίσουμε με λίγο περισσότερη ακρίβεια. Ας ξεκινήσουμε με μια από αυτές, την έννοια της ενέργειας. Γνωρίζετε από την καθημερινότητά σας τη χρήση της λέξης αυτής: το φαγητό μας δίνει ενέργεια για να βγάλουμε μια δύσκολη μέρα, η βενζίνη δίνει ενέργεια στη μηχανή του αυτοκινήτου για να μας πάει μια βόλτα, ο ηλεκτρισμός παρέχει ενέργεια στις συσκευές μας για να δουλέψουν, κ.α. Υπάρχουν πάρα πολλά είδη ενέργειας αλλά ευτυχώς θα μας απασχολήσουν μόνο τρία από αυτά:

- η κινητική ενέργεια, που σχετίζεται με την κίνηση ενός σώματος
- η δυναμική ενέργεια, που σχετίζεται με τη διάταξη ή τη σχετική θέση ενός συνόλου σωμάτων
- η θερμική ενέργεια, που σχετίζεται με τη θερμική κατάσταση ενός σώματος

Δείτε το Σχήμα 2.40. Έχουμε ήδη πει τόσα πράγματα για την ενέργεια και ακόμα δεν έχουμε δώσει έναν ορισμό! Η αλήθεια είναι πως η ενέργεια έχει τόσες πολλές μορφές που είναι δύσκολο να οριστεί με σαφήνεια και ακρίβεια. Αποτελεί δηλαδή μια κάπως... “αφηρημένη” έννοια. Θα μπορούσαμε βέβαια να πούμε ότι αποτελεί έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός συστήματος. Το ενδιαφέρον είναι ότι κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/μετασχηματισμούς αυτής! Θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο να μπορούμε να περιγράψουμε προβλήματα (και να τα λύνουμε!) με ενεργειακό τρόπο!



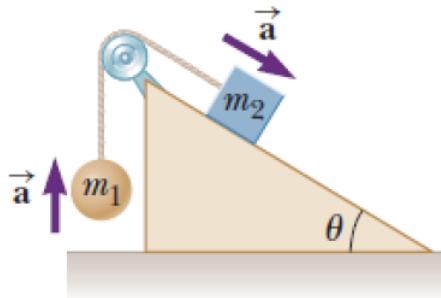
Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης. Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια. Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.

Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικειμένου. Το τρενάκι της ευκόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.

Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενέργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα. Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.

Σχήμα 2.40: Τρία είδη ενέργειας.

Ας ξεκινήσουμε τη συζήτηση μας από την έννοια του συστήματος. Τι είναι ένα σύστημα; Ένα σύστημα είναι ένα απλό σώμα ή ένα σύνολο από σώματα. Επίσης, μπορεί να είναι μια περιοχή ενός χώρου ή κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος. Βλέπετε ότι οι αφηρημένες έννοιες συνεχίζονται ☺ Ουσιαστικά τα πάντα μπορεί να είναι ένα σύστημα: από το ίδιο το σύμπαν, ως μια καρφίτσα ή κάτι ακόμα (πολύ) μικρότερο. Ένα πρώτο βήμα λοιπόν στην ενεργειακή μελέτη ενός φαινομένου είναι η αναγνώριση του συστήματος. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καιώς πολλές φορές αγνοούμε τι συμβαίνει εκτός του συστήματος ή, αν όχι, πρέπει να γνωρίζουμε πως επηρεάζεται εξωτερικά το σύστημα. Ανεξαρτήτως του συστήματος που θα επιλέξουμε, πάντα σε αυτό θα υπάρχει το σύνορο/όριο συστήματος: μια φανταστική επιφάνεια που διαχωρίζει το σύστημα από το περιβάλλον του.



Σχήμα 2.41: Λίγο πιο περίπλοκο σύστημα.

Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα σπόγγο που στέκεται στη βάση ενός πίνακα. Ας θεωρήσουμε το σύστημα μας να είναι ο σπόγγος. Η επιφάνεια του αποτελεί το σύνορο του συστήματος. Αν κάποιος φίλος σας ασκήσει δύναμη επάνω στο σπόγγο με το δάχτυλό του, τότε η δύναμη του είναι μια επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, η οποία ασκείται επάνω στο σύνορο του συστήματος. Ένα άλλο παράδειγμα βλέπετε στο Σχήμα 2.41.

Θεωρούμε εδώ το σύστημα μας να είναι τα σώματα μάζας  $m_1, m_2$  και το σχοινί. Οι δυνάμεις από το σχοινί επάνω στα σώματα είναι εσωτερικές του συστήματος, και δεν ανήκουν στο περιβάλλον του. Το σύνορο του συστήματος εδώ δεν είναι τόσο σαφές.

Επιστρέφοντας στο απλό παράδειγμα του σπόγγου, ας δούμε το Σχήμα 2.42. Μπορούμε να αναρωτηθούμε πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με τη δύναμη που βάζουμε (έστω όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις του

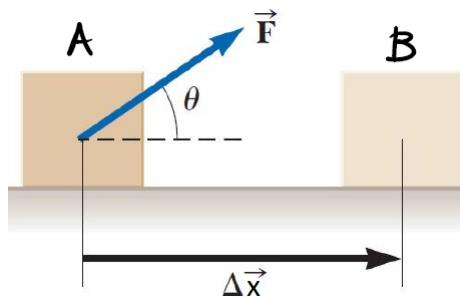


Σχήμα 2.42: Αποτελεσματικότητα δύναμης.

σχήματος) στο να κινήσουμε το σπόγγο; Με άλλα λόγια, σε ποιά περίπτωση καταφέρνουμε “χαλύτερα” να κινήσουμε το σπόγγο; Αρχίζουμε και σκεφτόμαστε τις έννοιες: δύναμη, μέτρο αυτής, κατεύθυνση, μετατόπιση σπόγγου...

Είναι εμφανές ότι στην τελευταία περίπτωση (c) ο σπόγγος δεν κινείται, παρόλο που εφαρμόζουμε δύναμη επάνω του (κάποιος μπορεί να πει ότι παραμορφώνεται λόγω της δύναμης, και υπάρχει μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης - είναι σωστό αλλά θεωρούμε τα πάντα ως αδιάστατα σώματα κι έτσι δεν ισχύει αυτή η θεώρηση). Οπότε σίγουρα θα λέγαμε ότι δεν είμαστε ιδιαίτερα αποτελεσματικοί στην προσπάθειά μας να τον κινήσουμε, παρά τη δύναμη που βάζουμε. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το μέτρο της δύναμης που εφαρμόζουμε δεν αρκεί για να περιγράψουμε την αποτελεσματικότητα μας - σημαντικό ρόλο παίζει η μετατόπιση του σώματος. Στις περιπτώσεις (a,b) είναι εμφανές ότι μπορούμε να μετατοπίσουμε το σπόγγο αλλά τόσο αυτή η μετατόπιση δυσκολεύει όσο αυξάνουμε τη γωνία εφαρμογής της δύναμης. Άρα στην περίφημη αποτελεσματικότητα μας παίζει ρόλο και η γωνία εφαρμογής, ή με άλλα λόγια, η γωνία μεταξύ του διανύσματος της δύναμης και του διανύσματος της μετατόπισης.

Ας τα βάλουμε σε μια σειρά. Δείτε το Σχήμα 2.43. Ένα σύστημα που αποτελείται μόνο από το σώμα του



Σχήμα 2.43: Παράδειγμα για ορισμό έργου δύναμης.

σχήματος μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια σταθερή δύναμη ασκούμενη υπό γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο επίπεδο, προκαλώντας μετατόπιση  $\Delta\vec{x}$ , από ένα σημείο (A) ως ένα σημείο (B). Ορίζουμε το έργο  $\mathbf{W}$  που παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη  $F$  που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ως το γινόμενο του μέτρου της δύναμης, του μέτρου της μετατόπισης, και του συνημιτόνου της γωνίας ανάμεσα στα δύο τελευταία. Με μαθηματικά

$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{x}| \cos(\theta) = F \Delta x \cos(\theta) \quad (2.222)$$

Το μοτίβο “αριθμός επί αριθμός επί το συνημίτονο μιας γωνίας” πρέπει να σας είναι γνωστό. Σας θυμίζει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, και πράγματι μπορούμε να γράψουμε το έργο ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, με αυτά να είναι η δύναμη  $\vec{F}$  και η μετατόπιση  $\Delta\vec{x}$ ! Έτσι

$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{x}| \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} \quad (2.223)$$

Όλες τις ιδιότητες εσωτερικού γινομένου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την έκφραση του έργου. Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι  $N \cdot m$ , το οποίο ισούται με ένα Τζάουλ (Joule - J).

### Παράδειγμα 2.24:

Ένα σωματίδιο στο  $xy$  επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση  $\Delta\vec{r} = 2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}$  m λόγω μιας σταθερής δύναμης  $\vec{F} = 5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}$  N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο  $W$  της δύναμης  $\vec{F}$  επάνω στο σωματίδιο.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον ορισμό

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}) \cdot (2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}) \quad (2.224)$$

$$= 5\vec{i} \cdot 2\vec{i} + 5\vec{i} \cdot 3\vec{j} + 2\vec{j} \cdot 2\vec{i} + 2\vec{j} \cdot 3\vec{j} \quad (2.225)$$

$$= 10\vec{i} \cdot \vec{i} + 0 + 0 + 6\vec{j} \cdot \vec{j} \quad (2.226)$$

$$= 10 + 6 = 16 \text{ J} \quad (2.227)$$

αφού

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos(0) = |\vec{i}|^2 = 1 \quad (2.228)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \cos(0) = |\vec{j}|^2 = 1 \quad (2.229)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos(\pi/2) = 0 \quad (2.230)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{j}| |\vec{i}| \cos(\pi/2) = 0 \quad (2.231)$$

Διακρίνετε τη διαφορά με την κοινή σας αίσθηση για το έργο; Αν όχι, σκεφτείτε το εξής: κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων για 2'. Στο τέλος των δυο λεπτών, θα έχετε κουραστεί και θα πιστεύετε ότι “παράξατε αρκετό έργο” πάνω στην μπάλα. Η αλήθεια όμως είναι ότι αν εφαρμόσετε τον ορισμό του έργου θα βγάλετε αποτέλεσμα μηδέν! Ο λόγος είναι ότι απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε.

### Παράδειγμα 2.25:

Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις του Σχήματος 2.44 σε αύξουσα τιμή έργου. Η δύναμη  $\vec{F}$  είναι σε κάθε περίπτωση ίδιου μέτρου.



Σχήμα 2.44: Παράδειγμα περιπτώσεων έργου.

Λύση: Ισως σκεφτείτε ότι το μηδενικό έργο είναι η χαμηλότερη τιμή, αλλά για δείτε το Σχήμα 2.44(β). Θα έχουμε

$$W_b = F\Delta x \cos(\pi) = -F\Delta x \quad (2.232)$$

και βλέπουμε ότι το έργο μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές! Θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα. Το ίδιο ισχύει και για το Σχήμα 2.44(δ), όπου

$$W_d = F\Delta x \cos(\theta) \quad (2.233)$$

με  $\pi < \theta < \pi/2$ , οπότε και εδώ  $W_d < 0$ . Το Σχήμα 2.44(α) μας δίνει έργο ίσο με μηδέν αφού

$$W_a = F\Delta x \cos(\pi/2) = 0 \quad (2.234)$$

Εδώ έχουμε μια δύναμη η οποία είναι κάθετη στη μετατόπιση και παρατηρούμε ότι δεν παράγει έργο! Τέλος, η περίπτωση του Σχήματος 2.44(ζ) δίνει

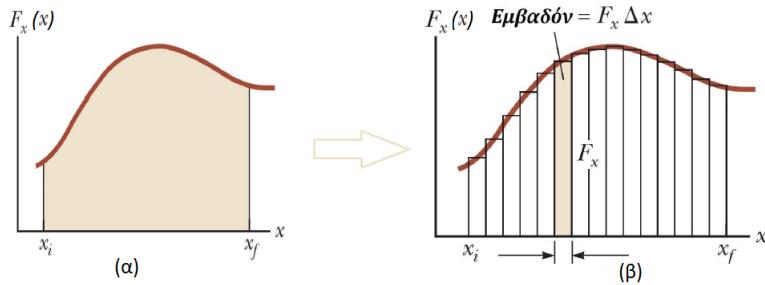
$$W_c = F\Delta x \cos(0) = F\Delta x \quad (2.235)$$

Εφ' όσον μέσω της δύναμης που ασκούμε σε ένα σύστημα μπορούμε να αλλάξουμε την κινητική του κατάσταση, μπορούμε να πούμε ότι μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα μέσω του έργου. Άρα

έργο == μεταφορά ενέργειας

Είδαμε ότι το έργο μπορεί να έχει αρνητικό ή θετικό πρόσημο. Ενεργειακά, τι σημαίνει αυτό; Ίσως υποψιάζεστε ήδη (σωστά) ότι αν  $W$  είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε θετικό έργο σημαίνει ότι υπάρχει μεταφορά ενέργειας προς το σύστημα, ενώ αρνητικό έργο σημαίνει ότι υπάρχει μεταφορά ενέργειας από το σύστημα.

Η συζήτησή μας περιστρέφεται τόση ώρα γύρω από την έννοια του έργου. Ίσως προσέξατε ότι σε όλη τη θεωρία και τα παραδείγματα, η δύναμη που παρήγαγε το έργο ήταν σταθερή. Τι γίνεται στην περίπτωση που η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη μέτρου; Προφανώς η σχέση του έργου που έχουμε εισάγει δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Τι μπορούμε να κάνουμε τότε; Ας δούμε ένα γενικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε τη διαδικασία. Δείτε το Σχήμα 2.45(α). Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τη  $x$ -συνιστώσα μιας δύναμης που



Σχήμα 2.45: Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης.

μεταβάλλεται κατά μέτρο από ένα σημείο  $x_i$  ως ένα σημείο  $x_f$ . Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο αυτής της συνιστώσας. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι τμηματικά σταθερή, δηλ. για πολύ μικρές μετατοπίσεις  $\Delta x$ , η δύναμη  $F_x(x)$  είναι σταθερή. Τμηματοποιούμε τον άξονα  $x$  λοιπόν σε μικρά τμήματα  $\Delta x$  και υποθέτουμε ότι η τιμή της  $F_x(x)$  σε κάθε τέτοιο διάστημα είναι σταθερή, όπως στο Σχήμα 2.45(β). Τότε μπορούμε να πούμε ότι το συνολικό έργο  $W$  μπορεί να προσεγγιστεί από τα επιμέρους έργα  $W_j$  στα οποία η δύναμη είναι σταθερή. Έτσι

$$W \approx \sum_j W_j \quad (2.236)$$

με

$$W_j = F_{x_j} \Delta x \quad (2.237)$$

αν υποθέσουμε ότι η τμηματοποίηση του άξονα  $x$  είναι ομοιόμορφη. Μπορείτε να αναγνωρίσετε ότι το έργο  $W_j$  αντιστοιχεί στο εμβαδό του εκάστοτε παραλληλογράμμου με πλευρές  $F_{x_j}$  και  $\Delta x$ . Με άλλα λόγια, το συνολικό έργο της δύναμης  $\vec{F}_x(x)$  μπορεί να βρεθεί αν ανθροίσουμε τα εμβαδά των παραλληλογράμμων που κατασκευάζουμε κάτω από τη συνάρτηση  $F_x(x)$ . Αν αρχίσουμε να μικραίνουμε πολύ τα διαστήματα  $\Delta x$  -

κρατώντας ομοιόμορφη διαμέριση - αρχίζουμε να προσεγγίζουμε όλο και καλύτερα το συνολικό έργο. Αν  $\Delta x \rightarrow 0$ , τότε το άθροισμα  $W \approx \sum_j W_j$  μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx \quad (2.238)$$

Συνολικά

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_x \cdot d\vec{x} \quad (2.239)$$

### Παράδειγμα 2.26:

Μια σφαίρα μάζας  $m = 0.1$  kg εκτοξεύεται από ένα τουφέκι με κάννη μήκους 0.6 m. Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα από τα αέρια του όπλου είναι

$$F(x) = 15000 + 10000x - 25000x^2 \quad (2.240)$$

με  $x$  να μετριέται σε μέτρα και τη δύναμη  $F(x)$  σε Newton. Βρείτε το έργο που παράγεται από τα αέρια στη σφαίρα όσο αυτή ταξιδεύει κατά μήκος της κάννης. Θεωρήστε τη διαδρομή ευθύγραμμη.

Λύση: Θεωρούμε ότι τα αέρια ξεκινούν να παράγουν έργο στη σφαίρα όταν αυτή ξεκινά να κινείται ( $x = 0$ ) εως ότου αυτή βγει από την κάννη ( $x = 0.6$ ). Η κίνηση θεωρείται ευθύγραμμη, άρα η δύναμη και η μετατόπιση είναι συγγραμμικές και το εσωτερικό γινόμενό τους αποτελεί το αλγερβικό γινόμενο του μέτρου καθεμιάς. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (2.241)$$

$$= \int_0^{0.6} (15000 + 10000x - 25000x^2) dx \quad (2.242)$$

$$= \left( 15000x + \frac{10000}{2}x^2 - \frac{25000}{3}x^3 \right) \Big|_0^{0.6} \quad (2.243)$$

$$= 9000 + 18000 - 18000 = 9000 \text{ J} \quad (2.244)$$

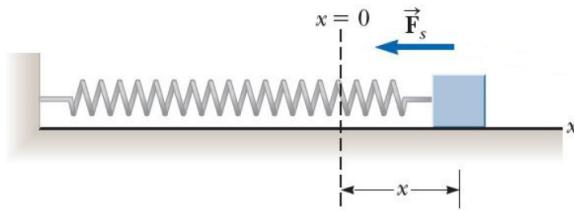
#### 2.5.1 Η δύναμη του ελατηρίου

Μια από τις πιο δημοφιλείς δυνάμεις στη μηχανική είναι η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο σε ένα σώμα. Τυπικά, ένα ελατήριο έχει ελικοειδές σχήμα, όπως στο Σχήμα 2.46, και συνήθως κατασκευάζεται από χάλυβα. Το ελατήριο κατασκευάζεται έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια (σύντομα θα δούμε τι είδους ενέργεια είναι αυτή). Όταν ένα ελατήριο βρίσκεται στη φυσική του κατάσταση (ασυμπίεστο και μη εκτεταμένο) τότε



Σχήμα 2.46: Ελικοειδές ελατήριο.

λέμε ότι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Ας θεωρήσουμε ως σύστημα ένα σώμα δεμένο πάνω σε ένα ελατήριο. Μετατοπίζουμε το σώμα κατά  $x > 0$  από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς  $x = 0$  τη θέση φυσικής ισορροπίας του ελατηρίου και θετική φορά του άξονα προς τα δεξιά, όπως στο Σχήμα 2.47. Παρατηρούμε ότι κατά την έκταση του ελατηρίου εγείρεται δύναμη  $\vec{F}_s$  από το ελατήριο επάνω



Σχήμα 2.47: Σώμα σε ελατήριο.

στο σώμα. Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται ανάλογα με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου (με άλλα λόγια, όσο τεντώνουμε το ελατήριο, τόσο αυξάνεται το μέτρο της δύναμης  $\vec{F}_s$ ). Έχει δειχθεί ότι η δύναμη αυτή περιγράφεται ως

$$F_s = -kx \quad (2.245)$$

και ονομάζεται **Νόμος του Hooke**. Η σταθερά  $k$  έχει τιμή ανάλογη της σκληρότητας του ελατηρίου: μεγάλη τιμή  $k$  σημαίνει σκληρό ελατήριο, ενώ μικρή  $k$  υποδηλώνει μαλακό ελατήριο. Προφανώς οι μονάδες της σταθεράς  $k$  είναι  $N/m$ , έτσι ώστε οι μονάδες του αριστερού μέλους να ισούνται με αυτές του δεξιού. Η διανυσματική μορφή του νόμου του Hooke είναι

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} = -kx\vec{i} \quad (2.246)$$

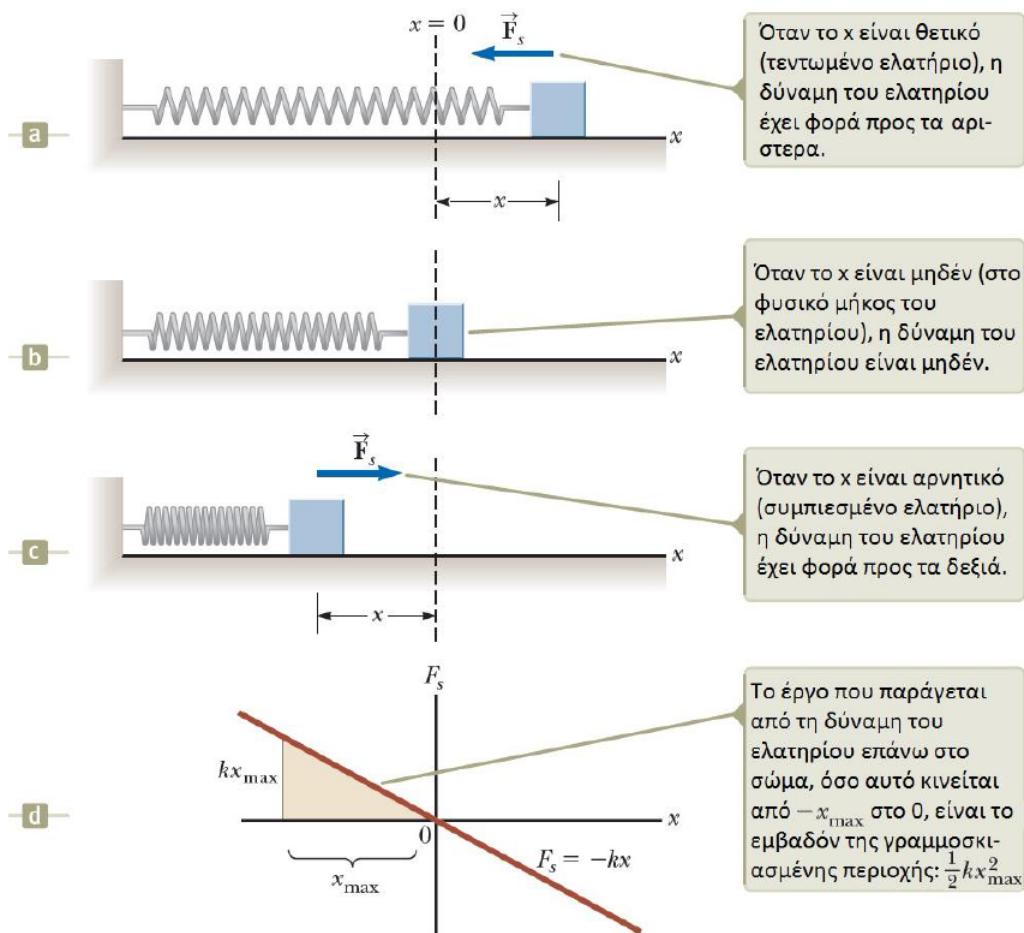
με το πρόσημο να υποδηλώνει ότι η φορά της είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου και θεωρώντας οριζόντια κίνηση.

### 2.5.2 Έργο δύναμης ελατηρίου

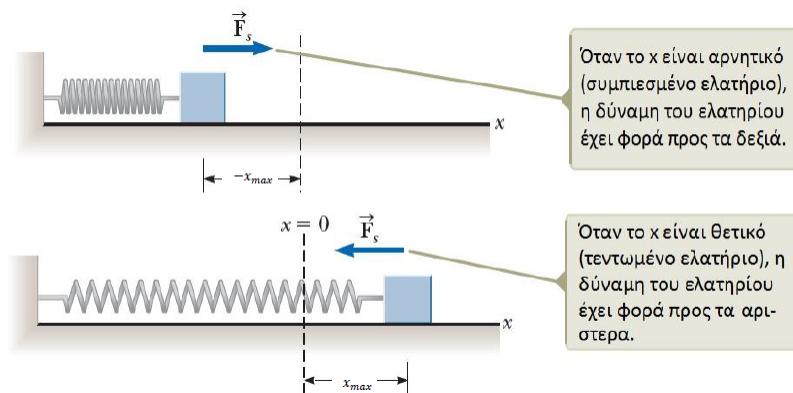
Ας μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος δεμένου σε ελατήριο, από μια έκταση  $x$  σε σχέση με τη θέση ισορροπίας, ως μια συμπίεση κατά την ίδια ποσότητα. Δείτε το Σχήμα 2.48. Να θυμάστε πάντα ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι μεταβαλλόμενη μέτρου, οπότε αν θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της, ο κλασικός ορισμός του έργου δε θα μας φανεί χρήσιμος. Αντίθετα, θα μας χρειαστεί ιδιαίτερα η Σχέση (2.238). Ας δούμε ένα-ένα τα στιγμιότυπα της κίνησης του Σχήματος 2.48.

- (α') Όταν μετατοπίζουμε το σώμα προς τα δεξιά, το ελατήριο εκτείνεται, η δύναμη του ελατηρίου  $\vec{F}_s$  έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα αριστερά. Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί.
- (β') Το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του ( $x = 0$ ), δηλ. το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Τότε η δύναμη του ελατηρίου παύει να υφίσταται.
- (γ') Όταν μετατοπίζουμε το σώμα προς τα αριστερά, το ελατήριο συμπιέζεται, η δύναμη του ελατηρίου  $\vec{F}_s$  έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα δεξιά. Αν αφήσουμε το σώμα να κινηθεί, αυτό θα επιστρέψει στη θέση (b) του σχήματος.
- (δ') Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα; Μπορούμε εύκολα να το κάνουμε. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη, οπότε το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με τη μετατόπιση μετατρέπεται σε αλγεβρικό. Αν έχουμε τη γραφική παράσταση δύναμης συναρτήσει της μετατόπισης, τότε το έργο  $W$  αποτελεί την επιφάνεια που σχηματίζεται από τη συνάρτηση  $F_s(x)$  και τον άξονα  $x$ . Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα, το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου πάνω στο σώμα όσο αυτό κινείται από  $-x_{max}$  (τη μέγιστη μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας) ως  $x = 0$  (το σημείο ισορροπίας) είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Εύκολα βρίσκεται από γεωμετρία ότι είναι  $\frac{1}{2}kx_{max}^2$ .

Το έργο της δύναμης  $\vec{F}_s$  του ελατηρίου θα μας απασχολήσει αρκετά, οπότε ας βάλουμε λίγο τα μαθηματικά να δουλέψουν για να καταλάβουμε τι συμβαίνει γενικότερα. Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται σε μια μέγιστη τιμή (αρχική θέση  $x_i = -x_{max}$ ) και αφήνεται ελεύθερο. Η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα δεξιά (αφού συμπιέζουμε προς τα αριστερά), όπως στο Σχήμα 2.49. Ας



Σχήμα 2.48: Κίνηση σώματος σε ελατήριο.



Σχήμα 2.49: Συμπίεση ελατηρίου.

επιλέξουμε τελική θέση της κίνησης  $x_f = 0$ , δηλ. τη θέση ισορροπίας. Ας υπολογίσουμε το έργο της δύναμης του ελατηρίου κατά τη μετατόπιση του σώματος μεταξύ αυτών των δύο θέσεων. Δεδομένου ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη και τα διανύσματα  $\vec{F}_s$ ,  $\vec{x}$  είναι ομόρροπα, θα είναι

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.247)$$

Παρατηρήστε ότι το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι θετικό: η δύναμη αυτή εισήγαγε στο σύστημα-σώμα

ενέργεια ώστε να το φέρει στη θέση ισορροπίας. Ας δούμε τώρα την άλλη όψη.

Έστω ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του από τη θέση ισορροπίας ως μια θέση  $x_f = x_{max}$ . Θεωρούμε αρχική θέση τη θέση ισορροπίας αυτή τη φορά. Η δύναμη του ελατηρίου έχει τώρα φορά προς τα αριστερά. Ποιό είναι το έργο της δύναμης του ελατηρίου τώρα; Κάποιος/α μπορεί να πει “μα ξανά είναι το ίδιο”. Ας το δούμε:

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_0^{x_{max}} (-kx) dx = -\frac{1}{2} kx_{max}^2 \quad (2.248)$$

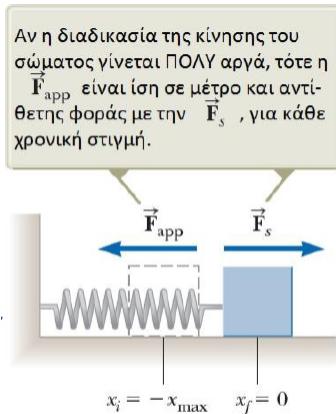
Το έργο της δύναμης του ελατηρίου σε αυτή τη διαδρομή είναι αρνητικό! Η δύναμη του ελατηρίου αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος που προσπαθεί να απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας. Κατά συνέπεια, αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα-σώμα. Επίσης, καταλαβαίνετε ότι το συνολικό έργο της δύναμης  $\vec{F}_s$  επάνω στο σώμα από τη θέση  $x_i = -x_{max}$  ως τη θέση  $x_f = x_{max}$  είναι μηδέν! Αυτό ισχύει για κάθε ζεύγος αρχικής - τελικής θέσης που είναι συμμετρικές γύρω από το σημείο ισορροπίας. Όμως, για μια οποιαδήποτε μετατόπιση από μια τυχαία θέση  $x_i$  ως μια άλλη τυχαία θέση  $x_f$  ισχύει

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \quad (2.249)$$

που καταλαβαίνετε ότι δεν είναι απαραίτητα ίσο με μηδέν.

### 2.5.3 Έργο εξωτερικής δύναμης

Έστω μια εξωτερική δύναμη  $\vec{F}_{app}$  που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο Σχήμα 2.50. Υποθέστε ότι



Σχήμα 2.50: Έργο εξωτερικής δύναμης.

η κίνηση του ελατηρίου γίνεται από τη θέση μετατόπισης  $x_i = -x_{max}$  ως τη θέση  $x_f = 0$  (θέση ισορροπίας). Καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, το σώμα κινείται πολύ αργά, έτσι ώστε σε κάθε στιγμή να ισχύει ότι

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad (2.250)$$

ή αλλιώς

$$\vec{F}_s = -\vec{F}_{app} \quad (2.251)$$

Ας υπολογίσουμε το έργο αυτής της εξωτερικής δύναμης.

$$W_{app} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 kx dx = -\frac{1}{2} kx_{max}^2 \quad (2.252)$$

Με άλλα λόγια

$$W_{app} = -W_s \quad (2.253)$$

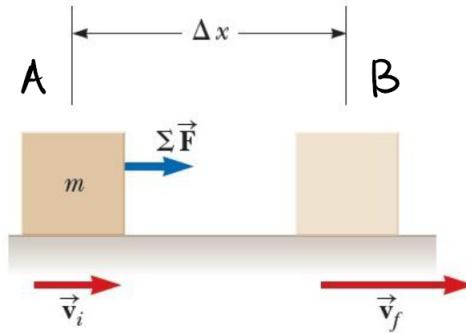
Γενικεύοντας, για οποιαδήποτε μετατόπιση από μια αρχική σε μια τελική θέση,

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 = -W_s \quad (2.254)$$

#### 2.5.4 Κινητική Ενέργεια

Βλέπουμε λοιπόν συνεχώς ότι πράγματι το έργο αποτελεί ενα μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας - έστω μόνο σε αυτά τα απλά συστήματα που συζητάμε. Ένα καλό ερώτημα είναι “τι συμβαίνει σε αυτήν την ενέργεια”; Από τα λίγα που έχουμε συζητήσει - αλλά κυρίως με βάση την καθημερινή εμπειρία σας - καταλαβαίνετε ότι ένα ενδεχόμενο είναι να μεταβάλλει την ταχύτητα ενός σώματος. Εδώ λοιπόν έρχεται ο πρώτος τύπος ενέργειας που θα συναντήσουμε, η οποία ονομάζεται κινητική ενέργεια. Ας την εισάγουμε με ένα παράδειγμα.

Δείτε το Σχήμα 2.51. Θεωρούμε ότι το σώμα του σχήματος αποτελεί και το σύστημα που μελετάμε,



Σχήμα 2.51: Σώμα σε κίνηση.

και το οποίο κινείται από τη θέση (A) στη θέση (B), με μετατόπιση  $\Delta x$ , έχοντας αρχικά μια ταχύτητα  $\vec{u}_i$  και καταλήγοντας σε μια ταχύτητα  $\vec{u}_f$ , λόγω επίδρασης συνισταμένης δυνάμεων  $\Sigma \vec{F}$ . Έστω ότι αυτή η συνισταμένη είναι σταθερή. Αναγνωρίζετε ότι η κίνηση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση. Έτσι από τις εξισώσεις της κίνησης θα είναι

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \quad (2.255)$$

Ταυτόχρονα, η κίνηση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως κίνηση σώματος υπό επίδραση σταθερής δύναμης. Από το 2o νόμο του Newton, θα έχουμε

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.256)$$

και θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε

$$\sum F = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \iff \sum F \Delta x = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2 \quad (2.257)$$

Αναγνωρίζετε το πρώτο μέλος; Είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης. Έτσι

$$W_{ext} = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2 \quad (2.258)$$

Η ποσότητα  $\frac{1}{2} m u^2$  θα προκύψει πάρα πολλές φορές στη συνέχεια, οπότε ας της δώσουμε ένα καλό όνομα: θα την ονομάσουμε κινητική ενέργεια του συστήματος (σώματος) και θα τη συμβολίζουμε ως  $K$ . Οπότε τελικά

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K \quad (2.259)$$

Η κινητική ενέργεια αναπαριστά το είδος της ενέργειας που σχετίζεται με την κίνηση του σώματος (ή των μελών ενός συστήματος). Μονάδα μέτρησης της είναι προφανώς το J, όπως σε κάθε είδος ενέργειας που θα συναντήσουμε. Η τελευταία σχέση αποτελεί το περίφημο Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου - ΘΜΚΕΕ και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

### Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου

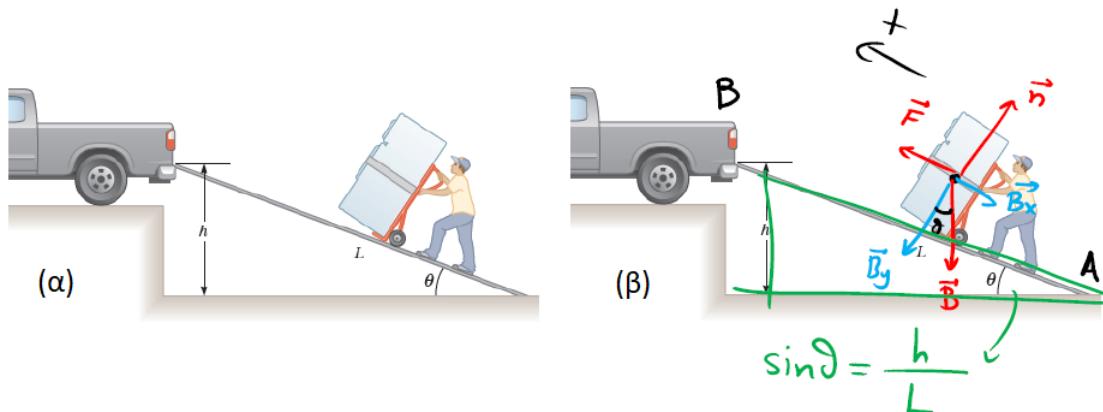
Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων και η μόνη αλλαγή σε αυτό το σύστημα αφορά το μέτρο της ταχύτητας του (ή των μελών του), το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος:

$$\Delta K = W_{ext} \quad (2.260)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 2.27:

Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του σε ένα φορτηγό που βρίσκεται σε ύψος  $h$ , χρησιμοποιώντας μια ράμπα υπό γωνία  $\theta$ , όπως στο Σχήμα 2.52(α). Αν το κάνει με σταθερή ταχύτητα, ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας  $L$  αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς και ότι η δύναμη  $\vec{F}$  που ασκεί στο ψυγείο είναι σταθερή.



Σχήμα 2.52: Ανέβασμα ψυγείου σε φορτηγό.

Λύση: Ας σχεδιάσουμε τις δυνάμεις επάνω στο ψυγείο, όπως στο Σχήμα 2.52(β). Έχουμε τη δύναμη  $\vec{F}$  που ασκεί ο φίλος σας στο ψυγείο, η δύναμη  $\vec{B}$  του βάρους του ψυγείου (η δύναμη που ασκεί η Γη στο ψυγείο), και η κάθετη δύναμη  $\vec{n}$  από τη ράμπα στο ψυγείο. Έστω ότι ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα  $x'$  να είναι παράλληλος στη ράμπα και αναλύουμε όσες δυνάμεις δεν είναι συνευθειακές με τους άξονες, όπως η δύναμη του βάρους. Θεωρούμε ότι η φορά προς το αριστερό μέρος του άξονα και έστω ότι η κίνηση γίνεται από το σημείο (A) ως το σημείο (B). Το σύστημα μας είναι το ψυγείο + καρότσι (ή ένα ψυγείο με ρόδες ☺). Δεδομένου ότι κινείται με σταθερή (άγνωστη) ταχύτητα, καταλαβαίνουμε ότι η τελευταία θα είναι ίδια τόσο στο σημείο (A) στη βάση της ράμπας, όσο και στο σημείο (B) όταν φορτωθεί στο καρότσι. Οπότε οι κινητικές ενέργειες του συστήματος στα δύο σημεία θα είναι ίδιες! Άρα:

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = 0 \quad (2.261)$$

Από το ΘΜΚΕΕ από το σημείο (A) στο σημείο (B) έχουμε

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_F + W_{B_x} + W_n + W_{B_y} \quad (2.262)$$

$$0 = W_F + W_{B_x} + W_n + W_{B_y} \quad (2.263)$$

Παρατηρήστε ότι  $W_n = W_{B_y} = 0$  αφού οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του ψυγείου, οπότε το έργο τους είναι μηδενικό. Έτσι

$$0 = W_F + W_{B_x} + 0 + 0 \quad (2.264)$$

$$0 = W_F + W_{B_x} \quad (2.265)$$

$$W_F = -\vec{B}_x \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.266)$$

$$= -B_x \Delta x \cos(\pi) \quad (2.267)$$

$$= -mg \sin(\theta) L \cos(\pi) \quad (2.268)$$

$$= mg \sin(\theta) L \quad (2.269)$$

και από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε

$$W_F = mgh \quad (2.270)$$

Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης  $\vec{F}$  δεν εξαρτάται από το μήκος της ράμπας  $L$ . Άρα ο φίλος μας δεν έχει δίκιο.

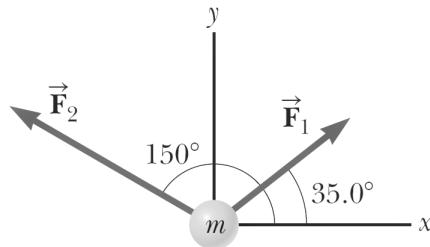
### Παράδειγμα 2.28:

Δυο σταθερές δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα μάζας  $m = 5 \text{ kg}$  που κινείται στο  $xy$  επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.53. Η δύναμη  $\vec{F}_1$  έχει μέτρο  $25 \text{ N}$  και ασκείται υπό γωνία  $35^\circ$ , και η δύναμη  $\vec{F}_2$  έχει μέτρο  $42 \text{ N}$  και ασκείται υπό γωνία  $150^\circ$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το σώμα βρίσκεται στο σημείο  $(0, 0)$  και έχει ταχύτητα  $(4\vec{i} + 2.5\vec{j}) \text{ m/s}$ .

- i. Εκφράστε τις δυο δυνάμεις με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων.
- ii. Βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στο σώμα.
- iii. Δείξτε ότι η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j}) \text{ m/s}^2 \quad (2.271)$$

- iv. Θεωρήστε τη χρονική στιγμή  $t = 3 \text{ s}$ . Βρείτε
  - (α') την ταχύτητα του σώματος
  - (β') τη ψέση του σώματος
  - (γ') την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση  $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2$
  - (δ') την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση  $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta \vec{r})$
  - (ε') Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από τις απαντήσεις σας στα δύο παραπάνω ερωτήματα;



Σχήμα 2.53: Εφαρμογή ΘΜΚΕΕ και η σχέση του με την κινητική.

Λύση:

- i. Οι δυο δυνάμεις γράφονται ως

$$\vec{F}_1 = 25(\cos 35^\circ \vec{i} + \sin 35^\circ \vec{j}) = 20.5\vec{i} + 14.3\vec{j} \text{ N} \quad (2.272)$$

$$\vec{F}_2 = 42(\cos 150^\circ \vec{i} + \sin 150^\circ \vec{j}) = -36.4\vec{i} + 21.0\vec{j} \text{ N} \quad (2.273)$$

ii. Θα είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15.9\vec{i} + 35.3\vec{j}) \text{ N} \quad (2.274)$$

iii. Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j}) \text{ m/s}^2 \quad (2.275)$$

iv. Τη χρονική στιγμή  $t = 3$  s,

(α') θα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t = -5.54\vec{i} + 23.7\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.276)$$

(β') θα είναι

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = -2.30\vec{i} + 39.3\vec{j} \text{ m} \quad (2.277)$$

(γ') με τη σχέση  $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2 \approx 1.48 \text{ kJ}$

(δ') με τη σχέση  $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}) = 55.6 + 1426 \approx 1480 \text{ J}$ , δηλ.  $1.48 \text{ kJ}$

(ε') Το θεώρημα κινητικής ενέργειας - έργου είναι συνεπές με το 2o νόμο του Newton.

### Παράδειγμα 2.29:

Όταν ένας οδηγός πατάει το γκάζι σε ένα ακίνητο αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο επιταχύνει. Για τα πρώτα λίγα δευτερόλεπτα της κίνησής του, η επιτάχυνσή του αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την έκφραση

$$a(t) = 1.16t - 0.21t^2 + 0.24t^3 \quad (2.278)$$

με  $t$  το χρόνο σε δευτερόλεπτα και την επιτάχυνση  $a(t)$  σε  $\text{m/s}^2$ . Δείξτε ότι - απουσία τριβών ή άλλης απώλειας ενέργειας - η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μάζας  $m = 1160 \text{ kg}$  κατά το διάστημα  $t = 0$  ως  $t = 2.5 \text{ s}$  είναι  $1.38 \times 10^4 \text{ J}$ .

Λύση: Για να βρούμε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου, γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση αποτελεί παράγωγο της ταχύτητας, άρα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς  $t$ .

$$u(t) = \int_0^t a(u) du = \int_0^t (1.16u - 0.21u^2 + 0.24u^3) du \quad (2.279)$$

$$= 1.16 \frac{u^2}{2} - 0.21 \frac{u^3}{3} + 0.24 \frac{u^4}{4} \Big|_0^t \quad (2.280)$$

$$= 0.58t^2 - 0.07t^3 + 0.06t^4 \quad (2.281)$$

Για  $t = 0$ ,  $u_i = 0$ . Σε  $t = 2.5 \text{ s}$ , θα έχουμε

$$u_f = 0.58 \cdot 2.5^2 - 0.07 \cdot 2.5^3 + 0.06 \cdot 2.5^4 = 4.88 \text{ m/s} \quad (2.282)$$

Άρα η μεταβολή στην κινητική ενέργεια, δεδομένου ότι αρχικά το αυτοκίνητο ήταν ακίνητο, θα είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = \frac{1}{2}mu_f^2 = 1.38 \times 10^4 \text{ J} \quad (2.283)$$

Παράδειγμα 2.30:

Μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα 3.0 kg ενώ αυτό κινείται με βάση τη σχέση

$$x(t) = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3 \quad (2.284)$$

με  $x$  σε μέτρα και  $t$  σε δευτερόλεπτα. Δείξτε ότι το έργο της δύναμης από  $t = 0$  ως  $t = 4$  sec είναι  $W_F = 528$  J. Θεωρήστε ως σύστημα το σώμα.

Λύση: Γνωρίζουμε από τις εξισώσεις της Κινητικής ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης ύσησης  $x(t)$ , δηλ.

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 3.0 - 8.0t + 3.0t^2 \quad (2.285)$$

και αντικαθιστώντας για  $t = 0$  και  $t = 4$  s, παίρνουμε

$$u(0) = 3.0 \text{ m/s} \text{ και } u(4) = 19 \text{ m/s} \quad (2.286)$$

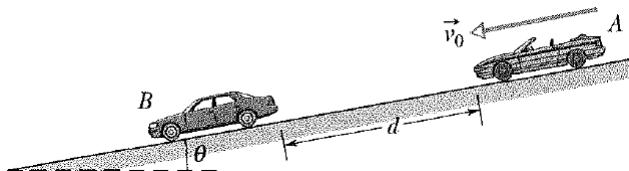
Από το ΘΜΚΕ-Ε επάνω στο σύστημα σώμα, έχουμε

$$\Delta K = W_F \iff W_F = \frac{1}{2}mu(4)^2 - \frac{1}{2}mu(0)^2 = 528 \text{ J} \quad (2.287)$$

Παράδειγμα 2.31:

Καταθέτετε ως ειδικός/η μάρτυρας σε μια περίπτωση ατυχήματος, όταν ένα αυτοκίνητο A χτύπησε στο πίσω μέρος ενός αυτοκινήτου B, που ήταν σταματημένο στο φανάρι σε ένα δρόμο με κλίση  $\theta = 12^\circ$  προς τα κάτω, όπως στο Σχήμα 2.54. Τα αμάξια είχαν απόσταση  $d = 24.0$  m όταν ο οδηγός του αμαξιού A πάτησε φρένο και το αμάξι του άρχισε να ολισθαίνει. Βρήκατε επίσης ότι η ταχύτητα του αμαξιού A τη στιγμή που πατήθηκαν τα φρένα ήταν  $u_A = 18$  m/s. Με ποιά ταχύτητα το αυτοκίνητο A χτύπησε το B όταν ο συντελεστής τριβής ολισθησης ήταν

- (α') 0.60, σε στεγνό δρόμο
- (β') 0.10, σε δρόμο καλυμμένο με υγρά φύλλα δένδρων



Σχήμα 2.54: Σχήμα Άσκησης 2.31.

Λύση: Θεωρούμε ως θετικές φορές τη βάση του κεκλιμένου και προς τα πάνω. Θα δείξουμε τη λύση τόσο με Νόμους του Newton όσο και με ΘΜΚΕ-Ε.

- (α') Εφαρμόζουμε το 2o Νόμο του Newton κατά την κατάβαση του αυτοκινήτου και έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \implies F_{g_x} - f_k = ma_x \quad (2.288)$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα  $y'y$ , οπότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + mg\vec{g} \cos(\theta) = \vec{0} \implies n - mg \cos(\theta) = 0 \iff n = mg \cos(\theta) \quad (2.289)$$

οπότε

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg \cos(\theta) \quad (2.290)$$

Με  $\mu_k = 0.6$ , παιρνούμε

$$mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \iff a_x = g \sin(\theta) - \mu_k g \cos(\theta) = -3.72 \text{ m/s}^2 \quad (2.291)$$

που σημαίνει ότι το αμάξι επιβραδύνεται. Με αρχική ταχύτητα  $u_i = 18 \text{ m/s}$  και απόσταση  $d = 24.0 \text{ m}$ , από τη γνωστή εξίσωση της κινηματικής

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff u_f = \sqrt{u_i^2 + 2ad} = 12.07 \text{ m/s} \quad (2.292)$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ-Ε στη διαδρομή  $A \rightarrow B$ :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_{f_k} + W_{F_{g_x}} \quad (2.293)$$

με τις δυνάμεις  $\vec{f}_k$ ,  $\vec{F}_{g_x}$ , να είναι οι μόνες που παράγουν έργο επάνω στο όχημα. Άρα

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = -f_k d + mg \sin(\theta) d \quad (2.294)$$

$$K_B - K_A = -\mu_k mg \cos(\theta) d + mg \sin(\theta) d \quad (2.295)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}mu_A^2 = -\mu_k mg \cos(\theta) d + mg \sin(\theta) d \quad (2.296)$$

$$u_B = \sqrt{u_A^2 - 2\mu_k g \cos(\theta) d + 2g \sin(\theta) d} = 12.072 \text{ m/s} \quad (2.297)$$

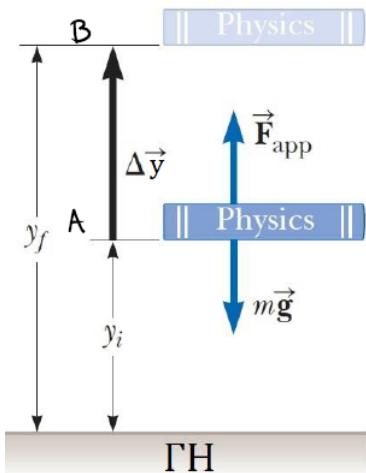
εφαρμόζοντας ξανά την ισορροπία στον άξονα  $y'y$ .

- (β') Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω βήματα, βρίσκουμε αρχικά ότι  $a_x = 1.1 \text{ m/s}^2$ , και η τελική ταχύτητα είναι  $u_f = 19.385 \text{ m/s}$ .

### 2.5.5 Δυναμική Ενέργεια

Ως τώρα συζητήσαμε για την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα ενός μόνο σώματος. Σε αυτήν την παράγραφο θα μιλήσουμε για δυο ή περισσότερα σώματα ως μέλη ενός συστήματος και τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους.

Θεωρήστε ως σύστημα το βιβλίο και τη Γη, όπως στο Σχήμα 2.55. Μετατοπίζουμε πολύ αργά (έτσι ώστε



Σχήμα 2.55: Σύστημα βιβλίου-Γης.

$\sum \vec{F}_y = 0$ ) το βιβλίο από μια θέση (A), σε ύψος  $y_i$  σε μια θέση (B) σε ύψος  $y_f$ , μέσω εξωτερικής δύναμης  $\vec{F}_{app}$ . Καταλαβαίνετε ότι η ενέργεια του συστήματος αυξάνεται λόγω του έργου της  $\vec{F}_{app}$ , αφού μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα, ανυψώνοντας το βιβλίο. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους (εξωτερική στο σύστημα) και η δύναμη ανύψωσης του βιβλίου (εξωτερική). Ανάμεσα στην αρχική και στην τελική θέση δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος, αφού και στην αρχή και στο τέλος της κίνησης το βιβλίο έχει σταθερή ταχύτητα. Άρα το ΘΜΚΕΕ δε μας είναι χρήσιμο, κανώς η ενέργεια που εισάγαμε στο σύστημα δεν μετατράπηκε σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Η ενέργεια πρέπει να έχει αποθηκευτεί σε διαφορετική μορφή!

Ας σκεφτούμε ότι το βιβλίο θα πέσει στο ύψος  $y_f$  αν το αφήσουμε. Οπότε το βιβλίο (και το σύστημα, κατ' επέκταση) πλέον μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια, αφού επιταχύνεται υπό την επίδραση του βάρους του. Πώς απέκτησε την ενέργεια που οδήγησε στη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας; Προφανώς προέρχεται από το έργο της δύναμης  $\vec{F}_{app}$  κατά την ανύψωση του βιβλίου νωρίτερα! Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει ονομάζεται δυναμική ενέργεια. Ας δοκιμάσουμε την έννοια του έργου για μια εξωτερική δύναμη που ανυψώνει σταθερά (πολύ αργά) το βιβλίο, έτσι ώστε  $\vec{F}_{app} = -\vec{B}$ , με  $\vec{B}$  τη δύναμη του βάρους που ασκεί η Γη στο βιβλίο. Θα είναι

$$W_{app} = \vec{F}_{app} \cdot \Delta \vec{y} = F_{app} \vec{j} \cdot (y_f - y_i) \vec{j} \quad (2.298)$$

$$= mgy_f - mgy_i = U_{g_f} - U_{g_i} \quad (2.299)$$

$$= \Delta U_g \quad (2.300)$$

με

$$U_g = mgy \quad (2.301)$$

την περίφημη βαρυτική δυναμική ενέργεια. Οπότε το έργο της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Σε προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με μεταβολή στην κινητική ενέργεια του, που μεταφράζεται σε κίνηση των μελών του. Στο παράδειγμα με το βιβλίο είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, που αναπαριστά μια αλλαγή στη διάταξη/διαμόρφωση/σύνθεση των μελών του συστήματος. Με άλλα λόγια, δυναμική ενέργεια μπορεί να υφίσταται μόνο σε σύστημα τουλάχιστον δύο σωμάτων. Στην πράξη, πρέπει πάντα να επιλέγουμε μια διάταξη των μελών του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική - όπως η επιφάνεια της Γης, για παράδειγμα. Πολλές φορές το πρόβλημα μας “καθιστά” σχετικά με τη βολικότερη πιλογή.

Άραγε η μόνη δυναμική ενέργεια που υπάρχει στη φύση είναι η βαρυτική; Η απάντηση είναι - ευτυχώς ή δυστυχώς - όχι! ☺ Θα δούμε αμέσως τώρα μια άλλη μορφή δυναμικής ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα. Ας επιστρέψουμε στο σώμα δεμένο σε ελατήριο και ας θεωρήσουμε αυτή τη φορά ότι το σύστημα μας είναι το σώμα και το ελατήριο (και όχι μόνο το σώμα, όπως είχαμε θεωρήσει σε προηγούμενες παραγράφους)! Έχουμε ήδη δείξει ότι για μια εξωτερική δύναμη που ασκείται επάνω στο σώμα-μέλος του συστήματος ισχύει ότι

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (2.302)$$

Βλέπετε ότι το έργο που παράγεται στο σύστημα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση των μελών του συστήματος, σε σχέση με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου! Είναι κι αυτό λοιπόν μια μεταβολή στη διάταξη/σύνθεση/διαμόρφωση των μελών του συστήματος! Δουλεύοντας όμοια με το παράδειγμα με το βιβλίο, έχουμε

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (2.303)$$

$$= U_{s_f} - U_{s_i} = \Delta U_s \quad (2.304)$$

με

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.305)$$

την ελαστική δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με το σύστημα σώματος - ελατηρίου. Παρατηρήστε ότι και εδώ, το έργο της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Καταλήγουμε λοιπόν να έχουμε δυο μορφές δυναμικής ενέργειας (ως τώρα):

- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια
- Ελαστική Δυναμική Ενέργεια

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.32:

Οι ανθρώπινοι τένοντες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ελατήρια. Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στους τένοντες συνεισφέρει εως και 35% της ενεργειακής ανάγκης σας κατά το τρέξιμο. Οι επιστήμονες αθλητισμού έχουν βρει ότι, κατά μέσο όρο, οι τένοντες των αθλητών εκτείνονται κατά 41 χιλιοστά, ενώ αυτοί των μη-αθλητών εκτείνονται μόνο 33 χιλιοστά. Η “σταθερά ελατηρίου” του τένοντα είναι ίδια και για τους αθλητές και για τους μη-αθλητές, και ίση με 33 N/mm. Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης ελαστικής δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στους αθλητές και στους μη-αθλητές;

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα τους τένοντες. Για τους αθλητές, ισχύει

$$U_s^{\text{αθλητές}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}33000 \cdot 0.041^2 = 27.7 \text{ J} \quad (2.306)$$

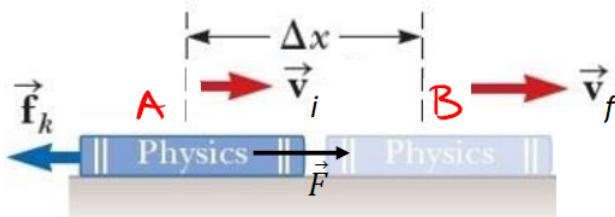
ενώ για τους μη αθλητές,

$$U_s^{\text{μη-αθλητές}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}33000 \cdot 0.033^2 = 18.0 \text{ J} \quad (2.307)$$

Η διαφορά ελαστικής δυναμικής ενέργειας είναι 9.7 J, υπέρ των αθλητών. Παρατηρήστε πως οι αθλητές αποθηκεύουν πάνω από μιάμιση φορά περισσότερη ενέργεια από τους μη-αθλητές.

### 2.5.6 Θερμική Ενέργεια

Ας δούμε μια τελευταία μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα. Δείτε το Σχήμα 2.56. Θεωρήστε



Σχήμα 2.56: Βιβλίο σε τραχιά επιφάνεια.

ότι το σύστημα μας είναι το βιβλίο. Έστω ότι μια σταθερή δύναμη  $\vec{F}$  σπρώχνει το ήδη κινούμενο βιβλίο επιταχύνοντάς το από μια θέση (A) σε μια θέση (B), μετατοπίζοντάς το κατά  $\Delta x$ . Το βιβλίο μοντελοποιείται ως σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης, οπότε ο 2ος Νόμος Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \iff \vec{F} + \vec{f}_k = ma \implies F = f_k + ma \quad (2.308)$$

Το βιβλίο μοντελοποιείται ταυτόχρονα ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση, οπότε από την εξίσωση της κινητικής έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \implies a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \quad (2.309)$$

και άρα

$$F = f_k + m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \iff F\Delta x = f_k\Delta x + \Delta K \iff W_F = W_{f_k} + \Delta K \quad (2.310)$$

Οπότε αν θέσει κανείς το ερώτημα “που πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της  $\vec{F}$ ;”, η απάντηση είναι ότι μετατράπηκε κατά κάποιο ποσοστό σε αύξηση της κινητικής ενέργειας του βιβλίου και κατά κάποιο ποσοστό σε αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου, δηλ. του συστήματος βιβλίο + επιφάνεια! Η ποσότητα ενέργειας που μετατράπηκε σε αύξηση θερμοκρασίας των επιφανειών ισούται με τη μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος, καθώς η ενέργεια αυτή μετατράπηκε στην περίφημη θερμική ενέργεια του συστήματος: η επιφάνεια και το βιβλίο θερμάνθηκαν! Στο εξής, θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως θερμική ενέργεια και θα τη συμβολίζουμε με  $E_{th}$ . Με το συμβολισμό αυτό, στο παράδειγμα που συζητάμε θα έχουμε

$$\Delta E_{th} = -W_{friction} = f_k\Delta x \quad (2.311)$$

Φτάσαμε λοιπόν στο σημείο που μπορούμε να συνοψίσουμε τα είδη ενέργειας που συναντήσαμε:

Είδη Ενέργειας	
Ενέργεια	Τύπος
Κινητική	$K = \frac{1}{2}mu^2$
Ελαστική Δυναμική	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$
Βαρυτική Δυναμική	$U_g = mgy$
Θερμική	$E_{th} = f_k\Delta x$

Πίνακας 2.7: Πίνακας Σχέσων Ενέργειας.

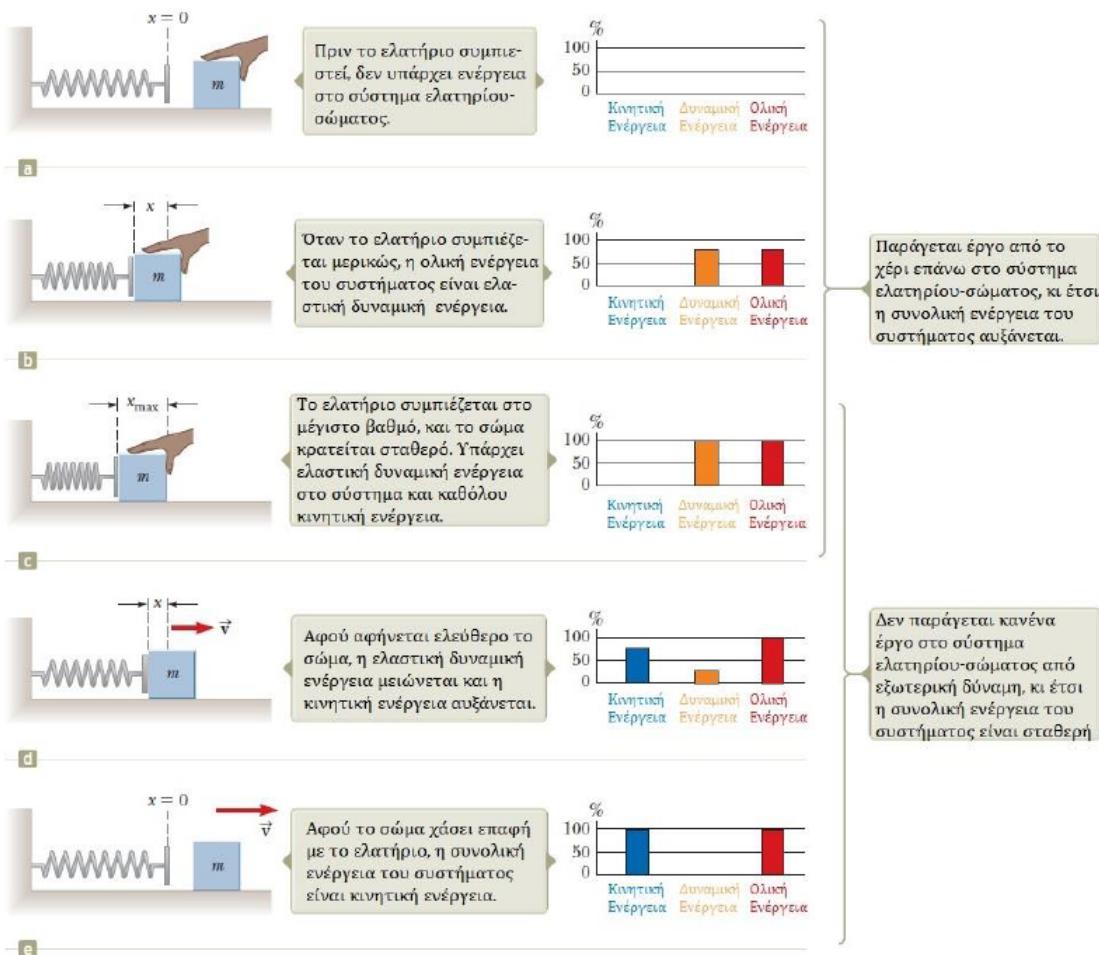
### 2.5.7 Διαγράμματα Ενέργειας

Ένας εξαιρετικά χρήσιμος, συνοπτικός, συμπαγής, και εύληπτος τρόπος να παρουσιάσει κανείς τις ενεργειακές μεταβολές που συμβαίνουν σε ένα σύστημα είναι μέσω των περίφημων διαγραμμάτων ενέργειας. Τα διαγράμματα ενέργειας είναι διδιάστατες αναπαραστάσεις είδους ενέργειας - ποσοστού αυτής, που μπορεί κανείς να σχεδιάσει σε κατάλληλα στιγμιότυπα ενός συστήματος. Ας δούμε το διάγραμμα ενέργειας για ένα σύστημα ελατηρίου - σώματος. Δείτε το Σχήμα 2.57 και διαβάστε προσεκτικά τα επεζηγηματικά σχόλια.

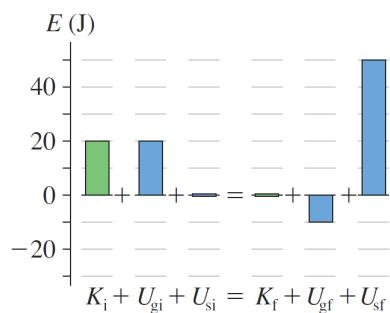
#### Παράδειγμα 2.33:

Σας δίνεται το διάγραμμα ενέργειας του Σχήματος 2.58, το οποίο περιγράφει την αρχική και τελική ενέργειακή κατάσταση ενός προβλήματος. Γράψτε μια εκφώνηση για το πρόβλημα το οποίο περιγράφεται από το διάγραμμα αυτό. Οι ενέργειες  $U_g$ ,  $U_s$  αποτελούν βαρυτικές και ελαστικές δυναμικές ενέργειες αντίστοιχα, ενώ οι  $f$  συμβολίζουν την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος.

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι έχουμε κινητική και δυο δυναμικές ενέργειες, ελαστική και βαρυτική. Στην αρχική κατάσταση, έχουμε 40 J συνολικής ενέργειας κατανεμημένη εξ ημισείας σε κινητική και βαρυτική δυναμική, 20 J σε καθεμιά. Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, άρα έχουμε κάπου ένα ασυμπίεστο ελατήριο. Άρα αρχικά έχουμε ένα σώμα σε κίνηση το οποίο βρίσκεται σε κάποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης, όπως μια μπάλα που πέφτει ή ανεβαίνει. Παρατηρώντας την τελική κατάσταση, βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι πλέον μηδέν, άρα το σώμα βρίσκεται σε ακινησία, ενώ η ελαστική δυναμική ισούται με 50 J και η βαρυτική δυναμική ισούται με -10 J. Το άθροισμα των δυο ισούται με 40 J, που σημαίνει ότι ισχύει η Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας. Επίσης όμως βλέπουμε ότι η τελική βαρυτική δυναμική ενέργεια



Σχήμα 2.57: Διαγράμματα Ενέργειας συστήματος ελατηρίου - σώματος.



Σχήμα 2.58: Σχήμα Παραδείγματος 2.33.

είναι αρνητική, άρα το σώμα βρίσκεται κάτω από το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας. Αυτό μπορεί να μοντέλοποιηθεί αν ορίσουμε το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη θέση που το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, έτσι ώστε όταν συμπιεστεί να αυξηθεί η ελαστική δυναμική και να υπάρχει αρνητική βαρυτική δυναμική ενέργεια.

Ας δούμε μερικές τιμές για τη μάζα της μπάλας,  $m$ , και το ύψος που βρίσκεται,  $h$ , ώστε στην αρχική κατάσταση να ικανοποιεί τις προδιαγραφές του διαγράμματος.

$$K_i = \frac{1}{2}mu_i^2 = 20 \iff mu_i^2 = 40 \quad (2.312)$$

και

$$U_{g_i} = mgh_i = 9.8mh_i = 20 \iff mh_i = \frac{20}{9.8} \quad (2.313)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{mu_i^2}{mh_i} = \frac{40}{\frac{20}{9.8}} = \frac{392}{20} = 19.6 \iff \frac{u_i^2}{h_i} = 19.6 \iff u_i^2 = 19.6h \quad (2.314)$$

Έστω  $h_i = 10$  m, τότε  $u_i^2 = 196 \implies u_i = 14$  m/s. Άρα,  $m = 0.204$  kg. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν την αρχική κατάσταση του προβλήματος.

Στην τελική κατάστασή του, η μπάλα βρίσκεται σε ακινησία επάνω σε συμπιεσμένο ελατήριο. Θα έχουμε

$$U_{g_f} = mgh_f = -10 \iff h_f = \frac{-10}{9.8 \cdot 0.204} = -5 \text{ m} \quad (2.315)$$

Άρα η μπάλα προχωρά  $h_f = 5$  m κάτω από το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, οπότε το ελατήριο συμπιέζεται κατά 5 (!) μέτρα. Η ελαστική δυναμική ενέργεια θα είναι

$$U_{s_f} = \frac{1}{2}kh_f^2 = 50 \iff 25k = 100 \iff k = 4 \text{ N/m} \quad (2.316)$$

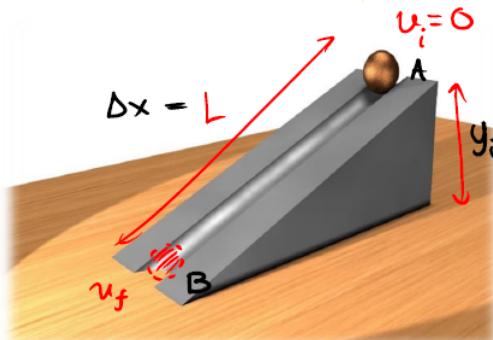
Άρα η σταθερά του ελατηρίου θα είναι  $k = 4$  N/m. Βλέπετε ότι οι αριθμοί είναι μεν σωστοί αλλά όχι τόσο ρεαλιστικοί.

Διυο εκφωνήσεις - μια που προκύπτει από τα παραπάνω, και άλλη μια, πιο ρεαλιστική, που μπορείτε εσείς να επιβεβαιώσετε την ορθότητά της - που ικανοποιούν το διάγραμμα του Σχήματος 2.58 είναι οι ακόλουθες:

- Μια μπάλα μάζας 0.204 kg πέφτει από ύψος 10 m, με ταχύτητα 14.0 m/s, επάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο. Όταν η μπάλα προσγειώνεται, συμπιέζει το ελατήριο. Εάν το ελατήριο έχει σταθερά 4 N/m, πόσο θα συμπιεστεί από το βάρος της μπάλας;
- Μια μπάλα μάζας 2.5 kg ρίχνεται προς τα πάνω με ταχύτητα 4.0 m/s από ύψος 0.82 m πάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο. Όταν η μπάλα επιστρέψει προς τα κάτω προσγειώνεται και συμπιέζει το ελατήριο. Εάν το ελατήριο έχει σταθερά 600 N/m, πόσο θα συμπιεστεί από το βάρος της μπάλας;

### 2.5.8 Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις

Θεωρήστε το Σχήμα 2.59. Έστω ότι το σύστημα μας είναι η μπάλα, το επικλινός, και η Γη. Αφήνουμε την



Σχήμα 2.59: Σύστημα μπάλας, επικλινούς, και Γης.

μπάλα στη θέση (A) να ολισθήσει - με τριβές - προς τη βάση του επικλινούς, στη θέση (B). Η απόσταση που ολισθαίνει η μπάλα στο επικλινός παρουσία τριβής έχει μεγάλη σημασία για το πόση δυναμική ενέργεια

μετατρέπεται σε θερμική. Όσο μεγαλύτερη απόσταση διανύει η μπάλα, τόσο μεγαλύτερη η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμική λόγω του έργου της δύναμης τριβής. Άρα σε αυτό το σύστημα υπάρχουν δυνάμεις - η τριβή - που το έργο τους εξαρτάται από το "μονοπάτι" που διατρέχουν:

$$W_{friction} = -f_k \Delta x = -f_k L \quad (2.317)$$

Αντίθετα, παρατηρήστε τη δύναμη της βαρύτητας. Το έργο της είναι

$$W_g = -mg \vec{j} \cdot (y_f - y_i) \vec{j} = mgy_i \quad (2.318)$$

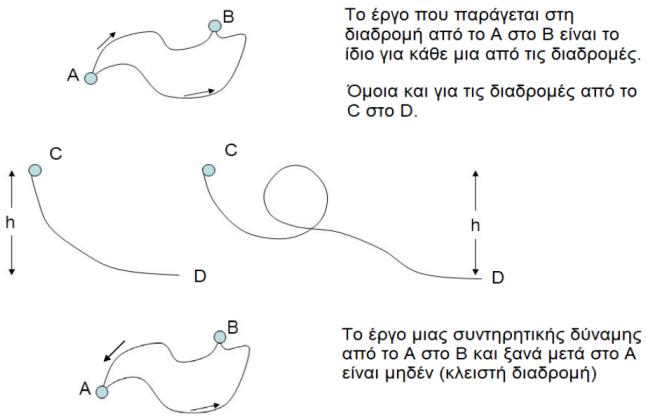
Το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση της μπάλας, χωρίς να έχει σημασία το "μονοπάτι" που διανύει η μπάλα για να μεταβεί από τη μια θέση στην άλλη. Βλέπουμε εδώ λοιπόν ότι σε ένα σύστημα μπορούν να δρουν δυνάμεις δυο κατηγοριών:

- Συντηρητικές (conservative): δυνάμεις που το έργο τους εξαρτάται από τη διαδρομή που διατρέχει το σώμα στο οποίο ασκούνται
- Μη συντηρητικής (nonconservative): δυνάμεις που το έργο τους εξαρτάται από τη διαδρομή που διατρέχει το σώμα στο οποίο ασκούνται

Οι συντηρητικές δυνάμεις έχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σημεία είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα σε αυτά.
2. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Κλειστή ορίζεται η διαδρομή που ακολουθεί ένα σώμα όταν ξεκινά από μια θέση (A) και επιστρέφει πάλι πίσω σε αυτή.

Το Σχήμα 2.60 εξηγεί αυτές ακριβώς τις ιδιότητες των συντηρητικών δυνάμεων. Προφανώς μια δύναμη που



Σχήμα 2.60: Ιδιότητες συντηρητικών δυνάμεων.

δεν ικανοποιεί τις παραπάνω δύο ιδιότητες ονομάζεται μη συντηρητική. Ένα τέτοιο παράδειγμα δύναμης είναι η τριβή ολισθήσεως.

### 2.5.9 Μηχανική Ενέργεια Συστήματος

Σε ένα πολυμελές σύστημα μπορούμε να ορίσουμε μερικές ενδιαφέρουσες ποσότητες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στη μελέτη προβλημάτων. Ορίζουμε το άνθροισμα της κινητικής,  $K$ , και της (οποιασδήποτε) δυναμικής,  $U$ , ενέργειας ως τη Μηχανική Ενέργεια του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U \quad (2.319)$$

Προσέξτε ότι η μηχανική ενέργεια μπορεί να οριστεί μονάχα σε ένα σύστημα με περισσότερα από ένα σώματα, καθώς η δυναμική ενέργεια δεν έχει έννοια σε σύστημα ενός σώματος. Θα δούμε αργότερα ότι ένα σύστημα δεν είναι απαραίτητο να αποτελείται από “σώματα” για να έχει δυναμική (και άρα μηχανική) ενέργεια, όμως θα παραμείνει “πολυμελές” (απλά κάποια μέλη του δε θα είναι σώματα).

Από την προηγούμενη συζήτηση πρέπει να καταλαβαίνετε ότι οι μη συντηρητικές δυνάμεις που δρουν σε ένα σύστημα αλλάζουν τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, ενώ αντίθετα οι συντηρητικές δυνάμεις τη διατηρούν! Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο χαρακτηριστικό των δυνάμεων και των αντίστοιχων συστημάτων - τόσο χρήσιμο και σημαντικό που μπορεί να διατυπωθεί ως ενεργειακό θεώρημα: είναι η περίφημη Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας - ΑΔΜΕ!

### Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ενός συστήματος είναι μηδενική μόνον αν στο σύστημα δρουν αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.320)$$

Αφού οι συντηρητικές δυνάμεις είναι λοιπόν τόσο ενδιαφέρουσες, ας δούμε ποιές από αυτές έχουμε γνωρίσει ως τώρα:

#### (α') Δύναμη βαρύτητας

- $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{x} = -mg(y_f - y_i)$
- Εξάρτηση μόνο από την αρχική και τελική θέση
- $W_g = 0$  σε κλειστή διαδρομή ( $y_f = y_i$ )

#### (β') Δύναμη ελατηρίου

- $W_s = \vec{F}_s \cdot \Delta \vec{x} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- Εξάρτηση μόνο από την αρχική και τελική θέση
- $W_s = 0$  σε κλειστή διαδρομή ( $x_f = x_i$ )

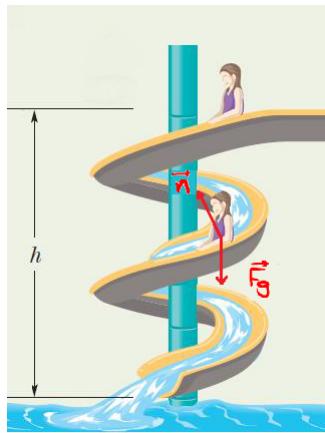
Ας δούμε μερικά παραδείγματα που η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μας λύνει τα χέρια.

#### Παράδειγμα 2.34:

Ένα παιδί μάζας  $m$  ολισθαίνει από ακίνητη θέσησε μια νεροτσουλήθρα (χωρίς τριβές) ύψους  $h = 8.5$  m. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της. Το Σχήμα 2.61 απεικονίζει το πρόβλημα.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα το παιδί, τη Γη, και την τσουλήθρα. Στο παιδί ασκούνται δύο δυνάμεις. Η δύναμη του βάρους (από τη Γη)  $\vec{F}_g$  και η δύναμη της επιφάνειας της νεροτσουλήθρας  $\vec{n}$  επάνω στο παιδί, η οποία είναι πάντα κάθετη σε όποια μικρή μετατόπιση του παιδιού. Αντίθετα η δύναμη της βαρύτητας είναι πάντα κάθετη προς το έδαφος, ανεξάρτητα της μετατόπισης/κλίσης της νεροτσουλήθρας. Η δύναμη του βάρους είναι συντηρητική και εσωτερική του συστήματος, και ταυτόχρονα η μόνη που παράγει έργο, καθώς η δύναμη  $\vec{n}$  είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση του παιδιού επάνω στην τσουλήθρα, οπότε το έργο της είναι μηδενικό. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων (A), όπου το παιδί βρίσκεται στην κορυφή της νεροτσουλήθρας, και (B) όπου το παιδί φτάνει στη βάση της:

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB} \quad (2.321)$$



Σχήμα 2.61: Παράδειγμα εφαρμογής ΑΔΜΕ.

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mu_B^2 + 0 \quad (2.322)$$

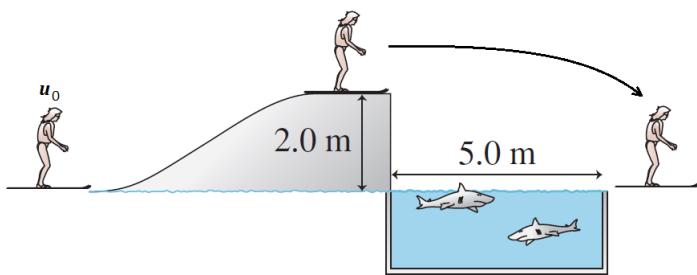
$$mgh = \frac{1}{2}mu_B^2 \quad (2.323)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (2.324)$$

$$u_B = \sqrt{2gh} = 13 \text{ m/s} \quad (2.325)$$

### Παράδειγμα 2.35:

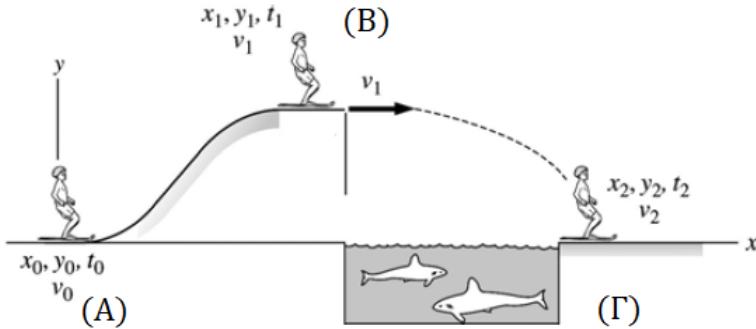
Βρήκατε δουλειά σε ένα *circus water park* για να βγάλετε τα έξοδα των διακοπών σας για το καλοκαιρί που έρχεται. Σε ένα επικίνδυνο ακροβατικό, ένας ακροβάτης πρέπει να ολισθήσει πάνω σε μια ράμπα χωρίς τριβές, σε ύψος 2 μέτρων από το έδαφος, ώστε να περάσει με ταχύτητα πάνω από μια πισίνα μήκους 5 μέτρων, γεμάτη από πεινασμένους καρχαρίες, και να προσγειωθεί με ασφάλεια στην άκρη της πισίνας, όπως στο Σχήμα 2.62. Μια και οι υπεύθυνοι του πάρκου γνωρίζουν ότι παίρνετε το μάθημα της Φυσικής (και ότι είστε μελετηροί/ες φοιτητές/τριες), σας ρωτούν με πόση ελάχιστη αρχική ταχύτητα  $u_0$  πρέπει να ξεχινήσει ο ακροβάτης στη βάση της ράμπας, πριν κάνει το άλμα, ώστε να μην πέσει στην πισίνα με τους καρχαρίες. Τι απάντηση θα τους δώσετε;



Σχήμα 2.62: Ακροβατικό άλμα.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα τον ακροβάτη, τη ράμπα, και τη Γη. Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας στην βάση της ράμπας. Ας βρούμε αρχικά τη μικρότερη ταχύτητα  $u_1$  που πρέπει να έχει ο ακροβάτης στην κορυφή της ράμπας (B) ώστε να περάσει πάνω από τους καρχαρίες. Από την κατακόρυφη κίνηση του άλματος από τη θέση (A) ως τη θέση (B), έχουμε

$$y_2 = y_1 + u_{y_1}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.326)$$



Σχήμα 2.63: Εκτέλεση άλματος.

$$0 = 2 + 0 + \frac{1}{2} 9.8 t^2 \quad (2.327)$$

$$t = 0.639 \text{ s} \quad (2.328)$$

Από την οριζόντια κίνηση κατά το άλμα, έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_{x_1} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2.329)$$

$$x_1 + 5 = x_1 + u_1 t + 0 \quad (2.330)$$

$$u_1 = 7.825 \text{ m/s} \quad (2.331)$$

Αφού βρήκαμε την  $u_1$  που απαιτείται για να περάσει ο ακροβάτης τους χαρχαρίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για να βρούμε την ελάχιστη ταχύτητα  $u_0$ , αφού οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι αυτή του βάρους και αυτή του εδάφους, με την τελευταία να μην παράγει έργο. Έχουμε

$$K_1 + U_{g1} = K_0 + U_{g0} \quad (2.332)$$

$$\frac{1}{2} m u_1^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m u_0^2 + m g y_0 \quad (2.333)$$

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + 2g(y_1 - y_0)} \quad (2.334)$$

$$u_0 = 10 \text{ m/s} \quad (2.335)$$

### Παράδειγμα 2.36:

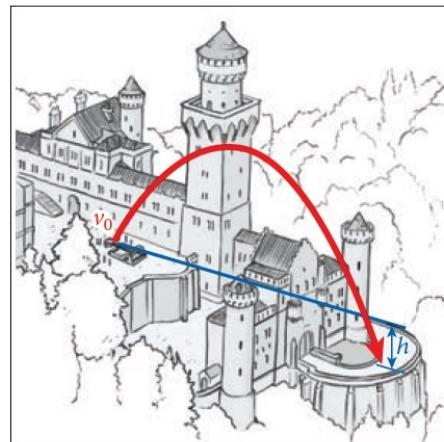
Στην τριλογία ταινιών “Ο Άρχοντας των Δαχτυλιδιών”, πολλές φορές χρειάστηκε η χρήση καταπελτών για την προστασία (ή την πολιορκία) ενός κάστρου. Υποθέστε ότι είστε ο Aragorn (Εικόνα 2.64α') και προστατεύετε το κάστρο της Gondor. Έχετε στη διάθεσή σας έναν καταπέλτη με τον οποίο μπορείτε να εκτοξεύετε βράχους με αρχική ταχύτητα  $u_0 = 14.2 \text{ m/s}$  επάνω από τα τείχη της Gondor, οι οποίοι θα χτυπήσουν τη στρατιά των Orcs που βρίσκεται στην αυλή του κάστρου,  $h = 7.2 \text{ m}$  χαμηλότερα από το επίπεδο του καταπέλτη, όπως στο Σχήμα 2.64β'. Με ποιά ταχύτητα θα χτυπήσουν τη στρατιά των Orcs οι βράχοι που εκτοξεύετε;

**Λύση:** Θεωρούμε ως σύστημα ένα βράχο και τη Γη. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο βράχο είναι μόνο αυτή του βάρους (θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα) και είναι συντηρητική. Από την ΑΔΜΕ μεταξύ μιας αρχικής θέσης (θέση εκτόξευσης των βράχων) και μιας τελικής (θέση πρόσκρουσης με τα Orcs), έχουμε ότι

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (2.336)$$



(α') Aragorn



(β') Χρήση καταπέλτη

Σχήμα 2.64: Καταπέλτες στην Γκόντορ.

και άρα

$$\frac{1}{2}mu_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mu_i^2 + mgy_i \quad (2.337)$$

$$\frac{1}{2}u_f^2 + gy_f = \frac{1}{2}u_i^2 + gy_i \quad (2.338)$$

$$u_f = \sqrt{u_i^2 + 2g(y_i - y_f)} \quad (2.339)$$

Για  $y_i - y_f = 7.2$  m και  $u_i = 14.2$  m/s, είναι

$$u_f = 18.5 \text{ m/s} \quad (2.340)$$

### Παράδειγμα 2.37:

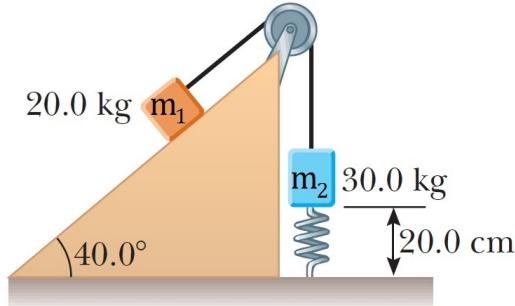
Ένα σώμα μάζας  $m_1 = 20$  kg είναι δεμένο με ένα άλλο σώμα μάζας  $m_2 = 30$  kg μέσω σχοινιού που διαπερνά μια αβαρή και χωρίς τριβές τροχαλία. Το σώμα μάζας  $m_2$  είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς  $k = 250$  N/m, όπως στο Σχήμα 2.65. Το ελατήριο είναι σε θέση ισορροπίας (ούτε τεντωμένο, ούτε συμπιεσμένο) όταν η διάταξη του συστήματος είναι όπως στο σχήμα, ενώ το κεκλιμένο επίπεδο είναι χωρίς τριβές. Αρχικά, το σώμα μάζας  $m_1$  κατεβαίνει 20 cm προς τη βάση του κεκλιμένου (έτσι ώστε το σώμα μάζας  $m_2$  να βρίσκεται 40 cm επάνω από το έδαφος), και αργήνεται ελεύθερο. Βρείτε την ταχύτητα κάθε σώματος όταν το σώμα μάζας  $m_2$  βρίσκεται σε απόσταση 20 cm επάνω από το έδαφος (δηλ. όταν το ελατήριο δεν είναι τεντωμένο ή συμπιεσμένο, όπως στο σχήμα).

Λύση: Επιλέγουμε ως σύστημα τα σώματα, το ελατήριο, και τη Γη. Επιλέγουμε ως διάταξη μηδενικής δυναμικής ενέργειας για το σύστημα τη διάταξη όπου το σώμα μάζας  $m_2$  έχει το ελατήριο στο φυσικό μήκος του, και το σώμα μάζας  $m_1$  βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση του στο επικλινές επίπεδο, ακριβώς πριν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι δυνάμεις βάρους και δυνάμεις ελατηρίου, όλες συντηρητικές. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, αν συμβολίσουμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια με  $U_g$  και την ελαστική δυναμική ενέργεια με  $U_e$ , έχουμε

$$E_i^{mech} = E_f^{mech} \quad (2.341)$$

$$K_i + U_{gi} + U_{ei} = K_f + U_{gf} + U_{ef} \quad (2.342)$$

$$0 + m_2gh + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_{tot}u_f^2 + m_1gh\sin(40^\circ) + 0 \quad (2.343)$$



Σχήμα 2.65: Σώματα, ελατήριο, σε σύνδεση σε επικλινές.

$$58.8 + 5 = 25u_f^2 + 25.2 \quad (2.344)$$

$$u_f = 1.24 \text{ m/s} \quad (2.345)$$

### 2.5.10 Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας

Έστω ένα πολυμελές σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας εσωτερικής συντηρητικής δύναμης,  $W_{F,int}$ . Λόγω αυτής της δύναμης και του έργου της, ένα σώμα από τα μέλη του συστήματος κινείται από μια θέση (A) σε μια θέση (B). Εφόσον κινήθηκε, η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε: πρέπει ισόποσα να μειωθεί η δυναμική της ενέργεια, λόγω της ΑΔΜΕ!

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U = U_A - U_B \quad (2.346)$$

Το έργο  $W_{F,int}$  που παράγεται από μια εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα σώμα-μέλος του συστήματος ισούται με την αρνητική μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος. Προσέξτε! Το έργο αυτό παράγεται από μια δύναμη ενός μέλους του συστήματος επάνω σε ένα άλλο μέλος. Έχουμε δει τέτοια παραδείγματα; Βέβαια!

- Όταν ένα σώμα μετακινείται σε βαρυτικό πεδίο: στο σύστημα Γη+σώμα, η δύναμη της βαρύτητας είναι εσωτερική και συντηρητική δύναμη στο σύστημα
- Όταν ένα σώμα μετακινείται από ελατήριο προς τη θέση ισορροπίας του: στο σύστημα ελατήριο+σώμα, η δύναμη του ελατηρίου είναι εσωτερική και συντηρητική δύναμη στο σύστημα

Έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια εσωτερική συντηρητική δύναμη  $\vec{F}$ , η οποία προκαλεί αλλαγή στη διάταξη του συστήματος λόγω π.χ. κίνησης ενός από τα σώματα επάνω σε έναν άξονα  $x'$ . Έστω ότι η δύναμη ασκείται από ένα σώμα σε άλλο σώμα υπό γωνία  $\theta$  με τον άξονα. Βάσει του ορισμού, το έργο της δύναμης αυτής θα είναι

$$W_{F,int} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos(\theta) = F_x \Delta x = -\Delta U \quad (2.347)$$

δηλ.

$$\Delta U = -W_{F,int} = -F_x \Delta x \quad (2.348)$$

Ας δούμε τις πιθανές περιπτώσεις για την ποσότητα  $F_x \Delta x$ :

- Άν  $F_x \Delta x > 0 \implies -F_x \Delta x < 0$ , τότε  $\Delta U < 0$
- Άν  $F_x \Delta x < 0 \implies -F_x \Delta x > 0$ , τότε  $\Delta U > 0$

Η παραπάνω μετατόπιση  $\Delta x$  μπορεί να είναι όσο μικρή θέλουμε, μπορεί να είναι και μια απειροστά μικρή μετατόπιση  $dx$ . Τότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος,  $\Delta U$ , θα είναι κι αυτή απειροστά μικρή,  $dU$ , δηλ.

$$dU = -F_x dx \implies F_x = -\frac{dU}{dx} \implies U(x) = - \int_{-\infty}^x F_u du + U_i \quad (2.349)$$

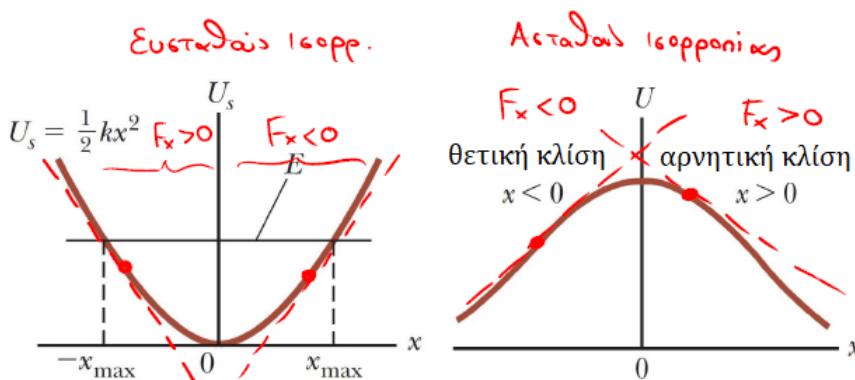
Η συνάρτηση  $U(x)$  λέγεται συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Η θέση  $x$  όπου  $F_x = 0$  λέγεται θέση ισορροπίας. Ένα σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως

1. ευσταθιούς ισορροπίας: ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθιούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μεχριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του.
  - Σύστημα σώματος - ελατηρίου
  - Σύστημα μπίλιας - κυρτού μπωλ - Γης
2. ασταθιούς ισορροπίας: ένα σύστημα ονομάζεται ασταθιούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μεχριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που τείνει να απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του.
  - Σύστημα μολυβιού - Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια
  - Σύστημα μπάλας - Γης στην κορυφή ενός λόφου
3. Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέψει πίσω στην αρχική του θέση
  - Σύστημα μπάλας - οριζόντιου επιπέδου
  - Σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου - οριζόντιου επιπέδου

Γιατί είναι τόσο σημαντική η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας; Διότι η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας σε ένα οποιοδήποτε σημείο - με άλλα λόγια, η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας στο σημείο,  $\frac{d}{dx}U(x)$  - μας πληροφορεί για την ευστάθεια του συστήματος! Θυμηθείτε ότι η εσωτερική συντηρητική δύναμη που εγείρεται στο σύστημα σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια με τη σχέση

$$F_x = -\frac{d}{dx}U(x) \quad (2.350)$$

Άρα η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο  $x_0$  μας πληροφορεί για τη φορά της δύναμης σε σχέση με τη θέση,  $F_{x_0}$ . Δείτε το Σχήμα 2.66. Αριστερά, παρατηρούμε ένα σύστημα ευσταθιούς



Σχήμα 2.66: Συνάρτησεις  $U(x)$  και ευστάθεια.

ισορροπίας. Για μετατοπίσεις  $x > 0$ , η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο είναι θετική, οπότε η ποσότητα  $dU/dx$  είναι θετική. Προφανώς η ποσότητα  $-dU/dx = F_x$  είναι αρνητική. Με άλλα λόγια, η δύναμη και η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας είναι αντίρροπες για  $x > 0$ . Άρα η δύναμη τείνει να επαναφέρει το

σύστημα στη ψέση ισορροπίας του όσο αυτό απομακρύνεται από αυτό. Για μετατοπίσεις  $x < 0$ , η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο είναι αρνητική, οπότε η ποσότητα  $dU/dx$  είναι αρνητική. Προφανώς η ποσότητα  $-dU/dx = F_x$  είναι θετική. Με άλλα λόγια, η δύναμη και η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας είναι αντίρροπες για  $x < 0$ . Άρα η δύναμη τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη ψέση ισορροπίας του όσο αυτό απομακρύνεται από αυτό. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, εγείρεται στο σύστημα μια δύναμη που τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη ψέση ισορροπίας του. Ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να είναι το σύστημα ελατήριο-σώμα. Μπορείτε να κάνετε μια παρόμοια περιγραφή για το γράφημα  $U(x)$  δεξιά στο Σχήμα 2.66. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει περιοχές ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης ισορροπίας.

### Παράδειγμα 2.38:

Ένα σώμα έχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας  $U(x) = x + \sin(\lambda x)$  με  $\lambda = 2 \text{ rad/m}$  και  $x$  σε μέτρα στο διάστημα  $0 \leq x \leq \pi$ .

(α') Βρείτε τις ψέσεις ισορροπίας στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

(β') Για καθεμιά από αυτές ελέγξτε το είδος της ψέσης ισορροπίας.

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι στις ψέσεις ισορροπίας ισχύει  $F_x = 0$ . Επίσης, ξέρουμε ότι

$$F_x = -\frac{d}{dx}U(x) = -\frac{d}{dx}(x + \sin(2x)) = -2\cos(2x) - 1 \quad (2.351)$$

Εξισώνοντας και λύνοντας έχουμε

$$F_x = 0 \iff \cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos(2\pi/3) \quad (2.352)$$

Έτσι

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \iff x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2.353)$$

με  $k \in \mathbb{Z}$ . Στο διάστημα  $[0, \pi]$  έχουμε δυο λύσεις:  $x_1 = \pi/3, x_2 = 2\pi/3$ .

(β') Υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x + \sin(2x)) = -4\sin(2x) \quad (2.354)$$

και ελέγχοντας την τιμή στα σημεία ισορροπίας

$$\frac{d^2}{dx^2}U(\pi/3) = -4\sin(2\pi/3) < 0 \quad (2.355)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(2\pi/3) = -4\sin(4\pi/3) > 0 \quad (2.356)$$

το σημείο  $x_1$  αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης και άρα σημείο (και γύρω του, περιοχή) ασταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο  $x_2$  αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης και άρα σημείο (και γύρω του, περιοχή) ευσταθούς ισορροπίας.

**Παράδειγμα 2.39:**

Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για ένα σύστημα σωματιδίων είναι

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \quad (2.357)$$

όπου  $x$  είναι η θέση στον οριζόντιο άξονα ενός σωματιδίου στο σύστημα.

(α') Προσδιορίστε τη δύναμη  $F_x$  που ασκείται στο σωματίδιο συναρτήσει του  $x$ .

(β') Για ποιές τιμές του  $x$  είναι η δύναμη ίση με μηδέν;

(γ') Σχεδιάστε τα γραφήματα  $U(x)$  και  $F_x$  ως προς  $x$  και υποδείξτε σημεία ασταθούς και ευσταθούς ισορροπίας, αν υπάρχουν.

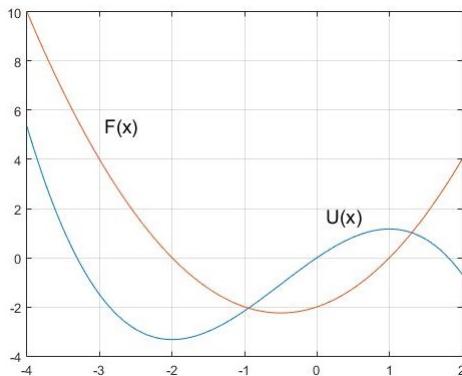
Λύση:

(α') Θα είναι

$$\vec{F} = -\frac{d}{dx}U(x)\vec{i} = -(-x^2 - x + 2)\vec{i} = (x^2 + x - 2)\vec{i} \quad (2.358)$$

(β') Η  $F_x$  είναι μηδέν όταν  $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$ .

(γ') Τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 2.67. Σημείο ευσταθούς ισορροπίας αποτελεί το σημείο  $x = -2$ ,



Σχήμα 2.67: Καμπύλες συνάρτησεων δύναμης - χρόνου και δυναμικής ενέργειας χρόνου.

και σημείο ασταθούς ισορροπίας αποτελεί το σημείο  $x = 1$ , όπως φαίνεται από το γράφημα της  $U(x)$ .

## 2.6 Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

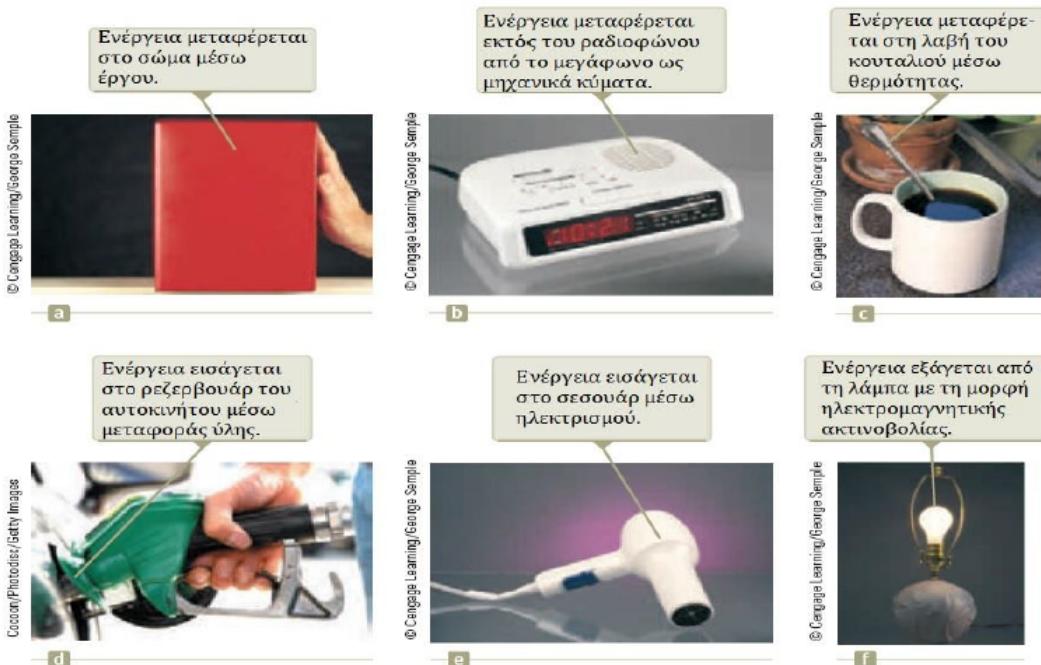
Στις προηγούμενες παραγγράφους συζητήσαμε για τους τρόπους μεταφοράς και αποθήκευσης ενέργειας σε ένα σύστημα και εξάγαμε δυο πολύ χρήσιμα “θεωρήματα”, το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου και την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Και τα δυο θεωρούνται ως “υποπεριπτώσεις” μιας πολύ γενικότερης και καυσιλικότερης αρχής, από το μικρόκοσμο ως το σύμπαν το ίδιο, της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας - ΑΔΕ.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την ΑΔΕ και τον τρόπο εφαρμογής της σε διάφορα συστήματα, πρέπει να διαχωρίσουμε τα συστήματα σε απομονωμένα και μη απομονωμένα συστήματα:

- Ένα μη απομονωμένο σύστημα βρίσκεται σε “επικοινωνία” με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
- Ένα απομονωμένο σύστημα δεν μπορεί να επικοινωνήσει ενεργειακά με το περιβάλλον του

### 2.6.1 Μη Απομονωμένα Συστήματα

Ας ξεκινήσουμε από τα μη απομονωμένα συστήματα. Ως τώρα έχουμε δει μόνο το έργο ως μέσο μεταφοράς ενέργειας από και προς ένα σύστημα. Φυσικά υπάρχουν κι άλλοι τρόποι, όπως αυτοί που περιγράφονται στην Εικόνα 2.68 και αναφέρονται παρακάτω:



Σχήμα 2.68: Τρόποι μεταφοράς ενέργειας.

- Μεταφορά ενέργειας μέσω έργου
- Μεταφορά ενέργειας μέσω μηχανικών χυμάτων
- Μεταφορά ενέργειας μέσω θερμότητας
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ύλης
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρισμού
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Σε ένα μη απομονωμένο σύστημα, αν η συνολική ενέργεια αλλάζει τότε αυτό συμβαίνει μόνον αν η ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή προς το περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον από τους προαναφερθέντες μηχανισμούς. Ουσιαστικά, η παραπάνω πρόταση αποτελεί την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για ένα μη απομονωμένο σύστημα.

#### Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ) - Μη Απομονωμένο Σύστημα

Σε ένα μη απομονωμένο σύστημα,

$$\Delta E_{system} = \sum_i T_i \quad (2.359)$$

όπου  $E_{system}$  είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και  $\sum_i T_i$  είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται από ή προς το περιβάλλον με κάποιον από τους παραπάνω τρόπους.

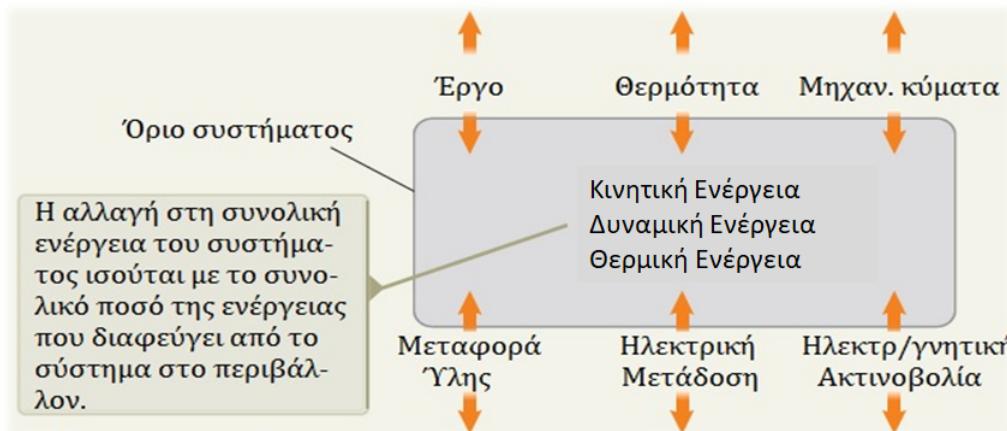
Αν συμβολίσουμε κάθε μηχανισμό μεταφοράς από τους παραπάνω, τότε μπορούμε να γράψουμε την ΑΔΕ ως

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = W + T_{thermal} + T_{mech.wave} + T_{material} + T_{electricity} + T_{radiation} \quad (2.360)$$

Αν παρατηρήσετε την παραπάνω σχέση με προσοχή, τότε θα δείτε ότι το ΘΜΚΕΕ είναι ακριβώς η ΑΔΕ για

$$\Delta U = \Delta E_{th} = T_{thermal} = T_{mech.wave} = T_{material} = T_{electricity} = T_{radiation} = 0 \quad (2.361)$$

Για μια οπτικοποιημένη έκδοση της ΑΔΕ σε μη απομονωμένα συστήματα, μπορείτε να δείτε την Εικόνα 2.69.



Σχήμα 2.69: ΑΔΕ σε μη απομονωμένο σύστημα.

Μπορούμε τώρα να συγκεκριμενοποιήσουμε την ΑΔΕ για τα είδη ενέργειας που έχουμε συναντήσει. Γενικά θα ισχύει

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \sum W_{ext.forces} \quad (2.362)$$

για ένα σύστημα πολυμελές στο οποίο υπάρχουν μεταβολές δυναμικής και θερμικής ενέργειας, εκτός από μεταβολές κινητικής ενέργειας. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση μονομελούς συστήματος, όποιες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον πρέπει να παρουσιάζονται ως έργα εξωτερικών δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή ισχύει το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου, δηλ.

$$\Delta K = \sum W_{ext.forces} \quad (2.363)$$

αφού ως μονομελές σύστημα, δεν μπορούμε να ορίσουμε θερμικές και δυναμικές ενέργειες (απαιτούνται τουλάχιστον δύο μέλη στο σύστημα). Τέλος, αν η θερμική ενέργεια μοντελοποιήθει ως έργο δύναμης τριβής (ή αν δεν υπάρχουν καν τριβές), τότε η γενική σχέση της ΑΔΕ μπορεί να γραφεί ως

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{ext.forces} \quad (2.364)$$

## 2.6.2 Απομονωμένα Συστήματα

Τα απομονωμένα συστήματα παρουσιάζουν το πολύ ελκυστικό χαρακτηριστικό της “καταχράτησης” της συνολικής τους ενέργειας: με άλλα λόγια, δεν υπάρχει διαφυγή ενέργειας με κανένα τρόπο εκτός του συστήματος. Η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στα απομονωμένα συστήματα μπορεί να περιγραφεί ως

**Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ) - Απομονωμένο Σύστημα**

Σε ένα απομονωμένο σύστημα,

$$\Delta E_{system} = 0 \quad (2.365)$$

όπου  $E_{system}$  είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος.

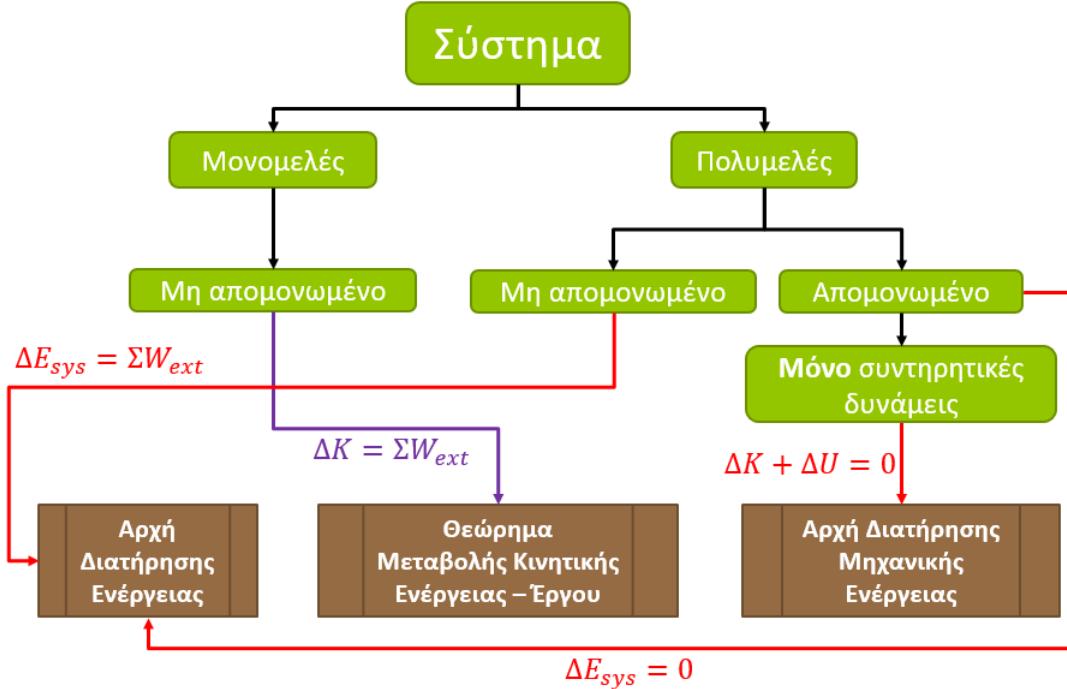
Με άλλα λόγια, σε ένα απομονωμένο σύστημα η ενέργεια μπορεί να αλλάζει μορφές (και οι σχετικές ποσότητες να αλλάζουν) αλλά η συνολική ενέργεια είναι πάντα σταθερή. Με βάση τα είδη ενέργειας που έχουμε δει ως τώρα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά ως

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.366)$$

Στην περίπτωση που στο σύστημα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, η ΑΔΕ εκπίπτει στην ΑΔΜΕ:

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.367)$$

Μπορεί κανείς να συνοψίσει τη στρατηγική επιλογής ενεργειακού θεωρήματος, και γενικότερα επίλυσης προβλημάτων, στο Σχήμα 2.70



Σχήμα 2.70: Στρατηγική επιλογής ενεργειακού θεωρήματος.

Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα της εφαρμογής της ΑΔΕ σε απομονωμένο ή μη σύστημα (και πόσο ρόλο παίζει η επιλογή συστήματος στον τρόπο προσέγγισης ενός προβλήματος) δίνεται παρακάτω.

#### Παράδειγμα 2.40:

Μια μπάλα μάζας  $m$  πέφτει από ύψος  $h$ , όπως στο Σχήμα 2.71.

- (α') Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος  $y$ . Επιλέξτε ως σύστημα την μπάλα και τη Γη.
- (β') Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα μόνο την μπάλα.

Λύση:

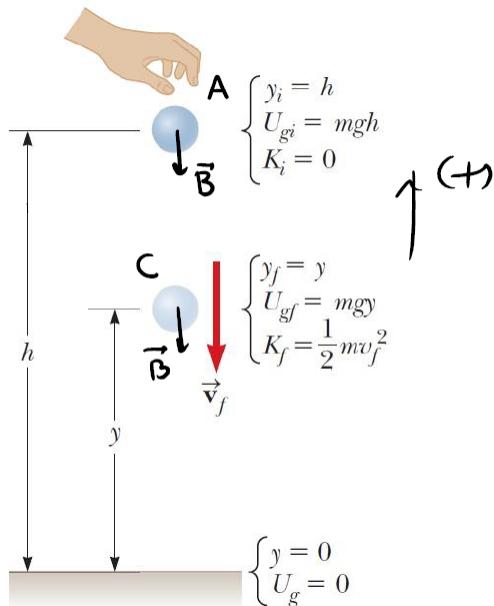
- (α') Θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα και τη Γη, το σύστημα αυτό είναι απομονωμένο, καθώς οι μόνες δυνάμεις που του ασκούνται είναι η δύναμη του βάρους, η οποία είναι συντηρητική και εσωτερική στο σύστημα. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω, επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την επιφάνεια της Γης, και ονομάσουμε τις θέσεις ύψους  $h$  και ύψους  $y$  με (A) και (C) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ.

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (2.368)$$

$$K_A + U_A = K_C + U_C \quad (2.369)$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mu_c^2 + mgy \quad (2.370)$$

$$u_c^2 = 2g(h - y) \quad (2.371)$$



Σχήμα 2.71: Μπάλα σε ελεύθερη πτώση.

$$u_c = -\sqrt{2g(h-y)} \quad (2.372)$$

με το πρόσημο να υποδηλώνει ότι η φορά του διανύσματος της ταχύτητας είναι αντίθετη της θετικής φοράς που ορίσαμε, δηλ.

$$\vec{u}_c = -\sqrt{2g(h-y)} \vec{j} \quad (2.373)$$

- (β') Θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα, το σύστημα αυτό δεν είναι απομονωμένο, καθώς του ασκείται η δύναμη του βάρους (η ελκτική δύναμη της Γης), η οποία είναι εξωτερική στο σύστημα. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω, και ονομάσουμε τις θέσεις ύψους  $h$  και ύψους  $y$  με (A) και (B) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ (η οποία ουσιαστικά μετατρέπεται σε ΘΜΚΕΕ).

$$\Delta K = W_B \quad (2.374)$$

$$K_C - K_A = \vec{B} \cdot \Delta \vec{y} \quad (2.375)$$

$$\frac{1}{2}mu_c^2 - 0 = -m\vec{g}\vec{j} \cdot (y-h)\vec{j} \quad (2.376)$$

$$\frac{1}{2}mu_c^2 = -mg(y-h) \quad (2.377)$$

$$u_c^2 = 2g(h-y) \quad (2.378)$$

$$u_c = -\sqrt{2g(h-y)} \quad (2.379)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το προηγούμενο ερώτημα.

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα.

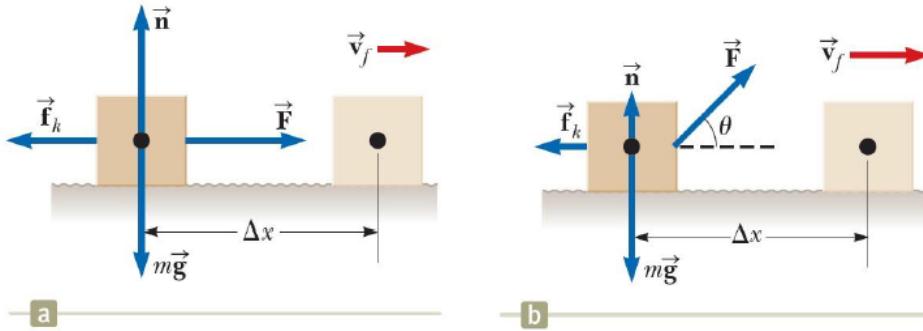
#### Παράδειγμα 2.41:

Ένα σώμα μάζας  $m = 6 \text{ kg}$  σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντιο επιφάνεια με τριβές, λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης  $12 \text{ N}$ , όπως στο Σχήμα 2.72.

(α') Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά  $3 \text{ m}$ , αν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης  $0.15$ .

(β') Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία  $\theta$ , ποιά θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος

μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



Σχήμα 2.72: Σώμα σε κίνηση υπό επίδραση δύναμης.

Λύση:

(α') Έστω (A) και (B) οι θέσεις ηρεμίας και μετατόπισης χατά 3 μέτρα, αντίστοιχα. Έστω ότι το σύστημα μας είναι το σώμα μάζας  $m$  και η μη λεία επιφάνεια, το οποίο και είναι μη απομονωμένο. Στο σώμα ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: η δύναμη του βάρους, η δύναμη της τριβής ολίσθησης, η δύναμη από την επιφάνεια, και η δύναμη  $F = 12 \text{ N}$ . Οι δύο πρώτες είναι κάθετες δυνάμεις στη μετατόπιση και έτσι το έργο τους είναι μηδενικό. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την  $A\Delta E$  ανάμεσα στις θέσεις (A) και (B):

$$\Delta K + \Delta E_{th} = W_F \quad (2.380)$$

$$K_B - K_A + f_k \Delta x = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x} \quad (2.381)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 + 0 + f_k \Delta x = F \Delta x \quad (2.382)$$

Το σώμα ισορροπεί στον y-άξονα, οπότε ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{n} + \vec{mg} = 0 \implies n = mg \quad (2.383)$$

Γνωρίζουμε ότι  $f_k = \mu_k n$ , άρα  $f_k = \mu_k mg$ . Αντικαθιστώντας στην ενεργειακή σχέση, έχουμε

$$\frac{1}{2}mu_B^2 + \mu_k mg \Delta x = F \Delta x \quad (2.384)$$

$$u_B^2 = \frac{2F \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m} \quad (2.385)$$

$$= \sqrt{\frac{2F \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m}} \quad (2.386)$$

$$\approx 1.8 \text{ m/s} \quad (2.387)$$

(β') Με μια πρώτη σκέψη θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρέπει  $\theta = 0$ , ώστε όλη η δύναμη να “αναλώνεται” στην κίνηση του σώματος προς τα δεξιά, αφού αν  $\theta \neq 0$ , η ανάλυση σε συνιστώσες θα μας δώσει μια  $x$ -συνιστώσα μικρότερου μέτρου από αυτό της  $\vec{F}$ . Για να δούμε αν είναι σωστή η σκέψη μας. Στον άξονα  $y$ , το σώμα ισορροπεί, και ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{n} + \vec{F}_y + \vec{mg} = 0 \implies n = mg - F \sin(\theta) \quad (2.388)$$

Γνωρίζουμε ότι  $f_k = \mu_k n$ , οπότε

$$f_k = \mu_k(mg - F \sin(\theta)) \quad (2.389)$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ στο σύστημα του σώματος+επιφάνεια, θα έχουμε

$$\Delta K + \Delta E_{th} = W_F \quad (2.390)$$

$$K_B - K_A + f_k \Delta x = F_x \Delta x \quad (2.391)$$

$$K_B - 0 = F_x \Delta x - f_k \Delta x \quad (2.392)$$

$$K_B = F \cos(\theta) \Delta x - \mu_k (mg - F \sin(\theta)) \Delta x \quad (2.393)$$

Παρατηρήστε ότι η κινητική ενέργεια στη θέση (B) είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ ! Μπορούμε λοιπόν να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$K_B(\theta) = F \cos(\theta) \Delta x - \mu_k (mg - F \sin(\theta)) \Delta x \quad (2.394)$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{d\theta} K_B(\theta) = 0 \quad (2.395)$$

$$\mu_k F \cos(\theta) \Delta x - F \sin(\theta) \Delta x = 0 \quad (2.396)$$

$$\mu_k = \tan(\theta) \quad (2.397)$$

και έτσι

$$\theta = \tan^{-1} \mu_k = \tan^{-1}(0.15) \approx 8.5 \text{ μοίρες} \quad (2.398)$$

Άρα για το παραπάνω  $\theta$ , η κινητική ενέργεια (και άρα η ταχύτητα) στη θέση (B) θα είναι μέγιστη. Βρείτε αυτήν την ταχύτητα!

#### Παράδειγμα 2.42:

Θεωρήστε ένα σώμα επάνω σε ένα καρεκλάκι δίπλα σε έναν τοίχο. Το σώμα σπρώχνεται από ένα ελατήριο που είναι δεμένο στον τοίχο, ολισθαίνει κατά μήκος της καρέκλας, και πέφτει στο έδαφος, όπως στην ακολουθία εικόνων του Σχήματος 2.73. Το σώμα έχει μάζα  $m = 1.35 \text{ kg}$ . Η σταθερά του ελατηρίου είναι  $k = 560 \text{ N/m}$  και αρχικά το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά  $0.11 \text{ m}$ . Το σώμα ολισθαίνει μια απόσταση  $d = 0.65 \text{ m}$  επάνω στην καρέκλα, η οποία έχει ύψος  $h = 0.75 \text{ m}$ . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και στην επιφάνεια της καρέκλας είναι  $\mu_k = 0.16$ .

- (α') Με ποιά ταχύτητα θα φτάσει το σώμα στο έδαφος;
- (β') Με ποιά ταχύτητα το σώμα αφήνει την καρέκλα;

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας ΑΔΕ στο σύστημα του σώματος-καρέκλας-ελατηρίου-γης από το σημείο (A) ως το σημείο (Γ), έχουμε

$$W_F^{A \rightarrow \Gamma} = \Delta K^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta U_g^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta U_e^{A \rightarrow \Gamma} \quad (2.399)$$

$$-mgd\mu_k = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 - 0 + 0 - mgh + 0 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.400)$$

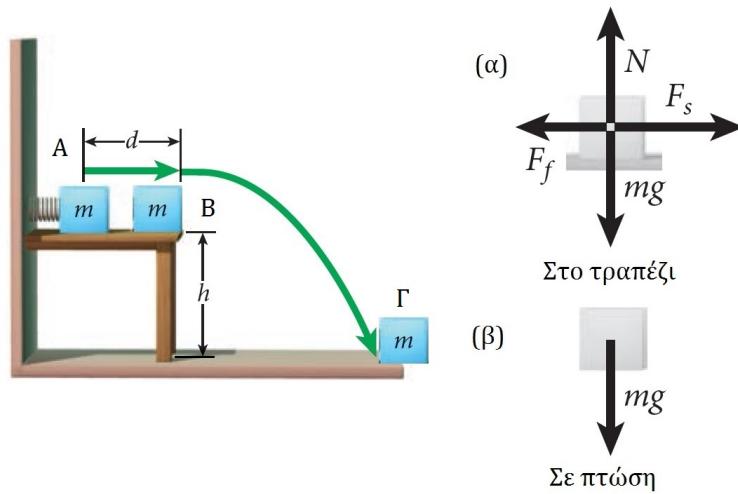
$$u_\Gamma^2 = \frac{kx^2}{m} + 2gh - 2gd\mu_k \quad (2.401)$$

$$u_\Gamma^2 = 17.64 \quad (2.402)$$

$$u_\Gamma = 4.2 \text{ m/s} \quad (2.403)$$

(β') Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα σώματος-ελατηρίου από το σημείο A ως το σημείο B:

$$W_F^{A \rightarrow B} = \Delta K^{A \rightarrow B} + \Delta U_e^{A \rightarrow B} \quad (2.404)$$



Σχήμα 2.73: Καρεκλάκι σε τοίχο.

$$-mgd\mu_k = \frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.405)$$

$$u_B^2 = \frac{kx^2}{m} - 2gd\mu_k \quad (2.406)$$

$$u_B^2 = 2.98 \quad (2.407)$$

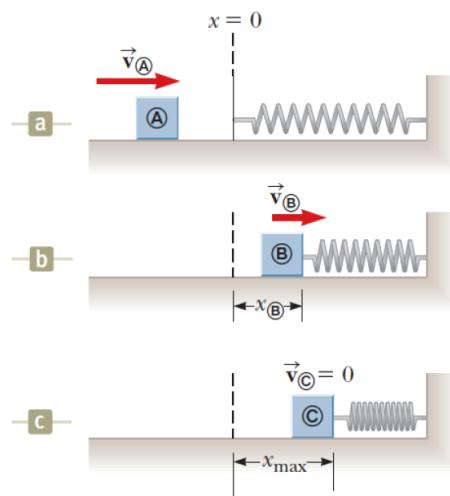
$$u_B = 1.72 \text{ m/s} \quad (2.408)$$

### Παράδειγμα 2.43:

Ένα σώμα μάζας  $0.8 \text{ kg}$  δέχεται αρχική ταχύτητα  $u_A = 1.2 \text{ m/s}$  προς τα δεξιά και συγκρούεται με ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς  $k = 50 \text{ N/m}$ , όπως στο Σχήμα 2.74

(α') Υποθέτοντας επιφάνεια χωρίς τριβές, υπολογίστε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β') Υποθέτοντας σταθερή τριβή ολισθήσεως με  $\mu_k = 0.5$ , αν η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή της επαφής με το ελατήριο είναι  $u_A = 1.2 \text{ m/s}$ , ποιά είναι τώρα η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;



Σχήμα 2.74: Σώμα συγκρούεται με ελατήριο.

Λύση: Επιλέγουμε ύθετική φορά προς τα δεξιά.

(α') Έστω ότι το σύστημα μας είναι το ελατήριο + σώμα. Το σύστημα αυτό είναι απομονωμένο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ελατήριο είναι η δύναμη του ελατηρίου, η δύναμη του βάρους, και η δύναμη του επιπέδου στο ελατήριο. Οι δυο τελευταίες δεν παράγουν έργο, ως κάθετες στη μετατόπιση του σώματος. Η δύναμη που απομένει, του ελατηρίου, είναι συντηρητική, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ΑΔΜΕ.

$$K_A + U_{s_A} = K_C + U_{s_C} \quad (2.409)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.410)$$

$$x_{max}^2 = \frac{mu_A^2}{k} \quad (2.411)$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{mu_A^2}{k}} \quad (2.412)$$

$$\approx 0.15 \text{ m} \quad (2.413)$$

(β') Θεωρούμε νέο σύστημα το σώμα + ελατήριο + επιφάνεια. Υπάρχει πλέον μη συντηρητική δύναμη στο σύστημα, και το σύστημα είναι απομονωμένο. Προστίθεται η δύναμη της τριβής στις δυνάμεις που αναφέραμε στο προηγούμενο ερώτημα. Ισχύει η ΑΔΕ.

$$\Delta K + \Delta U_s + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.414)$$

$$K_C - K_A + U_{s_C} - U_{s_A} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.415)$$

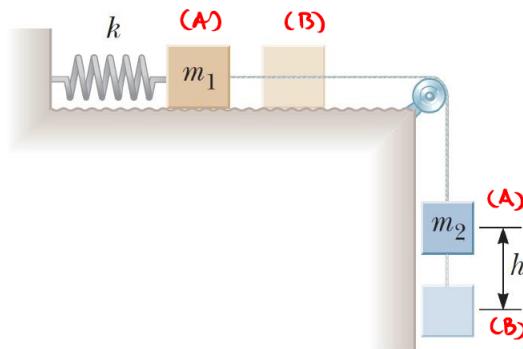
$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 + f_k \Delta x = 0 \quad (2.416)$$

$$50x_{max}^2 + 7.84x_{max} - 1.15 = 0 \quad (2.417)$$

Λύσεις του τριωνύμου αποτελούν οι  $x_{max_1} = 0.092 \text{ m}$  και  $x_{max_2} = -0.25 \text{ m}$ , εκ των οποίων αποδεχόμαστε την πρώτη λόγω του ότι είναι θετική, όπως πρέπει να είναι βάσει σχήματος και επιλεγμένης θετικής φοράς.

#### Παράδειγμα 2.44:

Δυο σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και ανελαστικό σχοινί που περνά από τροχαλία χωρίς τριβές. Το σώμα μάζας  $m_1$  βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές και συνδέεται με ελατήριο σταθεράς  $k$ . Το σύστημα θεωρείται αρχικά σε ηρεμία. Αν το σώμα μάζας  $m_2$  πέφτει απόσταση  $h$  πριν έρθει σε ηρεμία, όπως στο Σχήμα 2.75, υπολογίστε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας  $m_1$  και στην οριζόντια επιφάνεια.



Σχήμα 2.75: Σώματα δεμένα με ελατήριο και νήμα με τροχαλία.

Λύση: Έστω οι θέσεις (Α) και (Β) του συστήματος, όπως στο Σχήμα 2.75. Έστω το σύστημα {σώματα + ελατήριο + επιφάνεια + Γη}. Το σύστημα είναι απομονωμένο και υπάρχουν μη συντηρητικές δυνάμεις στο

σύστημα (τριβή). Λόγω της λείας και αβαρούς τροχαλίας καθώς και των ανελαστικών και αβαρών νημάτων, τα δυο σώματα  $m_1$  και  $m_2$  κινούνται μαζί. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση του συστήματος στην τελική ισορροπία, στη θέση (B) των δυο σωμάτων. Ισχύει η ΑΔΕ στη διαδρομή  $A \rightarrow B$ .

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.418)$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.419)$$

$$0 - 0 + 0 - U_{g_A} + U_{s_B} - 0 + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.420)$$

$$-U_{g_A} + U_{s_B} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.421)$$

$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + f_kh = 0 \quad (2.422)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$f_k = \mu_k n \quad (2.423)$$

κι από την ισορροπία του σώματος  $m_1$  στον y-άξονα παίρνουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \implies n - m_1g = 0 \iff n = m_1g \quad (2.424)$$

Άρα

$$f_k = \mu_k m_1 g \quad (2.425)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στη Σχέση (2.422)

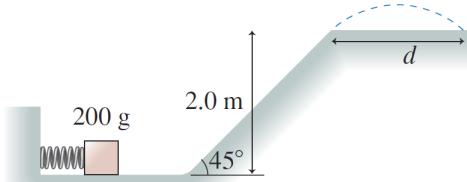
$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + \mu_k m_1 g h = 0 \quad (2.426)$$

$$\mu_k = \frac{m_2g - \frac{1}{2}kh}{m_1g} \quad (2.427)$$

που είναι και το ζητούμενο.

#### Παράδειγμα 2.45:

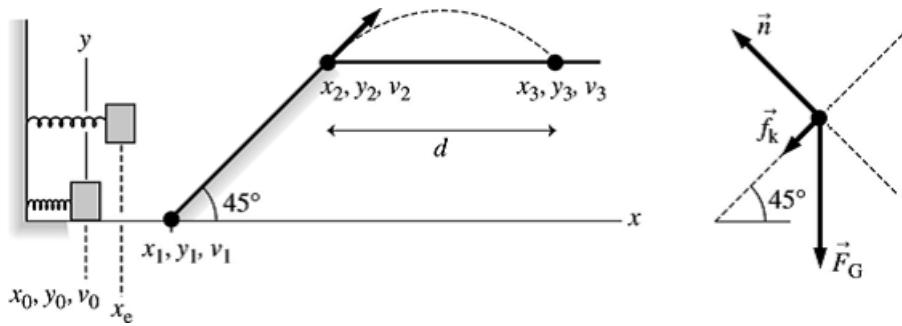
Το ελατήριο του Σχήματος 2.76 έχει σταθερά  $k = 1000 \text{ N/m}$ .



Σχήμα 2.76: Ελατήριο και σώμα.

Συμπιέζεται κατά 15 εκατοστά και στη συνέχεια εκτοξεύει ένα σώμα μάζας  $0.2 \text{ kg}$ . Η οριζόντια επιφάνεια είναι χωρίς τριβές, αλλά το κεκλιμένο έχει τριβές και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου είναι  $\mu_k = 0.2$ . Πόση απόσταση  $d$  διανύει το σώμα στον αέρα;

**Λύση:** Δείτε το Σχήμα 2.77. Θεωρούμε ως σύστημα το σώμα + επιφάνεια + Γη. Θεωρούμε 4 σημεία, τα  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . Το σύστημα είναι μη απομονωμένο, καθώς υπάρχει εξωτερική δύναμη, αυτή του ελατηρίου. Τοποθετούμε το συστήμα συντεταγμένων στο ελεύθερο όχρο του συμπιεσμένου ελατηρίου που έρχεται σε επαφή με το σώμα. Επειδή η οριζόντια επιφάνεια στο κάτω μέρος της ράμπας είναι χωρίς τριβή, η ενέργεια του ελατηρίου εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια του σώματος έως ότου αρχίσει το σώμα να ανεβαίνει



Σχήμα 2.77: Ελατήριο και σώμα και διαγράμματα δυνάμεων.

πάνω στο κεκλιμένο. Παρόλο που θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητα  $v_1$  καθώς φεύγει το σώμα από την πηγή, δεν μας χρειάζεται. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για να συσχετίσουμε την αρχική δυναμική ενέργεια της πηγής με την ενέργεια του σώματος καθώς αρχίζει η κίνηση του στο σημείο 2. Ωστόσο, η παρουσία τριβής απαιτεί να υπολογίσουμε την αύξηση της θερμικής ενέργειας του συστήματος. Μπορούμε να εφαρμόσουμε ΑΔΕ στη διαδρομή  $(x_0, y_0) \rightarrow (x_2, y_2)$ .

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = W_s \quad (2.428)$$

$$K_2 - K_0 + U_{g2} - U_{g0} + \Delta E_{th} = W_s \quad (2.429)$$

$$\frac{1}{2}mu_2^2 - 0 + mgy_2 - 0 + f_k\Delta s = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (2.430)$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\Delta s = \frac{y_2}{\sin(\pi/4)} \quad (2.431)$$

και γνωρίζουμε ότι  $f_k = \mu_k n = \mu_k mg \cos(\pi/4)$ , λόγω της ισορροπίας του σώματος στον άξονα  $y'$ . Οπότε

$$\frac{1}{2}mu_2^2 - 0 + mgy_2 - 0 + f_k\Delta s = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (2.432)$$

$$\frac{1}{2}mu_2^2 - 0 + mgy_2 - 0 + \mu_k mg \cos(\pi/4) \frac{y_2}{\sin(\pi/4)} = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (2.433)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{k}{m}x_0^2 - 2gy_2 - 2\mu_k gy_2 - 2\mu_k gy_2 \cot(\pi/4)} \quad (2.434)$$

$$= 8.091 \text{ m/s} \quad (2.435)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την απόσταση  $d = x_3 - x_2$  χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της κίνησης στη διαδρομή  $(x_2, y_2) \rightarrow (x_3, y_3)$ . Είναι

$$y_3 = y_2 + u_{y2}(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 \quad (2.436)$$

$$2 = 2 + u_2 \sin(\pi/4)(t_3 - t_2) - 4.9(t_3 - t_2)^2 \quad (2.437)$$

$$(t_3 - t_2)(u_2 \sin(\pi/4) - 4.9(t_3 - t_2)) = 0 \quad (2.438)$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι οι  $t_3 - t_2 = 0$  ή  $t_3 - t_2 = 1.168$  s. Άρα τελικά

$$x_3 = x_2 + u_{2x}(t_3 - t_2) \iff d = x_3 - x_2 = u_2 \cos(\pi/4)(1.168) = 6.7 \text{ m} \quad (2.439)$$

### 2.6.3 Ισχύς

Έχουμε επανηλειμμένως τονίσει ότι το έργο αποτελεί έναν τρόπο μεταφοράς ενέργειας. Αυτό που δε συζητήσαμε καθόλου είναι το πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια! Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για

να ανεβάζει 5 ορόφους ένα υάλαμο (ανελκυστήρα) μάζας 1.5 τόνων, έχει σημασία αν το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! ☺

Η φράση “πόσο γρήγορα” υποδηλώνει ένα ρυθμό μεταβολής. Τίνος όμως; Προφανώς το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ή αλλιώς το ρυθμό μεταφοράς της ενέργειας. Αυτός ο ρύθμος ονομάζεται ισχύς  $P$ :

$$P = \frac{d}{dt}E(t) \quad (2.440)$$

Η μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι 1 J/s ή αλλιώς 1 Watt - W. Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο ρυθμός παραγωγής έργου. Σε ένα διάστημα  $\Delta t$ , η μέση ισχύς που παραδίδεται είναι

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t} \quad (2.441)$$

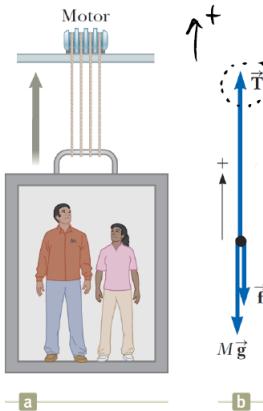
Καταλαβαίνετε ότι αν πάρουμε το όριο για  $\Delta t \rightarrow 0$ , η μέση ισχύς γίνεται η στιγμιαία ισχύς, δηλ.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{d}{dt}W = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (2.442)$$

#### Παράδειγμα 2.46:

Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1600 kg και μεταφέρει επιβάτες με συνολική μάζα 200 kg. Μια σταθερή δύναμη τριβής 4000 N αντιστέκεται στην κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.

- (α') Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας του ασανσέρ για να σηκώσει το ασανσέρ και τους επιβάτες του με σταθερή ταχύτητα  $u = 3 \text{ m/s}$ ;
- (β') Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας τη στιγμή που ο ανελκυστήρας κινείται με ταχύτητα  $u$ , αν επιταχύνει τον ανελκυστήρα με σταθερή επιτάχυνση  $a = 1 \text{ m/s}^2$  προς τα πάνω;



Σχήμα 2.78: Κινητήρας και ανελκυστήρας.

Λύση:

- (α') Ξέρουμε ότι  $P = \vec{F} \cdot \vec{u}$ . Θεωρούμε ως σύστημα τον ανελκυστήρα + επιβάτες. Ο ανελκυστήρας ισορροπεί, καθώς κινείται με σταθερή ταχύτητα. Έτσι

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{T} + \vec{f} + M\vec{g} = 0 \implies T = Mg + f = F \quad (2.443)$$

με  $M$  τη συνολική μάζα του συστήματος. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$P = (Mg + f)u = 6.5 \times 10^4 \text{ W} \quad (2.444)$$

(β') Το σύστημα επιταχύνεται προς τα πάνω, άρα

$$\sum \vec{F}_y = M\vec{a} \iff \vec{T} + \vec{f} + M\vec{g} = M\vec{a} \implies T = f + M(a+g) = F \quad (2.445)$$

Άρα

$$P = \vec{F} \cdot \vec{u} = (f + M(a+g))u = 2.34u \times 10^4 \text{ W} \quad (2.446)$$

### Παράδειγμα 2.47:

Ένα εργοστάσιο χρησιμοποιεί έναν κινητήρα και ένα καλώδιο για να τραβά ένα μηχάνημα μάζας 300 kg από το χώρο αποθήκευσης ως το χώρο χρήσης του. Πόση ισχύ πρέπει να παρέχει ο κινητήρας αν κινεί το μηχάνημα με ταχύτητα 0.5 m/s. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του μηχανήματος και του οριζόντιου πατώματος είναι 0.6.

Λύση: Η δύναμη που ασκείται από τον κινητήρα μέσω του καλωδίου ισούται με την τάση του καλωδίου,  $\vec{T}$ . Αυτή η δύναμη παράγει έργο στο μηχάνημα με ισχύ  $P = \vec{T} \cdot \vec{u} = Tu$ , λόγω του ότι τα διανύσματα τάσης και ταχύτητας είναι ομόρροπα. Το μηχάνημα βρίσκεται σε ισορροπία στην οριζόντια κίνησή του, λόγω της κίνησής του με σταθερή ταχύτητα, άρα

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T} + \vec{f}_k = \vec{0} \implies T - f_k = 0 \iff T = f_k = \mu_k n \quad (2.447)$$

και λόγω ισορροπίας και στον άξονα  $y'$  ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + mg = \vec{0} \implies n - mg = 0 \iff n = mg \quad (2.448)$$

Αντικαθιστώντας

$$T = \mu_k mg \quad (2.449)$$

και άρα η ισχύς του κινητήρα θα είναι

$$P = Tu = \mu_k mg u = 882 \text{ W} \quad (2.450)$$

## 2.7

## Ασκήσεις

Παράδειγμα 2.48:

Ένας ήπιας έντασης άνεμος μπορεί να επιταχύνει ένα στρογγυλό χαλίκι σε μια οριζόντια γέφυρα με σταθερή επιτάχυνση

$$\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} \text{ m/s}^2 \quad (2.451)$$

Υποθέστε ότι η γέφυρα αποτελεί ένα λείο  $xy$  επίπεδο. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η ταχύτητα του χαλικιού είναι  $4\vec{i}$  m/s.

(α') Βρείτε το μέτρο της ταχύτητάς του όταν έχει μετατοπιστεί 12 m παράλληλα με τον άξονα  $x'x$ .

(β') Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητάς του στο παραπάνω ερώτημα με τον άξονα  $x'x$ .

Λύση: Το χαλίκι κινείται επιταχυνόμενα με σταθερή επιτάχυνση  $a_x = 5 \text{ m/s}^2$  στον άξονα  $x'x$  και επιταχυνόμενα με σταθερή επιτάχυνση  $a_y = 7 \text{ m/s}^2$  στον άξονα  $y'y$ . Το χαλίκι έχει αρχική ταχύτητα μόνο στον άξονα  $x'x$  και ίση με  $u_x = 4 \text{ m/s}$ .

(α') Έστω  $A$  το σημείο εκκίνησης ( $t = 0$ ) και  $B$  το σημείο όπου έχει μετατοπιστεί  $\Delta x = 12 \text{ m}$  παράλληλα με τον άξονα  $x'x$ . Θα είναι

$$u_{B_x}^2 = u_{A_x}^2 + 2a_x\Delta x \iff u_{B_x}^2 = 16 + 2 \cdot 5 \cdot 12 = 136 \implies u_{B_x} = 11.662 \text{ m/s} \quad (2.452)$$

και

$$u_{B_x} = u_{A_x} + a_x t \implies t = \frac{u_{B_x} - u_{A_x}}{a_x} = 1.532 \text{ s} \quad (2.453)$$

Στον άξονα  $y'y$  ισχύει

$$u_{B_y} = u_{A_y} + a_y t = 0 + 7 \cdot 1.532 = 10.727 \text{ m/s} \quad (2.454)$$

Οπότε

$$|\vec{u}_B| = \sqrt{u_{B_x}^2 + u_{B_y}^2} = 15.845 \text{ m/s} \quad (2.455)$$

(β') Θα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_{B_y}}{u_{B_x}} = \tan^{-1} \frac{10.727}{11.662} = 42.609^\circ \quad (2.456)$$

Παράδειγμα 2.49:

Ένα αεροπλάνο προσγειώνεται με ταχύτητα 63 m/s, δηλ. ακουμπά το έδαφος με αυτήν την ταχύτητα.

(α') Ποιά είναι η επιτάχυνση του (υποθέστε ότι είναι σταθερή) αν ο πιλότος καταφέρνει να το ακινητοποιήσει σε χρόνο 2 s;

(β') Πόση απόσταση διένυσε το αεροπλάνο στον αεροδιάδρομο;

Λύση:

(α') Μελετάμε το φαινόμενο με το που το αεροπλάνο ακουμπά τον αεροδιάδρομο, δηλ. τότε ακριβώς θέτουμε  $t = 0$ . Εύκολα βρίσκουμε από το τυπολόγιο της επιταχυνόμενης κίνησης ότι

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \quad (2.457)$$

οπότε

$$a_x = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t} = \frac{0 - 63}{2} = -31.5 \text{ m/s}^2 \quad (2.458)$$

(β') Από το τυπολόγιο μας, στο διάστημα αυτό των δυο δευτερολέπτων μεταξύ της στιγμής που ακουμπά στο διάδρομο και της στιγμής που ακινητοποιείται θα έχουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t = 0 + 0.5 \cdot 63 \cdot 2 = 63 \text{ m} \quad (2.459)$$

### Παράδειγμα 2.50:

Ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει με ταχύτητα 45 m/s και κάποια στιγμή προσπερνά ένα χρυσμένο ακίνητο μοτοσυκλετιστή της τροχαίας. Ένα δευτερόλεπτο μετά την προσπέραση, ο μοτοσυκλετιστής ξεκινάει με σταθερή επιτάχυνση 3 m/s<sup>2</sup> την καταδίωξη. Σε πόσο χρόνο ο μοτοσυκλετιστής θα φτάσει το αυτοκίνητο;

Λύση: Ορίζουμε ως χρονική στιγμή  $t = 0$  τη στιγμή που ο αστυνομικός μοτοσυκλετιστής ξεκινά και ορίζουμε ως σημείο αναφοράς της θέσης  $x = 0$  τη θέση του αστυνομικού πριν ξεκινήσει. Σε αυτή τη στιγμή ( $t = 0, x = 0$ ), το αμάξι έχει προχωρήσει ήδη 45 μέτρα, αφού έχει περάσει ένα δευτερόλεπτο. Άρα, η αρχική θέση του αμαξιού είναι  $x_{icar} = 45 \text{ m}$ .

Το όχημα εκτελεί ευθύγραμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα η θέση του για κάθε χρονική στιγμή  $t$  θα δίνεται ως

$$x_{car} = x_{icar} + u_{x_{car}} t = 45 + u_{x_{car}} t \quad (2.460)$$

ενώ ο αστυνομικός εκτελεί ευθύγραμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, και η θέση του για κάθε χρονική στιγμή  $t$  θα δίνεται ως

$$x_{cop} = x_{icop} + u_{x_{cop}} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2.461)$$

αφού η αρχική θέση του θεωρείται μηδέν και η αρχική του ταχύτητα επίσης.

Έτσι, για να βρούμε πότε οι θέσεις τους θα συμπέσουν (αυτό ζητάει το ερώτημα), θα είναι

$$x_{cop} = x_{car} \quad (2.462)$$

$$\frac{1}{2} a_x t^2 = 45 + u_{x_{car}} t \quad (2.463)$$

$$t = \frac{u_{x_{car}} \pm \sqrt{u_{x_{car}}^2 + 2 \cdot 45 a_x}}{a_x} \quad (2.464)$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$t = 31 \text{ s} \quad (2.465)$$

### Παράδειγμα 2.51:

Ένας λαγός και μια χελώνα τρέχουν σε αγώνα δρόμου μήκους 1 km. Η χελώνα τρέχει με ταχύτητα 0.2 m/s, ενώ ο λαγός 8 m/s. Και οι δύο ξεκινούν ταυτόχρονα από την εκκίνηση. Ο λαγός τρέχει προς το τέρμα, σταματάει όμως στα 0.8 km και παίρνει έναν ύπνο. Η χελώνα τρέχει προς το τέρμα χωρίς να σταματήσει. Και οι δύο, όταν κινούνται, έχουν σταθερή την ταχύτητά τους. Ο λαγός ξυπνάει τελευταία στιγμή, τρέχει και τελικά τερματίζει μαζί με τη χελώνα.

(α') Πόσο κοντά βρίσκεται η χελώνα στο τέρμα όταν ξυπνάει (ξεκινά και πάλι) ο λαγός;

(β') Πόση ώρα κοιμόταν (ήταν ακίνητος) ο λαγός;

Λύση:

- (α') Έστω ότι η χελώνα προχωρά απόσταση  $D$  πριν ο λαγός ξαναμπεί στον αγώνα. Όταν γίνεται αυτό, ο λαός πρέπει να τρέξει 200 m σε 8 m/s, ενώ η χελώνα προχωρά απόσταση  $(1000 - D)$  με 0.2 m/s. Καθένας έχει τον ίδιο χρόνο για να τελειώσει τον αγώνα. Ήταν

$$\Delta t = \frac{200}{8} = \frac{1000 - D}{0.2} \implies D = 995 \text{ m} \quad (2.466)$$

Άρα η χελώνα βρίσκεται σε απόσταση  $1000 - 995 = 5$  m από τη γραμμή τερματισμού όταν ο λαγός επανέρχεται στον αγώνα.

- (β') Και οι δύο ξεκινούν τον αγώνα την ίδια χρονική στιγμή  $t = 0$ . Ο λαγός φτάνει τη θέση των 800 μέτρων σε χρόνο  $t = 800/8 = 100$  s. Η χελώνα φτάνει τα 995 μέτρα σε χρόνο  $t = 995/0.2 = 4975$  s. Ο λαγός κοιμόταν για διάστημα  $\Delta t = 4975 - 100 = 4875$  s.

### Παράδειγμα 2.52:

Ένας άνθρωπος ταξιδεύει με το αυτοκίνητό του, με σταθερή ταχύτητα 89.5 km/h, εκτός από μια στάση 22 λεπτών. Αν η μέση ταχύτητα του είναι 77.8 km/h:

- (α') Πόση ήταν η συνολική ώρα του ταξιδιού;  
 (β') Πόση απόσταση διένυσε συνολικά;

Λύση:

- (α') Έστω  $t_0 = 0$  η στιγμή εκκίνησης του ταξιδιού και  $t_s$  ο χρόνος που διένυσε μέχρι τη στάση ταξιδεύοντας με σταθερή ταχύτητα  $u = 89.5$  km/h, δηλ. με  $u = 24.86$  m/s. Τα 22 λεπτά αντιστοιχούν σε 1320 δευτερόλεπτα, ενώ η μέση ταχύτητα των 77.8 χιλιομέτρων την ώρα αντιστοιχεί σε 21.61 m/s. Η μέση του ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320 - t_0} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320} \quad (2.467)$$

Άρα η απόσταση που διένυσε είναι

$$\Delta x = u_{avg} \Delta t = u_{avg} (t_s + 1320) \quad (2.468)$$

Για όσο ταξίδευε με σταθερή ταχύτητα  $u$ , θα είναι

$$\Delta x = u(t_s - t_0) = ut_s \quad (2.469)$$

Προφανώς οι αποστάσεις  $\Delta x$  είναι ίδιες και στις δύο σχέσεις, άρα εξισώνοντας έχουμε

$$u_{avg}(t_s + 1320) = ut_s \iff 21.6 \cdot (t_s + 1320) = 24.86 \cdot t_s \iff t_s = \frac{28512}{3.26} = 8746 \text{ s} \quad (2.470)$$

που αντιστοιχεί σε  $t_s = 2.44$  ώρες. Άρα ο συνολικός χρόνος ταξιδιού είναι  $t_{total} \approx 2.44 + 0.37 = 2.81$  ώρες.

- (β') Η απόσταση που ταξίδεψε είναι

$$\Delta x = ut_s = 218370 \text{ m} \approx 218 \text{ km} \quad (2.471)$$

### Παράδειγμα 2.53:

Η θέση ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα  $x'$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3 \quad (2.472)$$

με  $x$  να μετριέται σε μέτρα και  $t$  σε δευτερόλεπτα.

- (α') Βρείτε τη θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, και 4 s αντίστοιχα.
- (β') Βρείτε τη μετατόπιση του σώματος μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t = 0$  και  $t = 4$  s.
- (γ') Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του σώματος στο διάστημα από  $t = 2$  ως  $t = 4$  s;
- (δ') Σχεδιάστε πιοιτικά τη συνάρτηση  $x(t)$  σε ένα γράφημα στο διάστημα  $[2, 4]$ , και εξηγήστε πως θα μπορούσατε να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα μέσω του γραφήματος.

Λύση: Η θέση ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα  $x'$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3 \quad (2.473)$$

με  $x$  να μετριέται σε μέτρα και  $t$  σε δευτερόλεπτα.

(α') Είναι

- $t = 1$ :  $x(1) = 3 - 4 + 1 = 0$  m.
- $t = 2$ :  $x(2) = 6 - 16 + 8 = -2$  m.
- $t = 3$ :  $x(3) = 9 - 36 + 27 = 0$  m.
- $t = 4$ :  $x(4) = 12 - 64 + 64 = 12$  m.

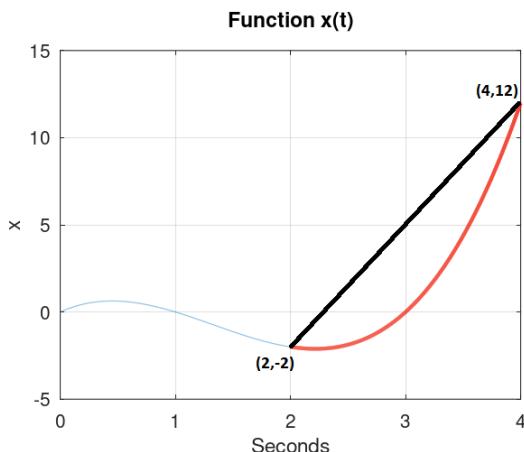
(β') Θα έχουμε

$$\Delta x = x(4) - x(0) = 12 - 0 = 12 \text{ m} \quad (2.474)$$

(γ') Θα είναι

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = 7 \text{ m/s} \quad (2.475)$$

(δ') Το γράφημα της  $x(t)$  φαίνεται στο Σχήμα 2.79. Η μέση ταχύτητα δίνεται από την κλίση της ευθείας που



Σχήμα 2.79: Σχήμα Άσκησης 2.53.

ενώνει τα σημεία  $(2, -2)$  και  $(4, 12)$ . Η κλίση αυτή είναι

$$\lambda = \frac{12 - (-2)}{4 - 2} = \frac{14}{2} = 7 \quad (2.476)$$

που ταυτίζεται με την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα.

**Παράδειγμα 2.54:**

Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνει ομοιόμορφα από  $2 \times 10^4$  σε  $6 \times 10^6$  m/s σε απόσταση 1.5 cm.

- (α') Σε πόσο χρονικό διάστημα διανύει αυτά τα 1.5 εκατοστά;
- (β') Ποιά είναι η επιτάχυνσή του σε αυτό το διάστημα;

**Λύση:** Έχουμε αρχικά ότι  $u_i = 2 \times 10^4$  m/s και  $u_f = 6 \times 10^6$  m/s, και ότι  $x_f - x_i = 1.5 \times 10^{-2}$  m. Δε γνωρίζουμε την επιτάχυνση αρχικά (μας ζητείται στη συνέχεια), οπότε θα χρειαστούμε έναν τύπο με ταχύτητες και θέσεις μόνο.

- (α') Από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης επιλέγουμε

$$x_f = x_i + 0.5(u_f + u_i)t \quad (2.477)$$

$$t = \frac{2(x_f - x_i)}{u_f - u_i} \quad (2.478)$$

$$= 0.00498 \times 10^{-6} \approx 5 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (2.479)$$

- (β') Επιλέγουμε από το τυπολόγιο μας τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.480)$$

αφού έχει το ζητούμενο άγνωστο (επιτάχυνση) και όλα τα άλλα στοιχεία είναι γνωστά.

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.481)$$

$$a_x = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2(x_f - x_i)} \approx 1.2 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.482)$$

Εναλλακτικά,

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.483)$$

$$a_x = 2 \frac{x_f - x_i - u_{x_i}t}{t^2} \quad (2.484)$$

$$\approx 1.2 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.485)$$

**Παράδειγμα 2.55:**

Οδηγείτε με το αμάξι σας στον BOAK (Βόρειος Οδικός Άξονας Κρήτης) κι ενώ το όριο είναι 90 km/h εσείς τρέχετε σταθερά με 137 km/h (πράγμα που δεν πρέπει να κάνετε ΠΟΤΕ!). Τα φρένα του αυτοκινήτου σας μπορούν να σας επιβραδύνουν με ρυθμό  $5.2 \text{ m/s}^2$ .

- (α') Αν ξαφνικά δείτε έναν τροχονόμο, ποιός είναι ο χρόνος που μπορείτε να θέσετε την ταχύτητα του αμαξιού σας στο όριο των 90 km/h; Η απάντηση θα σας αποκαλύψει τη ματαιότητα του φρεναρίσματος για να μη σας πιάσει το ραντάρ της τροχαίας, όταν βλέπετε τη σχετική σήμανση.
- (β') Σχεδιάστε τα γραφήματα  $x(t)$  ως προς  $t$  και  $u(t)$  ως προς  $t$  για όσο διάστημα απαιτείται μέχρι να πιάσετε το όριο (υποθέστε ότι στο  $t = 0$  έχετε ταχύτητα 137 km/h και ότι  $x_{t=0} = 0$ ).

**Λύση:**

- (α') Θεωρούμε  $t_i = 0$  και  $x_i = 0$  τη στιγμή που βλέπουμε τον τροχονόμο και μόλις ζεκινάμε να επιβραδύνουμε το αυτοκίνητο. Το όριο των 90 km/h αντιστοιχεί σε 25 m/s. Η κίνησή μας είναι ευθύγραμη επιταχυνόμενη

με σταθερή επιτάχυνση  $a_x = -5.2 \text{ m/s}^2$ . Θεωρούμε  $u_i = 38.05 \text{ m/s}$  όταν  $t_i = 0$  και  $u_f = 25 \text{ m/s}$  μετά από χρόνο  $t$ . Θα είναι

$$u_f = u_i + a_x t \implies t = \frac{u_f - u_i}{a_x} = \frac{25 - 38.05}{-5.2} = 2.51 \text{ s} \quad (2.486)$$

Άρα θα έχουν περάσει 2.51 δευτερόλεπτα μέχρι να κατέβετε στο όριο της ταχύτητας, διάστημα στο πού θα έχετε ήδη διατρέξει περίπου 80 μέτρα. Μάταιος κόπος, το ραντάρ θα σας έχει ήδη πιάσει.

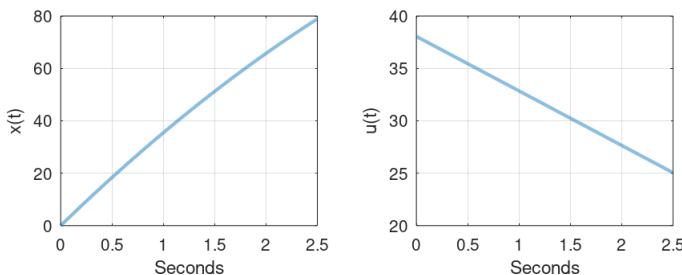
(β') Η θέση  $x(t)$  δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = x_i + u_{x_i} t - \frac{1}{2} a_x t^2 = 0 + 38.05t - 2.6t^2 = -2.6t^2 + 38.05t \quad (2.487)$$

και η ταχύτητα ως

$$u(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -5.2t + 38.05 \quad (2.488)$$

Τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 2.80.



Σχήμα 2.80: Σχήμα Άσκησης 2.55.

### Παράδειγμα 2.56:

Ένα αυτοκίνητο που ταξιδεύει με ταχύτητα 30 m/s χρειάζεται το λιγότερο 60 m για να σταματήσει, συμπεριλαμβανομένης της απόστασης που διανύει μέχρι να αντιδράσει ο οδηγός (πατήσει φρένο). Ο οδηγός αντιδρά κατά μέσο όρο σε 0.5 s.

- (α') Ποιά είναι η ελάχιστη απόσταση που χρειάζεται το ίδιο αυτοκίνητο για να σταματήσει αν τρέχει με 40 m/s;
- (β') Σχεδιάστε ένα γράφημα θέσης - χρόνου για την κίνηση του αυτοκινήτου του παραπάνω ερωτήματος. Υποθέστε ότι το αυτοκίνητο βρίσκεται σε αρχική θέση  $x_0 = 0 \text{ m}$  όταν ο οδηγός αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να φρενάρει.

Λύση:

(α') Το πρόβλημα είναι διττό: αρχικά, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία που δίνεται για να βρούμε την επιτάχυνση κατά το φρενάρισμα. Δεύτερον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επιτάχυνση για να βρούμε την απόσταση που απαιτείται για να σταματήσει, δεδομένης της διαφορετικής αρχικής ταχύτητας. Αρχικά, το αυτοκίνητο προχωρά με σταθερή ταχύτητα πριν φρενάρει:

$$x = x_0 + u_0 t = u_0 t = 15 \text{ m} \quad (2.489)$$

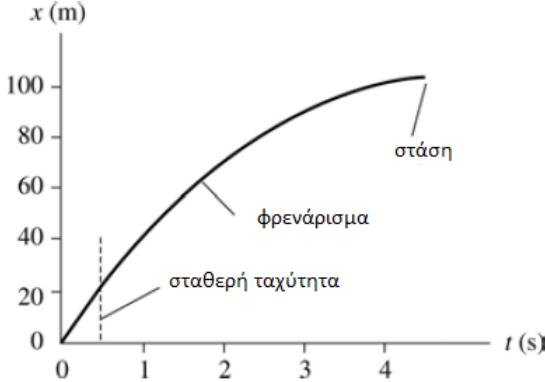
Τότε, το αυτοκίνητο φρενάρει. Επειδή δεν ξέρουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u^2 = u_1^2 + 2a_1 \Delta x \Rightarrow a_1 = -\frac{u_1^2}{2\Delta x} = -10 \text{ m/s}^2 \quad (2.490)$$

Χρησιμοποιήσαμε  $u_1 = u_0 = 30 \text{ m/s}$ . Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο, επειδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει προς τα αριστερά. Επαναλαμβάνουμε τώρα με  $u_0 = 40 \text{ m/s}$ . Η απόσταση μέχρι το φρενάρισμα είναι

$$x_1 = u_0 t = 20 \text{ m} \quad (2.491)$$

Η θέση  $x_2$  μετά το φρενάρισμα είναι



Σχήμα 2.81: Διάγραμμα Άσκησης 2.56.

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1\Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{40^2}{2(-10)} = 80 \text{ m} \quad (2.492)$$

Άρα

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = 80 + 20 = 100 \text{ m} \quad (2.493)$$

(β') Το αυτοκίνητο διανύει με σταθερή ταχύτητα τα πρώτα 0.5 s, ταξιδεύοντας για 20 m. Το διάγραμμα θα είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση 40 m/s. Για  $t \geq 0.5$ , το διάγραμμα θα είναι μια παραβολή, μέχρι το σημείο που το αυτοκίνητο σταματά (χρονική στιγμή  $t_2$ ). Μπορούμε να βρούμε αυτή τη στιγμή ως

$$u_2 = u_1 + a_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 = \frac{u_1}{a_1} = 4.5 \text{ s} \quad (2.494)$$

Η παραβολή θα έχει μηδενική κλίση  $u = 0$  σε χρόνο  $t = 4.5 \text{ s}$ . Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.81.

### Παράδειγμα 2.57:

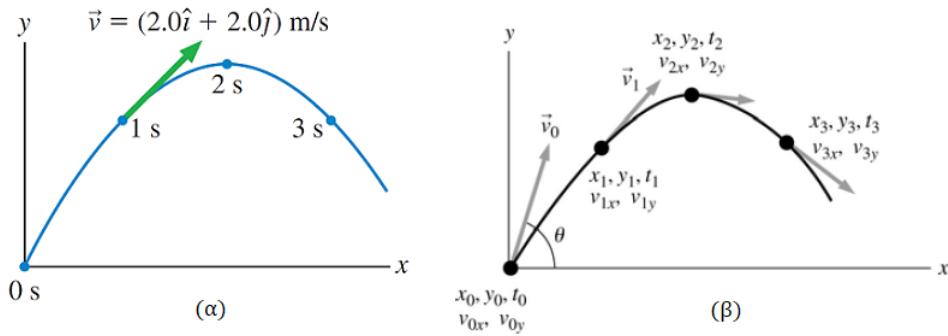
Ένας φοιτητής Φυσικής πειραματίζεται σε ένα θάλαμο μειωμένης βαρύτητας. Ο φοιτητής πετά μια μπάλα η οποία ακολουθεί την παραβολική τροχιά του Σχήματος 2.82(α). Η θέση της μπάλας στο σχήμα φαίνεται ανά διαστήματα ενός δευτερολέπτου, από  $t = 1$  ως  $t = 3 \text{ s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ s}$ , η ταχύτητα της μπάλας δίνεται από τη σχέση

$$\vec{v} = (2.0\vec{i} + 2.0\vec{j}) \text{ m/s} \quad (2.495)$$

- (α') Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας τις χρονικές στιγμές  $t = 0, t = 2$  και  $t = 3 \text{ s}$ .
- (β') Ποιά είναι η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο θάλαμο;
- (γ') Ποιά ήταν η αρχική γωνία ρίψης της μπάλας;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.82(β).

(α') Ξέρουμε το διάνυσμα ταχύτητας της μπάλας όταν  $t = 1 \text{ s}$ . Η μπάλα στο ψηλότερό της σημείο βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$ . Εκεί λοιπόν πρέπει  $u_y = 0$ . Η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή στη διάρκεια



Σχήμα 2.82: Σχήμα Άσκησης 2.57.

της κίνησης, έτσι  $u_x = 2 \text{ m/s}$ , για κάθε χρονική στιγμή. Άρα  $\vec{u}_2 = 2\vec{i} \text{ m/s}$ , για  $t = 2 \text{ s}$ . Παρατηρούμε ότι η  $y$ -συνιστώσα της ταχύτητας άλλαξε κατά  $\Delta u_y = -2 \text{ m/s}$  ανάμεσα στις χρονικές στιγμές  $t = 1$  και  $t = 2 \text{ s}$ . Επειδή η επιτάχυνση στον  $y$ -άξονα είναι σταθερή - βαρυτική επιτάχυνση - η  $u_y$  άλλαζε κατά  $-2 \text{ m/s}$  σε οποιοδήποτε διάστημα διάρκειας ενός δευτερολέπτου. Τη χρονική στιγμή  $t = 3 \text{ s}$ , η  $u_y$  είναι  $2 \text{ m/s}$  μικρότερη από τη (μηδενική) τιμή της τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$ . Για  $t = 0$ , η  $u_y$  πρέπει να είναι  $2 \text{ m/s}$  μεγαλύτερη από την τιμή της τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ s}$ . Κατά συνέπεια, έχουμε συνολικά:

$$t = 0 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.496)$$

$$t = 1 : \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.497)$$

$$t = 2 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 0\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.498)$$

$$t = 3 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s} \quad (2.499)$$

(β') Επειδή η  $u_y$  άλλαζε με ρυθμό  $-2 \text{ m/s}$  ανά δευτερόλεπτο, η  $y$ -συνιστώσα της επιτάχυνσης πρέπει να είναι  $a_y = -2 \text{ m/s}^2$ . Όμως η  $a_y$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο θάλαμο, άρα η βαρυτική επιτάχυνση του θαλάμου είναι  $g = -2 \text{ m/s}^2$ .

(γ') Από το πρώτο υποερώτημα, οι συνιστώσες τη χρονική στιγμή  $t = 0$  μας δίνουν

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_{0y}}{u_{0x}} = \tan^{-1} 2 \approx 63^\circ \quad (2.500)$$

### Παράδειγμα 2.58:

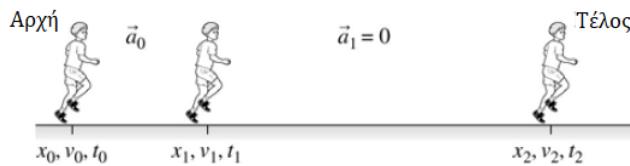
Στους πρόσφατους Ολυμπιακούς Αγώνες, μετρήθηκε η ταχύτητα των sprinters των 100 μέτρων. Ένα απλό μοντέλο ταχύτητας δηλώνει ότι ο sprinter επιταχύνει με  $3.6 \text{ m/s}^2$  για  $10/3 \text{ s}$ , και μετά τρέχει με σταθερή ταχύτητα ως τη γραμμή του τερματισμού.

(α') Δείξτε ότι ο χρόνος ενός sprinter των 100 μέτρων που ακολουθεί το παραπάνω μοντέλο είναι 10 s.

(β') Ένας sprinter μπορεί να τρέξει τα 100 μέτρα πιο γρήγορα, αν επιταχύνει περισσότερο στην αρχή ώστε να φτάσει στη μέγιστη ταχύτητά του πιο σύντομα. Δείξτε ότι αν η μέγιστη ταχύτητα ενός sprinter είναι η ίδια που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, η επιτάχυνση που χρειάζεται για να τρέξει τα 100 μέτρα σε 9.9 δευτερόλεπτα ισούται με  $a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2$ .

(γ') Δείξτε ότι το ποσοστό που πρέπει ο sprinter να αυξήσει την επιτάχυνσή του ώστε να μειώσει το χρόνο του κατά 1% είναι 5.6%.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.83 και τις μεταβλητές του.



Σχήμα 2.83: Σχήμα Άσκησης 2.58.

(α') Από τη σχέση σταθερής ταχύτητας για την απόσταση  $x_1 \rightarrow x_2$  έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{100 - x_1}{u_1} + \frac{10}{3} \quad (2.501)$$

Ας βρούμε τώρα τις ταχύτητες και ύψεσεις, ως εξής:

$$u_1 = u_0 + a_0(t_1 - t_0) = 0 + 3.6 \frac{10}{3} = 12 \text{ m/s} \quad (2.502)$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.6\left(\frac{10}{3}\right)^2 = 20 \text{ m} \quad (2.503)$$

Έτσι, έχουμε

$$t_2 = \frac{100 - 20}{12} + \frac{10}{3} = 10 \text{ s} \quad (2.504)$$

(β') Η μέγιστη ταχύτητα των 12 m/s σημαίνει  $u_1 = 12 \text{ m/s}$ . Για να βρούμε την επιτάχυνση, έχουμε

$$u_1 = u_0 + a_0(t_2 - t_1) \Rightarrow 12 = 0 + a_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{a_0} \quad (2.505)$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 \quad (2.506)$$

Αφού

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t_2 - t_1)^2 \quad (2.507)$$

έχουμε

$$100 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + 12(9.9 - t_1) \quad (2.508)$$

Άρα

$$100 = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{12}{a_0}\right)^2 + 12\left(9.9 - \frac{12}{a_0}\right) \Rightarrow a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2 \quad (2.509)$$

(γ') Από τα παραπάνω ερωτήματα βλέπουμε ότι η επιτάχυνση πρέπει να αυξηθεί από 3.6 σε 3.8 m/s<sup>2</sup> ώστε ο χρόνος του αθλητή να μειωθεί από 10 σε 9.9 s. Αυτή η μείωση είναι της τάξης του 1%. Η μείωση του χρόνου κατά 1% αντιστοιχεί σε αύξηση της επιτάχυνσης κατά

$$\frac{3.8 - 3.6}{3.6} \times 100\% = 5.6\% \quad (2.510)$$

**Παράδειγμα 2.59:**

Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την ταχύτητα του sprinter της προηγούμενης άσκησης δίνεται ως

$$u_x = a(1 - e^{-bt}) \quad (2.511)$$

με  $t$  σε δευτερόλεπτα,  $u_x$  σε m/s, και οι σταθερές  $a, b$  αποτελούν χαρακτηριστικά του κάθισ sprinter. Ο γνωστός sprinter Carl Lewis που κέρδισε το Παγκόσμιο Πρωτάθλημα του 1987, μοντελοποιείται με τιμές  $a = 11.81$  m/s και  $b = 0.6887$  s<sup>-1</sup>.

(α') Δείξτε ότι η επιτάχυνση του Lewis τις χρονικές στιγμές  $t = 0, t = 2$  και  $t = 4$  s ήταν  $8.134, 2.052, 0.5175$  m/s<sup>2</sup>.

(β') Βρείτε μια έκφραση για τη θέση του sprinter συναρτήσει του χρονού  $t$ , ολοκληρώνοντας ως προς  $t$  τη συνάρτηση ταχύτητας - χρόνου.

(γ') Αν τα κάνατε όλα σωστά, η έκφραση που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα δεν μπορεί να λυθεί ως προς  $t$ . Όμως κάνοντας μερικές δοκιμές, μπορείτε να βρείτε το χρόνο που χρειάστηκε για να τρέξει τα 100 μέτρα. Βρείτε το χρόνο αυτό<sup>α'</sup>.

<sup>α'</sup>Ο επίσημος χρόνος ήταν 0.01 δευτερόλεπτα μεγαλύτερος απ' αυτόν που θα βρείτε, πράγμα που δείχνει ότι το μοντέλο είναι καλό αλλά όχι τέλειο.

Λύση:

(α') Η επιτάχυνση είναι η χρονική παράγωγος της ταχύτητας, δηλ.

$$a_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{d}{dx}(a(1 - e^{-bt})) = abe^{-bt} \quad (2.512)$$

Με τις δοθείσες τιμές, έχουμε  $a_x = 8.314e^{-0.6887t}$  m/s<sup>2</sup>. Τις χρονικές στιγμές  $t = 0, 2, 4$  s, η τιμή της επιτάχυνσης είναι  $8.134, 2.052, 0.5175$  m/s<sup>2</sup>.

(β') Αφού  $u_x = a - ae^{-bt}$ , έχουμε

$$x(t) = \int_0^t (a - ae^{-bu}) du \quad (2.513)$$

$$= at + \frac{a}{b} e^{-bt} - \frac{a}{b} \quad (2.514)$$

$$= \frac{a}{b} (bt + e^{-bt} - 1) \quad (2.515)$$

$$= 17.15(0.6887t + e^{-0.6887t} - 1) \text{ m} \quad (2.516)$$

(γ') Με δοκιμές, για  $t = 9.92$  s, έχουμε  $x = 100.0$  m.

**Παράδειγμα 2.60:**

Ένα πούμα μπορεί να πηδήξει σε ύψος 4 μέτρων όταν φεύγει απ' το έδαφος με γωνία 45 μοιρών. Με τι ταχύτητα φεύγει από το έδαφος, ώστε να κάνει αυτό το άλμα;

Λύση: Στο μέγιστο ύψος, έχουμε  $u_y = 0$ , και ο χρόνος για να φτάσει το πούμα αυτό το ύψος δίνεται από

$$u_{yf} = u_{yi} + a_y t \implies t = \frac{u_{yi}}{g} \quad (2.517)$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση που έχει συμβεί σε αυτό το διάστημα είναι

$$\Delta y_{max} = u_{y,avg} t = \frac{u_{yi}^2}{2g} \quad (2.518)$$

Άρα αν  $\Delta y_{max} = 4$  m, τότε  $u_{yi} = \sqrt{2g\Delta y_{max}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 4} = 8.85$  m/s, οπότε αν η γωνία είναι  $\theta = 45^\circ$ , η αρχική ταχύτητα είναι

$$u_i = \frac{u_{yi}}{\sin \theta} = 12.5 \text{ m/s} \quad (2.519)$$

### Παράδειγμα 2.61:

Σε ένα μπαρ, ένας πελάτης γλιστράει το άδειο ποτήρι μπύρας του στον πάγκο, ο οποίος έχει ύψος  $h$  m.

Πριν προλάβει να το πάσει ο μπάρμαν, πέφτει και σκάει στο πάτωμα σε απόσταση  $d$  m από τον πάγκο.

(α') Με τι ταχύτητα φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο;

(β') Ποιά είναι η κατεύθυνση της ταχύτητάς του όταν φτάνει στο έδαφος;

Λύση: Αν θεωρήσουμε ως σημείο εκκίνησης μελέτης του προβλήματος ( $t_i = 0, x_i = y_i = 0$ ) το σημείο όπου το ποτήρι “αφήνει” τον πάγκο, οι συντεταγμένες του ποτηριού για κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \implies x_f = u_{xit} \quad (2.520)$$

αφού  $x_i = 0$  και  $a_x = 0$ , και

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \implies y_f = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2.521)$$

αφού  $y_i = 0$  και  $u_{yi} = 0$ .

(α') Όταν το ποτήρι φτάνει στο πάτωμα,  $y_f = -h$  και  $x_f = d$ , έτσι

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.522)$$

είναι ο χρόνος της σύγκρουσης, ενώ

$$x_f = u_{xit} \implies u_{xi} = \frac{d}{t} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (2.523)$$

είναι η ταχύτητα που φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο.

(β') Ακριβώς πριν τη σύγκρουση, η  $x$ -συνιστώσα της ταχύτητα είναι ίση με  $u_{xf} = u_{xi}$  ενώ η  $y$ -συνιστώσα της είναι

$$u_{yf} = u_{yi} + at \implies u_{yf} = -\sqrt{2gh} \quad (2.524)$$

Έπειτα, η κατεύθυνση της κίνησης πριν ακριβώς τη σύγκρουση είναι υπό γωνία

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_{yf}}{u_{xf}} = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{2gh}}{d\sqrt{\frac{g}{2h}}} = \tan^{-1} \frac{-2h}{d} = -\tan^{-1} \frac{2h}{d} \quad (2.525)$$

κάτω από το οριζόντιο άξονα.

### Παράδειγμα 2.62:

Γνωρίζετε ότι πολύ πολύ μικρά σωματίδια ή οργανισμοί, όπως οι ιοί, είναι αόρατοι στο ανθρώπινο μάτι, ακόμα και με τη χρήση ενός κοινού μικροσκοπίου. Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο μπορεί να καταστήσει ορατούς τέτοιους οργανισμούς, χρησιμοποιώντας ακτίνες ηλεκτρονίων αντί για ακτίνες φωτός. Οι “φακοί” ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου αποτελούνται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που ελέγχουν

την ακτίνα ηλεκτρονίων. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας εφαρμογής, θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο που ταξιδεύει προς την αρχή ενός συστήματος αναφοράς και με κατεύθυνση επάνω στον  $x$ -άξονα (αλλά σκεφτείτε το ως κίνηση σε επίπεδο  $xy$ ) με αρχική ταχύτητα

$$\vec{v}_i = u_i \vec{i} \quad (2.526)$$

Όταν περνάει από την περιοχή του  $x$ -άξονα που ζεκινάει από το  $x = 0$  (οπότε και θεωρούμε ότι αρχίζουμε να μελετάμε το πρόβλημα) ως το  $x = d$ , το ηλεκτρόνιο υφίσταται επιτάχυνση

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (2.527)$$

όπου  $a_x$  και  $a_y$  είναι σταθερές. Θεωρώντας

$$u_i = 1.8 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (2.528)$$

$$a_x = 8 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \quad (2.529)$$

$$a_y = 1.6 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.530)$$

για τη θέση  $x = d = 0.01$  m, βρείτε τα παραχάτω:

- (α') Τη θέση στο  $xy$  επίπεδο του ηλεκτρονίου
- (β') Την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε μορφή διανύσματος
- (γ') Το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου
- (δ') Την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του ηλεκτρονίου (δηλ. τη γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα  $x$ ).

Λύση:

(α') Για τη  $x$ -συνιστώσα της κίνησης, έχουμε

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.531)$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$0.01 = 0 + 1.8 \times 10^7 t + \frac{1}{2}8 \times 10^{14} t^2 \quad (2.532)$$

$$t = \frac{-1.8 \times 10^7 \pm 1.844 \times 10^7}{8 \times 10^{14}} \text{ s} \quad (2.533)$$

Επιλέγοντας το θετικό χρόνο, έχουμε

$$t = 5.5 \times 10^{-10} \text{ s} \quad (2.534)$$

Για την  $y$ -συνιστώσα της κίνησης, έχουμε

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.535)$$

και άρα

$$y_f = 0 + 0 + \frac{1}{2}1.6 \times 10^{15} \times (5.5 \times 10^{-10})^2 \text{ m} \quad (2.536)$$

$$= 2.42 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (2.537)$$

Άρα τελικά η θέση του ηλεκτρονίου στο  $xy$  επίπεδο δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_f = (10\vec{i} + 0.242\vec{j}) \text{ mm} \quad (2.538)$$

(β') Θα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t \quad (2.539)$$

$$= 1.8 \times 10^7 \vec{i} + (8 \times 10^{14} \vec{i} + 1.6 \times 10^{15} \vec{j}) (5.5 \times 10^{-10}) \quad (2.540)$$

$$= 1.84 \times 10^7 \vec{i} + 8.8 \times 10^5 \vec{j} \quad (2.541)$$

(γ') Θα είναι

$$|u_f| = \sqrt{(1.84 \times 10^7)^2 + (8.8 \times 10^5)^2} = 1.84 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (2.542)$$

(δ') Θα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_y}{u_x} = 2.73^\circ \quad (2.543)$$

### Παράδειγμα 2.63:

Ένα σωματίδιο κινείται στον  $x$ -άξονα. Η θέση του δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 5 + 3t - 6t^2 \quad (2.544)$$

όπου  $t$  είναι σε δευτερόλεπτα (s) και  $x(t)$  σε μέτρα (m).

(α') Τι είδους κίνηση εκτελεί; Δικαιολογήστε. Αναγνωρίστε τις παραμέτρους της κίνησης.

(β') Βρείτε τη θέση του όταν αλλάζει κατεύθυνση.

(γ') Βρείτε την ταχύτητά του όταν επιστρέψει στη θέση που είχε όταν  $t = 0$ .

Λύση:

(α') Γνωρίζοντας τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.545)$$

και ότι αντιστοιχεί σε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, αναγνωρίζουμε ότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση.

(β') Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$u = 3 - 12t \quad (2.546)$$

η οποία προκύπτει παραγωγίζοντας τη συνάρτηση θέσης παραπάνω. Αλλαγή κατεύθυνσης συμβαίνει όταν  $u = 0$ , το οποίο συμβαίνει όταν  $t = 1/4$  s. Άρα η θέση του τη δεδομένη χρονική στιγμή θα είναι

$$x_f = 5 + 3t - 6t^2 \Big|_{t=1/4} = 5.375 \text{ m} \quad (2.547)$$

(γ') Από τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.548)$$

παρατηρούμε ότι όταν  $x_f = x_i$ , τότε  $t = -\frac{2u_i}{a}$ . Άρα, όταν επιστρέψει στην αρχική του θέση, ο χρόνος είναι

$$t = -\frac{2 \times 3}{-12} = \frac{1}{2} \text{ s} \quad (2.549)$$

και η ταχύτητά του τότε είναι

$$u = 3 - 12 \frac{1}{2} = -3 \text{ m/s} \quad (2.550)$$

**Παράδειγμα 2.64:**

- (α') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε για φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος 50 μέτρων από το έδαφος;
- (β') Πόσο χρόνο θα βρίσκεται στον αέρα μέχρι να επιστρέψει στο χέρι μας;
- (γ') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε ένα ψυγείο (!) κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος 50 μέτρων από το έδαφος; Πόσο διαφέρει η απάντησή σας σε σχέση με το (α) ερώτημα;

**Λύση:**

- (α') Έχουμε κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω, με  $u_f = 0$  στο μέγιστο ύψος των  $y_f = 50$  μέτρων και  $u_i, y_i = 0$  στη θέση εκτόξευσης. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση  $a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$ . Οπότε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_y\Delta y \iff u_i^2 = u_f^2 - 2g(y_f - y_i) = 0 + 50 \cdot 19.6 = 980 \implies u_i = \pm 31.305 \text{ m/s} \quad (2.551)$$

Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο, καθώς η μπάλα κινείται προς τα πάνω (όμοια με τη θετική φορά της κίνησης).

- (β') Έστω αρχικό σημείο η θέση εκτόξευσης και τελικό σημείο ξανά το ίδιο, κατά την επιστροφή της μπάλας. Η ταχύτητα θα είναι ίδια κατά μέτρο στην αρχική και στην τελική θέση αλλά με αντίθετο πρόσημο (λόγω της φοράς του διανύσματος της ταχύτητας). Ο χρόνος δίνεται από τη σχέση

$$u_f = u_i - gt \iff -31.305 = 31.305 - 9.8t \implies t = 6.387 \text{ s} \quad (2.552)$$

**Παράδειγμα 2.65:**

Ένας ικανός μπασκετμπολίστας του NBA μπορεί να πηδήξει κατακόρυφα προς τα πάνω απόσταση 0.76 m καθώς αρπάζει την μπάλα μετά από ένα άστοχο σουτ. Πόσο συνολικό (στην άνοδο και κάθοδο του σώματος του) χρόνο περνά

- (α') στα άνω 0.15 m του άλματός του  
 (β') στα κάτω 0.15 m του άλματός του

Οι απαντήσεις σας εξηγούν το λόγο που κάποιοι αθλητές φαίνεται να "στέκονται στον αέρα" όταν πηδούν;

Ο Michael Jordan υρυλείται ότι είχε επιτόπιο άλμα 1.168 m. Βρείτε τους αντίστοιχους χρόνους του.

**Λύση:** Δείτε το Σχήμα 2.84. Θα μελετήσουμε την άνοδο του παίκτη μόνο, και θα διπλασιάσουμε απλά το χρόνο στο αποτέλεσμά μας, αφού η κίνηση της ανόδου και της καθόδου είναι ίδιες. Επιλέγουμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση  $a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$ .

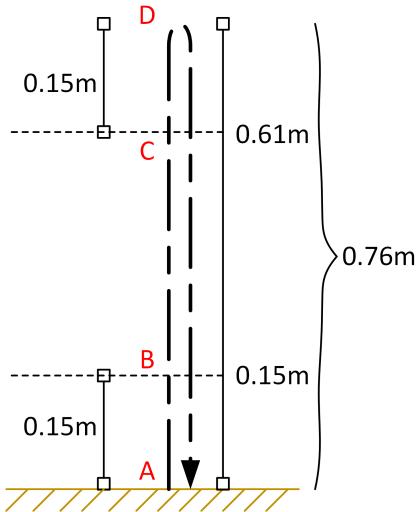
- (α') Θεωρούμε τη διαδρομή από το σημείο  $C$  ( $t_C = 0$ ) στο σημείο  $D$  της ανόδου του παίκτη. Θα είναι

$$u_D = u_C - gt \iff 0 = u_C - 9.8t \implies u_C = 9.8t \quad (2.553)$$

και

$$y_D = y_C + u_C t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 0.76 = 0.61 + 9.8t^2 - 4.9t^2 \iff 0.15 = 4.9t^2 \implies t = 0.175 \text{ s} \quad (2.554)$$

Άρα ο χρόνος που περνά στα άνω 0.15 m του άλματος είναι  $t = 2 \cdot 0.175 = 0.35 = 350 \text{ ms}$ .



Σχήμα 2.84: Σχήμα Άσκησης 2.65.

(β') Θεωρούμε τη διαδρομή από το σημείο  $B$  στο σημείο  $D$ . Θα είναι

$$u_D^2 = u_B^2 - 2g\Delta y \iff 0 = u_B^2 - 19.6 \cdot (0.76 - 0.15) \iff u_B^2 = 11.956 \implies u_B = 3.457 \text{ m/s} \quad (2.555)$$

επιλέγοντας το θετικό πρόσημο της λύσης γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας έχει φορά προς τη θετική φορά της κίνησης (προς τα πάνω). Επίσης, στη διαδρομή από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ , έχουμε

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \iff 11.956 = u_A^2 - 19.6 \cdot 0.15 \iff u_A^2 = 14.896 \implies u_A = 3.859 \text{ m/s} \quad (2.556)$$

Οπότε, στην ίδια διαδρομή

$$u_B = u_A - gt \implies t = \frac{u_A - u_B}{g} = \frac{3.859 - 3.457}{9.81} = 0.041 = 41 \text{ ms} \quad (2.557)$$

και άρα ο χρόνος που περνά στα κάτω 0.15 m του άλματός του είναι  $t = 2 \cdot 41 = 82 \text{ ms}$ .

Οι απαντήσεις πράγματι εξηγούν τη “στάση” στον αέρα των αθλητών, αφού δείξαμε ότι στο άνω μέρος του άλματός τους περνούν περισσότερο χρόνο από τι στο κάτω. Ο Michael Jordan έχει χρόνους  $t_{up} = 350 \text{ ms}$  και  $t_{down} = 64 \text{ ms}$ , αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για  $y_D = 1.168 \text{ m}$ .

### Παράδειγμα 2.66:

Στη διάρκεια ενός σερβίς με άλμα, μια βολεϊμπολίστρια χτυπά την μπάλα πάνω από το φιλέ ώστε να φτάσει στο έδαφος της αντίπαλης ομάδας. Ο έλεγχος της γωνίας που η παίκτρια χτυπά την μπάλα είναι πολύ δύσκολος. Θεωρήστε ότι η παίκτρια χτυπά μια μπάλα από ύψος 2.3 m με αρχική ταχύτητα μέτρου 20 m/s και υπό γωνία  $-18^\circ$ . Πόσο μακριά από την παίκτρια θα χτυπήσει η μπάλα στο έδαφος; Αν η γωνία χτυπήματος γίνει  $-8^\circ$ , η μπάλα θα φτάσει μακρύτερα ή πιο κοντά σε σχέση με την προηγούμενη γωνία;

Λύση: Θεωρούμε αρχή των αξόνων μας τη θέση όπου η μπάλα φεύγει από το χέρι της παίκτριας. Έστω  $O$  το σημείο αυτό, και  $A$  το σημείο που η μπάλα σκάει στο έδαφος μετά το κτύπημα. Γνωρίζουμε την πολική μορφή της αρχικής ταχύτητας  $\vec{u}_0$ , οπότε μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες της. Θα είναι

$$u_{O_x} = u_0 \cos(-18^\circ) = 19.021 \text{ m/s} \quad (2.558)$$

και

$$u_{O_y} = u_O \sin(-18^\circ) = -6.180 \text{ m/s} \quad (2.559)$$

Η κίνηση της μπάλας είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα  $u_{O_x}$  στον άξονα  $x'x$  και ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση  $a_y = -g$  στον άξονα  $y'y$ . Οπότε στον άξονα  $x'x$  θα έχουμε

$$x_A = x_O + u_{O_x} t \iff x_A = 0 + 19.021t = 19.021t \quad (2.560)$$

Πρέπει να βρούμε το χρόνο “πτήσης” της μπάλας. Στον άξονα  $y'y$  θα έχουμε

$$y_A = y_O + u_{O_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \iff -2.3 = 0 - 6.18t - 4.9t^2 \quad (2.561)$$

Λύνοντας, παίρνουμε  $t = 0.30$  s. Άρα

$$x_A = 19.021t \Big|_{t=0.3} = 5.715 \text{ m} \quad (2.562)$$

Για γωνία  $-8^\circ$ , επαναλαμβάνοντας παίρνουμε

$$x_A = 19.805t, t = 0.4576 \quad (2.563)$$

οπότε  $x_A = 9.062$  m. Η μπάλα θα φτάσει πιο μακριά, όπως επιβεβαιώνεται και από τη διαίσθησή μας.

### Παράδειγμα 2.67:

Μια αρχιτέκτονας σχεδιάζει ένα τεχνητό καταρράκτη για ένα πάρκο της πόλης. Το νερό φεύγει με ταχύτητα  $u_{xi} = 1.7$  m/s από ένα οριζόντιο κανάλι στο τέλος ενός τοίχου με ύψος  $h = 2.35$  m και πέφτει σε μια πισίνα.

- (α') Υπάρχει αρκετός χώρος για να φτιαχτεί πεζοδρόμιο πίσω από τον καταρράκτη μεταξύ τοίχου και πισίνας; Θεωρήστε ως μέσο πλάτος πεζοδρομίου τα 0.8 m.
- (β') Πριν την κατασκευή του έργου, η αρχιτέκτονας θέλει να φτιάξει ένα μοντέλο που έχει μέγεθος το 1/12 του πραγματικού. Πόσο γρήγορα πρέπει να ρέει το νερό στο οριζόντιο κανάλι του μοντέλου;

#### Λύση:

- (α') Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων στην επιφάνεια του νερού της πισίνας. Η σταγόνα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Όταν φτάνει στην έξοδο του καναλιού πέφτει με οριζόντια ταχύτητα  $\omega$  σπου φτάνει στην πισίνα. Η κίνηση μιας σταγόνας μπορεί να αναλυθεί σε δύο άξονες. Στον άξονα  $y'y$ , ο “χρόνος πτήσης” μιας σταγόνας νερού του καταρράκτη από την έξοδο του καναλιού ως το σημείο που ακουμπά την πισίνα είναι

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \implies 0 = y_i - \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2y_i}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.693 \text{ s} \quad (2.564)$$

Στον άξονα  $x'x$ , η σταγόνα εκετελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Έτσι το οριζόντιο εύρος του καταρράκτη είναι

$$x_f = x_i + u_{xi}t = 1.18 \text{ m} \quad (2.565)$$

Άρα υπάρχει χώρος για τους πεζούς.

- (β') Όλες οι αποστάσεις είναι το 1/12 των πραγματικών. Άρα τώρα για να βρούμε το χρόνο πτήσης, θα έχουμε ξανά τις ίδιες εξισώσεις. Οπότε

$$y_{f_{model}} = y_{i_{model}} + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \implies 0 = y_{i_{model}} - \frac{1}{2}gt_{model}^2 = \frac{y_i}{12} - \frac{1}{2}gt_{model}^2 \implies t_{model} = \sqrt{\frac{y_i}{6g}} \quad (2.566)$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$t_{model} = \sqrt{\frac{2y_i}{12g}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{2y_i}{g}} = \frac{t}{\sqrt{12}} \quad (2.567)$$

με  $t$  το χρόνο του πραγματικού καταρράκτη. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, έχουμε

$$u_{model} = \frac{x_{model}}{t_{model}} = \frac{\frac{x_i}{12}}{\frac{t}{\sqrt{12}}} = \frac{u_i}{\sqrt{12}} = 0.488 \text{ m/s} \quad (2.568)$$

### Παράδειγμα 2.68:

Ένα αγόρι στέκεται στην εξέδρα της πισίνας και πετάει μια πέτρα, με ταχύτητα 4 m/s και γωνία  $60^\circ$ . Το ύψος της εξέδρας από την επιφάνεια του νερού είναι 2.5 m. Αμέσως αφού η πέτρα χτυπήσει την επιφάνεια του νερού, κόβει ταχύτητα στο μισό και συνεχίζει προς την ίδια κατεύθυνση μέσα στο νερό, διατηρώντας σταθερή αυτή την ταχύτητα. Αν το βάθος της πισίνας είναι 3 m, πόσο χρόνο έκανε η πέτρα να φτάσει στον πάτο της πισίνας, από τη στιγμή που ρίψηκε;

Λύση: Η κίνηση της πέτρας αναλύεται σε δυο άξονες, έναν οριζόντιο με σταθερή ταχύτητα και έναν κατακόρυφο με επιτάχυνση (της βαρύτητας). Η αρχική  $y$ -συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας είναι

$$u_{yi} = u_i \sin \theta = 3.46 \text{ m/s} \quad (2.569)$$

και η  $y$ -συνιστώσα της κατακόρυφης κίνησης της πέτρας από το σημείο ρίψης ως το σημείο που ακουμπά το νερό είναι

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = h + u_i \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.570)$$

που μας δίνει

$$y_f = 2.5 + 3.46t - 4.9t^2 \quad (2.571)$$

Θεωρώντας ότι η επιφάνεια του νερού είναι στη θέση  $y_f = 0$ , τότε στο νερό

$$4.9t^2 - 3.46t - 2.5 = 0 \quad (2.572)$$

και κρατώντας τη θετική ρίζα, έχουμε  $t = 1.15$  s. Η  $y$ -συνιστώσα της ταχύτητας της πέτρας όταν φτάνει στο νερό στον παραπάνω χρόνο  $t$  είναι

$$u_{yf} = u_{yi} + a_y t = 3.46 - 9.8 \cdot 1.15 = -7.81 \text{ m/s} \quad (2.573)$$

Όταν η πέτρα μπει στο νερό, η ταχύτητά της (και άρα οι συνιστώσες της) μειώνονται στο μισό. Άρα ακριβώς τη στιγμή της εισόδου στο νερό θα είναι

$$u_{yi} = -3.91 \text{ m/s} \quad (2.574)$$

Όσο η πέτρα κινείται στο νερό, η  $y$ -συνιστώσα της είναι αυτή της κίνησης υπό σταθερή ταχύτητα, δηλ.

$$y_f = y_i + u_{yi}t = 0 - 3.91t = -3.91t \quad (2.575)$$

Αφού ο πάτος της πισίνας είναι στα  $y_f = -3$  m, έχουμε

$$y_f = -3.91t = -3 \implies t = 0.77 \text{ s} \quad (2.576)$$

Άρα τελικά ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται η πέτρα για να φτάσει στον πάτο είναι

$$t_{total} = 1.15 + 0.77 = 1.92 \text{ s} \quad (2.577)$$

**Παράδειγμα 2.69:**

Το παγκόσμιο ρεκόρ στη ρίψη ακοντίου είναι 98.48 m, από τον Τσέχο Jan Zelezny, και χρονολογείται από το 1996 (ο πάλαι ποτέ δικός μας πρωταθλητής, Κώστας Γκατσιούδης κατέχει την 6η θέση όλων των εποχών, με ρίψη στα 91.69 m). Θεωρώντας ότι η αρχική γωνία ρίψης είναι 45 μοίρες, και αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, βρείτε

(α') την αρχική ταχύτητα του ακοντίου.

(β') το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το ακόντιο βρισκόταν στον αέρα.

Θα άλλαξαν οι παραπάνω απαντήσεις σας αν η αρχική γωνία ρίψης ήταν μεγαλύτερη από 45 μοίρες, αλλά το εύρος ρίψης παρέμενε στα 98.48 m; Εξηγήστε.

Λύση:

(α') Μπορούμε αμέσως να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του εύρους βολής  $R$  και να λύσουμε ως προς  $u_i$ , δηλ.

$$u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}} \approx 31 \text{ m/s} \quad (2.578)$$

(β') Με  $u_i = 31 \text{ m/s}$  και  $\theta_i = 45^\circ$ , ο συνολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου είναι

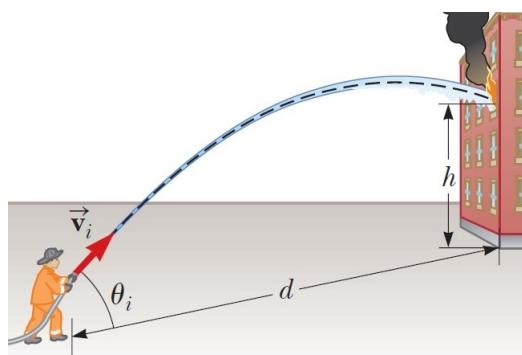
$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 0 = 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g} = 4.47 \text{ s} \quad (2.579)$$

Από τη σχέση  $u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}}$  καταλαβαίνουμε ότι αν η γωνία ρίψης ήταν μεγαλύτερη από 45 μοίρες, η απαντώμενη αρχική ταχύτητα θα αυξανόταν δεδομένου ότι το εύρος θα παρέμενε ίδιο. Επίσης, από τη σχέση  $t = \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g}$ , ο ολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου θα αυξανόταν επίσης.

**Παράδειγμα 2.70:**

Ένας πυροσβέστης βρίσκεται σε απόσταση  $d$  από ένα κτήριο που φλέγεται, όπως στο Σχήμα 2.85. Προσπαθεί να ρίξει νερό με τη μάνικα υπό γωνία  $\theta_i$  με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας του νερού όταν εκτοξεύεται από τη μάνικα είναι  $\vec{v}_i$ . Δείξτε ότι το ύψος  $h$  στο οποίο το νερό χτυπάει το κτήριο είναι

$$h = d \tan(\theta_i) - \frac{gd^2}{2u_i^2 \cos^2(\theta_i)} \quad (2.580)$$



Σχήμα 2.85: Πυρόσβεση.

**Λύση:** Αναλύουμε την κίνηση του νερού σε συνιστώσες. Η οριζόντια συνιστώσα της θέσης στη διαδρομή από τη μάνικα ως το κτήριο είναι

$$x_f = u_{x_i} t = u_i \cos(\theta_i) t \quad (2.581)$$

Άρα, ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το νερό στο κτήριο που απέχει οριζόντια απόσταση  $d$ , είναι

$$t = \frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \quad (2.582)$$

Σε αυτή τη χρονική στιγμή, το ύψος του νερού (που χτυπά το κτήριο) είναι

$$y_f = u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = u_i \sin(\theta_i) \left( \frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \right) - \frac{g}{2} \left( \frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \right)^2 \quad (2.583)$$

οπότε το ύψος  $h$  του κτηρίου δίνεται ως

$$h = y_f = d \tan(\theta_i) - \frac{gd^2}{2u_i^2 \cos^2(\theta_i)} \quad (2.584)$$

### Παράδειγμα 2.71:

Όταν η NASA εκπαίδευε τους αστροναύτες της και ελέγχει τον εξοπλισμό της σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας, τότε εκτελεί το παρακάτω πείραμα. Ένα αεροπλάνο KC135A πετά σε παραβολική τροχιά, όπως στο Σχήμα 2.86. Το αεροπλάνο ανεβαίνει από τα 7.3 km στα 9.4 km, εκτελώντας παραβολική τροχιά με ταχύτητα μέτρου 143 m/s στην άνοδο, και ταχύτητα ίδιου μέτρου στην κάθοδο. Όταν φτάνει στα 9.4 km, και κατά τη διάρκεια μιας μικρής πορείας, τα αντικείμενα εντός του σκάφους βρίσκονται σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας, και “επιπλέουν” ελεύθερα εντός του σκάφους. Βρείτε

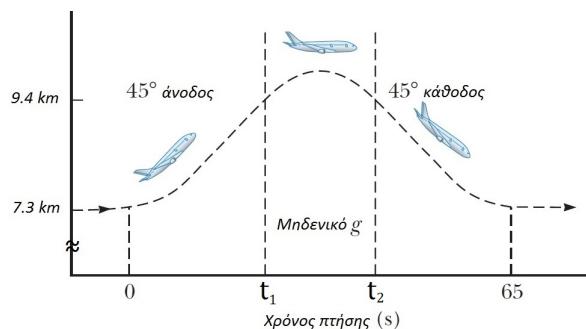
(α') την ταχύτητα και το υψόμετρο του αεροσκάφους στην χορυφή της τροχιάς.

(β') πόσο χρονικό διάστημα βρίσκονται σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας. Θεωρήστε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό τις χρονικές στιγμές  $t_1, t_2$ , και θεωρήστε ότι το αεροπλάνο εκτελεί βολή σε αυτό το διάστημα.

Για όσους ενδιαφέρονται, δείτε περισσότερα σχετικά στα

[https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced\\_gravity\\_aircraft](https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_gravity_aircraft) και

<http://www.nasa.gov/vision/space/preparingtravel/kc135onfinal.html>.



Σχήμα 2.86: Εκπαίδευση σε μηδενική βαρύτητα.

**Λύση:**

(α') Το αεροσκάφος εκτελεί κίνηση στο  $xy$  επίπεδο, η οποία αναλύεται σε συνιστώσες: στην οριζόντια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, και στην κατακόρυφη ομαλή κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Η αρχική ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

$$u_{x_i} = u_i \cos(\theta_i) = 143 \cdot \cos(45^\circ) = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.585)$$

$$u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i) = 143 \cdot \sin(45^\circ) = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.586)$$

Η  $x$ -συνιστώσα της ταχύτητας στην κορυφή της τροχιάς είναι

$$u_x = u_{x_i} = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.587)$$

εφόσον η  $y$ -συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική εκεί. Αν δούμε την κίνηση από την έναρξη της ανόδου ως το μέγιστο ύψος, τότε το ύψος που φτάνει είναι

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 + 2a_y(y_f - y_i) \quad (2.588)$$

$$0 = (101.116)^2 + 2(-9.8)(y_f - 9400) \quad (2.589)$$

$$y_f = 9921.65 \text{ m} \quad (2.590)$$

(β') Στο χρονικό διάστημα  $[t_1, t_2]$  το αεροσκάφος εκτελεί βολή. Για όλη τη διάρκεια της, είναι

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t = u_{y_i} - gt \quad (2.591)$$

και άρα

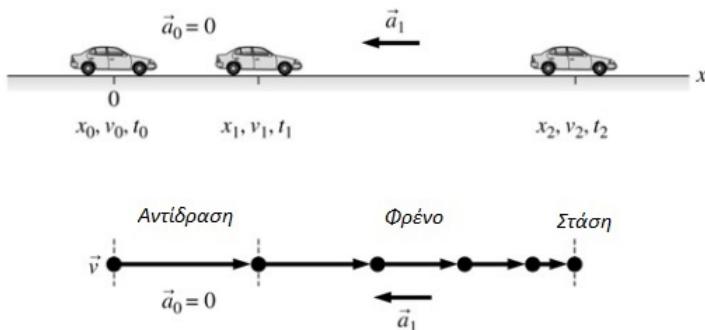
$$-101.116 = 101.116 - 9.8t \implies t = 20.635 \text{ s} \quad (2.592)$$

### Παράδειγμα 2.72:

Ο Ethan Hunt<sup>α'</sup> οδηγεί το υπερσύγχρονο αυτοκίνητό του μετά από την κλοπή μιας πυρηνικής τεχνολογίας. Τρέχει με ταχύτητα 50 m/s όταν τα φώτα πορείας του αποκαλύπτουν μια λωρίδα με καρφιά που έχει στήσει η αστυνομία μπροστά του σε απόσταση 150 m. Αν ο Ethan καταφέρει και σταματήσει έγκαιρα, μπορεί να βάλει την όπισθεν και να ξεφύγει. Όμως αν περάσει τη λωρίδα καρφιών, τότε όλα του τα ελαστικά θα τρυπήσουν και θα πιαστεί αιχμάλωτος. Ο χρόνος αντίδρασης του Ethan είναι 0.6 s. Αυτό σημαίνει ότι από τη στιγμή που θα δει τη λωρίδα μέχρι να πατήσει τα φρένα του πρέπει να περάσουν 0.6 s. Η μέγιστη επιβράδυνση του αυτοκινήτου του είναι  $10 \text{ m/s}^2$ . Θα τον πιάσουν ή όχι;

<sup>α'</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ethan\\_Hunt](https://en.wikipedia.org/wiki/Ethan_Hunt)

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.87. Το όχημα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με αρνητική επιτάχυνση. Έστω ότι το σημείο αναφοράς μας βρίσκεται στη θέση που ο Ethan βλέπει τα καρφιά στο οδόστρωμα και έστω  $x_2$  η θέση του αυτοκινήτου όταν έχει σταματήσει. Τέλος, ας θεωρήσουμε ως  $\vec{a}_1$  την επιτάχυνσή του κατά το φρενάρισμα. Θα βρούμε το  $x_2$  από την εξίσωση της κινηματικής στη διαδρομή από τη στιγμή που θα πατήσει τα φρένα μέχρι



Σχήμα 2.87: Σχήμα Άσκησης 2.72.

τη στιγμή που θα σταματήσει:

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1(x_2 - x_1) \iff (0)^2 = (50)^2 + 2(-10)(x_2 - x_1) \iff x_2 = x_1 + 125 \text{ m} \quad (2.593)$$

Δεδομένου ότι το όχημα βρίσκεται 150 m από την αρχή ( $x_0 = 0$ ), χρειάζεται να καθορίσουμε τη ώση  $x_1$ , όπου είναι η ώση που μόλις ξεκινά να επιβραδύνεται το όχημα. Άρα στη διαδρομή  $x_0 \rightarrow x_1$  η κίνηση του οχήματος είναι ευθύγραμμη ομαλή με σταθερή ταχύτητα. Άρα

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) = 0 + (50)(0.60 - 0.0) = 30 \text{ m} \quad (2.594)$$

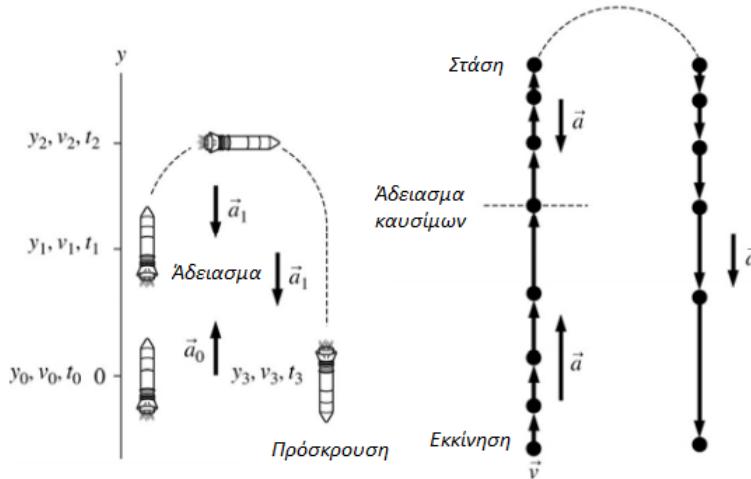
Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε  $x_2 = (30 + 125) = 155 \text{ m}$ , πράγμα που σημαίνει ότι ο Ethan δε ωθαφέρει να σταματησει σε απόσταση 150 m και τελικά ωθαφέρει στην φυλακή!

### Παράδειγμα 2.73:

Ένας μετεωρολογικός πύραυλος μάζας 200 kg φέρει επιπλέον καύσιμα μάζας 100 kg. Κατά την εκτόξευσή του, επιταχύνει προς τα πάνω με επιτάχυνση  $30 \text{ m/s}^2$  για διάστημα 30 δευτερολέπτων, και μετά ξεμένει από καύσιμα. Αγνοήστε τις επιδράσεις του αέρα.

- (α') Ποιό το μέγιστο ύψος που φτάνει ο πύραυλος;
- (β') Πόσο χρόνο μένει ο πύραυλος στον αέρα μέχρι να πέσει στο έδαφος;
- (γ') Κατασκευάστε ένα διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για τον πύραυλο από την απογείωση ως την πρόσκρουση στο έδαφος.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.88.



Σχήμα 2.88: Σχήμα Άσκησης 2.73.

- (α') Αναγνωρίζουμε 3 διαφορετικές φάσεις στην κίνηση. Η δεύτερη και η τρίτη είναι και οι δύο ελεύθερες πτώσεις, με  $a = -g$  και μέγιστο ύψος εκτόξευσης  $y_2$ . Στην επιταχυνόμενη κίνηση:

$$y_1 = y_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}(30)(30) = 13.500 \text{ m} \quad (2.595)$$

$$u_1 = u_0 + a(t_1 - t_0) = at_1 = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m/s} \quad (2.596)$$

Στη σταθεσή φάση,

$$u_2^2 = 0 = u_1^2 - 2g(y_2 - y_1) \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = 13500 + \frac{900^2}{2 \cdot 9.8} = 54800 \text{ m} = 54.8 \text{ km} \quad (2.597)$$

Άρα το μέγιστο υψόμερο είναι 54.8 m.

(β') Ο πύραυλος είναι στον αέρα μέχρι την χρονική στιγμή  $t_3$ . Γνωρίζουμε ήδη ότι  $t_1 = 30$  s, και υπολογίζουμε την  $t_2$ , ως εξής:

$$u_2 = 0 = u_1 - g(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{u_1}{g} = 122 \text{ s} \quad (2.598)$$

Συνεπώς η χρονική στιγμή  $t_3$  υπολογίζεται ως ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει 54.8 km:



Σχήμα 2.89: Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου Ασκησης 2.73.

$$y_3 = 0 = y_2 + u_2(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 = y_2 - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 \Rightarrow t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2y_2}{g}} = 228 \text{ s} \quad (2.599)$$

(γ') Η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά, με σταθερή επιτάγχυνση  $30 \text{ m/s}^2$  για 30 s συνεπώς, η μέγιστη ταχύτητα θα είναι 900 m/s. Μετά ξεκινά να μειώνεται με σταθερή επιβράδυνση  $-9.8 \text{ m/s}^2$ . Η ταχύτητα γίνεται μηδέν όταν  $t_2 = 122$  s. Τελικά, την χρονική στιγμή  $t_3 = 228$  s η ταχύτητα υπολογίζεται να είναι:  $u_3 = u_2 - g(t_3 - t_2) = -1040 \text{ m/s}$ . Δείτε το Σχήμα 2.89.

#### Παράδειγμα 2.74:

Στην αποστολή του Apollo 14<sup>a</sup> στο φεγγάρι, ο αστροναύτης Alan Shepard χτυπά μια μπάλα του γκολφ με ένα μπαστούνι. Η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης στο φεγγάρι είναι το  $1/6$  της τιμής που έχει στη Γη ( $9.8 \text{ m/s}^2$ ). Θεωρήστε ότι χτύπησε την μπάλα με αρχική ταχύτητα 25 m/s και υπό γωνία  $30^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο.

(α') Πόσο μακρύτερα ταξίδεψε η μπάλα στο φεγγάρι απ' ό,τι θα ταξίδευε στη Γη;

(β') Πόσο περισσότερο χρόνο βρισκόταν η μπάλα στον αέρα στο φεγγάρι απ' ό,τι θα ήταν στη Γη;

<sup>a</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Apollo\\_14](https://en.wikipedia.org/wiki/Apollo_14)

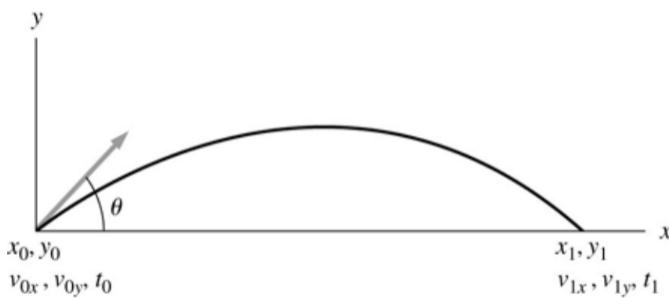
Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.90.

(α') Η απόσταση που ταξίδεψε είναι  $x_1 = u_{0x}t_1 = u_0 \cos(\theta)t_1$ . Ο χρόνος της πτήσης υπολογίζεται από την  $y$ -εξίσωση, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η μπάλα ξεκινά και τελειώνει την κίνησή της στο  $y = 0$ :

$$y_1 - y_0 = 0 = u_0 \sin \theta t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = (u_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt_1)t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2u_0 \sin \theta}{g} \quad (2.600)$$

Έτσι η απόσταση που διένυσε είναι:

$$x_1 = u_0 \cos(\theta) \frac{2u_0 \sin \theta}{g} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \quad (2.601)$$



Σχήμα 2.90: Σχήμα Άσκησης 2.74.

Για  $\theta = 30^\circ$ , η απόσταση όπου είναι:

$$(x_1)_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30 \cdot \cos 30}{9.80} = 55.2 \text{m} \quad (2.602)$$

και

$$(x_1)_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6 \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{earth}} = 6(x_1)_{earth} = 331.2 \text{m} \quad (2.603)$$

Η μπάλα του γκόλφ ταξιδεψε  $331.2 - 55.2 = 276$  m μακρύτερα στο φεγγάρι απότι στη γη.

(β') Οι χρόνοι πτήσεις είναι:

$$(t_1)_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30}{9.80} = 2.55 \text{s} \quad (2.604)$$

και

$$(t_1)_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6 \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{earth}} = 6(t_1)_{earth} = 15.30 \text{s} \quad (2.605)$$

Η μπάλα ταξιδεψε για  $15.30 - 2.55 = 12.75$  s περισσότερο στο φεγγάρι.

### Παράδειγμα 2.75:

Ένας ακοντιστής κρατά το κέντρο του ακοντίου του πίσω από το κεφάλι του, ακριβώς πριν ξεκινήσει τη ρίψη του. Υποθέστε ότι το επιταχύνει για απόσταση 70 cm, καθώς μεταφέρει το κέντρο του από πίσω από το κεφάλι του ως το σημείο που το αφήνει από το χέρι του. Υποθέστε επίσης ότι το ακόντιο εκτοξεύεται από απόσταση 2.0 m από το έδαφος και υπό γωνία 30° μοιρών  $^\circ$ . Έστω ότι το ακόντιο προσγειώνεται 62 m μακριά. Πόση ήταν η (θεωρήστε τη σταθερή) επιτάχυνση του ακοντίου καθόλη τη διάρκεια της ρίψης;

$^\circ$ Οι υψηλού επιπέδου ακοντιστές προσπαθούν να ρίξουν το ακόντιο υπό αυτή τη γωνία και όχι υπό 45° όπως ίσως φαντάζεστε, καθώς η μηχανική του χεριού τους επιτρέπει να ρίξουν το ακόντιο πολύ πιο γρήγορα υπό γωνία 30° από όσο θα μπορούσαν υπό γωνία 45°.

Λύση: Η μετατόπιση είναι  $\Delta x = 62$  m. Η ρίψη του ακοντίου μπορεί να αναλυθεί σε δύο άξονες. Για τον άξονα  $x'$

$$\Delta x = u_{0x} \Delta t = u_0 \cos \theta \Delta t \implies \Delta t = \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \quad (2.606)$$

και για τον  $y'$

$$y_f = y_i + (u_0 \sin \theta) \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 \quad (2.607)$$

και αντικαθιστώντας

$$\Delta y = (u_0 \sin \theta) \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} + \frac{1}{2}(-g) \left( \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (2.608)$$

Λύνοντας ως προς  $u_0$ :

$$\Delta y = (\tan \theta) \Delta x + \frac{1}{2}(-g) \left( \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (2.609)$$

$$\frac{1}{2}(g) \left( \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 = (\tan \theta) \Delta x - \Delta y \quad (2.610)$$

$$u_0^2 = \frac{g}{2} \left( \frac{\Delta x}{\cos \theta} \right)^2 \left( \frac{1}{(\tan \theta) \Delta x - \Delta y} \right) \quad (2.611)$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{2} \left( \frac{\Delta x}{\cos \theta} \right)^2 \left( \frac{1}{(\tan \theta) \Delta x - \Delta y} \right)} \quad (2.612)$$

$$= \sqrt{\frac{9.8}{2} \left( \frac{62}{\cos 30^\circ} \right)^2 \left( \frac{1}{(\tan 30^\circ) 62 - (-2)} \right)} \quad (2.613)$$

$$= 25.78 \text{ m/s} \quad (2.614)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα οταν το ακόντιο φεύγει από το χέρι του ακοντιστή. Αυτή γίνεται  $u_f$  κατά τη διάρκεια της ρίψης, συνεπώς η σταθερή επιτάχυνση  $a$  θα είναι:

$$a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = \frac{25.78^2 - 0^2}{2 \cdot 0.70} = 474 \text{ m/s}^2 \quad (2.615)$$

### Παράδειγμα 2.76:

Ένας κόκκος σκόνης επάνω στο αγαπημένο σας DVD περιστρέφεται με κεντρομόλο επιτάχυνση  $20 \text{ m/s}^2$ .

- (α') Πόση είναι η επιτάχυνση ενός άλλου κόκκου σκόνης που βρίσκεται σε διπλάσια ακτίνα επάνω στο DVD από τον προηγούμενο;
- (β') Πόση θα ήταν η επιτάχυνση του πρώτου κόκκου σκόνης αν η ταχύτητα περιστροφής του δίσκου διπλασιαζόταν;

Λύση:

(α') Η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  δεν αλλάζει σε αυτή τη κίνηση, άρα:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega^2 r_2}{\omega^2 r_1} = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ m/s}^2 \quad (2.616)$$

(β') Έστω  $a_3$  η επιτάχυνση του πρώτου κόκκου σκόνης αν το  $\omega$  διπλασιαστεί ( $\omega_3 = 2\omega_1$ ). Η απόσταση  $r$  από το κέντρο δε θα αλλάξει, άρα:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{\omega_3^2 r}{\omega_1^2 r} = \frac{2\omega_1^2 r}{\omega_1^2 r} = 2^2 = 4 \Rightarrow a_3 = 4a_1 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ m/s}^2 \quad (2.617)$$

Παράδειγμα 2.77:

Ένα σωματίδιο ρίπτεται με αρχική ταχύτητα  $30 \text{ m/s}$  υπό γωνία  $60^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο. Το σωματίδιο χτυπά στο έδαφος μετά από  $7.5 \text{ s}$ .

(α') Πόσο πιο ψηλά ή πιο χαμηλά βρίσκεται το σημείο εκτόξευσης από το σημείο που το σωματίδιο χτύπησε στο έδαφος;

(β') Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωματίδιο, σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.91α'.

(α') Λύνοντας την:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + u_{0y}(t_2 - t_0)^2 \\ y_2 &= 0 + 30 \sin 60^\circ (7.5 - 0) + \frac{1}{2}(-9.8)(7.5 - 0)^2 = -80.8 \text{ m} \end{aligned} \quad (2.618)$$

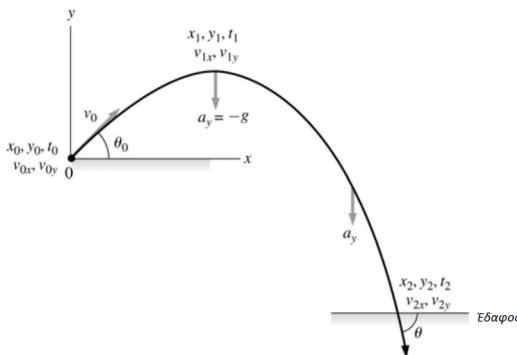
Άρα βρίσκεται περίπου  $81 \text{ m}$  ψηλότερα από το σημείο που το σωματίδιο χτύπησε στο έδαφος.

(β') Επιπλέον,  $u_{1y}^2 = u_{0y}^2(y_1 - y_0) \Rightarrow 0 = (30 \sin 60^\circ)^2 + 2(-9.8)(y_1 - 0) \Rightarrow y_1 = 34.4 \text{ m}$ .

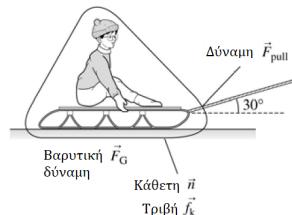
Παράδειγμα 2.78:

Κατά τη διάρκεια των διακοπών σας στις Άλπεις, ο φίλος σας σας ζητά να τον κάνετε βόλτα με το έλκηθρο σε ένα χιονισμένο, οριζόντιο δρόμο. Μια και οι δύο σας πάρνετε το μάθημα της Φυσικής, σας ρωτά ποιός πιστεύετε ότι είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του έλκηθρου και του χιονιού. Εσείς, γνωρίζοντας ότι περπατάτε με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $1.5 \text{ m/s}$ , ότι τραβάτε το έλκηθρο υπό γωνία  $30^\circ$ , ότι η μάζα του έλκηθρου και του φίλου σας είναι ανθροιστικά  $90 \text{ kg}$ , και ότι η δύναμη με την οποία τραβάτε το έλκηθρο είναι  $75 \text{ N}$ , ποιά είναι η απάντηση που πρέπει να του δώσετε;

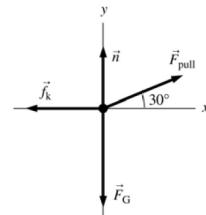
Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.91β'. Η συνολική δύναμη στο έλκηθρο είναι μηδέν, αφού η ταχύτητα είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η συνιστώσα της δύναμης που τραβά το έλκηθρο στο  $x$ -άξονα είναι ίση με το μέτρο της δύναμης τριβής ολίσθησης στον  $x$ -άξονα. Προσέξτε επίσης ότι  $\sum F_y = 0$ , αφού δεν υπάρχει κίνηση στον άξονα  $y$ . Από το 2ο νόμο του Newton στους δύο άξονες, και θεωρώντας ως θετικές φορές κίνησης τις συμβατικές,



(α') Σωματίδιο και ρίψη.



(β') Έλκηθρο και δυνάμεις.



Σχήμα 2.91: Σχήματα Ασκήσεων 2.74, 2.75.

έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{f}_k + \vec{F}_{\text{pull},x} = \vec{0} \implies 0 + 0 - f_k + F_{\text{pull}} \cos \theta = 0 \quad (2.619)$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{n} + \vec{F}_{G,y} + \vec{F}_{\text{pull},y} = \vec{0} \implies n - mg + 0 + F_{\text{pull}} \sin \theta = 0 \quad (2.620)$$

Η πρώτη σχέση γράφεται ως

$$\mu_k n = F_{\text{pull}} \cos \theta \quad (2.621)$$

ενώ η δεύτερη ως

$$n = mg - F_{\text{pull}} \sin \theta \quad (2.622)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\mu_k = \frac{F_{\text{pull}} \cos \theta}{mg - F_{\text{pull}} \sin \theta} = 0.077 \quad (2.623)$$

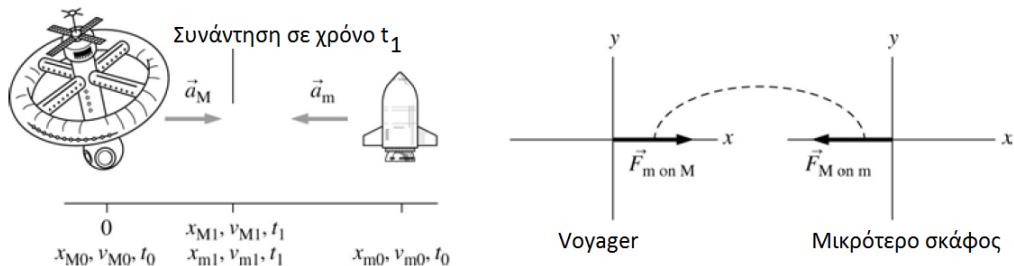
### Παράδειγμα 2.79:

Το Σκάφος Voyager της Ομοσπονδίας Ηνωμένων Πλανητών έχει μάζα  $2 \times 10^6$  kg. Σε ένα από τα ταξίδια του, αναγκάζεται να τραβήξει μέσω της ελεκτικής ακτίνας του ένα μικρότερο σκάφος μάζας  $2 \times 10^4$  kg, από μια απόσταση 10 km. Η ελεκτική ακτίνα ασκεί σταθερή δύναμη  $4 \times 10^4$  N στο μικρότερο σκάφος.

Τα δυο σκάφη βρίσκονται αρχικά σε ακινησία όπως στο Σχήμα 2.92. Δείξτε ότι

(α') Ο χρόνος συνάντησής τους,  $t_1$ , ισούται με 99.5 s.

(β') το Σκάφος Voyager, όσο τραβά το μικρότερο σκάφος προς το μέρος του, θα κινηθεί μόλις κατά 99 m.



Σχήμα 2.92: Διαστημικά σκάφη.

Λύση:

(α') Η ελεκτική ακτίνα ασκεί δύναμη στο μικρότερο σκάφος, και από τον 3ο νόμο του Newton, μια άλλη δύναμη ασκείται επάνω στο Σκάφος Voyager. Ως αποτέλεσμα, και το μεγάλο και το μικρό σκάφος κινούνται το ένα προς το άλλο. Όμως, λόγω των πολύ διαφορετικών μαζών που έχουν, οι αποστάσεις που διανύουν το καθένα είναι πολύ διαφορετικές. Έστω  $t_1$  ο χρόνος που συναντώνται, δηλ. όταν  $x_M1 = x_m1$ . Μόνο μια δύναμη ασκείται σε κάθε σκάφος, άρα ο 2ος νόμος του Newton εκφράζεται πολύ απλά. Επιπλέον, επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι δυνάμεις ζεύγους δράσης - αντίδρασης, ισχύει ότι

$$F_M \text{ επάνω } m = F_m \text{ επάνω } M = 4 \times 10^4 \text{ N} \quad (2.624)$$

Οι επιταχύνσεις των δυο σκαφών είναι

$$a_M = \frac{F_{M \text{ επάνω } M}}{M} = 0.020 \text{ m/s}^2 \quad (2.625)$$

$$a_m = \frac{F_{M \text{ επάνω } m}}{m} = -2 \text{ m/s}^2 \quad (2.626)$$

Η επιτάχυνση του μικρού σκαφούς είναι αρνητική γιατί τα διανύσματα επιτάχυνσης και δύναμης “δείχνουν” προς τα αριστερά, δηλ. προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $x$ . Σε χρόνο  $t_1$ , οι θέσεις των σκαφών θα είναι

$$x_{M1} = X_{M0} + u_{M0}t_1 + \frac{1}{2}a_M t_1^2 \quad (2.627)$$

$$x_{m_1} = x_{m_0} + u_{m_0} t_1 + \frac{1}{2} a_m t_1^2 \quad (2.628)$$

Όταν τα σκάφη συναντούνται, ισχύει ότι  $x_{M_1} = x_{m_1}$ , και άρα

$$\frac{1}{2} a_M t_1^2 = x_{m_0} + \frac{1}{2} a_m t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2x_{m_0}}{a_M + |a_m|}} = 99.5 \text{ s} \quad (2.629)$$

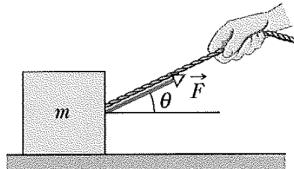
(β') Η θέση του Σκάφους Voyager τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι

$$x_{M_1} = \frac{1}{2} a_M t_1^2 = 99 \text{ m} \quad (2.630)$$

### Παράδειγμα 2.80:

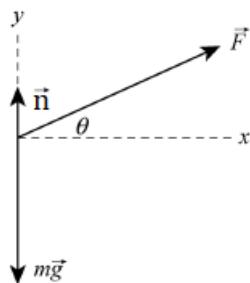
Στο Σχήμα 2.93 τραβάτε ένα κουτί μάζας  $m = 5.0 \text{ kg}$  σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές με μια δύναμη  $F = 12.0 \text{ N}$  υπό γωνία  $\theta = 25^\circ$ .

- (α') Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του κουτιού;
- (β') Η δύναμη  $F$  αργά-αργά μεγαλώνει. Ποιά τιμή θα έχει ακριβώς πριν το κουτί σηκωθεί εντελώς από την επιφάνεια;
- (γ') Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του κουτιού ακριβώς πριν σηκωθεί εντελώς από την επιφάνεια;



Σχήμα 2.93: Σχήμα Άσκησης 2.80.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.94. Θεωρούμε ψευτικές φορές κίνησης τις συμβατικές (πάνω, δεξιά).



Σχήμα 2.94: Διάγραμμα δυνάμεων Άσκησης 2.80.

(α') Η  $x$ -συνιστώσα της δύναμης  $F$  δίνεται ως

$$F_x = F \cos(\theta) = 12 \cos(25^\circ) \quad (2.631)$$

ενώ η  $y$ -συνιστώσα της δύναμης  $F$  δίνεται ως

$$F_y = F \sin(\theta) = 12 \sin(25^\circ) \quad (2.632)$$

Το σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης επιταχύνεται στον áξονα  $x'x$ . Από το 2o Νόμο του Newton έχουμε

$$\sum F_x = ma_x \iff F_x = ma_x \implies a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{12 \cos(25^\circ)}{5} = 2.175 \text{ m/s}^2 \quad (2.633)$$

(β') Έστω ότι  $F_m$  είναι η ελάχιστη δύναμη για την οποία το σώμα μόλις αφήνει την επιφάνεια. Αφού το σώμα αφήνει την επιφάνεια, η κάθετη δύναμη  $\vec{n}$  από το έδαφος στο σώμα παύει να υπάρχει. Στον áξονα  $y'y$  έχουμε ισορροπία του σώματος, άρα

$$\sum F_y = 0 \iff F_{m_y} - mg = 0 \implies F_m = \frac{mg}{\sin(\theta)} = 115.9 \text{ N} \quad (2.634)$$

(γ') Η επιπλέοντη υπάρχει ακόμα στην κατεύθυνση του áξονα  $x'x$  και δίνεται ξανά από την παραπάνω σχέση

$$a = \frac{F_m \cos(25^\circ)}{m} = 21.02 \text{ m/s}^2 \quad (2.635)$$

### Παράδειγμα 2.81:

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1500 kg ταξιδεύει με ταχύτητα 30 m/s όταν ξαφνικά ο οδηγός πατάει τα φρένα του απότομα και το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο για λίγο διάστημα ως ότου σταματήσει. Υπολογίστε την απόσταση που ολισθαίνει αν η κλίση του οδοιπορίου είναι  $10^\circ$  σε (α) ανηφόρα, (β) κατηφόρα, και (γ) σε οριζόντιο οδόιπορο.

Λύση: Θα χρατήσουμε τη γωνία ως μεταβλητή για να μη λύσουμε τρεις φορές το ίδιο πρόβλημα.

Το αυτοκίνητο κινείται σε κεκλιμένο γωνίας  $\theta$  και έστω ότι κινείται προς τα δεξιά (πάνω) στο κεκλιμένο. Έστω ότι ο áξονας  $x$  είναι παράλληλος του κεκλιμένου.

Λόγω επιταχυνόμενης κίνησης, από το 2o νόμο του Newton στον áξονα  $x'x$  έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m \vec{a}_x \quad (2.636)$$

$$-mg \sin(\theta) - f_k = ma_x \quad (2.637)$$

$$-mg \sin(\theta) - \mu_k n = ma_x \quad (2.638)$$

ενώ λόγω ισορροπίας στον áξονα  $y'y$ , έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{g_y} + \vec{n} = \vec{0} \quad (2.639)$$

$$-mg \cos(\theta) + n = 0 \quad (2.640)$$

$$n = mg \cos(\theta) \quad (2.641)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του  $x$ -άξονα

$$-mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \quad (2.642)$$

$$mg(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta)) = ma_x \quad (2.643)$$

$$a_x = -g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta)) \quad (2.644)$$

Το αυτοκίνητο κινείται ομαλά επιταχυνόμενα, οπότε από τις εξισώσεις της κίνησης έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \iff 0 = u_{x_i}^2 + 2a_x x_f \implies x_f = -\frac{u_{x_i}^2}{2a_x} = \frac{u_{x_i}^2}{2g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta))} \quad (2.645)$$

Για γωνίες  $\theta = 10^\circ, 0, -10^\circ$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε ανηφόρα, οριζόντιο οδόστρωμα, και κατηφόρα, λαμβάνουμε

$$x_f = \begin{cases} 48 \text{ m}, & \theta = 10^\circ \\ 57 \text{ m}, & \theta = 0 \\ 75 \text{ m}, & \theta = -10^\circ \end{cases} \quad (2.646)$$

### Παράδειγμα 2.82:

Ένα βιβλίο τοποθετείται ακίνητο σε επικλινή επιφάνεια που σχηματίζει γωνία  $60^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως ανάμεσα στο βιβλίο και την επιφάνεια είναι 0.3. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το βιβλίο αφήνεται να ολισθήσει. Το βιβλίο ολισθάνει απόσταση 1.00 m κατά μήκος της επιφάνειας σε χρόνο  $t = 0.483$  s. Δείξτε ότι η περιγραφή της κίνησης του βιβλίου είναι αναχριβής, υπολογίζοντας την επιτάχυνση που υπόκειται το βιβλίο από τις εξισώσεις της κινητικής που γνωρίζετε, και την ίδια επιτάχυνση χρησιμοποιώντας τους νόμους του Newton.

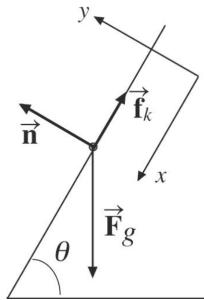
Λύση: Το βιβλίο ταξιδεύει απόσταση 1.00 m σε διάστημα 0.483 s, οπότε από την εξίσωση κίνησης

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.647)$$

με  $x_i = 0$ ,  $x_f = 1.00$ ,  $u_{x_i} = 0$ , και  $t = 0.483$  s, έχουμε

$$a = \frac{2x_f}{t^2} = 8.57 \text{ m/s}^2 \quad (2.648)$$

Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα όπως στο Σχήμα 2.95 και ορίζοντας τον άξονα  $x'$



Σχήμα 2.95: Βιβλίο που ολισθαίνει.

παράλληλο με το επικλινές και τον άξονα  $y'$  κάθετο σε αυτό, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad (2.649)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{gy} = 0 \quad (2.650)$$

$$n - mg \cos(\theta) = 0 \quad (2.651)$$

$$n = mg \cos(\theta) \quad (2.652)$$

και

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (2.653)$$

$$\vec{F}_{gx} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \quad (2.654)$$

$$mg \sin(\theta) - f_k = ma_x \quad (2.655)$$

$$mg \sin(\theta) - \mu_k n = ma_x \quad (2.656)$$

$$mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \quad (2.657)$$

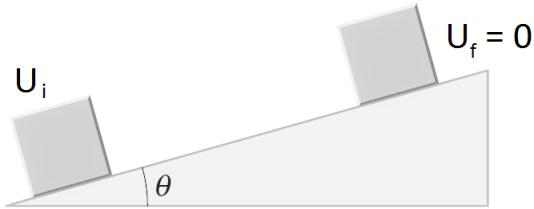
$$a_x = g(\sin(\theta) - \mu_k \cos(\theta)) \quad (2.658)$$

$$= 7.02 \text{ m/s}^2 \quad (2.659)$$

Άρα πράγματι η περιγραφή δεν είναι ακριβής.

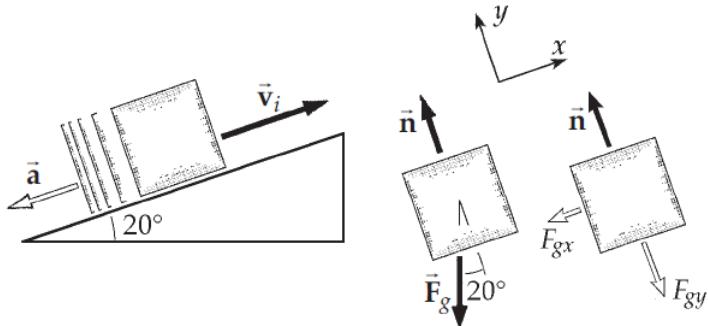
### Παράδειγμα 2.83:

Ένα σώμα λαμβάνει αρχική ταχύτητα  $u_i = 5 \text{ m/s}$  με διεύθυνση προς την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας  $\theta = 20^\circ$ , απουσία τριβών, όπως στο Σχήμα 2.96. Δείξτε ότι το σώμα θα προχωρήσει απόσταση  $\Delta x = 3.73 \text{ m}$  επάνω στο κεκλιμένο προτού έρθει σε ακινησία.



Σχήμα 2.96: Σχήμα Άσκησης 2.83.

Λύση: Μόλις το σώμα φεύγει από το χέρι μας, η ταχύτητά του αλλάζει μόνο εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους του - συγκεκριμένα της  $x$ -συνιστώσας. Δείτε το Σχήμα 2.97. Στον  $x$ -άξονα, θα είναι



Σχήμα 2.97: Διάγραμμα Άσκησης 2.83.

$$\sum F_x = ma \implies -mg \sin(20^\circ) = ma \implies a = -g \sin(20^\circ) \quad (2.660)$$

Επίσης, από τους νόμους της κίνησης, είναι

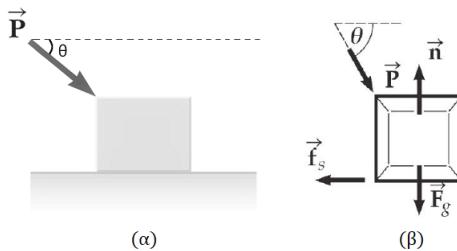
$$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i) \iff 0 = 25 - 2(9.8) \sin(20^\circ)(x_f - 0) \Rightarrow x_f = 3.73 \text{ m} \quad (2.661)$$

Παράδειγμα 2.84:

Ένα σώμα βάρους  $W$  ωθείται από μια δύναμη  $\vec{P}$  σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές, όπως στο Σχήμα 2.98(α). Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι  $\mu_s$ , και η δύναμη  $\vec{P}$  ασκείται υπό γωνία  $\theta$ , όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή  $P$  που απαιτείται για να κινηθεί το σώμα δίνεται ως

$$P_{min} = \frac{\mu_s W \sec(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)} \quad (2.662)$$

με  $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$ .



Σχήμα 2.98: Σχήματα Άσκησης 2.84.

Λύση: Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, πριν ακριβώς αρχίσει να κινείται. Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στον άξονα  $y$ , έχουμε

$$\sum F_y = ma_y \iff n = F_g + P \sin \theta \quad (2.663)$$

Στον οριζόντιο άξονα,

$$\sum F_x = ma_x \iff P \cos \theta = f \quad (2.664)$$

Όμως  $f_s \leq \mu_s n$ , δηλ.

$$P \cos \theta \leq \mu_s (F_g + P \sin \theta) \quad (2.665)$$

$$P(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) \leq \mu_s F_g \quad (2.666)$$

$$P(1 - \mu_s \tan \theta) \leq \mu_s F_g \sec \theta \quad (2.667)$$

Άρα

$$P_{min} = \frac{\mu_s F_g \sec \theta}{1 - \mu_s \tan \theta} \quad (2.668)$$

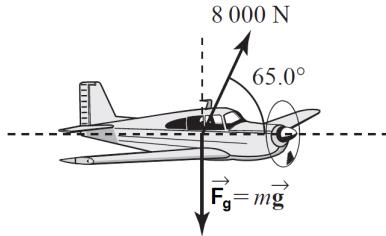
Παράδειγμα 2.85:

Κατά την απογείωση ενός αεροσκάφους, η συνδυασμένη δράση του αέρα γύρω από τις μηχανές και τα φτερά εγείρει δύναμη  $F = 8000 \text{ N}$  στο αεροπλάνο, με φορά προς τα πάνω, υπό γωνία  $65^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.99. Το αεροσκάφος “σηκώνεται” με σταθερή ταχύτητα στην κατακόρυφη διεύθυνσή του ενώ συνεχίζει να επιταχύνει στην οριζόντια διεύθυνση.

(α') Ποιό είναι το βάρος του αεροπλάνου;

(β') Πόση είναι η οριζόντια επιτάχυνση;

Λύση:



Σχήμα 2.99: Αεροπλάνο κατά την απογείωση.

(α') Θεωρούμε ως θετικές φορές κίνησης τις συμβατικές. Το αεροσκάφος επιταχύνεται στον  $x$ -άξονα και ισορροπεί στον  $y$ -άξονα, οπότε στον άξονα  $y'$  ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_y + m\vec{g} = \vec{0} \quad (2.669)$$

$$F \sin(\theta) - mg = 0 \quad (2.670)$$

$$mg = F \sin(\theta) \quad (2.671)$$

$$mg = 8000 \sin(65^\circ) = 7.25 \times 10^3 \text{ N} \quad (2.672)$$

(β') Στον οριζόντιο άξονα

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \implies F_x = ma_x \quad (2.673)$$

$$F \cos(\theta) = ma_x \quad (2.674)$$

$$a_x = \frac{F \cos(\theta)}{m} = \frac{F \cos(\theta)}{\frac{F \sin(\theta)}{g}} \quad (\text{από προηγ. ερώτημα}) \quad (2.675)$$

$$= \frac{8000 \cos(65^\circ)}{\frac{7.25 \times 10^3}{9.8}} = 4.57 \text{ m/s}^2 \quad (2.676)$$

### Παράδειγμα 2.86:

Ένα σακί τσιμέντο που ζυγίζει 325 N κρέμεται σε ισορροπία από τρία αβαρή, μη ελαστικά σχοινιά, όπως στο Σχήμα 2.100(α). Δυο από τα καλώδια σχηματίζουν γωνίες  $\theta_1 = 60^\circ$  και  $\theta_2 = 40^\circ$  με τον οριζόντιο άξονα. Υποθέτοντας ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, βρείτε

- (α') την τάση στο αριστερό σχοινί
- (β') τις τάσεις  $T_1, T_2, T_3$ , αριθμητικά.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.100(β). Θεωρούμε ως θετικές φορές των αξόνων τις συμβατικές.  
(α') Ο σάκος ισορροπεί, άρα  $T_3 = F_g$ . Λόγω ισορροπίας σε κάθε άξονα, θα είναι

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{F}_g = \vec{0} \implies T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) = F_g \quad (2.677)$$

Όμοια,

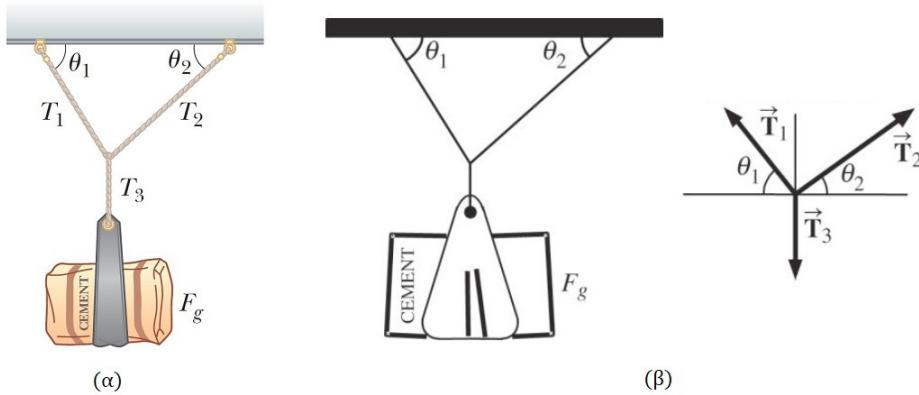
$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \implies T_1 \cos(\theta_1) = T_2 \cos(\theta_2) \quad (2.678)$$

Άρα

$$T_1 = \frac{F_g \cos(\theta_2)}{(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2))} = \frac{F_g \cos(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.679)$$

(β') Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$T_3 = F_g = 325 \text{ N} \quad (2.680)$$



Σχήμα 2.100: Σάκος με τσιμέντο Άσκησης 2.86.

$$T_1 = 253 \text{ N} \quad (2.681)$$

$$T_2 = 165 \text{ N} \quad (2.682)$$

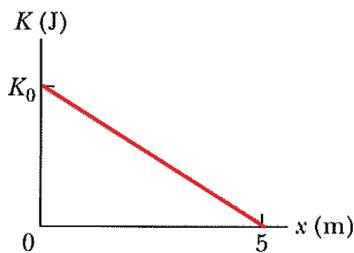
### Παράδειγμα 2.87:

Ένα σώμα μάζας  $8.0 \text{ kg}$  κινείται στη θετική κατεύθυνση ενός νοητού άξονα  $x'$ . Όταν περνά από το σημείο  $x = 0$ , μια σταθερή δύναμη, κατά μήκος του  $x'$  και αυτή (αλλά όχι απαραίτητα με την ίδια φορά με την κίνηση), ξεκινά να δρα πάνω του. Στο Σχήμα 2.101 βλέπετε την κινητική ενέργεια του σώματος συναρτήσει της θέσης  $x$  όσο το σώμα κινείται από  $x = 0$  ως  $x = 5.0 \text{ m}$ . Αν  $K_0 = 30 \text{ J}$

(α') Πόση είναι η ταχύτητά του όταν  $x = 0 \text{ m}$ ;

(β') Πόση είναι η επιτάχυνσή του σε όλη τη διάρκεια της κίνησης;

(γ') Αν η δύναμη συνεχίσει να δρα πάνω του, μπορείτε να προβλέψετε την ταχύτητά του όταν  $x = -3 \text{ m}$ ;



Σχήμα 2.101: Σχήμα Άσκησης 2.87.

Λύση:

(α') Αφού  $K_0 = 30 \text{ J}$  έχουμε

$$K_0 = \frac{1}{2}mu_0^2 = 30 \iff u_0^2 = \frac{60}{8} = 7.5 \implies u_0 = 2.73 \text{ m/s} \quad (2.683)$$

(β') Αφού η αρχική ταχύτητα είναι  $2.73 \text{ m/s}$  και η τελική ταχύτητα για  $x = 5$ , δηλ. για μετατόπιση  $\Delta x = 5 \text{ m}$ , είναι 0, από τις εξισώσεις της κινηματικής έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = -0.75 \text{ m/s}^2 \quad (2.684)$$

(γ') Ξανά από την εξίσωση της κινηματικής μεταξύ των θέσεων  $x = 0$  και  $x = -3$  m, έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff u_f = -\sqrt{7.5 + 2(-0.75)(-3)} = -\sqrt{12} \text{ m/s} \quad (2.685)$$

με το πρόσημο να δηλώνει τη φορά του διανύσματος.

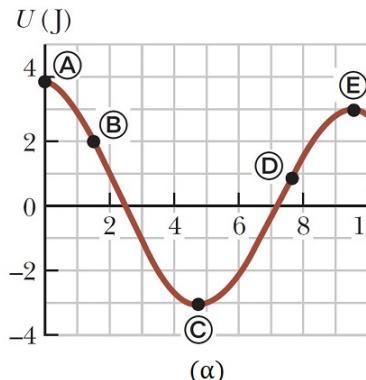
### Παράδειγμα 2.88:

Για την καμπύλη δυναμικής ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα 2.102(α).

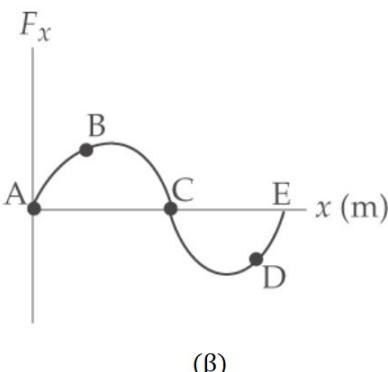
(α') Βρείτε αν η δύναμη  $F_x$  είναι θετική, αρνητική, ή μηδενική στα πέντε σημεία που υποδεικνύονται.

(β') Υποδείξτε σημεία ευσταθούς, ασταθούς, ή ουδέτερης ισορροπίας.

(γ') Σχεδιάστε την καμπύλη  $F_x$  ως προς  $x$  από το σημείο  $x = 0$  ως το σημείο  $x = 9.5$  m.



(a)



(b)

Σχήμα 2.102: Καμπύλη συνάρτησης δυναμικής ενέργειας και δύναμης - μετατόπισης.

Λύση:

(α') Η  $F_x$  είναι μηδενική στα σημεία  $A, C, E$ , γιατί από τη σχέση

$$F_x = -\frac{dU}{dt} = 0 \quad (2.686)$$

καταλαβαίνουμε πως η δύναμη μηδενίζεται εκεί που η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν, ή με άλλα λόγια, εκεί που η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ωκρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα). Επίσης, στο σημείο  $B$  είναι θετική γιατί από τη σχέση

$$F_x = -\frac{dU}{dt} > 0 \iff \frac{dU}{dt} < 0 \quad (2.687)$$

καταλαβαίνουμε ότι η δύναμη είναι θετική σε σημεία που η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας φθίνει.

Αντίστοιχο σκεπτικό και στο σημείο  $D$ , όπου η δύναμη είναι αρνητική.

(β') Τα σημεία  $A, E$  είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο  $C$  είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

(γ') Δείτε το Σχήμα 2.102(β).

### Παράδειγμα 2.89:

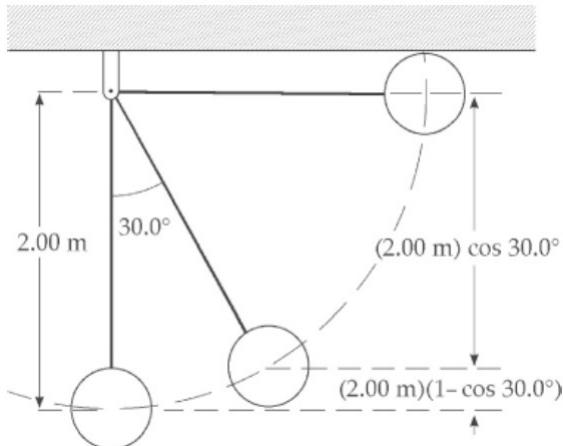
Ένα παιδί βάρους 400 N κάθεται σε μια κούνια η οποία είναι δεμένη με δύο σχοινιά μήκους 2 m.

Βρείτε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος παιδιού-Γης ως προς αυτή που έχει το παιδί όταν βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση όταν

(α') τα σχοινιά είναι οριζόντια

- (β') τα σχοινιά σχηματίζουν γωνία  $30^\circ$  με την κατακόρυφο  
 (γ') τα σχοινιά βρίσκονται στο χαμηλότερο σημείο του κυκλικού τόξου.  
 Σχεδιάστε το σύστημα για να βοηθήσετε στη λύση.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.103.



Σχήμα 2.103: Παιδί σε κούνια.

- (α') Θεωρούμε ως διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος τη διάταξη με το παιδί να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του τόξου. Όταν η κούνια βρίσκεται αρχικά σε οριζόντια θέση, η θέση της είναι  $y = 2 \text{ m}$  προς τα επάνω από τη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$U_g = mgy = 800 \text{ J} \quad (2.688)$$

- (β') Από το σχήμα, φαίνεται ότι το παιδί βρίσκεται σε ύψος  $y = 2(1 - \cos(30^\circ))$  προς τα επάνω από τη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$U_g = mgy = 107 \text{ J} \quad (2.689)$$

- (γ') Προφανώς, εκεί  $U_g = 0$  αφού εκεί ορίσαμε το επίπεδο διάταξης μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

### Παράδειγμα 2.90:

Όταν ένα σώμα μεταποίεται κατά  $x$  από τη θέση ευσταθίους ισορροπίας του, ασκείται επάνω του μια δύναμη επαναφοράς που τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας του. Το μέτρο της δύναμης μεταφοράς μπορεί να δίνεται από μια περίπλοκη συνάρτηση του  $x$ . Για παράδειγμα, ο νόμος του Hooke που είδαμε στο μάθημα ορίζεται ως

$$F = -kx \quad (2.690)$$

αλλά ισχύει για μικρές μεταποίσεις. Γενικότερα, η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = - \sum_{m=1}^{+\infty} k_m x^m = -(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots) \quad (2.691)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι ο νόμος του Hooke. Για μικρές αποστάσεις από τη θέση ισορροπίας, αγνοούμε τους όρους υψηλότερης τάξης, αλλα σε μερικές περιπτώσεις ίσως χρειαστεί να κρατήσουμε και τον δεύτερο όρο ( $k_2 x^2$ ). Αν μοντελοποιήσουμε τη δύναμη επαναφοράς ως

$$F(x) = -k_1 x - k_2 x^2 \quad (2.692)$$

τότε πόσο έργο παράγει μια ασκούμενη δύναμη  $-F$  στο σώμα κατά τη μετατόπισή του από τη θέση  $x = 0$  στη θέση  $x = x_{max}$ ;

Λύση: Το έργο που ασκείται από την εξωτερική δύναμη ισούται με

$$W = \int_a^b F_{out} dx = \int_0^{x_{max}} -[-(k_1 x + k_2 x^2)] dx \quad (2.693)$$

$$= \int_0^{x_{max}} k_1 x dx + \int_0^{x_{max}} k_2 x^2 dx \quad (2.694)$$

$$= k_1 \frac{x_{max}^2}{2} + k_2 \frac{x_{max}^3}{3} \quad (2.695)$$

### Παράδειγμα 2.91:

Ένα δοχείο που περιέχει ένα μετεορολωγικό μπαλόνι μάζας 4 kg εκτοξύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 400 m/s. Απουσία αντίστασης του αέρα, υπολογίστε

- (α') Την αρχική κινητική του ενέργεια.
- (β') Την ταχύτητά του σε ύψος ενός χιλιομέτρου.
- (γ') Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει.

Λύση:

(α') Η αρχική κινητική του ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} mu^2 = 320 \text{ kJ} \quad (2.696)$$

(β') Θεωρούμε ως σύστημα το Γη + δοχείο με μπαλόνι. Σε ύψος ενός χιλιομέτρου, η δυναμική του ενέργεια είναι

$$U_g = mgh = 39.24 \text{ kJ} \quad (2.697)$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο μπαλόνι είναι αυτή του βάρους, που είναι συντηρητική. Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, ισχύει

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad (2.698)$$

$$320000 + 0 = \frac{1}{2} mu_f^2 + 39240 \quad (2.699)$$

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 280760}{4}} \quad (2.700)$$

$$u = 374.7 \text{ m/s} \quad (2.701)$$

(γ') Στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα του δοχείου είναι μηδέν, και όλη η κινητική του ενέργεια έχει μετατραπεί σε δυναμική. Άρα μεταξύ εδάφους και μέγιστου ύψους

$$K_i = U_f \quad (2.702)$$

$$320000 = mgh_{max} \quad (2.703)$$

$$h_{max} = 8163 \text{ m} \quad (2.704)$$

Παράδειγμα 2.92:

Ένα φορτίο μάζας 30 kg σπρώχνεται επάνω σε μια επικλινή ράμπα μήκους 15 m και υψους 2 m με σταθερή δύναμη 100 N. Το φορτίο ξεκινά από ακινησία και έχει ταχύτητα μέτρου 2 m/s όταν φτάνει στην κορυφή της ράμπας. Ποιά είναι η δύναμη τριβής μεταξύ της ράμπας και του φορτίου;

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα το φορτίο + γη, που είναι μη απομονωμένο (η ράμπα ασκεί δυνάμεις επάνω στο σύστημα). Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$\Delta E_{system} = \sum W_{ext} \iff W_F + W_{f_k} = \Delta K + \Delta U \quad (2.705)$$

Το έργο της δύναμης  $F$  θα είναι

$$W_F = F\Delta x = 100 \cdot 15 = 1500 \text{ J} \quad (2.706)$$

Οι μεταβολές στην κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mu_f^2 - 0 = 60 \text{ J} \quad (2.707)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh - 0 = 588 \text{ J} \quad (2.708)$$

Άρα το έργο της δύναμης τριβής  $f_k$  είναι

$$W_{f_k} = W_F - \Delta K - \Delta U = 852 \text{ J} \quad (2.709)$$

Όμως ξέρουμε ότι το έργο της δύναμης τριβής δίνεται και ως

$$W_{f_k} = f_k \Delta x \cos(180^\circ) \implies f_k = \frac{W_{f_k}}{-\Delta x} = -56.8 \text{ N} \quad (2.710)$$

που σημαίνει ότι το μέτρο της είναι 56.8 N και η φορά της αντίθετη στη μετατόπιση.

Παράδειγμα 2.93:

Ένας τολμηρός bungee-jumper βρίσκεται μια γέφυρα ύψους  $L_{max} = 75 \text{ m}$  επάνω από ένα ποτάμι, όπως στο Σχήμα 2.104(a). Ο bungee-jumper έχει μάζα  $m = 80 \text{ kg}$ , και ύψος  $L_{jumper} = 1.85 \text{ m}$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε το σχοινί που χρησιμοποιεί για το άλμα στο κενό ως ελατήριο. Η σταθερά του σχοινιού είναι  $k = 50 \text{ N/m}$ . Θεωρήστε ότι η μάζα του σχοινιού είναι αμελητέα. Ο bungee-jumper θέλει να ξέρει το μήκος του σχοινιού  $L_0$  που χρειάζεται για να εκτελέσει με ασφάλεια το άλμα του. Βοηθήστε τον.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα το bungee-jumper + σχοινί + Γη. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν ο bungee-jumper βρίσκεται επάνω στη γέφυρα είναι

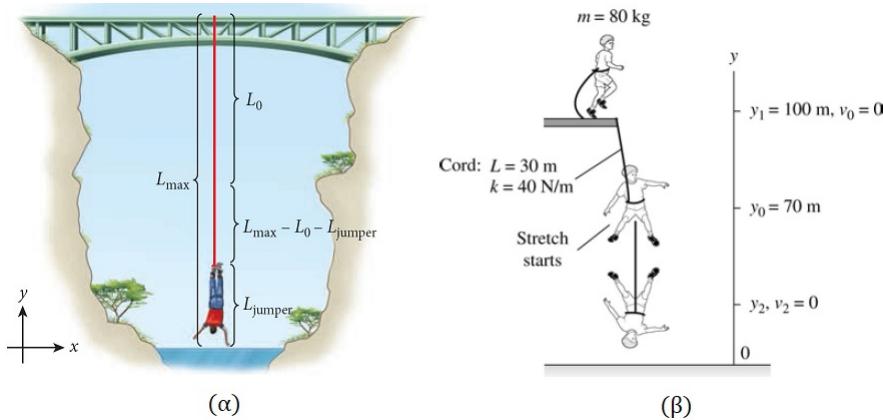
$$U_{gi} = mgy = mgL_{max} \quad (2.711)$$

υποθέτοντας ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν στο επίπεδο της επιφάνειας του νερού. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου επάνω στη γέφυρα και του σημείου όταν ο bungee-jumper έχει εκτελέσει το άλμα και βρίσκεται με το κεφάλι αριβάς επάνω από το νερό (έχοντας στιγμιαία μηδενική ταχύτητα), έχουμε

$$E_f^{mech} = E_i^{mech} \iff K_f + U_{gf} + U_{ef} = K_i + U_{gi} + U_{ei} \quad (2.712)$$

με  $U_e$  την ελαστική δυναμική ενέργεια του σχοινιού. Άρα

$$0 + 0 + \frac{1}{2}k(L_{max} - L_{jumper} - L_0)^2 = 0 + mgL_{max} + 0 \quad (2.713)$$



Σχήμα 2.104: Σχήματα Άσκησης 2.93.

οπότε

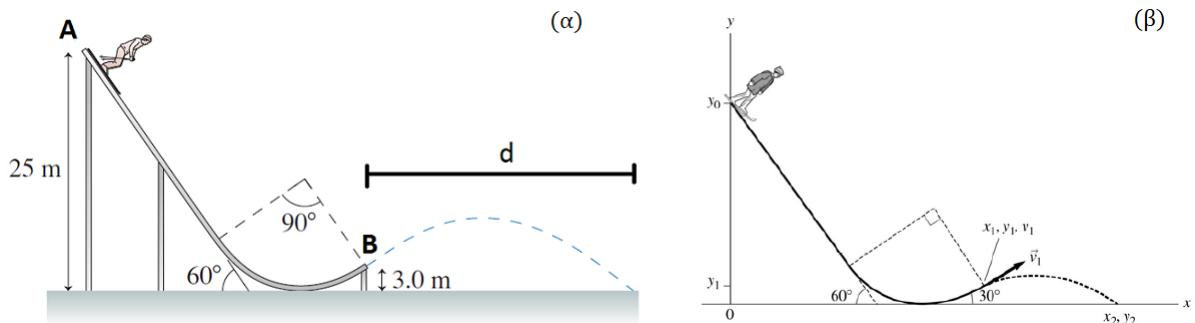
$$\frac{1}{2}k(L_{max} - L_{jumper} - L_0)^2 = mgL_{max} \quad (2.714)$$

$$L_0 = L_{max} - L_{jumper} - \sqrt{\frac{2mgL_{max}}{k}} \quad (2.715)$$

$$= 24.6\text{m} \quad (2.716)$$

#### Παράδειγμα 2.94:

Η Ιουλία βρίσκεται σε ύψος 25 μέτρων, επάνω σε μια τσουλήθρα χωρίς τριβές (Σχήμα 2.105)(α). Η αρχική κλίση της τσουλήθρας είναι  $60^\circ$ . Στη βάση της τσουλήθρας, ένα κυκλικό τόξο την εκτοξεύει από ύψος 3 μέτρων. Δείξτε ότι η απόσταση που θα διανύσει η Ιουλία κατά το άλμα της, με αναφορά το σημείο εκτόξευσης Β είναι  $d = 42.6\text{ m}$ .



Σχήμα 2.105: Σχήμα Άσκησης 2.94.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα την Ιουλία και τη Γη. Τοποθετούμε το σύστημα συντεταγμένων στο κάτω μέρος της ράμπας, κάτω από τη θέση εκκίνησης της Ιουλίας. Από τη γεωμετρία του σχήματος 2.105(β), έχουμε ότι η Ιουλία εκτοξεύεται από τη ράμπα υπό γωνία  $30^\circ$ . Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους, που είναι συντηρητική. Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων στην κορυφή της τσουλήθρας και στο σημείο εκτόξευσης, έχουμε

$$K_1 + U_{g1} = K_2 + U_{g2} \iff \frac{1}{2}mu_1^2 + mgy_1 = mgy_0 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2g(y_0 - y_1)} = 20.77\text{ m/s} \quad (2.717)$$

Ας βρούμε τώρα το σημείο άφιξης της Ιουλίας μετά την εκτόξευσή της. Από την κινητική στον άξονα  $y$ , θα έχουμε

$$y_2 = y_1 + u_{y_1}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.718)$$

$$0 = 3 + u_1 \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}9.8t^2 \quad (2.719)$$

$$t = 2.377 \text{ s} \quad (2.720)$$

Από την κινητική στον άξονα  $x$ , έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_{x_1}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.721)$$

$$x_2 - x_1 = u_1 \cos 30^\circ t + 0 \quad (2.722)$$

$$x_2 - x_1 = 42.6 \text{ m} \quad (2.723)$$

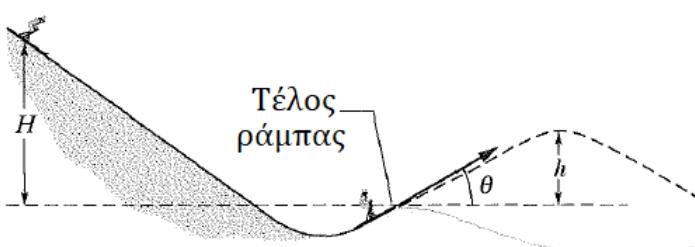
### Παράδειγμα 2.95:

Η επιδημία του κορονοϊού τελειώνει και για να γιορτάσετε πάτε για σκι στις Άλπεις. Βρίσκεστε στην πλαγιά ενός λόφου όπως στο Σχήμα 2.106, σε ύψος  $H = 20$  μέτρα από το τέρμα της ράμπας. Εκτελώντας το άλμα σας υπό γωνία  $\theta = 28^\circ$ , αγνοώντας τις αντιστάσεις του αέρα, και υποθέτοντας ότι η ράμπα είναι λεία

(α') ποιό είναι το μέγιστο ύψος  $h$  του άλματός σας αφού αποδεσμευτείτε από τη ράμπα;

(β') αν επαναλάβετε το άλμα - γιατί σας άρεσε - αλλά αφού πρώτα δέσετε στην πλάτη σας το βιβλίο της Φυσικής σας (αυξάνοντας το βάρος σας), θα φτάσετε σε μεγαλύτερο, μικρότερο, ή ίδιο μέγιστο ύψος  $h$ ;

Βοήθεια: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας; Αν ναι, γιατί; Εξηγήστε.



Σχήμα 2.106: Σχήμα Άσκησης 2.95.

#### Λύση:

(α') Κατά το άλμα σας, εκτελείτε βολή, οπότε το ζητούμενο ύψος είναι το μέγιστο ύψος βολής, όμως δε γνωρίζουμε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης από τη ράμπα. Θεωρώντας ως απομονωμένο σύστημα το άλτης + Γη, η μόνη δύναμη που ασκείται στον άλτη είναι η δύναμη του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ από τη θέση ύψους  $H$  ως τη θέση εκτόξευσης από τη ράμπα, θεωρώντας διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη διάταξη εκτόξευσης από τη ράμπα.

$$K_i + U_{g_i} = K_f + U_{g_f} \quad (2.724)$$

$$0 + mgH = \frac{1}{2}mu_f^2 + 0 \quad (2.725)$$

$$u_f = \sqrt{2gH} = 19.79 \text{ m/s} \quad (2.726)$$

Από τον τύπο του μέγιστου ύψους  $h$  έχουμε

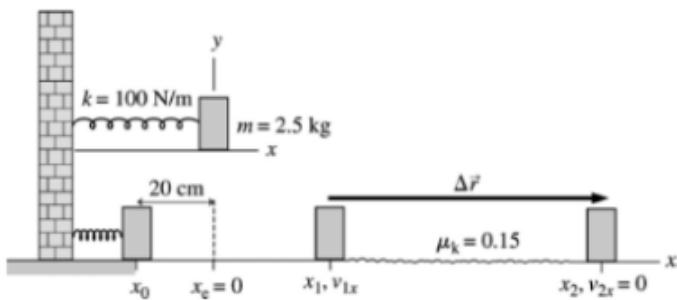
$$h = \frac{u_f^2 \sin^2(28^\circ)}{2g} = 4.408 \text{ m} \quad (2.727)$$

- (β') Η μάζα  $m$  δεν παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα καθώς απαλείφεται στις σχέσεις της ΑΔΜΕ. Άρα το μέγιστο ύψος θα είναι το ίδιο.

### Παράδειγμα 2.96:

Ένα οριζόντιο ελατήριο με σταθερά  $100 \text{ N/m}$  συμπιέζεται κατά  $20 \text{ cm}$  ώστε να εκτοξεύσει ένα κουτί βάρους  $2.5 \text{ kg}$  κατά μήκος λείας επιφάνειας. Αφού το κουτί διανύσει κάποια απόσταση, η επιφάνεια γίνεται τραχιά. Ο συντελεστής τριβής είναι  $0.15$ . Χρησιμοποιήστε την ενέργεια για να βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει το κουτί κατά μήκος της τραχιάς επιφανείας εως ότου σταματήσει.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.107. Θεωρούμε ως σύστημα το ελατήριο + σώμα + επιφάνεια, το οποίο είναι απομονωμένο. Όταν η επιφάνεια είναι λεία, η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από το σημείο συμπίεσης μέχρι



Σχήμα 2.107: Κουτί σε λεία και τραχιά επιφάνεια.

το σημείο που το σώμα αφήνει το ελατήριο (θέση ισορροπίας) μας δίνει

$$\Delta E_{system} = 0 \quad (2.728)$$

$$\Delta U + \Delta K = 0 \quad (2.729)$$

$$\frac{1}{2}k(x_0 - x_e)^2 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 = K_1 \quad (2.730)$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(100)(0.20 - 0)^2 = 2.0 \text{ J} \quad (2.731)$$

Επομένως το κουτί εκτοξεύεται οριζόντια, με κινητική ενέργεια ίση με  $2 \text{ J}$ . Εφόσον σε κάποια χρονική στιγμή θα σταματήσει, αυτό συνεπάγεται ότι στην διάρκεια της κίνησης του του κουτί θα χάσει  $2 \text{ J}$  κινητικής ενέργειας. Η συνισταμένη των δυνάμεων στο κουτί είναι:

$$F_{net} = -f_k = -\mu_k mg \quad (2.732)$$

Από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας - Έργου μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της θέσης που το σώμα σταματά να κινείται, έχουμε

$$\Delta K = 0 - 2.0 = W_{net} = \vec{F}_{net} \cdot \Delta \vec{r} \quad (2.733)$$

$$-2.0 = (-\mu_k mg)(x_2 - x_1) \quad (2.734)$$

$$(x_2 - x_1) = \frac{2.0}{\mu_k mg} = \frac{2.0}{(0.15)(2.5)(9.8)} = 0.544 \text{ m} \quad (2.735)$$

### Παράδειγμα 2.97:

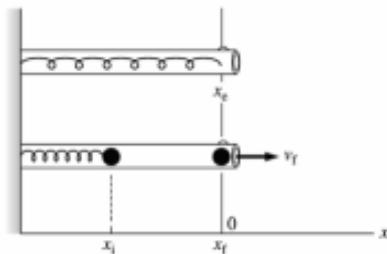
Ένας μηχανικός σχεδιάζει ένα περίεργο ελατήριο που ικανοποιεί τον τύπο  $F_x = -q(x - x_e)^3$ , όπου  $x_e$  είναι η θέση ισορροπίας στο τέλος του ελατηρίου και  $q$  είναι η σταθερά του. Για απλότητα θεωρούμε ότι  $x_e = 0 \text{ m}$ . Συνεπώς  $F_x = -qx^3$ .

(α') Ποιες είναι οι μονάδες του  $q$ ;

(β') Βρείτε τον τύπο της δυναμικής ενέργειας ενός τεντωμένου ή συμπιεσμένου ελατηρίου.

(γ') Ένα παιχνίδι με ένα τέτοιο ελατήριο εκτοξεύει μια πλαστική μπάλα 20 g. Ποια είναι η ταχύτητα εκτόξευσης αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 40000, με μονάδες αυτές που βρίκατε στο ερώτημα (α), και το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 10 cm; Υποθέστε ότι η κάννη είναι λεία επιφάνεια.

Λύση: Θεωρούμε το σύστημα μπάλα + ελατήριο. Δείτε το Σχήμα 2.108.



Σχήμα 2.108: Περίεργο ελατήριο.

(α') Οι μονάδες του  $q$  είναι  $\text{N/m}^3$ .

(β') Εφόσον  $F_x = -dU/dx$ , έχουμε

$$U(x) = - \int F_x dx = - \int_0^x (-qx^3) dx = qx^4/4 \quad (2.736)$$

(γ') Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για το σύστημα μπάλα-ελατήριο από τη θέση συμπίεσης ως τη θέση εκτόξευσης της μπάλας, παίρνουμε

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (2.737)$$

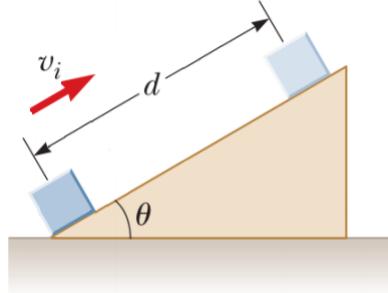
$$\frac{1}{2}mu_f^2 + 0 = 0 + \frac{1}{4}qx_i^4 \quad (2.738)$$

$$u_f = \sqrt{\frac{qx^4}{2m}} = \sqrt{\frac{(40000)(-0.10)^4}{2(0.02)}} = 10 \text{ m/s} \quad (2.739)$$

### Παράδειγμα 2.98:

Ένα κουτί μάζας  $m = 5 \text{ kg}$  ξεκινάει από τη βάση ενός κεχλιμένου επιπέδου γωνίας  $\theta = 30^\circ$  με αρχική ταχύτητα  $u_i = 8 \text{ m/s}$ , και σταματά αφού διανύσει απόσταση  $d = 3 \text{ m}$ , όπως στο Σχήμα 2.109. Υπολογίστε:

- (α') τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του κουτιού.
- (β') τη μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος Γης - κουτιού.
- (γ') το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκείται στο κουτί (με την υπόθεση ότι είναι σταθερή).
- (δ') το συντελεστή τριβής ολισθήσεως  $\mu_k$  κουτιού - κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 2.109: Σώμα σε κεκλιμένο Άσκησης 2.98.

Λύση:

- (α') Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια δίνεται ως

$$\Delta K = K_{final} - K_{initial} = 0 - \frac{1}{2}m v_i^2 = -\frac{1}{2}m \cdot 8^2 = -160 \text{ J} \quad (2.740)$$

- (β') Θεωρώντας το σύστημα Γη-κουτί, η μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι

$$\Delta U = U_{final} - U_{initial} = mgh - 0 = mgd \sin(\theta) = 5 \cdot 9.8 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 73.5 \text{ J} \quad (2.741)$$

όπου  $h$  είναι το ύψος του κουτιού από την επιφάνεια της Γης στην τελική του θέση.

- (γ') Το μη απομονωμένο σύστημα Γης + κουτιού θα περιγράφεται ενεργειακά από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από τη βάση ως τη θέση ακινητοποίησης ως εξής:

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{other} + W_{int} \quad (2.742)$$

$$\Delta K + \Delta U = -f_k d \quad (2.743)$$

Δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις πληγ της τριβής που να παράγουν έργο στο κουτί, οπότε η δύναμη τριβής είναι η μόνη άγνωστη, και βρίσκουμε το μέτρο της ως

$$f_k = -\frac{\Delta K + \Delta U}{d} = 28.8 \text{ N} \quad (2.744)$$

ενώ η διεύθυνση της είναι παράλληλη του κεκλιμένου και η φορά της αντίθετα της κίνησης του κουτιού.

- (δ') Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κουτί και είναι κάθετες στο επικλινές πρέπει να αθροίζουν στο μηδέν λόγω ισορροπίας του κουτιού στον άξονα  $y'$ . Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \implies \sum F_y = 0 \implies n - mg \cos(30^\circ) = 0 \quad (2.745)$$

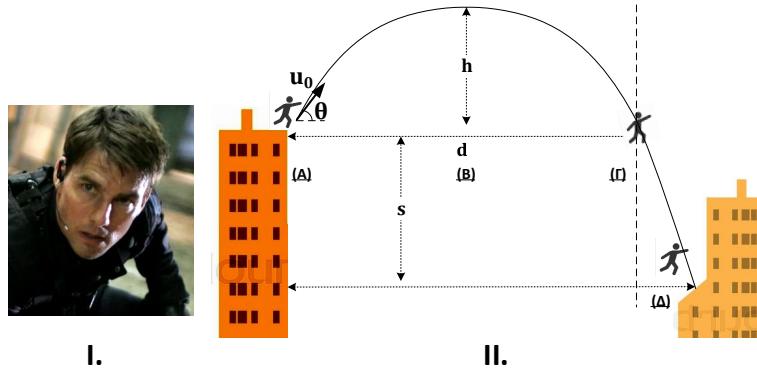
Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, και αφού  $n = mg \cos(30^\circ) = 42.4 \text{ N}$ , θα είναι

$$f_k = \mu_k n \implies \mu_k = 0.68 \quad (2.746)$$

Παράδειγμα 2.99:

Ο πράκτορας Ethan Hunt (Σχήμα 2.110.I) χρειάζεται να εκτελέσει ένα επικίνδυνο άλμα για να φέρει σε πέρας μια από τις αποστολές του. Ο Ethan βρίσκεται στην οροφή ενός κτηρίου, όπου και εκτελεί άλμα με αρχική ταχύτητα  $u_0$  υπό γωνία  $\theta$ , όπως στο Σχήμα 2.110.II. Θεωρήστε ότι η στολή του Ethan μηδενίζει τις αντιστάσεις του αέρα.

- (α') Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας  $u_0$  είναι  $u_0 = 10 \text{ m/s}$  και η γωνία άλματος είναι  $\theta = 45^\circ$ , ποιό το μέγιστο ύψος  $h$  που θα φτάσει ο Ethan;
- (β') Πόσο χρόνο  $t$  χρειάζεται για να φτάσει στο ίδιο επίπεδο με το επίπεδο άλματός του;
- (γ') Πόση οριζόντια απόσταση  $d$  θα έχει διανύσει όταν φτάσει στο παραπάνω ύψος;
- (δ') Ποιό θα είναι το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης του στην πλάγια επιφάνεια του δεύτερου κτηρίου, αν η απόσταση  $s$  - όπως φαίνεται στο Σχήμα - είναι  $s = 15 \text{ m}$ ;



Σχήμα 2.110: Επικίνδυνες Αποστολές.

Λύση:

- (α') Ο Ethan ουσιαστικά εκτελεί βολή. Από γνωστούς τύπους, έχουμε

$$h_{max} = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} \approx 2.55 \text{ m} \quad (2.747)$$

- (β') Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε από το σημείο A ως το σημείο Γ έχουμε

$$y_G = y_A + u_{yA}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 0 = 0 + u_0 \sin(45^\circ)t - 4.9t^2 \iff 10\frac{\sqrt{2}}{2}t - 4.9t^2 = 0 \iff t = 0 \text{ ή } t \approx 1.44 \text{ sec} \quad (2.748)$$

- (γ') Η απόσταση  $d$  αποτελεί το εύρος της βολής. Από γνωστό τυπολόγιο, έχουμε

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} = \frac{10^2 \sin(90^\circ)}{9.8} \approx 10.2 \text{ m} \quad (2.749)$$

- (δ') Θεωρούμε το σύστημα Ethan + Γη. Η μόνη δύναμη που ασκείται στον Ethan είναι αυτή του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο (Δ). Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων (Α) και (Δ), θα έχουμε

$$E_{mech}^A = E_{mech}^\Delta \quad (2.750)$$

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \quad (2.751)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + mgs = \frac{1}{2}mu_\Delta^2 + 0 \quad (2.752)$$

$$\frac{1}{2}u_A^2 + gs = \frac{1}{2}u_\Delta^2 \quad (2.753)$$

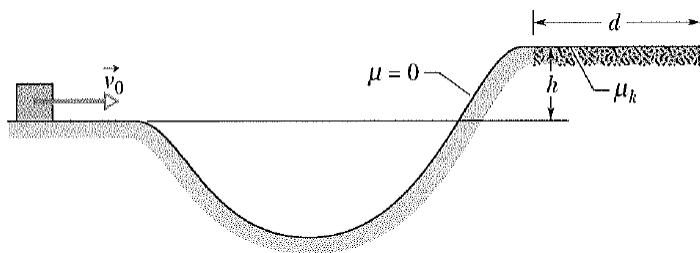
$$u_\Delta = \sqrt{u_A^2 + 2gs} \quad (2.754)$$

$$= \sqrt{100 + 30 \cdot 9.8} \quad (2.755)$$

$$\approx 19.85 \text{ m/s} \quad (2.756)$$

### Παράδειγμα 2.100:

Στο Allou Fun Park, υπάρχει ένα μονοθέσιο τρενάκι που σας εκτοξεύει από ένα επίπεδο σε ένα υψηλότερο αφού πρώτα σας περάσει από μια διαδρομή τύπου “μπώλ”. Θεωρήστε ότι όλη η κίνηση μέχρι να φτάσετε στο ψηλότερο επίπεδο γίνεται χωρίς αντιστάσεις ή τριβές. Όμως υπάρχουν τριβές στο υψηλότερο επίπεδο που αναγκάζουν το τρενάκι να σταματήσει μετά από απόσταση  $d$  από την είσοδο του στο επίπεδο. Η αρχική ταχύτητα του τρένου είναι  $u_0 = 6.0 \text{ m/s}$ , με οριζόντια κατεύθυνση, όπως στο Σχήμα 2.111. Η υφομετρική διαφορά των δυο επιπέδων,  $h$ , είναι  $1.1 \text{ m}$  ενώ ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως στο υψηλότερο επίπεδο είναι  $\mu_k = 0.60$ . Βρείτε την απόσταση  $d$ . Βοήθεια: Εφαρμόστε ενεργειακό θεώρημα στο σύστημα Γη+τρενάκι+επιφάνεια με τριβές, από την αρχική θέση εκκίνησης ως την τελική θέση στάσης. Θεωρήστε μια κατάλληλη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.



Σχήμα 2.111: Σχήμα Άσκησης 2.100.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα τη Γη+τρενάκι+επιφάνεια με τριβές. Το σύστημα είναι απομονωμένο με δράση μη-συντηρητικής δύναμης (τριβή ολίσθησης). Θεωρούμε ότι η διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση εκκίνησης. Από την ΑΔΕ μεταξύ της αρχικής θέσης εκκίνησης και της τελικής θέσης στάσης, έχουμε

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{therm} = 0 \quad (2.757)$$

$$K_f - K_i + U_{g_f} - U_{g_i} + \Delta E_{therm} = 0 \quad (2.758)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_i^2 + mgh - 0 + f_kd = 0 \quad (2.759)$$

$$d = \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{f_k} \quad (2.760)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{\mu_k n} \quad (2.761)$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα  $y'$  όσο βρίσκεται στο επίπεδο με τριβές, οπότε

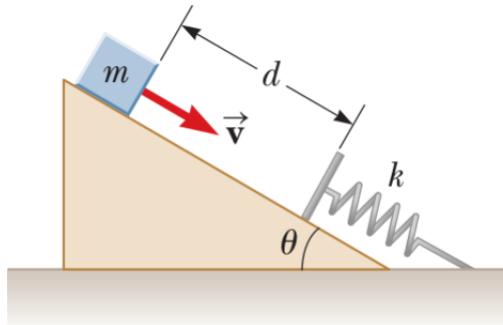
$$\sum F_y = 0 \iff n - mg = 0 \iff n = mg \quad (2.762)$$

οπότε

$$d = \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{\mu_k mg} = \frac{u_i^2 - 2gh}{2\mu_k g} = 1.227 \text{ m} \quad (2.763)$$

### Παράδειγμα 2.101:

Ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\theta = 20^\circ$  έχει ένα ελατήριο σταθεράς  $k = 500 \text{ N/m}$  στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας  $m = 2.5 \text{ kg}$  τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο σε απόσταση  $d = 0.3 \text{ m}$  από το ελατήριο. Από αυτή τη θέση, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα  $u_0 = 0.75 \text{ m/s}$ . Πόσο έχει μετακινηθεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία;



Σχήμα 2.112: Σχήμα Άσκησης 2.101.

**Λύση:** Θεωρούμε ως σύστημα το κουτί. Η συνιστώσα της δύναμης του βάρους που είναι παράλληλη στο επικλινές είναι  $mg \sin \theta$ , και επιταχύνει το σώμα προς τα κάτω, σε απόσταση  $d$  μέχρι να συναντήσει το ελατήριο, όπου και η δύναμη του ελατηρίου αντιτίθεται στη βαρυτική δύναμη και επιβραδύνει το σώμα σε απόσταση  $x$  μέχρι το σώμα να έρθει σε στιγμιαία ακινησία. Η δύναμη του βάρους παράγει θετικό έργο στο σώμα όσο αυτό ολισθαίνει προς τα κάτω σε συνολική απόσταση  $d+x$ , και η δύναμη του ελατηρίου παράγει αρνητικό έργο στο σώμα όσο ολισθαίνει σε απόσταση  $x$ . Υπόλοιπες δυνάμεις δεν παράγουν έργο. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου από τη θέση που το κουτί βάλλεται ως τη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου, έχουμε

$$K_f - K_i = W_g + W_s \quad (2.764)$$

$$\frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = mg(d+x) \sin \theta + \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (2.765)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_i^2 = mg(d+x) \sin \theta + 0 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.766)$$

$$\frac{1}{2}u_i^2 + g(d+x) \sin \theta - \frac{k}{2m}x^2 = 0 \quad (2.767)$$

$$\frac{k}{2m}x^2 - (g \sin \theta)x - \frac{u_i^2}{2} - (g \sin \theta)d = 0 \quad (2.768)$$

$$x = \frac{g \sin \theta \pm \sqrt{(g \sin \theta)^2 - 4 \frac{k}{2m} \left( -\frac{u_i^2}{2} - (g \sin \theta)d \right)}}{2 \frac{k}{2m}} \quad (2.769)$$

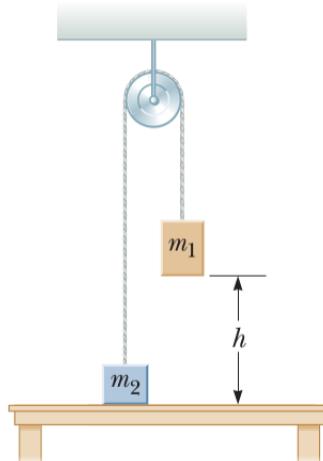
Αντικαθιστώντας και κρατώντας τη θετική λύση, έχουμε

$$x = 0.131 \text{ m} \quad (2.770)$$

**Παράδειγμα 2.102:**

Δυο αντικείμενα συνδέονται με σχοινί που περνά γύρω από μια τροχαλία. Το βάρος της τροχαλίας και του σχοινιού είναι αμελητέα. Το αντικείμενο μάζας  $m_1 = 5 \text{ kg}$ , αρχικά ακίνητο, αφήνεται να πέσει από ύψος  $h = 4 \text{ m}$  πάνω από το τραπέζι. Βρείτε

- (α') την ταχύτητα του σώματος μάζας  $m_2 = 3 \text{ kg}$  τη στιγμή που το σώμα μάζας  $m_1$  χτυπά στο τραπέζι.
- (β') το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα μάζας  $m_2$ .



Σχήμα 2.113: Σχήμα Άσκησης 2.102.

**Λύση:**

(α') Θετούμε  $y = 0$  στην επιφάνεια του τραπέζιού. Η μόνη δύναμη που ασκείται στα σώματα είναι αυτή του βάρους, που είναι συντηρητική. Το σύστημα είναι απομονωμένο. Με χρήση της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στο σύστημα Γη + σώματα, έχουμε

$$(K_A + K_B + U_g)_i = (K_A + K_B + U_g)_f \quad (2.771)$$

με το δείκτη  $f$  να δηλώνει τη στιγμή ακριβώς πριν το μεγάλο σώμα χτυπήσει στην επιφάνεια. Αν θεωρήσουμε ως διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την αρχική διάταξη, τότε

$$0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_f^2 + m_2gh + m_1g(-h) \quad (2.772)$$

και λύνοντας ως προς  $u_f$  έχουμε

$$u_f = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}} = 4.43 \text{ m/s} \quad (2.773)$$

(β') Τώρα εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα του σώματος μάζας  $3 \text{ kg}$  και της Γης κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος ανάμεσα στη στιγμή που το σχοινί αρχίζει να κινείται στην τροχαλία και τη στιγμή που το σώμα μάζας  $3 \text{ kg}$  φτάνει το μέγιστο ύψος του. Το σύστημα είναι απομονωμένο. Άρα θα είναι

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.774)$$

$$0 - \frac{1}{2}m_2u^2 + m_2g\Delta y = 0 \quad (2.775)$$

$$\Delta y = \frac{u^2}{2g} \quad (2.776)$$

$$y_{max} = 4 + \Delta y = 5 \text{ m} \quad (2.777)$$

Παράδειγμα 2.103:

Σε μια βιοφία μια βελόνα μάζας  $m = 5.6$  g εισάγεται στον ιστό του ασθενή με ελατήριο σταθεράς  $k = 375$  N/m. Το ελατήριο είναι αρχικά συμπιεσμένο κατά  $x = 8.1$  cm και εκτοξεύει την βελόνα στην οριζόντια κατεύθυνση. Η βελόνα φεύγει από το ελατήριο και μόλις το ελατήριο φτάνει στο φυσικό του μήκος, διεισδύει  $d_1 = 2.4$  cm μέσα στον ιστό, ο οποίος ασκεί σε αυτήν δύναμη αντίστασης 7.6 N. Στη συνέχεια η βελόνα εισχωρεί  $d_2 = 3.5$  cm σε ένα όργανο, το οποίο της ασκεί δύναμη αντίστασης 9.2 N. Να βρείτε:

- (α') τη μέγιστη ταχύτητα της βελόνας.
- (β') την τελική της ταχύτητα, προτού σταματήσει απότομα (λόγω ενός κολάρου που είναι προσαρμοσμένο πάνω της) μετά από 5.9 cm συνολικής διείσδυσης.

Λύση:

(α') Θεωρούμε ως σύστημα τη βελόνα και το ελατήριο. Η μέγιστη ταχύτητα συμβαίνει ακριβώς πριν η βελόνα εισέλθει στο σώμα. Υποθέτουμε ότι η βελόνα εισέρχεται σε οριζόντια διεύθυνση. Τότε από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας μεταξύ της θέσης συμπίεσης του ελατηρίου και της θέσης που η βελόνα μόλις αποχωρίζεται το ελατήριο (οπότε και το σύστημα είναι απομονωμένο), έχουμε

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.778)$$

$$K_f - K_i + U_f - U_i = 0 \quad (2.779)$$

$$K_f = K_i - U_f + U_i \quad (2.780)$$

$$\frac{1}{2}mu_{max}^2 = 0 - 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.781)$$

$$u_{max} = 6.62 \text{ m/s} \quad (2.782)$$

(β') Μπορούμε να θεωρήσουμε τις δυνάμεις αντίστασης ως “τριβές”. Η ενέργεια του πρώτου ερωτήματος μετατρέπεται εν μέρει σε εσωτερική ενέργεια στο μαλακό ιστό, εν μέρει σε εσωτερική ενέργεια στα όργανα, και εν μέρει σε κινητική ενέργεια της βελόνας ακριβώς πριν σταματήσει. Θεωρούμε ως σύστημα τη βελόνα + ελατήριο, και αυτό είναι ένα μη απομονωμένο σύστημα. Ας γράψουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για αυτό το πρόβλημα, από την αρχική θέση συμπίεσης του ελατηρίου ως την τελική θέση της βελόνας, ακριβώς πριν σταματήσει μετά τη διείσδυση στους ιστούς:

$$\Delta E_{system} = \sum W_{ext} \quad (2.783)$$

$$\Delta K + \Delta U_s = W_{fk1} + W_{fk2} \quad (2.784)$$

$$K_f - K_i + U_{s_f} - U_{s_i} = -f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 \quad (2.785)$$

$$\frac{1}{2}mu_f^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 \quad (2.786)$$

$$u_f = \frac{-f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 + \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}m} \quad (2.787)$$

$$u_f = 5.1 \text{ m/s} \quad (2.788)$$

Παράδειγμα 2.104:

Ένα ελατήριο με σταθερά  $k = 200$  N/m είναι σταθεροποιημένο στην κορυφή λείου κεκλιμένου υπό γωνία  $\theta = 40^\circ$  μοιρών. Ένα σώμα μάζας 1.0 kg εκτοξεύεται προς τα πάνω στο κεκλιμένο, από αρχική θέση που απέχει  $d = 0.6$  m από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, και που έχει κινητική ενέργεια  $K_i = 16.0$  J.

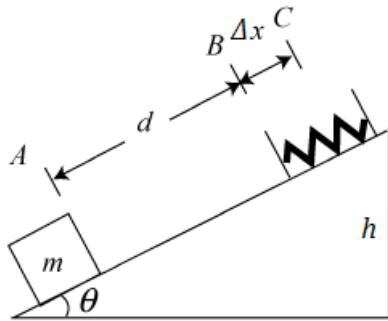
(α') Ποιά είναι η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο

κατά 0.20 m;

(β') Με πόση κινητική ενέργεια πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα προς τα πάνω στο κεκλιμένο αν θέλουμε να σταματήσει στιγμιαία όταν έχει συμπιέσει το ελατήριο κατά 0.4 m;

Βοήθεια: Εφαρμόστε ενεργειακό θεώρημα στο σύστημα Γη+σώμα+ελατήριο, στις κατάλληλες θέσεις. Θεωρήστε μια κατάλληλη διάταξη μηδενικής βαρυτικής (και ελαστικής) δυναμικής ενέργειας.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα+Γη+ελατήριο}, το οποίο είναι απομονωμένο, και σε αυτό δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις (δύναμη ελατηρίου και δύναμη βάρους). Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική θέση της διάταξης. Δείτε το Σχήμα 2.114.



Σχήμα 2.114: Λύση Άσκησης 2.104.

(α') Από την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (A) και τελικής θέσης (συμπίεση ελατηρίου κατά 0.2) (C), έχουμε

$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \quad (2.789)$$

$$16 + 0 + 0 = K_f + mgh + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.790)$$

$$K_f = 16 - mgh - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.791)$$

$$= 16 - mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.792)$$

$$= 16 - 1 \cdot 9.8 \cdot 0.514 \cdot \sin(40^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (0.2)^2 \quad (2.793)$$

$$= 6.96 \text{ J} \quad (2.794)$$

(β') Από την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (A) και της θέσης συμπίεσης κατά 0.4 (C), έχουμε

$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \quad (2.795)$$

$$K_i + 0 + 0 = 0 + mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.796)$$

$$K_i = mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.797)$$

$$= 1 \cdot 9.8 \cdot 0.64279 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (0.4)^2 \quad (2.798)$$

$$= 22.2 \text{ J} \quad (2.799)$$

Παράδειγμα 2.105:

Ψάχνοντας το οικογενειακό σας αρχείο, βρίσκετε ένα βίντεο που δείχνει τον εαυτό σας σε μικρή ηλικία να κάνει τσουλήθρα στο πάρκο. Αν τότε είχατε βάρος 267 N και η τσουλήθρα είχε μήκος 6.1 m, σχηματίζοντας γωνία  $20^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο

(α') πόση ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια κατά την ολίσθησή σας από την κορυφή ως τη βάση, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ εσάς και της τσουλήθρας είναι 0.10;

(β') αν ξεκινάτε από την κορυφή της τσουλήθρας με αρχική ταχύτητα 0.457 m/s, ποιά η ταχύτητά σας στο τέρμα της τσουλήθρας;

Βοήθεια: Για το (β) ερώτημα, θεωρήστε ως σύστημα εσάς, την τσουλήθρα, και τη Γη. Θεωρήστε κατάλληλη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Λύση: Θεωρούμε ως σύστημα {εσάς + τσουλήθρα}, και έναν άξονα  $x'$  παράλληλα με το κεκλιμένο της τσουλήθρας. Έστω  $h$  το ύψος της τσουλήθρας και  $d = 6.1$  το μήκος της.

(α') Ισορροπούμε στον άξονα  $y'$  κατά την κατάβαση, οπότε

$$\sum F_y = 0 \iff n - mg \cos(\theta) = 0 \iff n = mg \cos(\theta) \quad (2.800)$$

Η μεταβολή στη θερμική ενέργεια είναι

$$\Delta E_{therm} = f_k d = \mu_k mg \cos(\theta) d = 153.04 \text{ J} \quad (2.801)$$

(β') Θεωρούμε ως σύστημα {εσάς, την τσουλήθρα, και τη Γη}. Το σύστημα είναι απομονωμένο με εσωτερικές συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις να δρουν εντός του. Θεωρούμε διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας όταν φτάνετε στη βάση της τσουλήθρας. Από την ΑΔΕ μεταξύ της διάταξης στην κορυφή της τσουλήθρας και στη βάση της τσουλήθρας, έχουμε

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{therm} = 0 \quad (2.802)$$

$$K_f - K_i + U_{g_f} - U_{g_i} + \Delta E_{therm} = 0 \quad (2.803)$$

$$K_f = \frac{1}{2}mu_i^2 + mgh - 0 - 153.04 \quad (2.804)$$

$$= \frac{1}{2}mu_i^2 + mgd \sin(\theta) - 153.04 \quad (2.805)$$

$$u_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mu_i^2 + mgd \sin(\theta) - 153.04}{\frac{1}{2}m}} \quad (2.806)$$

$$= 5.4876 \text{ m/s} \quad (2.807)$$

### 3. Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

#### 3.1 Εισαγωγή

Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από της έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων. Για παράδειγμα:

- Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να ταλαντώνονται
- Η ραδιοφωνία και η τηλεόραση βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσης τους
- Η ίδια η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
- Ο ήχος και η φωνή παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις

#### 3.2 Περιοδική Κίνηση

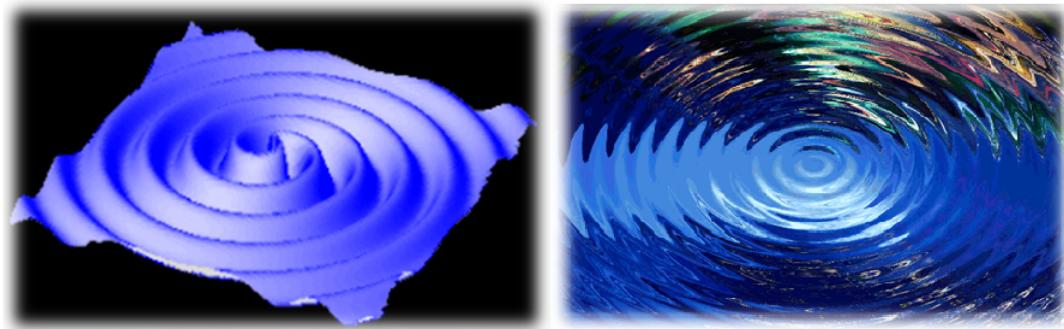
Ονομάζουμε περιοδική κίνηση την κίνηση ενός σώματος όταν επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά σταύρεά χρονικά διαστήματα. Μπορείτε να σκεφτείτε πολλές περιοδικές κινήσεις από την καθημερινότητα σας: οι δείκτες του ρολογιού εκτελούν περιοδική κίνηση, η Γη που κινείται γύρω από τον Ήλιο, οι διαλέξεις ενός μαθήματος, και τόσα άλλα. Μαθηματικά, ως περιοδική ορίζεται μια συνάρτηση  $f(t)$  όταν ικανοποιεί τη σχέση

$$f(t) = f(t+T), \quad \text{για } T > 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.1)$$

με  $T$  να αποτελεί το μικρότερο χρονικό διάστημα που το σώμα επαναλαμβάνει την κίνηση του και ονομάζεται περίοδος της κίνησης.

Το δεύτερο όμως αντικείμενο της μελέτης μας είναι το κύμα. Τι είναι ένα κύμα; Κύμα ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και στο χρόνο. Η διαταραχή αυτή είναι, θεωρητικά, περιοδική κι έτσι και τα κύματα θεωρούνται περιοδικά φαινόμενα: αυτό που επαναλαμβάνεται είναι η ίδια η διαταραχή. Ο όρος “κύμα” χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής αυτής διαμέσω ενός μέσου (νερού, αέρα, νήματος, κλπ). Ένα συνθετικό και ένα πραγματικό κύμα βλέπετε στο Σχήμα 3.1.

Γιατί όμως πρέπει να μελετήσουμε πρώτα τις ταλαντώσεις αντί να πάμε κατ’ ευθείαν στα πιο ενδιαφέροντα κύματα; Γιατί όλες (σχεδόν) οι περιοδικές κινήσεις, συμπεριλαμβανομένων και πολύ σύνθετων κυμάτων, μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα απλών αρμονικών κινήσεων, δηλ. ταλαντώσεων! Ας κάνουμε λοιπόν πρώτα μια περιήγηση στο αντικείμενο των απλών αρμονικών ταλαντώσεων.



Σχήμα 3.1: Κύματα.

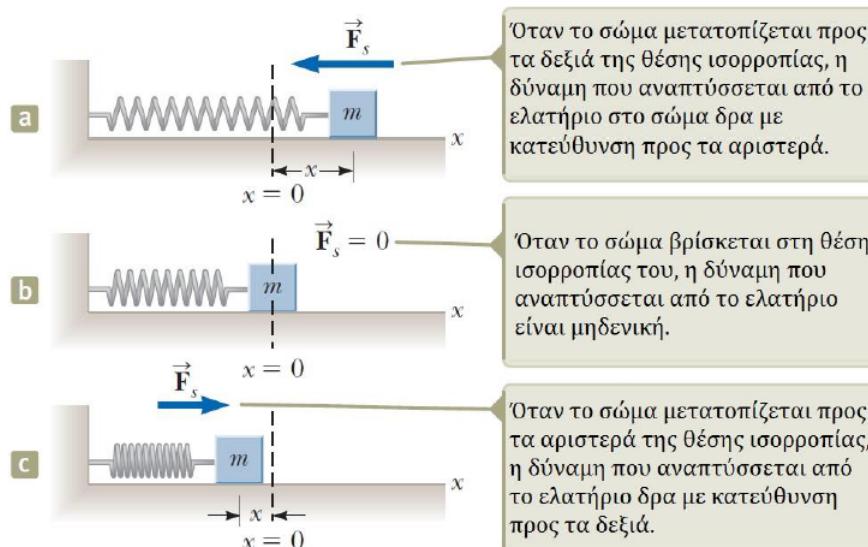
### 3.3 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ως Απλή Αρμονική Ταλάντωση (AAT) ονομάζεται η περιοδική κίνηση στην οποία η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα είναι ανάλογη της θέσης ενός σώματος του συστήματος, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας του συστήματος, και έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Όλες οι περιοδικές κινήσεις που συμβαίνουν στη φύση μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άνθροισμα απλών αρμονικών κινήσεων.

Αν δίναμε έναν πιο ακριβή ορισμό, θα λέγαμε ότι όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σώμα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση ή Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση! Ποιά είναι αυτή;

#### 3.3.1 Η κίνηση του σώματος - ελατηρίου ως AAT

Μα φυσική η κίνηση του συστήματος {σώμα + ελατήριο}. Ας τη μελετήσουμε. Δείτε το Σχήμα 3.2 και διαβάστε προσεκτικά την περιγραφή κάθε στιγμιοτύπου. Μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά την κίνηση



Σχήμα 3.2: AAT σώματος + ελατηρίου.

του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο; Εφόσον είναι ένα σώμα σε κίνηση υπό επίδραση δύναμης, θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση, κι έτσι

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_s = m\vec{a}_x \implies F_s = -kx = ma_x \implies a_x = -\frac{k}{m}x \quad (3.2)$$

Βλέπετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της μετατόπισης από μια θέση ισορροπίας και η κατεύθυνση της είναι αντίθετη της μετατόπισης από αυτή τη θέση. Τα παραπάνω αποτελούν έναν ακόμα ορισμό της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης.

### 3.3.2 Θέση AAT

Ξέρουμε από την Κινητική ότι η επιτάχυνση αποτελεί τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο, δηλ.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad (3.3)$$

Θέτοντας ως  $\omega^2 = k/m$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2x(t) \quad (3.4)$$

Τέτοιες εξισώσεις που εμπλέκουν παραγώγους μιας συνάρτησης ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις. Η λύση τέτοιων εξισώσεων είναι δε θα μας απασχολήσει. Μπορούμε όμως να σκεφτούμε διαισθητικά ότι η εξισώση (3.4) ικανοποιείται από μια συνάρτηση  $x(t)$  της οποίας η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο είναι η ίδια συνάρτηση επί ένα συντελεστή  $-\omega^2$ . Αν σκεφτούμε λίγο, μπορούμε να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση:

$$x(t) = \cos(\lambda t) \implies \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\lambda^2 \cos(\lambda t) = -\lambda^2 x(t) \quad (3.5)$$

Άρα η ημιτονοειδής συνάρτηση είναι μια λύση της εξισώσης αυτής. Στη γενικότερη μορφή της, η λύση της διαφορικής εξισώσης είναι της μορφής

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.6)$$

με

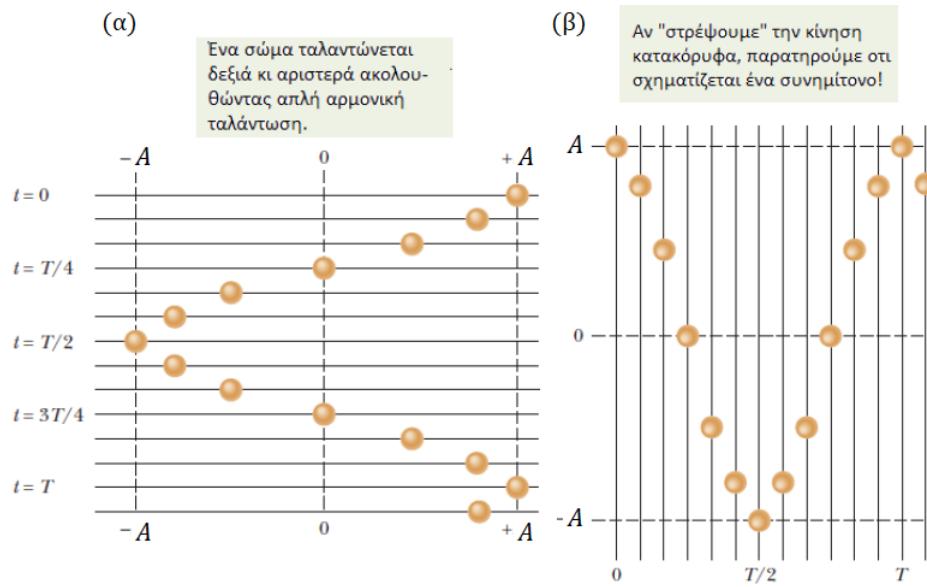
- $A$  το πλάτος της ταλάντωσης
- $\omega$  τη συχνότητα της ταλάντωσης
- $\phi$  την αρχική φάση ή τη φάση μετατόπισης της ταλάντωσης
- $\omega t + \phi$  τη φάση της ταλάντωσης

Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι η θέση του σώματος όσο αυτό ταλαντώνεται γύρω από μια θέση ισορροπίας μεταβάλλεται ημιτονοειδώς ως προς το χρόνο! Αν φωτογραφήσουμε το ταλαντούμενο σώμα με την πάροδο του χρόνου, θα δούμε μια εικόνα όπως στο Σχήμα 3.3(a), στην οποία η αρχική θέση του σώματος ήταν σε μια θέση  $x(0) = A$ . Η εικόνα δείχνει τη θέση του σώματος όταν εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση, δηλ. όταν επιστρέψει μια φορά στην αρχική του θέση. Η εικόνα στο Σχήμα 3.3(a) είναι μια συνάρτηση χρόνου-πλάτους. Θα προτιμούσαμε το χρόνο στον οριζόντιο άξονα, οπότε αν στρέψουμε την εικόνα όπως στο Σχήμα 3.3(b), θα παρατηρήσουμε ακριβώς μια ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου! Τι σημαίνουν όμως οι σταθερές που εμφανίζονται στη συνάρτηση θέσης  $x(t)$ ;

- Η συχνότητα ταλάντωσης ή γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

Ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σώμα και μετριέται σε rad/s. Θα δούμε ξανά τη σχέση αυτή σε σχέση με την κυκλική κίνηση λίγο αργότερα. Προσέξτε ότι η εξισώση περιλαμβάνει τις ποσότητες  $k$ ,  $m$ , οπότε αφορά μόνο ταλαντώσεις που μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σύστημα ελατηρίου-σώματος.



Σχήμα 3.3: Στιγμιότυπα απλής αρμονικής ταλάντωσης.

- Η περίοδος  $T$  ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση και ισούται με

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.8)$$

με την τελευταία σχέση να αφορά ξανά συστήματα που μοντελοποιούνται ως ελατήριο και σώμα.

- Η γραμμική συχνότητα  $f$  ορίζεται ως

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.9)$$

και ορίζει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου - ξανά η τελευταία εξίσωση είναι ειδική περίπτωση για το σύστημα ελατήριο-σώμα. Η συχνότητα αυτή μετριέται σε Herz - Hz. Η σχέση γωνιακής συχνότητας και γραμμικής συχνότητας είναι απλή:  $\omega = 2\pi f$ .

Μια μικρή προσοχή χρειάζεται η ποσότητα της αρχικής φάσης  $\phi$ . Θέτοντας  $t = 0$  παίρνουμε

$$x(0) = A \cos(\phi) \quad (3.10)$$

οπότε ουσιαστική η αρχική φάση  $\phi$  καθορίζει ποιά είναι η τιμή της συνάρτησης θέσης του σώματος όταν πατάμε το χρονόμετρο και ξεκινάμε να μελετάμε το φαινόμενο της ταλάντωσης. Με άλλα λόγια, μας λέει σε ποιά θέση βρίσκεται το ταλαντούμενο σώμα όταν ξεκινάμε ( $t = 0$ ) να μελετάμε την ταλάντωση: η θέση του μπορεί να είναι δεξιά του σημείου ισορροπίας ( $\cos(\phi) > 0$ ) ή και αριστερά του σημείου ισορροπίας ( $\cos(\phi) < 0$ ) - φυσικά μπορεί να είναι και ακριβώς στο σημείο ισορροπίας ( $\cos(\phi) = 0$ ).

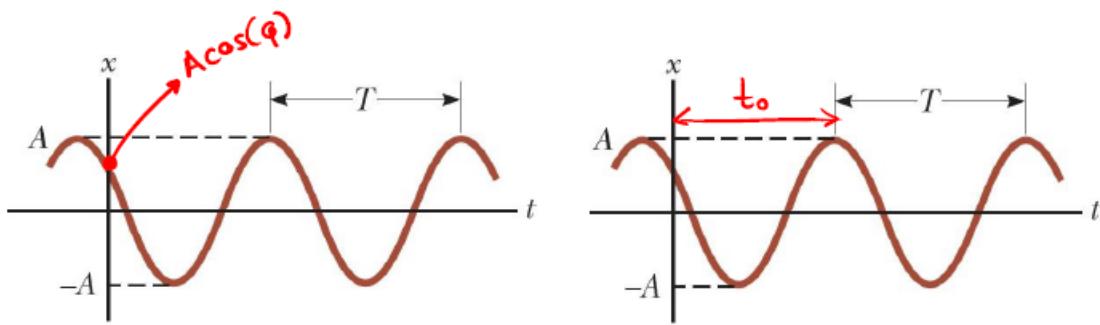
Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε τη γενική σχέση της θέσης  $x(t)$  ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.11)$$

$$= A \cos(\omega(t + \phi/\omega)) \quad (3.12)$$

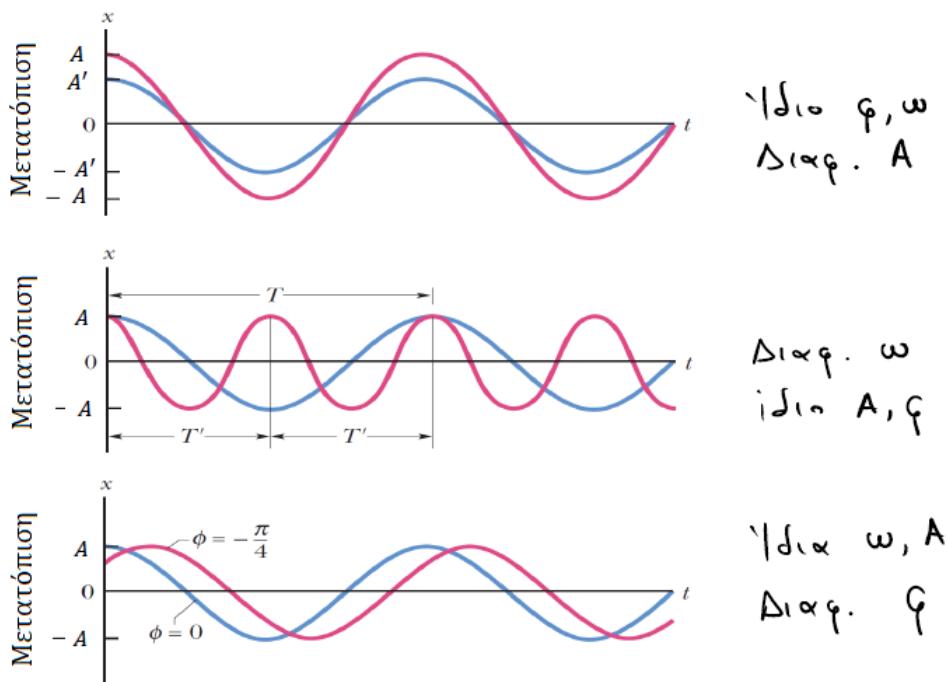
$$= A \cos(\omega(t - t_0)) \quad (3.13)$$

με  $t_0 = -\frac{\phi}{\omega}$ . Βλέπετε ότι η χρονική στιγμή  $t_0$  μας δείχνει τη χρονική μετατόπιση σε δευτερόλεπτα της συνάρτησης  $A \cos(\omega t)$  από τη θέση όπου  $t = 0$ . Αυτή η χρονική στιγμή περιέχει την αρχική φάση  $\phi$ , γι' αυτό και



Σχήμα 3.4: Αρχική φάση ταλάντωσης.

πολλές φορές η αρχική φάση ονομάζεται και φάση μετατόπισης. Αυτές οι δύο ερμηνείες της αρχικής φάσης φιλονονται στο Σχήμα 3.4. Παρ' όλου που οι υπόλοιπες σταθερές είναι σχετικά κατανοητές από τους ορισμούς τους, ας δούμε ένα σχήμα και για αυτές. Δείτε το Σχήμα 3.5 και προσέξτε πως οι μεταβολές στις σταθερές αυτές αντικατοπτρίζονται στο γράφημα της συνάρτησης θέσης  $x(t)$ .



Σχήμα 3.5: Μεταβολές στις σταθερές της συνάρτησης θέσης.

### 3.3.3 Ταχύτητα και Επιτάχυνση ΑΑΤ

Εανά Κινητική έρχεται προς βοήθειά μας αν βρούμε πόσο γρήγορα κινείται ένα σώμα που εκτελεί ΑΑΤ. Από τις σχέσεις

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (3.14)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.15)$$

μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.16)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.17)$$

Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή. Οι μέγιστες τιμές που μπορούν να πάρουν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι

$$u_{max} = \omega A = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.18)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = A \frac{k}{m} \quad (3.19)$$

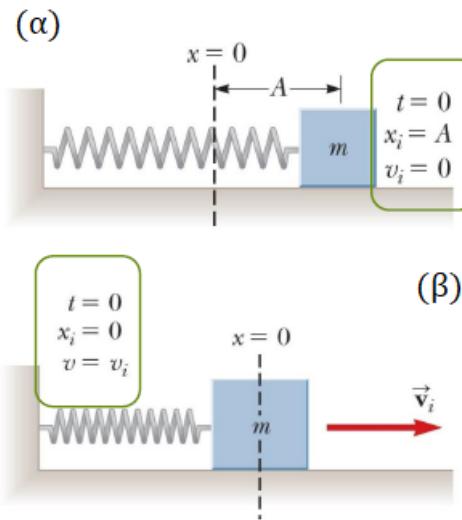
με τις τελευταίες σχέσεις να αφορούν σύστημα ελατήριο-σώμα.

### 3.3.4 Λύση ΑΑΤ

Θα παρατηρήσατε ότι όλη η συζήτηση ως τώρα είχε ως βάση τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την ΑΑΤ. Σε ένα δεδομένο πρόβλημα όμως, θέλουμε να βρούμε ακριβώς τη σχέση που περιγράφει τη θέση, την ταχύτητα, και την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ. Πώς θα το κάνουμε αυτό;

Ας ξεκινήσουμε από τα εύκολα: οι ποσότητες  $k, m$  καθορίζουν τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , κι αυτές είναι σταθερές σε κάθε περίπτωση. Αντίθετα, το πλάτος  $A$  και η αρχική φάση  $\phi$  καθορίζονται από τη στιγμή που πατάμε το χρονόμετρο και παραχολουθούμε την ταλάντωση ή, με άλλα λόγια, τι συμβαίνει στην ταλάντωση για  $t = 0$ . Το τελευταίο μοντελοποιείται στην ΑΑΤ με τις περιφημες αρχικές συνθήκες, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο εξισώσεων που μας περιγράφει την κατάσταση της ΑΑΤ για  $t = 0$ . Ας δούμε δυο παραδείγματα για να γίνει κατανοητό αυτό.

Δείτε το Σχήμα 3.6(a). Για  $t = 0$ , το σώμα βρίσκεται στη θέση  $x(0) = A$  και η ταχύτητα του είναι



Σχήμα 3.6: Παραδείγματα εύρεσης της εξίσωσης της ΑΑΤ.

μηδενική,  $u(0) = 0$ . Άρα καταλαβαίνουμε ότι το ελατήριο βρίσκεται σε πλήρη έκταση και στιγμιαία το σώμα έχει ακινητοποιηθεί πριν αρχίσει την επιστροφή του προς τη θέση ισορροπίας. Οι δύο αυτές εξισώσεις αποτελούν τις αρχικές συνθήκες της ΑΑΤ:

$$x(0) = A \quad (3.20)$$

$$u(0) = 0 \quad (3.21)$$

Παρατηρήστε ότι οι αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης αποτελούνται από μια τιμή της  $x(t)$  και μια τιμή της  $\frac{d}{dt}x(t) = u(t)$ : και οι δύο για  $t = 0$ . Ας τις οξιοποιήσουμε.

$$x(0) = A \cos(\phi) = A \quad (3.22)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0 \quad (3.23)$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις (εδώ τυγχάνει να αρκεί και η πρώτη σχέση μόνο) συμπεραίνουμε ότι  $\phi = 0$ . Έτσι η ΑΑΤ περιγράφεται από τη σχέση

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (3.24)$$

Δείτε τώρα το Σχήμα 3.6(β). Σε αυτήν την περίπτωση, πατήσαμε το χρονόμετρο μας όταν το σώμα περνά από το σημείο ισορροπίας και κατευθύνεται προς τα δεξιά. Οι αρχικές μας συνθήκες τώρα είναι οι

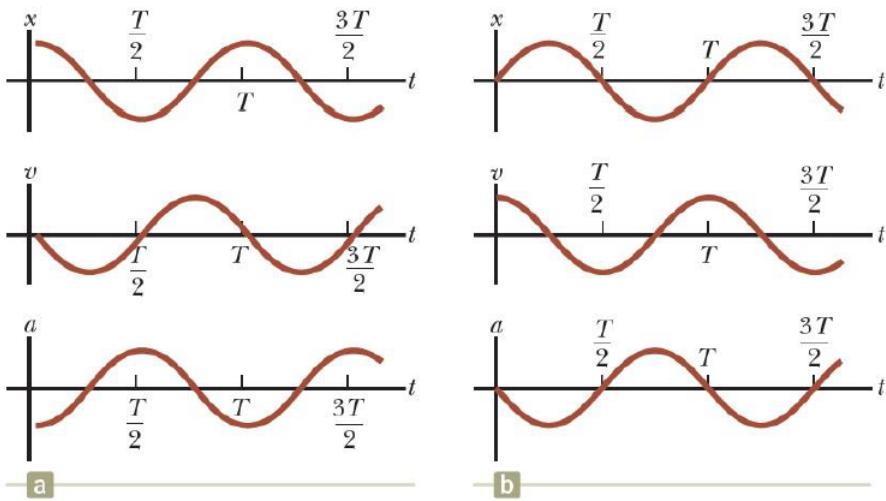
$$x(0) = A \cos(\phi) = 0 \quad (3.25)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = u_i \quad (3.26)$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης δίνει δύο τιμές,  $\pi/2$  και  $-\pi/2$ . Η δεύτερη εξίσωση έρχεται να μας κάνει τη λύση μοναδική, αφού η ταχύτητα είναι θετική (το διάνυσμα κατευθύνεται προς τα δεξιά), οι ποσότητες  $\omega$ ,  $A$  είναι θετικές, άρα πρέπει το  $\sin(\phi)$  να είναι αρνητικό, που ισχυει για  $\phi = -\pi/2$ . Έτσι η σχέση που περιγράφει την ταλάντωση είναι η

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{u_i}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.27)$$

Βλέπετε λοιπόν πως οι αρχικές συνθήκες μας δίνουν μοναδική λύση στη διαφορική εξίσωση που περιγράφει γενικά την ΑΑΤ. Τα γραφήματα θέσης, ταχύτητας, και επιτάχυνσης που παράγονται στις δύο αυτές περιπτώσεις δίνονται στο Σχήμα 3.7. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι η μέγιστη, κατ' απόλυτη τιμή, ταχύτητα συμβαίνει



Σχήμα 3.7: Γραφήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για τις δύο περιπτώσεις του κειμένου.

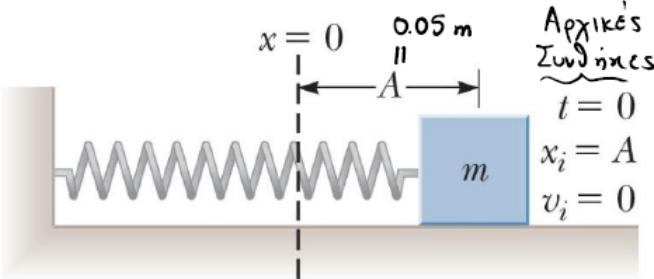
όταν  $x(t) = 0$ , ενώ η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή επιτάχυνση συμβαίνει όταν  $x(t) = \pm A$ , δηλ. όταν το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη έκτασή του.

Ας δούμε ένα απλό αλλά πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1:

Ένα σώμα μάζας  $m = 0.2 \text{ kg}$  είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά του είναι  $k = 5 \text{ N/m}$ . Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο, όπως στο Σχήμα 3.8.

- (α') Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
- (β') Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- (γ') Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
- (δ') Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Σχήμα 3.8: Παράδειγμα ταλάντωσης με σώμα σε ελατήριο.

Λύση:

- (α') Η περίοδος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} \quad (3.28)$$

- (β') Η μέγιστη ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_{max} = \omega A = 5A = 5 \times 0.05 = 0.25 \text{ m/s} \quad (3.29)$$

- (γ') Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση

$$a_{max} = \omega^2 A = 25A = 25 \times 0.05 = 1.25 \text{ m/s}^2 \quad (3.30)$$

- (δ') Ξέρουμε ότι  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$x(0) = A \cos(\phi) = 0.05 \quad (3.31)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0 \quad (3.32)$$

Η δεύτερη σχέση μας δίνει δυο τιμές για την αρχική φάση,  $\phi = 0$  και  $\phi = \pi$ . Όμως για  $\phi = \pi$ ,  $x(0) = A \cos(\pi) = 0.05 \Rightarrow A = -0.05$ , όμως το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης πρέπει να είναι πάντα θετικός αριθμός. Άρα υποχρεωτικά,  $\phi = 0$ , οπότε  $A = 0.05$ . Έτσι, συνολικά θα έχουμε

$$x(t) = 0.05 \cos(5t) \quad (3.33)$$

$$u(t) = -0.25 \sin(5t) \quad (3.34)$$

$$a(t) = -1.25 \cos(5t) \quad (3.35)$$

**Παράδειγμα 3.2:**

Τι αλλάζει στα ερωτήματα του προηγούμενου παραδείγματος αν  $u_i = -0.1 \text{ m/s}$ ; Με άλλα λόγια, αν το σώμα μετατοπιστεί κατά 5 cm από τη ύσηση ισορροπίας αλλά του δίνεται μια αρχική ταχύτητα  $u_i = -0.1 \text{ m/s}$ , αντί να αφεθεί.

Λύση: Οπωσδήποτε δεν αλλάζει η περίοδος και η συχνότητα καθώς αυτές δεν εξαρτώνται από το πλάτος και την αρχική φάση του ταλαντωτή. Αφού δίνεται αρχική ταχύτητα στο σώμα, περιμένουμε το πλάτος της ταλάντωσης να είναι μεγαλύτερο από 0.05 m που ήταν πριν. Τώρα οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x(0) = A \cos(\phi) = 0.05 \quad (3.36)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = -0.1 \quad (3.37)$$

Διαμρώντας κατά μέλη

$$-\omega \tan(\phi) = -2 \iff \tan(\phi) = \frac{2}{5} \implies \phi \approx 0.12\pi \quad (3.38)$$

Οπότε

$$A \cos(0.12\pi) = 0.05 \implies A = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \approx 0.054 \text{ m} \quad (3.39)$$

Τέλος

$$u_{max} = \omega A = 0.27 \text{ m/s} \quad (3.40)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = 1.35 \text{ m/s}^2 \quad (3.41)$$

και

$$x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi) \quad (3.42)$$

$$u(t) = -0.27 \sin(5t + 0.12\pi) \quad (3.43)$$

$$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi) \quad (3.44)$$

**Παράδειγμα 3.3:**

Η ανθρώπινη όραση θολώνει αν το κέφαλι σας δονείται με συχνότητα 29 Hz, γιατί οι δονήσεις προκαλούν συντονισμό στο σύστημα “μάτι-μυς που το συγκρατεί στη ύσηση του”. Αν η μάζα του ματιού σας είναι 7.5 gr, και ο μυς που το συγκρατεί μοντελοποιηθεί ως ελατήριο, δείξτε ότι η σταθερά του ελατηρίου είναι  $k \approx 250 \text{ N/m}$ .

Λύση: Δεδομένης της μάζας και της συχνότητας συντονισμού, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά ελατηρίου από τη σχέση

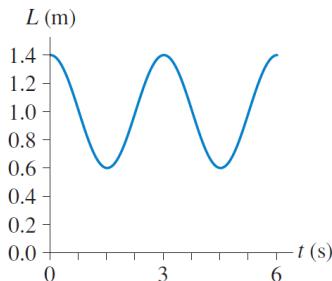
$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.45)$$

Άρα

$$k = (2\pi f)^2 m = (2\pi 29)^2 \times 7.5 \times 10^{-3} = 249 \text{ N/m} \approx 250 \text{ N/m} \quad (3.46)$$

### Παράδειγμα 3.4:

Οι αστροναύτες στο διάστημα δεν μπορούν να ζυγιστούν χρησιμοποιώντας κοινές ζυγαριές που έχουμε στα σπίτια μας.



Σχήμα 3.9: Μήκος ελατηρίου σε ζύγισμα αστροναύτη.

Αντίθετα, μετρούν τη μάζα τους ταλαντούμενοι σε ένα μεγάλο ελατήριο. Υποθέστε ότι ένας αστροναύτης δένει στη ζώνη του ένα μεγάλο ελατήριο, και την άλλη του σε ένα γάντζο στον τοίχο του διαστημικού σταθμού. Ένας συνάδελφος αστροναύτης τον τραβάει μωκριά από τον τοίχο, και τον αφήνει ελεύθερο. Το μήκος του ελατηρίου συναρτήσει του χρόνου δίνεται στο Σχήμα 3.9.

(α') Ποια είναι η μάζα του αστροναύτη αν η σταθερά του ελατηρίου είναι  $240 \text{ N/m}$ ;

(β') Ποιά είναι η ταχύτητα του αστροναύτη καθώς αυτός ταλαντώνεται, όταν το μήκος του ελατηρίου είναι για πρώτη φορά  $1.2 \text{ m}$ ;

Λύση: Ο αστροναύτης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(α') Από το σχήμα, έχουμε ότι η περίοδος είναι  $T = 3 \text{ s}$ . Άρα

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k = 55 \text{ kg} \quad (3.47)$$

(β') Παρατηρούμε ότι οι ταλαντώσεις συμβαίνουν γύρω από ένα σημείο ισορροπίας πλάτους  $1.0 \text{ m}$ . Από το γράφημα,  $A = \frac{1}{2}0.8 = 0.4 \text{ m}$ ,  $\phi = 0$ , και  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.1 \text{ rad/s}$ . Η εξίσωση για τη θέση του αστροναύτη είναι

$$x(t) = 1 + A \cos(\omega t + 0) \quad (3.48)$$

$$= 1 + 0.4 \cos(2.1t) \quad (3.49)$$

$$1.2 = 1 + 0.4 \cos(2.1t) \quad (3.50)$$

$$\cos(2.1t) = 0.5 \Rightarrow t = 0.5 \text{ s} \quad (3.51)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του αστροναύτη είναι

$$u_x(t) = -A\omega \sin(\omega t) \Rightarrow v_{0.5} = -0.4 \times 2.1 \times \sin(2.1 \times 0.5) = -0.73 \text{ m/s} \quad (3.52)$$

### Παράδειγμα 3.5:

Ένας μετατροπέας υπερήχων, από αυτούς που χρησιμοποιούνται στην ιατρική απεικόνιση (Σχήμα 3.10), ουσιαστικά δεν είναι τίποτα άλλο από έναν πολύ λεπτό δίσκο μάζας  $m = 0.0001 \text{ kg}$  ο οποίος κινείται μπρος - πίσω βρισκόμενος σε απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα  $1.0 \text{ MHz}$  οδηγούμενος από ένα ηλεκτρομαγνητικό πηνίο.



Σχήμα 3.10: Μετατροπέας Υπερήχων.

- (α') Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που μπορεί να εφαρμοστεί στο δίσκο χωρίς να τον καταστρέψει είναι 40.000 N. Ποιό είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης σε αυτήν την περίπτωση;
- (β') Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα του δίσκου υπό αυτό το πλάτος ταλάντωσης;

Λύση:

- (α') Ο δίσκος υπόκειται σε απλή αρμονική κίνηση. Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε

$$F_s = ma_{max} \iff 4000 = 0.1 \times 10^{-3} a_{max} \iff a_{max} = 4 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (3.53)$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$a_{max} = \omega^2 A \iff A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = 1.01 \times 10^{-5} \text{ m} \quad (3.54)$$

- (β') Η μέγιστη ταχύτητα δύναται ως

$$u_{max} = \omega A = 2\pi f A = 2\pi(1 \times 10^6)(1.01 \times 10^{-5}) = 64 \text{ m/s} \quad (3.55)$$

### Παράδειγμα 3.6:

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής αποτελείται από ένα σώμα μάζας 2.0 κιλών συνδεδεμένο σε ελατήριο σταθεράς 100 N/m. Όταν  $t = 1.0$  s, η θέση και η ταχύτητα του σώματος είναι  $x = 0.129$  m και  $u = 3.415$  m/s.

- (α') Ποιό είναι το πλάτος της ταλάντωσης;
- (β') Ποιά είναι η θέση του σώματος όταν  $t = 0$ ;
- (γ') Ποιά είναι η ταχύτητα του σώματος όταν  $t = 0$ ;

Λύση:

- (α') Η θέση και η ταχύτητα του ταλαντωτή δίνεται από τις σχέσεις

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.56)$$

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.57)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{u(t)}{x(t)} = -\omega \tan(\omega t + \phi) \quad (3.58)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τη συνολική φάση  $\omega t + \phi$ , ως

$$\omega t + \phi = \tan^{-1} \frac{-u(t)}{\omega x(t)} \quad (3.59)$$

και για  $t = 1.0$  s

$$\omega(1.0) + \phi = \tan^{-1} \frac{-3.415}{7.07 \times 0.129} = -1.31 \text{ rad} \quad (3.60)$$

$$\text{αφού } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7.07 \text{ rad/s. Άρα}$$

$$x(1.0) = A \cos(-1.31) \iff 0.129 = A \cos(-1.31) \implies A = 0.5 \text{ m} \quad (3.61)$$

(β') Αφού βρήκαμε ότι

$$\omega t + \phi \Big|_{t=1.0} = -1.31 \quad (3.62)$$

μπορούμε να λύσουμε ως προς  $\phi$ . Οπότε

$$\phi = -8.38 \text{ rad} \quad (3.63)$$

Άρα

$$x(0) = 0.5 \cos(\omega \cdot 0 - 8.38) = 0.5 \cos(-8.38) = -0.251 \text{ m} \quad (3.64)$$

(γ') Αντίστοιχα,

$$u(0) = -\omega A \sin(\omega \cdot 0 - 8.38) = -(7.07 \cdot 0.5) \sin(-8.38) = 3.06 \text{ m/s} \quad (3.65)$$

### 3.3.5 Ενέργεια ΑΑΤ

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να εξετάσουμε ενεργειακά τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή. Γνωρίζουμε ήδη τα είδη ενέργειας και τις σχέσεις που τις εκφράζουν. Ας τις δούμε. Η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι

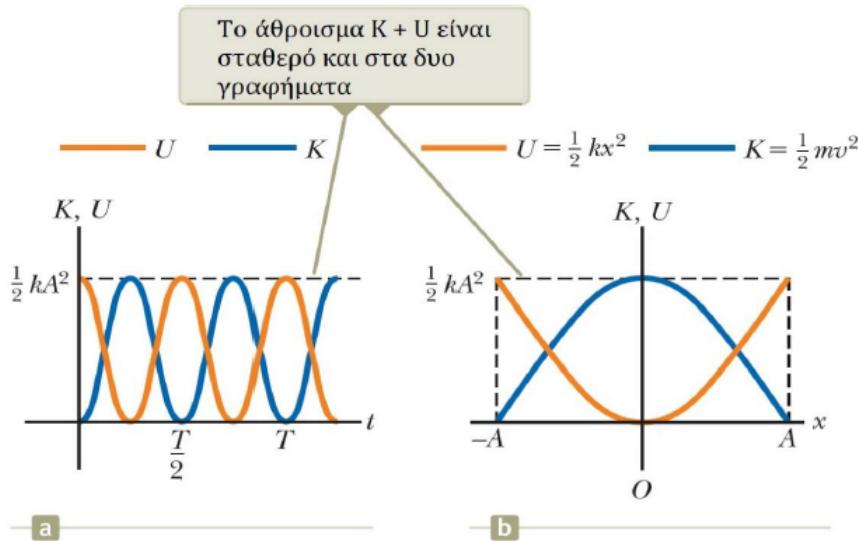
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (3.66)$$

ενώ η ελαστική δύναμική του ενέργεια θα είναι

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3.67)$$

Δεδομένου ότι εξετάζουμε την ΑΑΤ απουσία τριβών και ότι γνωρίζουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο+σώμα διατηρείται. Είναι

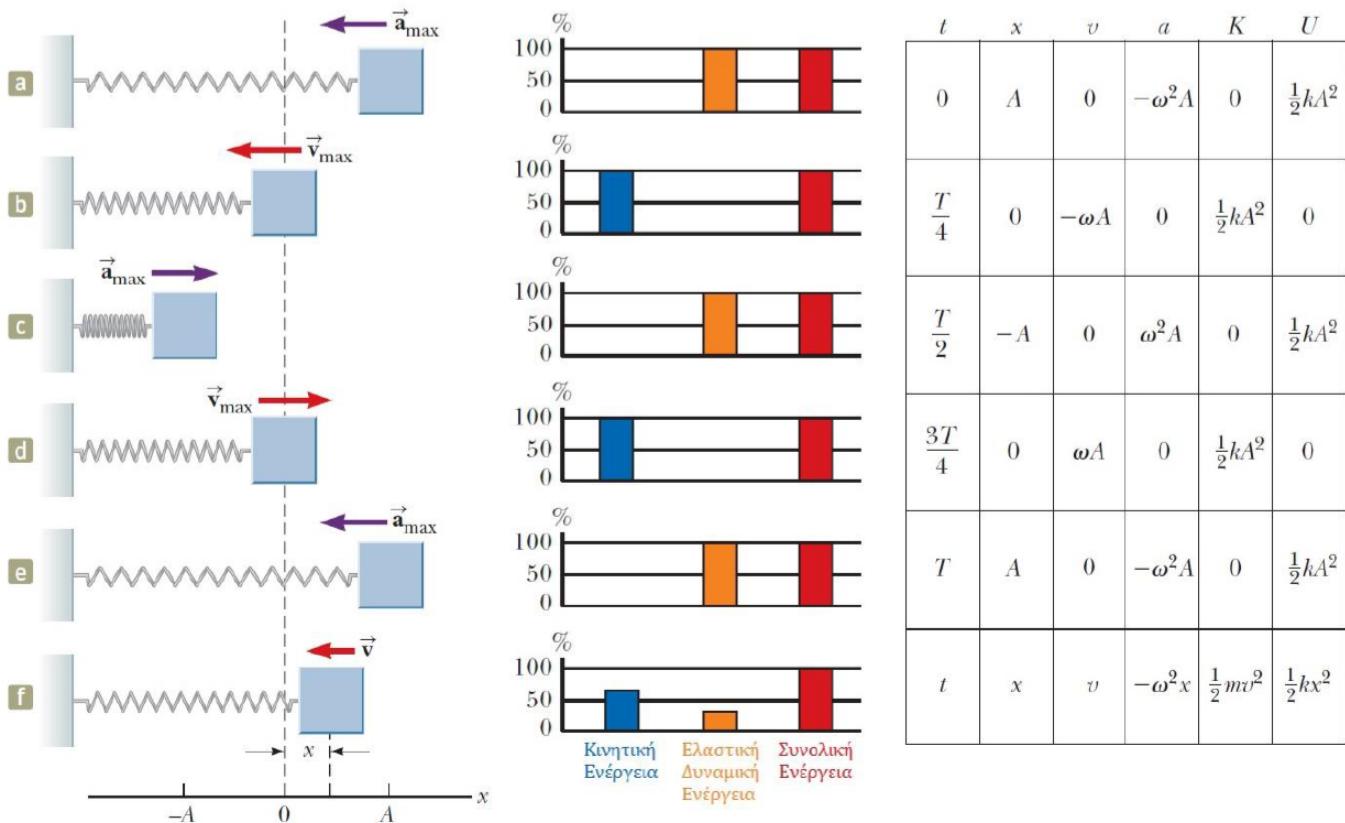
$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (3.68)$$



Σχήμα 3.11: Κινητική και Ελαστική Ενέργεια ΑΑΤ.

Παρατηρήστε πως μεταβάλλονται οι επιμέρους ενέργειες συναρτήσει του χρόνου έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι πάντα σταθερό, τόσο στο Σχήμα 3.11(α), που απεικονίζονται οι συναρτήσεις  $K(t), U(t)$ , όσο και στο Σχήμα 3.11(β), που απεικονίζονται οι συναρτήσεις  $K(x), U(x)$ .

Ας υψηλούμε και τα περίφημα διαγράμματα ενέργειας που δείχνουν πως μεταβάλλεται η ενέργεια ενός συστήματος. Δείτε το Σχήμα 3.12. Αξίζει να εξηγήσουμε τα στιγμιότυπα συνοπτικά. Στο στιγμιότυπο (a),



Σχήμα 3.12: Διάγραμμα Ενέργειας Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή.

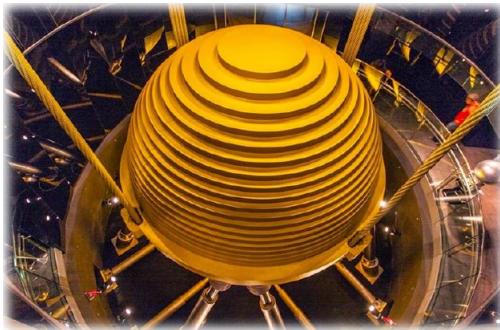
όπου και ξεκινάμε να μελετάμε το φαινόμενο ( $t = 0$ ), το σώμα βρίσκεται στη θέση  $x = A$ , που είναι και το πλάτος της ταλάντωσης. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο και έχει - όπως αναμενόταν - τη μέγιστη επιτάχυνση με φορά προς τη θέση ισορροπίας. Όλη η ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική. Στο στιγμιότυπο (b), το σώμα έχει κινηθεί και βρίσκεται στη θέση ισορροπίας όπου το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος. Η ταχύτητα εκεί είναι η μέγιστη δυνατή, και εμφανίζεται για  $t = T/4$ . Πλέον όλη η ενέργεια του συστήματος έχει γίνει κινητική. Στο στιγμιότυπο (c), το σώμα έχει συμπιεσεί το ελατήριο κατά  $x = -A$ , οπότε ξανά η ταχύτητα του σώματος είναι στιγμιαία μηδενική και η επιτάχυνση μέγιστη, με φορά προς τη θέση ισορροπίας, με όλη την ενέργεια να είναι ξανά ελαστική δυναμική. Η χρονική στιγμή εμφάνισης αυτής της κατάστασης είναι  $t = T/2$ . Στο στιγμιότυπο (d) αρχίζουμε την αντίστροφη πορεία: το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας όταν  $t = 3T/4$ , με μέγιστη ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση. Ξανά, όλη η ενέργεια του συστήματος είναι κινητική, ενώ στο στιγμιότυπο (e), έχουμε ξανά την κατάσταση του στιγμιούπου (a), για  $t = T$  αυτή τη φορά. Παρατηρήσαμε μια πλήρη ταλάντωση, οπότε το φαινόμενο συνεχίζεται επ' άπειρον, επαναλαμβάνοντας την ενεργειακή κατανομή και κατάσταση που περιγράφηκε στη μια παραπάνω περίοδο του. Τέλος, το στιγμιότυπο (f) δείχνει μια τυχαία θέση του σώματος,  $x > 0$  και  $x \neq A$ , σε μια τυχαία χρονική στιγμή  $t$ .

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να καταλάβουμε καλύτερα τη θεωρία.

Παράδειγμα 3.7:

Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, όπως στο Σχήμα 3.13, οι οποίοι είναι κατασκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η κατασκευή έχει μάζα  $m = 2.72 \times 10^5$  kg και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται με συχνότητα  $f = 10.0$  Hz, με πλάτος  $A = 0.2$  m.

- (α') Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
- (β') Ποιά είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας;



Σχήμα 3.13: Αποσβεστήρας μάζας.

Λύση:

(α') Η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος του αποσβεστήρα είναι σταθερή και ίση με  $\frac{1}{2}kA^2$ . Δε γνωρίζουμε τη σταθερά του “ελατηρίου” του αποσβεστήρα. Όμως

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 10 \text{ rad/s} \quad (3.69)$$

$$\text{και } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies k = \omega^2 m, \text{ οπότε}$$

$$k = \omega^2 m = (2\pi 10)^2 \times 2.72 \times 10^5 = 10738 \times 10^5 = 1.0738 \times 10^9 \text{ N/m} \quad (3.70)$$

Αρα

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 = 2.147 \times 10^7 \text{ J} \quad (3.71)$$

(β') Όταν το σώμα περνά από το σημείο ισορροπίας, όλη η μηχανική ενέργεια εκφράζεται ως κινητική: η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Έτσι

$$E_{mech} = K = \frac{1}{2}mu^2 \implies u = \sqrt{\frac{2E_{mech}}{m}} \approx 12.6 \text{ m/s} \quad (3.72)$$

Παράδειγμα 3.8:

Αν η φάση μετατόπισης για ένα σύστημα ελατηρίου-σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι  $\phi = \pi/6$  rad και η θέση του σώματος δίνεται ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.73)$$

όπως γνωρίζετε, τότε ποιός είναι ο λόγος της κινητικής προς την ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν  $t = 0$ ;

Λύση: Εχουμε ότι

$$K = \frac{1}{2}mu(t)^2 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\pi/6) \quad (3.74)$$

και

$$U = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\pi/6) \quad (3.75)$$

Οπότε

$$\frac{K}{U} = \frac{m\omega^2 \sin^2(\pi/6)}{k \cos^2(\pi/6)} = \frac{m}{k} \omega^2 \tan^2(\pi/6) \quad (3.76)$$

κι επειδή

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.77)$$

είναι

$$\frac{K}{U} = \tan^2(\pi/6) = \frac{1}{3} \quad (3.78)$$

### Παράδειγμα 3.9:

Η θέση ενός σωματιδίου δεμένου σε ένα ελατήριο δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 0.25 \cos(10t) \quad (3.79)$$

με το πλάτος  $A$  να μετριέται σε m, τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$  σε rad/s, και το χρόνο  $t$  σε s. Σε ποιά χρονική στιγμή η κινητική του ενέργεια είναι διπλάσια της ελαστικής δυναμικής του ενέργειας;

Λύση: Η εξίσωση ταχύτητας του σωματιδίου είναι

$$u(t) = -2.5 \sin(10t) \quad (3.80)$$

Θέτοντας  $K = 2U$  έχουμε

$$\frac{1}{2}mu^2(t) = 2 \left( \frac{1}{2}kx^2(t) \right) \quad (3.81)$$

$$\frac{1}{2}m(-2.5)^2 \sin^2(10t) = k((0.25)^2 \cos^2(10t)) \quad (3.82)$$

$$\tan^2(10t) = 2 \quad (3.83)$$

$$t = \frac{1}{10} \tan^{-1}(\sqrt{2}) \quad (3.84)$$

$$= 0.096 \text{ s} \quad (3.85)$$

### Παράδειγμα 3.10:

Ένας ταλαντωτής μάζας 0.3 kg έχει ταχύτητα 0.954 m/s όταν η μετατόπισή του είναι 0.03 m και ταχύτητα 0.714 m/s όταν μετατοπίζεται κατά 0.06 m. Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα του ταλαντωτή;

Λύση: Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή διατηρείται, οπότε για τις δύο καταστάσεις (A) και (B) θα έχουμε

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad (3.86)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mu_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 \quad (3.87)$$

$$k = 44.48 \text{ N/m} \quad (3.88)$$

Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$E_{tot} = E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = 0.1565 \text{ J} \quad (3.89)$$

Όμως επειδή

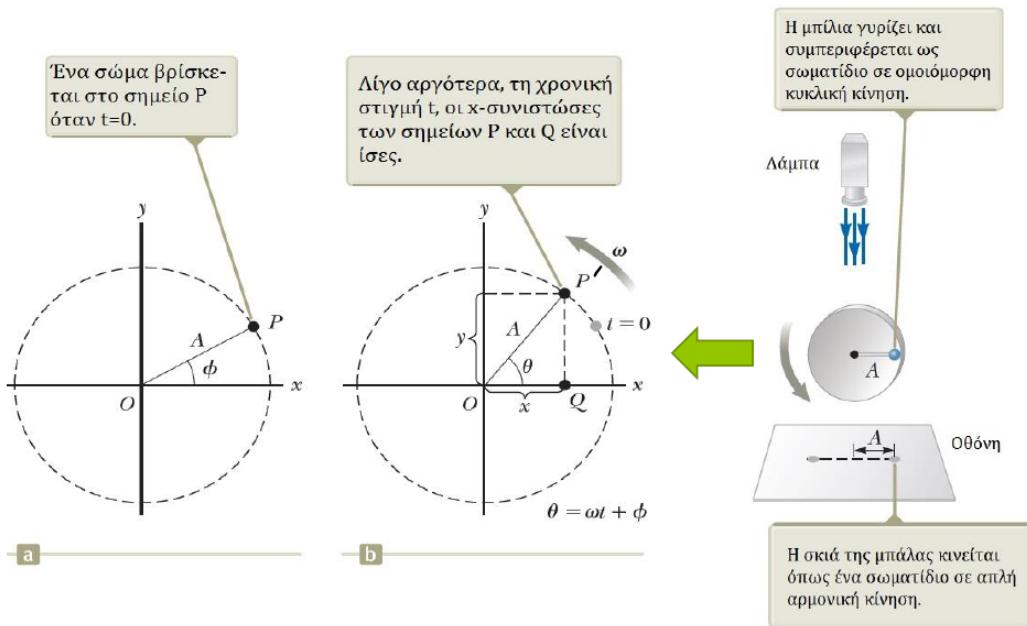
$$E_{tot} = \frac{1}{2}mu_{max}^2 \quad (3.90)$$

έχουμε

$$u_{max} = 1.02 \text{ m/s} \quad (3.91)$$

### 3.3.6 Σχέση AAT και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Η AAT έχει στενή σχέση με την ομαλή κυκλική κίνηση που έχουμε ήδη συναντήσει στην Κινητική. Δείτε το Σχήμα 3.14. Έστω ένα επίπεδο  $xy$  πάνω στο οποίο ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το Ο



Σχήμα 3.14: Σχέση AAT και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης.

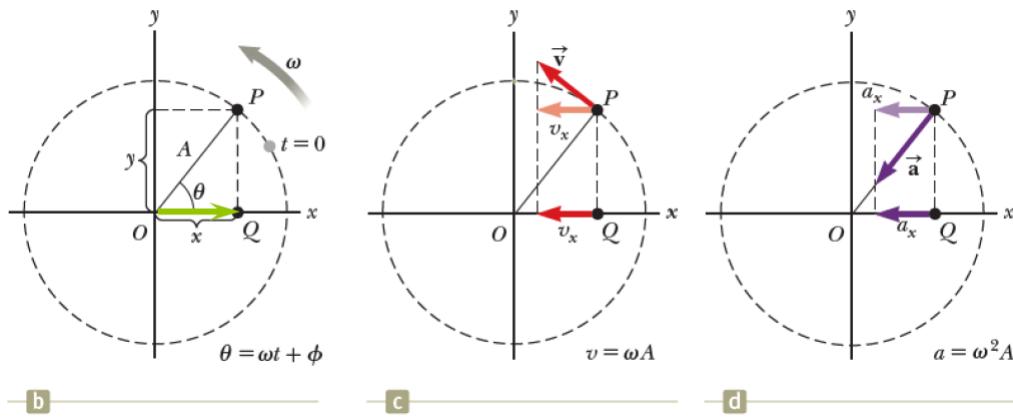
$(0,0)$  και ακτίνα  $A$ . Έστω ότι πατάμε το χρονόμετρό μας στο στιγμιότυπο (a) του Σχήματος 3.14. Το σώμα βρίσκεται υπό γωνία  $\phi$  με τον οριζόντιο άξονα όταν  $t = 0$ . Η προβολή του σώματος που βρίσκεται στο σημείο  $P$  επάνω στον άξονα  $x'$  μπορεί να γραφεί ως

$$P_x = A \cos(\phi) \quad (3.92)$$

που πρέπει να σας θυμίζει τη σχέση της AAT για  $t = 0$ . Στο στιγμιότυπο (b) βλέπουμε το σώμα αυτό σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή  $t$ . Το σώμα έχει προχωρήσει κατά  $\omega t$ . Ξανά, η προβολή του σημείου  $P'$  στον οριζόντιο άξονα μπορεί να γραφεί ως

$$P'_x = A \cos(\theta) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.93)$$

που αποτελεί ακριβώς τη συνάρτηση ύψης  $x(t)$  της AAT! Μπορούμε λοιπόν εύκολα να καταλάβουμε ότι η προβολή της κυκλικής κίνησης επάνω σε έναν οριζόντιο άξονα ενός συστήματος συντεταγμένων μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις της AAT! Παρατηρήστε το Σχήμα 3.15, όπου φαίνονται και οι δύο άλλες ποσότητες, ταχύτητα και επιτάχυνση, της κυκλικής κίνησης.

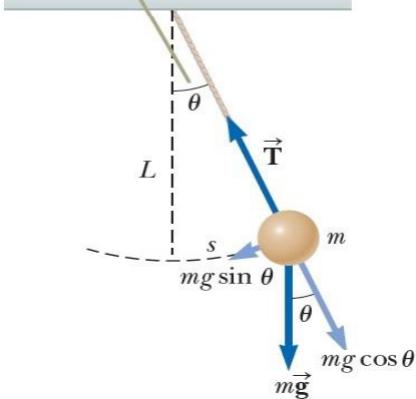


Σχήμα 3.15: Θέση, ταχύτητα, και επιτάχυνση ομαλής κυκλικής κίνησης.

### 3.3.7 Το εκχρεμές

Ως ΑΑΤ μπορούν να μοντελοποιηθούν και άλλους είδους κινήσεις, υπό συγκεκριμένους περιορισμούς. Θεωρήστε το εκχρεμές του Σχήματος 3.16. Έχουμε μετατοπίσει το εκχρεμές προς τα δεξιά, έχοντας σχηματίσει

Όταν η γωνία  $\theta$  είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας  $\theta = 0$ .



Σχήμα 3.16: Εκχρεμές.

γωνία  $\theta$  με την κατακόρυφο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η τάση του νήματος και η δύναμη του βάρους, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε σε άξονες. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία  $\theta$  είναι μικρότερη των περίπου 10 μοιρών, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκχρεμές εκτελεί ΑΑΤ. Δεδομένου ότι το σώμα τελεί υπό επίδραση δυνάμεων, έχουμε από το 2o νόμο του Newton:

$$F_{\text{επ}} = ma \iff -mg \sin(\theta) = ma \iff -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2}{dt^2} s(t) \quad (3.94)$$

με  $s$  ένα τμήμα του κυκλικού τόξου. Επειδή  $s = L\theta$ , έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \quad (3.95)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\sin(\theta) \approx \theta, \quad \text{για } \theta \ll 1 \quad (3.96)$$

μπορούμε να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) \approx -\frac{g}{L}\theta(t) \quad (3.97)$$

Η σχέση αυτή περιγράφει προσεγγιστικά μια AAT, καθώς είναι μια διαφορική εξίσωση ακριβώς ίδιας μορφής με την εξίσωση (3.4). Το τελευταίο ισχύει αποκλειστικά για μικρές τιμές του  $\theta$ .

Βάσει των παραπάνω, η γωνιακή συχνότητα του εκχρεμούς δίνεται ως

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.98)$$

και η περίοδος του  $\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.99)$$

ενώ η εξίσωση κίνησης του εκχρεμούς είναι

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.100)$$

### 3.4 Φυλίνουσες Ταλαντώσεις

Στην AAT, η κατάσταση ήταν αρκετά ιδανική: υπήρξε απουσία αντιστάσεων κάθε είδους, και αυτό είχε ως αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια των συστημάτων να είναι σταθερή. Στην πράξη κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει: η μηχανική ενέργεια συστημάτων ταλάντωσης φυλίνει με το χρόνο. Σε μια τέτοια περίπτωση η κίνηση ονομάζεται φυλίνουσα ταλάντωση.

Στις φυλίνουσες ταλαντώσεις, μοντελοποιούμε τις αντιστάσεις που συντελούν στην απώλεια μηχανικής ενέργειας με μια λεγόμενη δύναμη επιβράδυνσης  $\vec{R}$ , η οποία ορίζεται ως

$$\vec{R} = -b\vec{u} = -b\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \quad (3.101)$$

Η σταθερά  $b$  ονομάζεται συντελεστής απόσβεσης. Η δύναμη  $\vec{R}$  δρα πάντα αντίθετα στην ταχύτητα του σώματος. Φυσικά δεν παύει να υπάρχει η δύναμη επαναφοράς της γνωστής μας μορφής  $\vec{F}_s = -k\vec{x}$ . Ας προσπαθήσουμε να εξάγουμε τη διαφορική εξίσωση της φυλίνουσας ταλάντωσης. Αν εφαρμόσουμε το 2o νόμο του Newton στο ταλαντούμενο σώμα που κινείται στον άξονα  $x'$ , έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{R} + \vec{F}_s = m\vec{a}_x \quad (3.102)$$

η οποία γίνεται

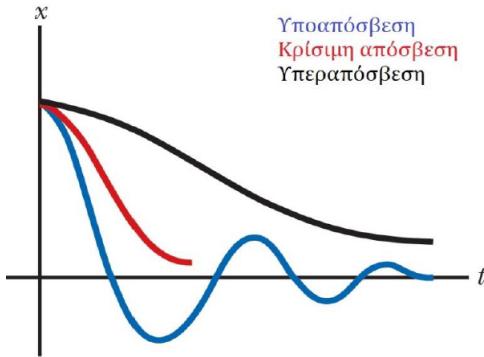
$$-bu - kx = ma_x \iff -kx(t) - b\frac{d}{dt}x(t) = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.103)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης  $b$  είναι “μικρός”, τότε η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.104)$$

ή αλλιώς

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.105)$$



Σχήμα 3.17: Είδη φθίνουσας ταλάντωσης.

με  $A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$  να είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο (φθίνον) πλάτος της ταλάντωσης.

Οι γνωστές ποσότητες της ΑΑΤ αλλάζουν όταν συζητάμε για φθίνουσες ταλάντωσεις. Για παράδειγμα, η γωνιακή συχνότητα ορίζεται ως

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.106)$$

και αν θέσουμε  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  τη γνωστή μας γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης, τότε

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.107)$$

Η παραπάνω γωνιακή συχνότητα ονομάζεται φυσική συχνότητα ή ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Τα παραπάνω ισχύουν βέβαια υπό μια συγκεκριμένη προϋπόθεση:

$$\omega_0 > \frac{b}{2m} \quad (3.108)$$

ή με άλλα λόγια, η ποσότητα στο υπόρριζο να είναι θετική. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται υποαπόσβεση. Αν όμως  $\omega_0 = \frac{b}{2m}$ , τότε η περίπτωση ονομάζεται κρίσιμη απόσβεση, ενώ αν  $\omega_0 < \frac{b}{2m}$  η περίπτωση ονομάζεται υπεραπόσβεση. Τα τρία αυτά είδη φθίνουσας ταλάντωσης φαίνονται στο Σχήμα 3.17.

### Παράδειγμα 3.11:

Ένα εκκρεμές μήκους 1.0 m αφήνεται ελύθερο από αρχική γωνία  $\theta_i = 15$  μοιρών. Μετά από 1000 s, το πλάτος ταλάντωσης του έχει μειωθεί σε  $\theta(1000) = 5.5$  μοίρες. Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς  $b/2m$ ;

Λύση: Υποθέτουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Είδαμε μόλις πριν ότι

$$A(t) = Ae^{-b/(2m)t} \quad (3.109)$$

Όμως η εκφώνηση μας δίνει την πληροφορία πλάτους σε μοίρες, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$\theta(t) = \Theta(t) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.110)$$

με

$$\Theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (3.111)$$

Από εκφώνηση έχουμε ότι

$$\Theta(0) = \theta_{max} e^0 = \theta_{max} = 15^\circ \quad (3.112)$$

$$\Theta(1000) = \theta_{max} e^{-\frac{1000b}{2m}} = 5.5^\circ \quad (3.113)$$

Οπότε

$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) = 15^\circ e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.114)$$

Από τις δύο σχέσεις του πλάτους  $\Theta(t)$ , διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{\Theta(0)}{\Theta(1000)} = \frac{15}{5.5} = e^{\frac{1000b}{2m}} \quad (3.115)$$

Οπότε

$$15e^{-\frac{1000b}{2m}} = 5.5 \iff \log e^{-\frac{1000b}{2m}} = \log \frac{5.5}{15} \approx -1 \implies -\frac{1000b}{2m} \approx -1 \implies \frac{b}{2m} \approx 10^{-3} \quad (3.116)$$

### 3.5 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Γνωρίσαμε νωρίτερα την ιδανική ΑΑΤ, και μια πιο ρεαλιστική “έκδοση” της, τη φυθίνουσα ταλάντωση, στην οποία υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας με την πάροδο του χρόνου. Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι θα ήταν δυνατό να “αναπληρώνουμε” τη χαμένη ενέργεια εισάγοντας στον ταλαντωτή ενέργεια μέσω π.χ. μιας εξωτερικής δύναμης. Σκεφτείτε ένα παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας του το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει το πλάτος της ταλάντωσης. Σε πιο εξειδικευμένα παραδείγματα, κατά την παραγωγή στάσιμου λόγου (όπως όταν λέμε ένα /ααα/ στο γιατρό για να εξετάσει το λαιμό μας), μια περιοδική εισαγωγή ενέργειας από τους πνεύμονες μας εισάγεται στη φωνητική μας οδό (στόμα, φάρυγγα, ρινική κοιλότητα) και μας επιτρέπει να κρατάμε σταθερό το φώνημα μας - μέχρι να εξαντλήσουμε τον αέρα στα πνευμόνια μας. Επίσης, στα ηλεκτρικά κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, το κύκλωμα εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα  $f_s$ , που είναι η συχνότητα της πηγής. Έτσι, η ένταση του ρεύματος αποτελείται από μια ημιτονοειδή ταλάντωση με πλάτος  $I(f_s, V)$ , δηλ. είναι μια ταλάντωση που εξαρτά το πλάτος της από τη συχνότητα και το πλάτος τάσης της πηγής.

Σε αυτό το είδος ταλάντωσης, η εξωτερική δύναμη διέγερσης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (3.117)$$

Από το 2o νόμο του Newton θα έχουμε

$$\sum F_x = ma_x \iff F_0 \sin(\omega t) - b \frac{d}{dt}x(t) - kx(t) = m \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.118)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης<sup>1</sup> δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.119)$$

με

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (3.120)$$

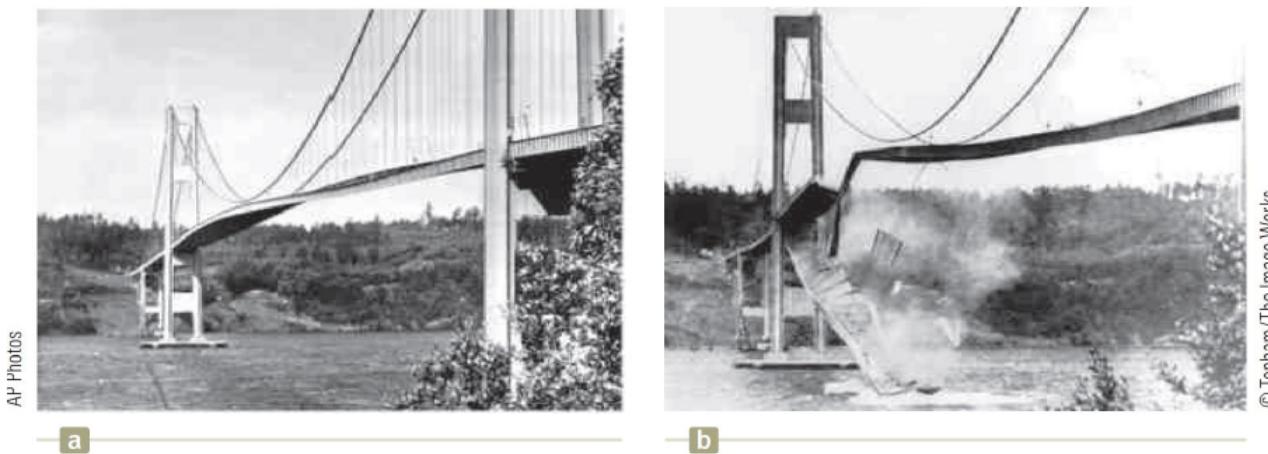
Παρατηρήστε ότι το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$ ! Εύκολα μπορείτε να καταλάβετε ότι όταν  $\omega \approx \omega_0$ , το κλάσμα του πλάτους ταλάντωσης παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Η συχνότητα  $\omega_0$  ονομάζεται συχνότητα συντονισμού. Κατά το συντονισμό το σύστημα έχει το μέγιστο δυνατό πλάτος και τη μέγιστη δυνατή ενέργεια. Αν δεν υπάρχουν αποσβεστικές δυνάμεις, τότε το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται θεωρητικά άπειρο. Έτσι, η ταλάντωση μπορεί να γίνει τόσο έντονη, ώστε να καταστραφεί ο ταλαντωτής. Αν η προσφορά ενέργειας είναι μεγαλύτερη, τότε υπάρχει κίνδυνος καταστροφής του ταλαντωτή. Για παραδειγμα

<sup>1</sup>Βλέπετε ότι όλο και δυσκολεύουν οι διαφορικές εξισώσεις! :)

τα ποτήρια έχουν μία συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα, η οποία μπορεί να ακουστεί αν τα χτυπήσουμε απλά μία φορά. Αν εκπέμψουμε ήχο σε αυτή τη συχνότητα, τότε το ποτήρι θα ταλαντεύεται με μέγιστο πλάτος μέχρι που το πλάτος θα γίνει πολύ μεγάλο για τις αντοχές του γυαλιού και το ποτήρι θα σπάσει. Το ίδιο ισχύει γενικότερα για οποιαδήποτε κατασκευή.

Σύμφωνα με το φαινόμενο του συντονισμού, δημιουργείται ένα μη αμελητέο πλάτος από σχετικά μικρή, αλλά διαρκή προσφορά ενέργειας. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται στο συντονισμό μιας ηλεκτρονικής συσκευής σε συγκεκριμένη συχνότητα ραδιοχυμάτων. Τα κυκλώματα που εκπέμπουν και λαμβάνουν ηλεκτρομαγνητικά σήματα είναι ηλεκτρονικοί ταλαντώτες με δυνατότητα μεταβολής της ιδιοσυχνότητά τους. Το σήμα που λαμβάνεται πιο ισχυρά, άρα και αυτό που τελικά λαμβάνεται, είναι αυτό που εκπέμπεται στην ιδιοσυχνότητα του δέκτη. Έτσι, μπορούμε, μεταβάλλοντας την ιδιοσυχνότητα του δέκτη, να επιλέξουμε την επιθυμητή ιδιοσυχνότητα.

Αντίθετα, όταν ένας μηχανικός χτίζει μια κρεμαστή γέφυρα πρέπει να σιγουρευτεί ότι η ένταση του αέρα που φυσάει σε μια γέφυρα δε θα ισούται με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, γιατί τότε αυτή θα ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος και υπάρχει σοβαρή πιθανότητα να καταρρεύσει, αν το φαινόμενο είναι διαρκές. Δείτε το εκπληκτικό βίντεο<sup>2</sup> από τη γέφυρα Tacoma Narrows που κατέρρευσε εξ' αιτίας φαινομένων συντονισμού (όχι ακριβώς αυτών που συζητάμε αλλά σχετικών)!



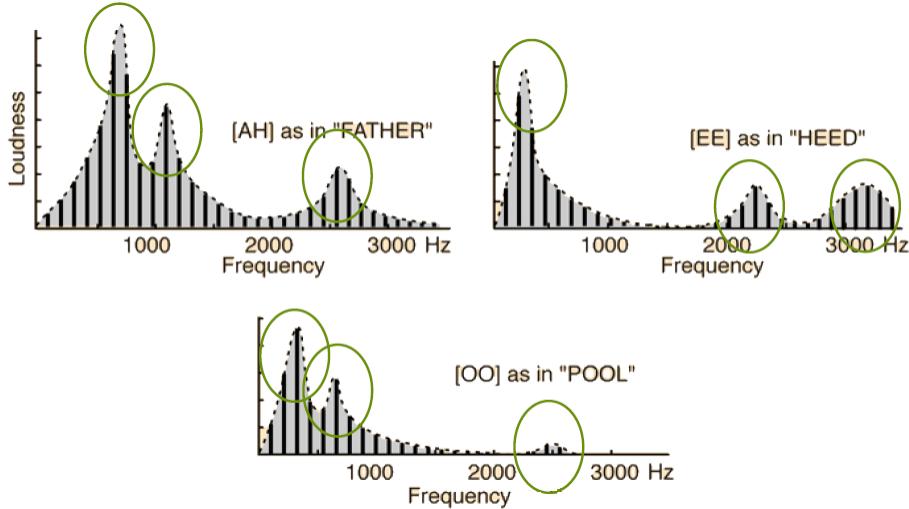
Σχήμα 3.18: *Tacoma Narrows* γέφυρα.

Σε άλλες εφαρμογές όπως η ανάλυσης ομιλίας, μπορούμε να παρατηρήσουμε φαινόμενα συντονισμού. Αν αναλύσουμε ένα τμήμα έμφωνου λόγου, μπορούμε να κατασκευάσουμε γραφήματα πλάτους - συχνότητας, όπως αυτά του Σχήματος 3.19, τα οποία ονομάζονται φάσματα πλάτους. Μπορείτε να παρατηρήσετε - σημειωμένες με ελλείψεις - περιοχές συχνοτήτων που το πλάτος που τους αντιστοιχεί είναι ιδιαίτερα υψηλό, σε σχέση με τις υπόλοιπες περιοχές. Επίσης, βλέπετε ότι για διαφορετικά φωνήματα, οι περιοχές που παρουσιάζουν συντονισμό είναι διαφορετικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τοποθετούμε διαφορετικά τους αριθμωτές μας για να εκφέρουμε τα διαφορετικά φωνήματα. Η διαφορετική τοποθέτηση των αριθμωτών του στόματος μας ενισχύει τα πλάτη διαφορετικών περιοχών συχνοτήτων, δημιουργώντας φάσματα όπως στο Σχήμα 3.19. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φωνοσυντονισμός - *formant*.

### 3.6 Κυματική

Αν έχετε φτάσει ως εδώ, έχετε λάβει μια καλή επισκόπηση των ταλαντώσεων και των εξισώσεων που την περιγράφουν. Μπορούμε τώρα να επεκταθούμε στη μελέτη των κυμάτων. Ο κόσμος μας είναι γεμάτος από

<sup>2</sup>[https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File%3ATacoma\\_Narrows\\_Bridge\\_destruction.ogg](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File%3ATacoma_Narrows_Bridge_destruction.ogg)



Σχήμα 3.19: Φάσματα πλάτους έμφωνου λόγου.

κύματα, τόσο μηχανικά όσο και ηλεκτρομαγνητικά! Μόλις τώρα κάναμε και τον πρώτο διαχωρισμό: μηχανικά ονομάζονται τα κύματα που απαιτούν ένα μέσο διάδοσης, ενώ τα ηλεκτρομαγνητικά δεν έχουν αυτήν την απαίτηση. Ένα πολύ χαρακτηριστικό γνώρισμα των μηχανικών κυμάτων είναι ότι μεταφέρουν ενέργεια αλλά όχι ύλη! Σκεφτείτε μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια ήρεμη λίμνη. Αν ρίξετε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω και δεξιά-αριστερά αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας.

Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν τρία πράγματα:

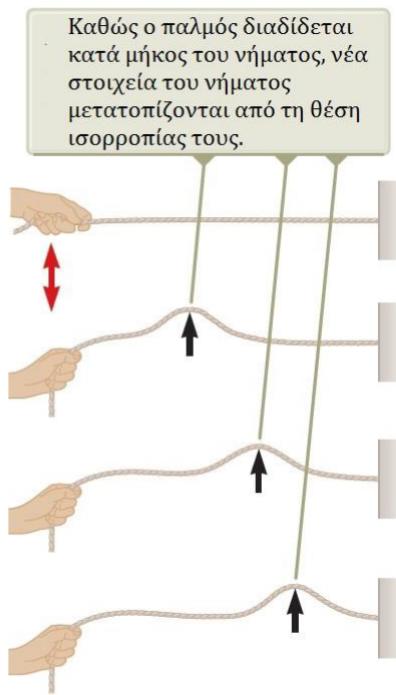
- Κάποια πηγή διαταραχής
- Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

Φανταστείτε ότι κρατάτε ένα νήμα δεμένο σε ένα τοίχο, όπως στο Σχήμα 3.20. Ανεβοκατεβάζετε μια φορά το χέρι σας και δημιουργείτε στο νήμα ένα παλμό, ο οποίος διαδίδεται κατά μήκος του νήματος. Κατά τη διάδοση, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας τους. Η κατακόρυφη μετατόπιση καθορίζει το ύψος του παλμού. Ιδανικά, ο παλμός θα διαδοθεί απαράλλαχτος μέχρι το πέρας του σχοινιού.

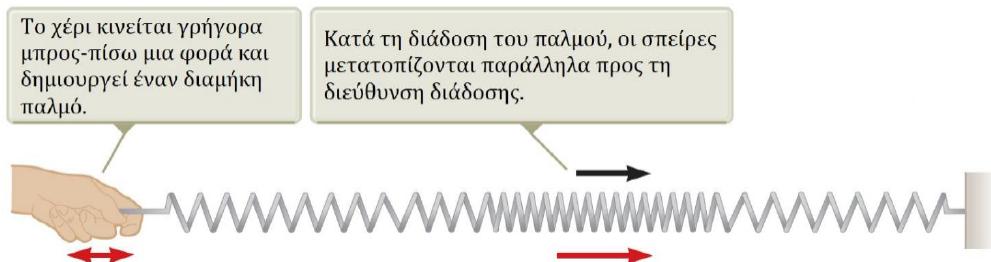
Αν σκεφτείτε λίγο τον τρόπο κίνησης των στοιχείων του νήματος, θα διαπιστώσετε ότι αυτός είναι κατακόρυφος, ή αλλιώς, κάθετος προς τη διεύθυνση διάδοσης. Τέτοια κύματα ονομάζονται εγκάρσια κύματα, ενώ κύματα των οποίων τα στοιχεία κινούνται παράλληλα με τη διεύθυνση διάδοσης του παλμού ονομάζονται διαμήκη κύματα. Ένα τέτοιο διάμυκης κύμα φαίνεται στο Σχήμα 3.21. Ένα σύνολο από εγκάρσια και διαμήκη κύματα είναι τα σεισμικά κύματα. Τα περίφημα κύματα  $P$  είναι διαμήκη κύματα, ενώ τα αντίστοιχα  $S$  κύματα είναι εγκάρσια.

### 3.6.1 Κυματοσυνάρτηση

Σίγουρα θα ήταν τρομερά ενδιαφέρον και χρήσιμο να μπορούσαμε να περιγράψουμε μαθηματικά τη συμπεριφορά των κυμάτων. Ένα κύμα είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών, του χώρου και του χρόνου. Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε κύματα που κινούνται σε ευθεία γραμμή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους ως μια συνάρτηση  $y(x,t)$  η οποία απεικονίζει το ύψος του κύματος  $y$  συναρτήσει του στοιχείου του νήματος που βρίσκεται στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Παρατηρήστε ότι η



Σχήμα 3.20: Εγκάρσιο κύμα σε νήμα.



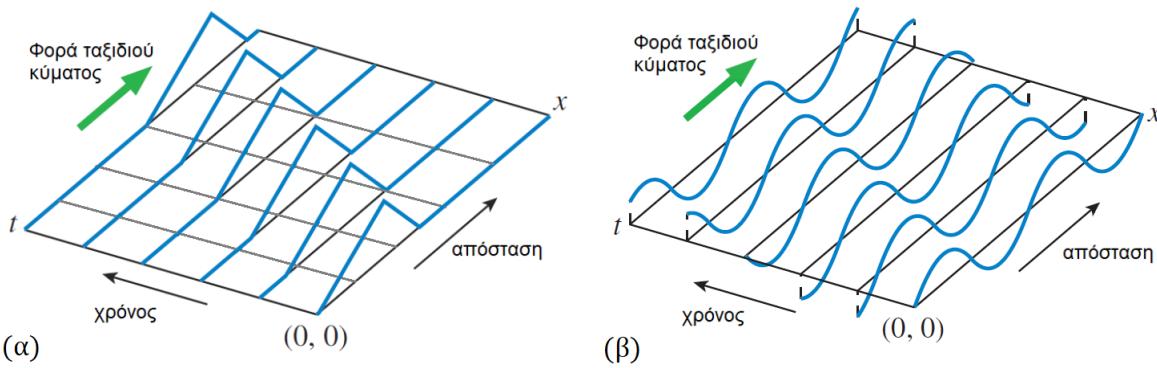
Σχήμα 3.21: Διάμηκες κύμα σε ελατήριο.

κυματοσυνάρτηση  $y(x,t)$  είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, δηλ. το γράφημά της είναι τριδιάστατο. Η σχεδίαση ενός τέτοιου γραφήματος είναι δύσκολη υπόθεση, οπότε προτιμούμε να κατανοούμε τι συμβαίνει με βαση δύο συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Αν στην κυματοσυνάρτηση κρατήσουμε το  $t$  σταθερό, δηλ  $t = t_0$ , τότε είναι σαν να παίρνουμε μια φωτογραφία του νήματος και του κύματος που διαδίδεται πάνω του τη χρονική στιγμή αυτή. Αντίθετα, αν θέσουμε  $x = x_0$ , δηλ. κρατήσουμε το  $x$  σταθερό και αφήσουμε τον χρόνο να κυλάει, αυτό που θα πάρουμε είναι η κίνηση του στοιχείου  $x_0$  του νήματος συναρτήσει του χρόνου: βλέπουμε δηλαδή πως ένα μικρό κομμάτι νήματος κινείται όσο περνάει ο χρόνος!

Ας αναπαραστήσουμε για μια και μόνη φορά την τριδιάστατη απεικόνιση ενός κύματος που περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση  $y(x,t)$ . Δείτε το Σχήμα 3.22(a). Βλέπετε έναν τριγωνοειδή παλμό ο οποίος διαδίδεται σε ένα μέσο. Αν κοιτάζετε τις “φέτες” του χρόνου, βλέπετε πως διαδίδεται ο παλμός σε νέα στοιχεία κάθε φορά του νήματος. Αν κοιτάζετε τις γκρίζες “φέτες” της απόστασης τότε βλέπετε τα αντίστοιχα στοιχεία του νήματος που βρίσκονται στις θέσεις αυτές και πως αυτά κινούνται με την πάροδο του χρόνου.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να προσέξουμε το εξής: αν ένας παλμός διαδίδεται σε ένα νήμα με ταχύτητα  $u$  προς τα δεξιά, τότε η κυματοσυνάρτηση θα είναι της μορφής

$$y(x,t) = f(x - ut, t) \quad (3.121)$$



Εύκολα μπορείτε να το καταλάβετε αν σκεψείτε ότι ένα στοιχείο του νήματος  $x$  θα έχει ύψος  $y(x, 0)$ , για  $t = 0$ . Μετά από  $t$  δευτερόλεπτα, το κύμα θα έχει προχωρήσει απόσταση  $ut$  επάνω στο νήμα, οπότε το ίδιο ύψος θα έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά. Άρα τη χρονική στιγμή  $t$  το ύψος  $y(x, t)$  θα είναι το ίδιο με το ύψος  $y(x - ut, 0)$  του στοιχείου  $x - ut$  για  $t = 0$  νωρίτερα. Αντίστοιχα, αν η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως

$$y(x, t) = f(x + ut, t) \quad (3.122)$$

ο παλμός κινείται προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα  $x'$  περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1} \quad (3.123)$$

και έχει ταχύτητα  $u = 3$  m/s. Πολλές φορές αυτά τα κύματα ονομάζονται οδεύοντα κύματα.

### Παράδειγμα 3.12:

Η κυματοσυνάρτηση ενός οδεύοντος κύματος δίνεται ως

$$y(x, t) = \begin{cases} 0.1, & |x - 3t| \leq 1 \\ 0, & |x - 3t| > 1 \end{cases} \quad (3.124)$$

με τη θέση  $x$  και τη μετατόπιση  $y$  να μετρώνται σε μέτρα και το χρόνο  $t$  σε δευτερόλεπτα.

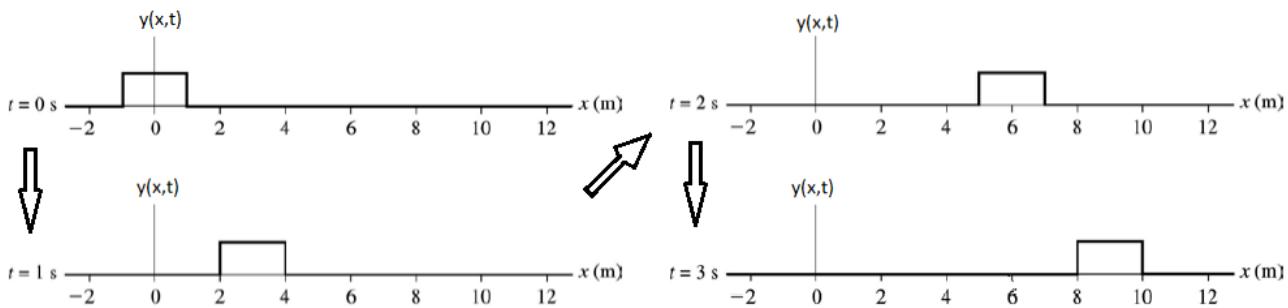
- (α') Σχεδιάστε διαγράμματα κυματοσυνάρτησης  $y$  - θέσης  $x$  από  $x = -2$  m ως  $x = 12$  m ανά διαστήματα ενός δευτερολέπτου από  $t = 0$  ως  $t = 3$  s.
- (β') Βρείτε την ταχύτητα του κύματος από το γράφημα που σχεδιάσατε. Εξηγήστε.
- (γ') Βρείτε την ταχύτητα του κύματος από την κυματοσυνάρτηση. Συμφωνεί η απάντησή σας με την απάντηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

Λύση:

- (α') Δείτε το Σχήμα 3.23.
- (β') Η προπορευόμενη ακμή του κύματος κινείται προς τα δεξιά 3 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο. Άρα η ταχύτητα του κύματος είναι 3 m/s.
- (γ') Η ποσότητα  $|x - 3t|$  είναι της μορφής  $x - ut$ , άρα ο παλμός κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $\vec{u} = 3\vec{i}$  m/s.

### 3.6.2 Ημιτονοειδή Κύματα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον από όλες τις κατηγορίες μηχανικών κυμάτων έχουν τα περίφημα ημιτονοειδή κύματα. Δεν είναι δύσκολο να φανταστείτε πως μοιάζουν αυτά τα κύματα, αλλά μπορείτε να δείτε το Σχήμα 3.24 για να



Σχήμα 3.23: Οδεύον κύμα.

Βεβαιωθείτε για το πως μπορούν να παραχθούν και το Σχήμα 3.22(β) για το πως μοιάζουν όταν ταξιδεύουν. Ένα ημιτονοειδές κύμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

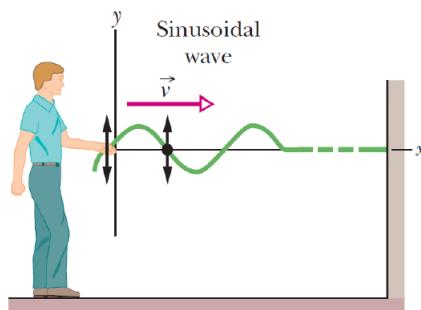
$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ut) + \phi\right) \quad (3.125)$$

Βλέπετε ότι έχει πολλές παραμέτρους, ας τις ξεχωρίσουμε για να καταλάβουμε τι σημαίνουν αλλά και για να γράψουμε την παραπάνω κυματοσυνάρτηση σε μια πιο συμπαγή μορφή.

- **Μήκος κύματος  $\lambda$ :** το μήκος κύματος  $\lambda$  ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων σε μια αναπαράσταση  $y(x,t)$  ως προς  $x$ . Με άλλα λόγια, για μια “φωτογραφία” του ημιτονοειδούς κύματος, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων αποτελεί ένα μήκος κύματος.
- **Περίοδος  $T$ :** η περίοδος  $T$  είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ένα στοιχείο του μέσου διάδοσης για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος. Μπορείτε να δείτε το Σχήμα 3.25 για τις ποσότητες αυτές.
- **Συχνότητα  $f$ :** η συχνότητα  $f$  αποτελεί τον αριθμό κορυφών ανά μονάδα χρόνου, και ισούται με το αντίστροφο της περιόδου:  $f = 1/T$ .
- **Ταχύτητα διάδοσης  $u$ :** η ταχύτητα διάδοσης  $u$  ισούται με την απόσταση που διατρέχει το κύμα στη μονάδα του χρόνου:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (3.126)$$

και η οποία είναι σταθερή.



Σχήμα 3.24: Παραγωγή ημιτονοειδών κυμάτων.

- Κυματαριθμός  $k$ : ο κυματαριθμός  $k$  ορίζεται ως ο λόγος

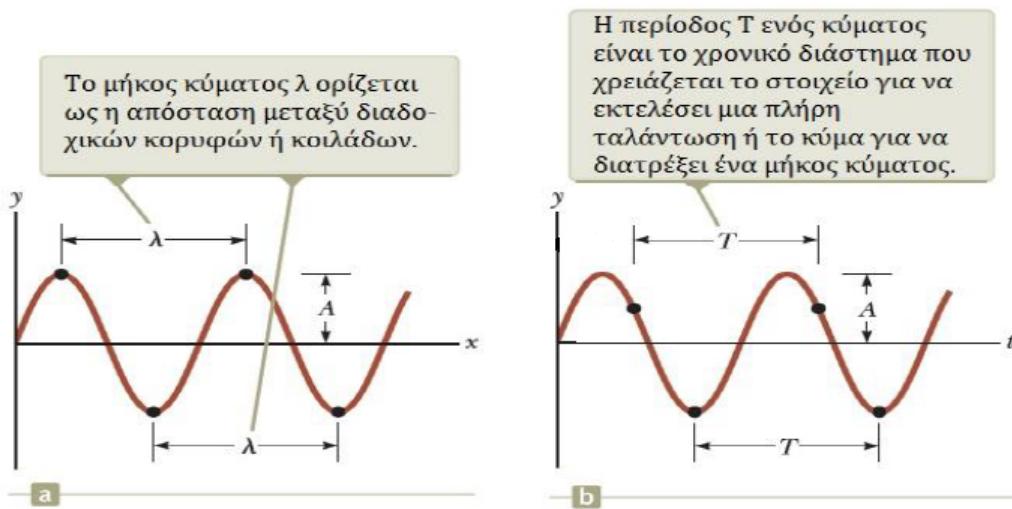
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.127)$$

και αποτελεί τη “χωρική συχνότητα”, δηλ. μας λέει πόσα μήκη κύματος ξεδιπλώνονται στο μονοδιάστατο χώρο στη μονάδα του χώρου. Κατ’ αναλογία με το πώς σχετίζεται η συχνότητα με την έννοια της περιόδου σε μια επανάληψη στο χρόνο, όμοια αντιστοιχία έχει στον κυματαριθμό το μήκος κύματος.

- Κυκλική συχνότητα  $\omega$ : η κυκλική συχνότητα ορίζεται ως

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.128)$$

και μας πληροφορεί - όπως και η συχνότητα  $f$  - για το πόσο συχνά εμφανίζεται η βασική περίοδος του ημιτονοειδούς κύματος στη μονάδα του χρόνου.



Σχήμα 3.25: Μήκος κύματος και περίοδος ημιτονοειδούς κύματος.

Με όλους τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε τελικά να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ενός ημιτονοειδούς κύματος ως

$$y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (3.129)$$

#### Παράδειγμα 3.13:

Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην ψετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  έχει πλάτος 0.15 m, μήκος κύματος 0.4 m, και συχνότητα 8 Hz. Μια φωτογραφία του κύματος τη χρονική στιγμή  $t = 0$  φαίνεται στο Σχήμα 3.26.

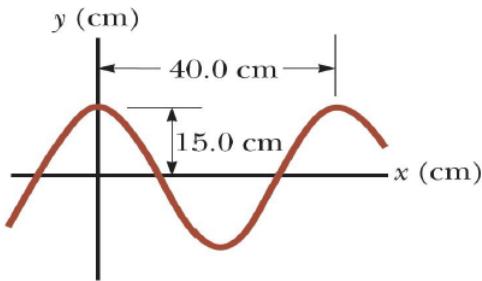
- (α') Βρείτε τις ποσότητες  $k, T, \omega, \phi$ .
- (β') Βρείτε τη σταθερά φάσης  $\phi$  και γράψτε την κυματοσυνάρτηση  $y(x,t)$ .

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας τους ορισμούς έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi \text{ rad/m} \quad (3.130)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} \text{ s} \quad (3.131)$$



Σχήμα 3.26: Παράδειγμα ημιτονοειδούς κύματος.

$$\omega = 2\pi f = 16\pi \text{ rad/s} \quad (3.132)$$

$$u = \lambda f = 3.2 \text{ m/s} \quad (3.133)$$

(β') Η γενική σχέση της κυματοσυνάρτησης είναι

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.134)$$

με το πρόσημο — να υπάρχει λόγω της κίνησης προς τα δεξιά. Στο Σχήμα 3.26 βλέπουμε το ημιτονοειδές κύμα για  $t = 0$ , οπότε η εξίσωση που το περιγράφει είναι

$$y(x, 0) = A \sin(kx + \phi) \quad (3.135)$$

Επιλέγουμε το σημείο  $x = 0$  που έχει το μέγιστο πλάτος 0.15 m, και έχουμε

$$y(0, 0) = 0.15 \sin(\phi) = 0.15 \implies \sin(\phi) = 1 \quad (3.136)$$

Λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\sin(\phi) = \sin(\pi/2) \implies \phi = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.137)$$

που απλοποιείται σε

$$\phi = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.138)$$

Επιλέγοντας  $k = 0$ , η κυματοσυνάρτηση είναι

$$y(x, t) = 0.15 \sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.139)$$

### Παράδειγμα 3.14:

Ένα κύμα που διαδίδεται σε ένα νήμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.35 \sin(1.25x + 99.6t) \quad (3.140)$$

όπου  $x, y$  σε μέτρα και  $t$  σε δευτερόλεπτα. Θεωρήστε το στοιχειώδες (απειροστά μικρό) τμήμα του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση  $x = 0$ .

(α') Βρείτε το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο πρώτων στιγμών όπου το στοιχειώδες τμήμα έχει  $y = 0.175$ .

(β') Ποιά είναι η απόσταση που διανύει το κύμα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα;

Λύση:

(α') Η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως

$$0.175 = 0.35 \sin(99.6t) \quad (3.141)$$

$$\sin(99.6t) = 0.5 \quad (3.142)$$

Η μικρότερες δυο γωνίες που δίνουν ημίτονο ίσο με 0.5 είναι οι 30 και 150 μοίρες, οι οποίες αντιστοιχούν σε 0.523 και 2.618 rad. Άρα

$$99.6t_1 = 0.523 \Rightarrow t_1 = 5.26 \text{ ms} \quad (3.143)$$

$$99.6t_2 = 2.618 \Rightarrow t_2 = 26.3 \text{ ms} \quad (3.144)$$

Άρα

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 21 \text{ ms} \quad (3.145)$$

(β') Η απόσταση που διανύει το κύμα είναι

$$d = \frac{\omega}{k} \Delta t = \frac{99.6 \times 21 \times 10^{-3}}{1.25} \text{ s} = 1.673 \text{ m} \quad (3.146)$$

### 3.6.3 Εγκάρσια Ταχύτητα και Επιτάχυνση

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι σταθερή και ίση με  $u = \lambda f$ . Η ταχύτητα αυτή περιγράφει την ταχύτητα του κύματος όπως αυτό διαδίδεται μέσα στο μέσο (π.χ. ημίμα), και όχι την ταχύτητα των στοιχείων που αποτελούν το μέσο. Τα στοιχεία του μέσου (π.χ. πολύ μικρά τμήματα ημίματος) ταλαντώνονται γύρω από μια θέση ισορροπίας όσο το κύμα διαδίδεται στο μέσο. Στην περίπτωση των εγκάρσιων κυμάτων, τα στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται “πάνω-κάτω” στον γ' γάξονα, κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα της κίνησης τους αυτής δεν είναι σταθερή, οπότε τα στοιχεία αυτά επιταχύνονται!

Αν λοιπόν έχουμε την κυματοσυνάρτηση  $y(x, t)$  μπορούμε να βρούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση των στοιχείων του μέσου παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα, παράγωγο της κυματοσυνάρτησης ως προς το χρόνο  $t$ . Σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, η παραγώγιση μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε από αυτές τις πολλές μεταβλητές - για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ένα λίγο διαφορετικό συμβολισμό αντί του  $d/dt$ : ο συμβολισμός είναι  $\partial/\partial t$ . Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.147)$$

και

$$u_y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \quad (3.148)$$

$$= -A\omega \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (3.149)$$

$$= -u_{y_{max}} \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (3.150)$$

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των στοιχείων του μέσου είναι  $|u_{y_{max}}| = A\omega$ . Αντίστοιχα για την επιτάχυνση

$$a_y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_y(x, t) \quad (3.151)$$

$$= -A\omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.152)$$

$$= -a_{y_{max}} \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.153)$$

Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης των στοιχείων του μέσου είναι  $|a_{y_{max}}| = A\omega^2$ .

Μπορεί κανείς να δείξει - με χρήση αρκετού Απειροστικού Λογισμού - ότι η ταχύτητα διάδοσης  $u$  ενός κύματος σε τεντωμένο νήμα ισούται με

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3.154)$$

με  $T$  την τάση του νήματος και  $\mu$  τη μάζα ανά μονάδα μήκους του νήματος. Η μάζα ανά μονάδα μήκους ορίζεται ως

$$\mu = \frac{m}{l} \quad (3.155)$$

με  $l$  το μήκος του νήματος. Πολλές φορές ονομάζεται και γραμμική πυκνότητα μάζας.

### Παράδειγμα 3.15:

Ένα κύμα που διαδίδεται σε νήμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t) = 0.02 \sin(kx - \omega t) \quad (3.156)$$

με  $k = 12.57$  rad/m,  $\omega = 638$  rad/s, ενώ η θέση  $x$  μετριέται σε m και ο χρόνος  $t$  σε s. Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι  $\mu = 0.005$  kg/m. Βρείτε

(α') την τάση του νήματος  $T_s$

(β') τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος  $y_{max}(x,t)$

(γ') τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος  $u_{y_{max}}$

Λύση:

(α') Από την εξίσωση διάδοσης κύματος σε νήμα έχουμε

$$u = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \implies T_s = \mu u^2 = \mu \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 12.88 \text{ N} \quad (3.157)$$

(β') Η μέγιστη μετατόπιση του κύματος είναι  $y_{max}(x,t) = 0.02$  m.

(γ') Ισχύει ότι

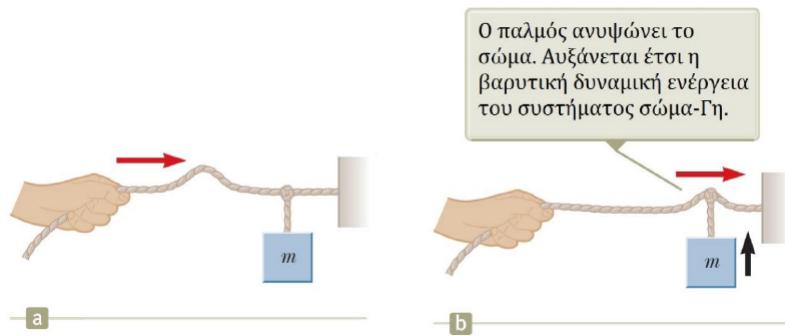
$$u_{y_{max}} = \omega A = 12.76 \text{ m/s} \quad (3.158)$$

### 3.6.4 Ενέργεια και Ισχύς Κύματος

Όλα τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια - και είναι κάτι που μπορείτε πολλές φορές να παρατηρήσετε άμεσα: τα σεισμικά κύματα μπορούν να κατεδαφίσουν ολόκληρες πόλεις, οι δυνατοί ήχοι μπορούν να καταστρέψουν την ακοή σας μόνιμα, οι ακτίνες λέιζερ μπορούν να αφαιρέσουν μια κακοήθεια στο δέρμα σας, και τα υδάτινα κύματα μπορούν να “καταπιούν” ολόκληρες παραλίες.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Έστω το σύστημα σώμα + Γη που φαίνεται στο Σχήμα 3.27. Το σύστημα είναι μη απομονωμένο, καθώς του ασκείται εξωτερική δύναμη από το χέρι μας. Το έργο που παράγει η δύναμη του χεριού μας μεταφέρεται ως ενέργεια στο σύστημα. Η ενέργεια αυτή διαδίδεται με τη μορφή κύματος κατά μήκος του νήματος. Παρατηρούμε μετά από λίγο ότι το σώμα που είναι δεμένο στο νήμα ανυψώνεται: υπήρξε μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώμα + Γη. Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν δημιουργήσετε κύμα με υψηλότερο πλάτος, η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος θα είναι μεγαλύτερη.

Ας ψεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό στοιχειώδες τμήμα ενός νήματος. Όπως έχουμε ήδη δει, το στοιχείο αυτό εκτελεί AAT στον κατακόρυφο άξονα, οπότε έχει κινητική και δυναμική ενέργεια που μεταβάλλονται



Σχήμα 3.27: Σύστημα σώμα + Γη στη μεταφορά ενέργειας μέσω κύματος.

κατά την κίνησή του (το άθροισμα τους όμως είναι σταθερό). Έστω ότι το στοιχείωδες τμήμα αυτό έχει μήκος  $dx$  και μάζα  $dm$ . Η κινητική του ενέργεια ισούται με

$$dK = \frac{1}{2}dmu_y^2(x,t) = \frac{1}{2}(\mu dx)u_y^2(x,t) \quad (3.159)$$

Έστω ότι φωτογραφίζουμε το κύμα για  $t = 0$ . Τότε

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\cos^2(kx)dx \quad (3.160)$$

Το κύμα μπορεί να συνίσταται από πολλά μήκη κύματος (να είναι δηλ. πολύ μακρύ). Για να μπορούμε να συγχρίνουμε ενέργειες κυμάτων διαφορετικών κυμάτων, θα υπολογίσουμε την ενέργεια ενός μήκους κύματος. Αυτό θα το κάνουμε αθροίζοντας την κινητική ενέργεια καθενός από τα στοιχειώδη τμήματα νήματος που συνιστούν ένα μήκος κύματος. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι θα ολοκληρώσουμε ως προς  $x$  την παραπάνω έκφραση  $dK$ . Είναι

$$K_\lambda = \int dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\lambda \quad (3.161)$$

Ακριβώς με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε - κάντε το! - ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός μήκους κύματος ισούται με

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda \quad (3.162)$$

Η συνολική ενέργεια που σχετίζεται με ένα μήκος κύματος είναι το άθροισμα της κινητικής και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας που υπολογίσαμε. Οπότε

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda \quad (3.163)$$

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας, δηλ. η ισχύς  $P$  του κύματος, ισούται με το λόγο της συνολικής ενέργειας προς το χρόνο που απαιτείται για τη μεταφορά της. Αν η ταχύτητα του ημιτονοειδούς κύματος είναι σταθερή, ο χρόνος που χρειάζεται ένα μήκος κύματος να περάσει από ένα συγκεκριμένο σημείο είναι ίσος με την περίοδο του κύματος, που επίσης είναι σταθερή. Οπότε

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2u \quad (3.164)$$

με  $u$  την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Παράδειγμα 3.16:

Η κυματοσυνάρτηση ενός κύματος που διανύει ένα νήμα δίνεται ως

$$y(x,t) = 0.35 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.165)$$

με τα  $x, y$  να μετριούνται σε μέτρα, και το  $t$  σε δευτερόλεπτα. Αν η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι 75 gr/m, τότε

(α') δείξτε ότι ο μέσος ρυθμός μεταφοράς ενέργειας στο νήμα είναι 15.1 W.

(β') η ενέργεια που περιέχεται σε κάθε κύκλο του κύματος είναι 3.02 J.

Λύση:

(α') Έχουμε ότι

$$y(x,t) = 0.35 \sin(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}) \quad (3.166)$$

η οποία γράφεται ως

$$y(x,t) = 0.35 \sin(3\pi x - 10\pi t + \frac{3\pi}{4}) \quad (3.167)$$

οπότε και αναγνωρίζουμε ότι

$$k = 3\pi \text{rad/m} \quad (3.168)$$

$$\omega = 10\pi \text{rad/s} \quad (3.169)$$

$$A = 0.35 \text{ m} \quad (3.170)$$

Άρα

$$u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 3.33 \text{ m/s} \quad (3.171)$$

Άρα ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας είναι

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 15.1 \text{ W} \quad (3.172)$$

(β') Η ενέργεια ανά κύκλο κύματος θα είναι

$$E_\lambda = PT = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda = 3.02 \text{ J} \quad (3.173)$$

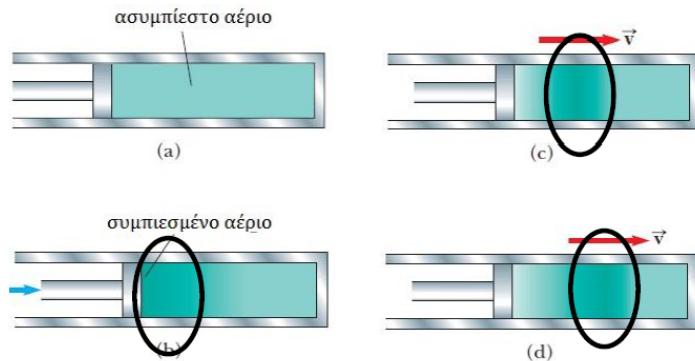
αφού  $uT = \frac{u}{f} = \lambda$ .

### 3.7 Ηχητικά Κύματα

Σίγουρα τα πιο οικεία κύματα στην καθημερινότητά μας είναι τα ηχητικά κύματα: δεν τα βλέπουμε αλλά τα ακούμε και τα καταλαβαίνουμε. Τα ηχητικά κύματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- Ακουστικά κύματα: κύματα που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί. Η μουσική και η φωνητική επικοινωνία των περισσότερων θηλαστικών εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία.
- Κύματα υποήχων: κύματα που χρησιμοποιούνται από μερικά ζώα για την επικοινωνία τους, όπως οι ελέφαντες και οι φάλαινες. Επίσης, πολλά έντονα καιρικά φαινόμενα παράγουν υποήχους, όπως οι καταιγίδες, οι κατολισθήσεις, οι σεισμοί, κλπ.
- Κύματα υπερήχων: κύματα που χρησιμοποιούν ξανά κάποια ζώα όπως οι νυχτερίδες και κύματα ιδιαίτερα δημοφιλή στις ιατρικές απεικονίσεις.

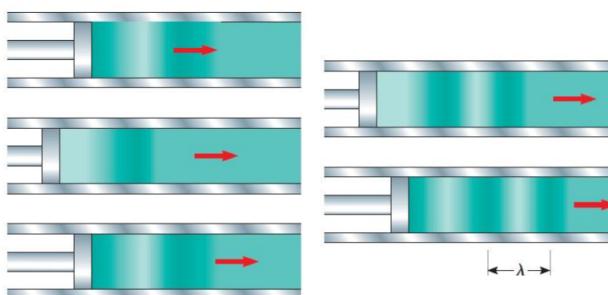
Η κατανόηση των ηχητικών κυμάτων περνά μέσα από την προσομοίωσή τους με έμβολα και αέρια σε δοχεία. Αν γεμίσουμε ένα δοχείο, κλειστό από τη μια όχρη, με ένα ασυμπίεστο αέριο, και στην άλλη όχρη τοποθετήσουμε ένα έμβολο μπορούμε να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά του αερίου στις αλλαγές της πίεσης και πυκνότητας του εξ αιτίας της κίνησης του εμβόλου. Αρχικά, το αέριο βρίσκεται σε ομοιόμορφη κατανομή μέσα στο δοχείο και το έμβολο είναι ακίνητο, όπως στο Σχήμα 3.28(a). Στη συνέχεια, κινούμε το έμβολο



Σχήμα 3.28: Έμβολο σε κίνηση σε δοχείο με άεριο.

προς τα δεξιά, συμπιέζοντας την περιοχή του αερίου ακριβώς μπροστά από την επιφάνεια του εμβόλου. Η πίεση και η πυκνότητα του αερίου σε εκείνο το χώρο είναι μεγαλύτερη από ότι στο υπόλοιπο μέρος του. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.28(b). Το έμβολο παραφένει ακίνητο στη νέα του θέση, όπως στο Σχήμα 3.28(c) ενώ παρατηρούμε ένα διάμηκες κύμα να διαδίδεται στο δοχείο με ταχύτητα  $v$  προς τα δεξιά. Προσέξτε ότι δε διαδίδεται ύλη! Τα μόρια του αερίου που βρίσκονται μπροστά από το έμβολο δεν ταξιδεύουν προς τα δεξιά! Μετά την κίνηση του εμβόλου προς τα δεξιά, τα μόρια του αερίου συμπιέζονται και μετά από λίγο αποσυμπιέζονται, συμπιέζοντας τα διπλανά τους μόρια, που με τη σειρά τους κατά την αποσυμπίεση συμπιέζουν τα γειτονικά τους κ.ο.κ. Αυτή η διάδοση συνεχίζεται, όπως στο Σχήμα 3.28(d).

Τι θα συμβεί αν το έμβολο αρχίσει να κινείται μπρος - πίσω, εκτελώντας AAT; Δείτε το Σχήμα 3.29. Η



Σχήμα 3.29: Έμβολο σε AAT σε δοχείο με άεριο.

κίνηση του εμβόλου προς τα εμπρός δημιουργεί περιοχές συμπίεσης του αερίου, που ονομάζονται πυκνώματα. Η κίνηση του εμβόλου προς τα πίσω δημιουργεί περιοχές αραιώσης των μορίων του αερίου, που ονομάζονται αραιώματα<sup>3</sup>. Η διαδικασία είναι ακριβώς όμοια με αυτή που περιγράφηκε νωρίτερα. Κάθε πύκνωμα και αραιόμα διαδίδεται στο μέσο με την ταχύτητα του ήχου στο μέσο αυτό. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πυκνώματων ή αραιώματων δεν είναι άλλη από το μήκος κύματος  $\lambda$ .

Κάθε μικρός όγκος αερίου εκτελεί AAT παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η κίνηση

<sup>3</sup>Όχι ιδιαίτερες εμπνεύσεις στις ονομασίες :

του αυτή περιγράφεται από τη σχέση

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t) \quad (3.174)$$

με  $s_{max}$  να είναι το πλάτος μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας και δηλώνει τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου από αυτή. Όμοια με τη θέση κάθε στοιχείου του αερίου, μπορεί κανείς να υπολογίσει πόσο μεταβάλλεται η πίεση ενός μικρού όγκου αερίου εξ' αιτίας του εμβόλου. Η μεταβολή της πίεσης  $\Delta P$  δίνεται από τη σχέση

$$\Delta P(x, t) = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t) \quad (3.175)$$

όπου  $\Delta P_{max}$  το πλάτος πίεσης, δηλ. η μέγιστη μεταβολή της πίεσης γύρω από μια τιμή ισορροπίας. Η σχέση μετατόπισης και μεταβολής πίεσης δεν είναι τυχαία: η μεταβολή της πίεσης αποτελεί την παράγωγο της μετατόπισης ως προς τη θέση  $x$ . Ως εκ τούτου δεν είναι περίεργο που αν η μια συνάρτηση είναι συνημιτονοειδής, η άλλη είναι ημιτονοειδής. Παρατηρήστε ότι η μεταβολή πίεσης είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση των στοιχείων είναι μηδενική, ενώ η μετατόπιση των στοιχείων είναι μέγιστη όταν η μεταβολή της πίεσης είναι μηδενική.

### 3.7.1 Ταχύτητα Διάδοσης Ήχου

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε ένα μέσο εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας όγκου  $B$  και την πυκνότητα  $\rho$  του μέσου. Στην περίπτωση της διάδοσης στον αέρα, η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τη σχέση

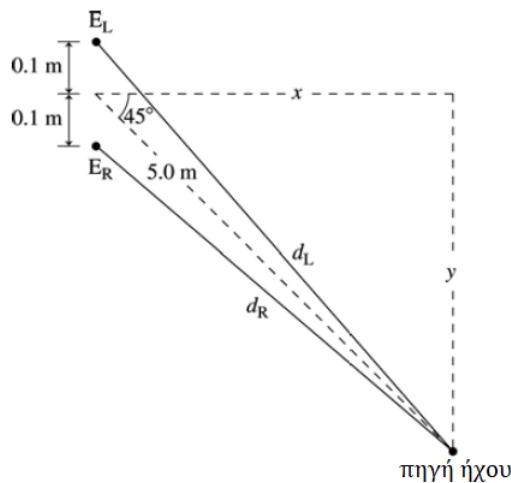
$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} \quad (3.176)$$

με  $T_c$  τη θερμοκρασία του αέρα σε βαθμούς Κελσίου.

#### Παράδειγμα 3.17:

Ένας τρόπος που το ακουστικό μας σύστημα μπορεί να εντοπίζει την προέλευση των ήχων (sound localization) είναι μετρώντας τη - μικρή - διαφορά στο χρόνο άφιξης των ηχητικών κυμάτων στα αυτιά μας. Θεωρήστε ότι τα αυτιά σας απέχουν περίπου 20 εκατοστά μεταξύ τους. Θεωρήστε ότι μια πηγή ήχου βρίσκεται 5 μέτρα μακριά από το κέντρο του κεφαλιού σας, και υπό γωνία 45° μοιρών προς τα δεξιά σας. Ποιά είναι η χρονική διαφορά μεταξύ των άφιξεων του κύματος στο δεξί και στο αριστερό αυτί σας; Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι  $u_s = 343$  m/s.

Λύση: Σχηματικά, το πρόβλημα φαίνεται στο Σχήμα 3.30. Η απόσταση μεταξύ της πηγής και του αριστερού



Σχήμα 3.30: Εντοπισμός κύματος από το ακουστικό σύστημα.

αυτού ( $E_L$ ) είναι

$$d_L = \sqrt{x^2 + (y+0.1)^2} = \sqrt{(5\cos 45^\circ)^2 + (5\sin 45^\circ + 0.1)^2} = 5.07 \text{ m} \quad (3.177)$$

Όμοια για το δεξί αυτή,  $d_R = 4.93 \text{ m}$ . Έτσι

$$d_L - d_R = \Delta d = 0.14 \text{ m} \quad (3.178)$$

Για το ηχητικό κύμα με τη δεδομένη ταχύτητα, η διαφορά στις αφίξεις του ήχου στο αριστερό και στο δεξί αυτή είναι

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{343} \approx 408 \mu\text{s} \quad (3.179)$$

### 3.7.2 Ένταση Ηχητικών Κυμάτων

Πλέον θα αντιμετωπίζουμε τα ηχητικά κύματα ως σφαιρικά κύματα, δηλ. κύματα που διαδίδονται σε όλες τις κατευθύνσεις. Ένα σφαιρικό κύμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύνολο από ομόχεντρα κυκλικά τόξα, με το μέτωπο κύματος να ονομάζεται η επιφάνεια όπου η ποσότητα  $kx - \omega t + \phi$  έχει ην ίδια τιμή. Οι ακτίνες του σφαιρικού κύματος είναι νοητές ευθείες που ξεκινούν από την πηγή και δείχνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

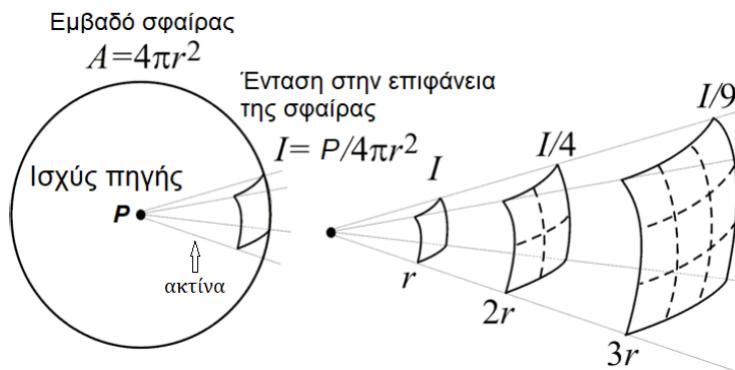
Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση  $I$  ενός ηχητικού κύματος δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{P_{avg}}{A} \quad (3.180)$$

με  $A$  το εμβαδό της επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης και  $P_{avg}$  τη μέση ισχύ της πηγής. Με βάση τον ορισμό της έντασης που δώσαμε μόλις, για ένα σφαιρικό ηχητικό κύμα θα έχουμε

$$I = \frac{P_{avg}}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (3.181)$$

με  $r$  την ακτίνα του κυματικού μετώπου. Παρατηρήστε ότι η ένταση μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή. Δείτε το Σχήμα 3.31.



Σχήμα 3.31: Ένταση κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση από την πηγή.

#### Παράδειγμα 3.18:

Ένα ηχητικό κύμα έντασης  $2 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$  θεωρείται ως μετρίως δυνατό στα αυτιά μας. Το τύμπανο στο εσωτερικό των αυτιών μας έχει διάμετρο 6 χιλιοστά. Δείξτε ότι η ενέργεια που μεταφέρεται στο τύμπανο των αυτιών μας αν ακούσουμε το παραπάνω ηχητικό κύμα για 60 δευτερόλεπτα είναι  $E = 3.4 \times 10^{-6} \text{ J}$ .

Θεωρήστε το τύμπανο ως μια στρογγυλή επιφάνεια.

Λύση: Η ενέργεια που παραδίδεται στο αυτί μας σε χρόνο  $t$  ισούται με  $E = Pt$ , με  $P$  την ισχύ του κύματος. Η ένταση του κύματος είναι  $I = P/A$  με  $A$  το εμβαδόν της επιφάνειας του τυμπάνου. Συνολικά,

$$E = Pt = IAt = I\pi r^2 t = 3.4 \times 10^{-6} \text{ J} \quad (3.182)$$

### 3.7.3 Ηχοστάθμη

Είναι ενδιαφέρον να εμβαθύνουμε περισσότερο στα ηχητικά κύματα και στον τρόπο που τα αντιλαμβανόμαστε. Οι ασθενέστεροι ήχοι που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα των 1000 Hz έχουν ένταση περίπου  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Αυτό είναι το λεγόμενο κατώφλι ακοής στα 1000 Hz, που συχνά χρησιμοποιείται ως συχνότητα αναφοράς, αν και ότι το κατώφλι μεταβάλλεται συναρτήσει της συχνότητας. Από την άλλη, οι δυνατότεροι ήχοι που μπορούμε να ακούσουμε (χωρίς πόνο) είναι της τάξης έντασης του  $1 \text{ W/m}^2$ . Βλέπετε ότι το εύρος των εντάσεων είναι ιδιαίτερα μεγάλο. Η γραμμική κλίμακα της έντασης δε μας βοηθά να τη χειριστούμε. Θα θέλαμε μια άλλη κλίμακα, περισσότερο βολυκή, και μια τέτοια είναι η λογαριθμική κλίμακα. Ονομάζουμε ηχοστάθμη την ποσότητα

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (3.183)$$

με  $I_0$  την ένταση αναφοράς (κατώφλι ακοής) σε κάποια συχνότητα. Η ηχοστάθμη μετατρέπει τη γραμμική ένταση εύρους από  $10^{-12}$  ως  $1 \text{ W/m}^2$  σε λογαριθμική εύρους 0 ως 120 dB, με τη μονάδα μέτρησης αυτή να ονομάζεται decibel - ντεσιμπέλ - προς τιμήν του A. G. Bell. Σε αυτήν την κλίμακα, το κατώφλι ακοής βρίσκεται στα  $\beta = 0$ , μια τυπική συζήτηση δύο ατόμων βρίσκεται στα  $\beta = 60$  dB, ο θόρυβος της κίνησης στο δρόμο στα  $\beta = 80$  dB, ενώ το όριο του πόνου στα  $\beta = 120 - 130$  dB.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 3.19:

Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με  $2 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$ .

- (α') Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.
- (β') Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δύο μηχανές.

Λύση:

(α') Για τη μια μηχανή, είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{2 \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-12}} \quad (3.184)$$

$$= 10 \log_{10}(2 \times 10^5) = 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^5 \quad (3.185)$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 50 \approx 3 + 50 = 53 \text{ dB} \quad (3.186)$$

(β') Για τις δύο μηχανές, είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I'}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{4 \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-12}} \quad (3.187)$$

$$= 10 \log_{10}(4 \times 10^5) = 10 \log_{10} 4 + 10 \log_{10} 10^5 \quad (3.188)$$

$$= 10 \log_{10} 4 + 50 \approx 6 + 50 = 56 \text{ dB} \quad (3.189)$$

Παρατηρήστε ότι ο διπλασιασμός της έντασης αυξάνει την ηχοστάθμη κατά 3 μόλις dB!

Παράδειγμα 3.20:

Τα αυτιά μας είναι ευαίσθητα στην αντίληψη διαφορετικών συχνοτήτων αλλά όχι τόσο στην αντίληψη διαφορετικών εντάσεων. Δεν είμαστε ικανοί/ες, π.χ. να καταλάβουμε τη διαφορά στην αύξηση της έντασης  $I$  ενός ήχου, όταν η διαφορά των ηχοστάθμεων  $\Delta\beta$  είναι λιγότερη από 1 dB. Δείξτε ότι

$$\frac{I_2}{I_1} = 1.3 \quad (3.190)$$

αν η ηχοστάθμη ανεβαίνει από τα  $\beta_1 = 60$  dB στα  $\beta_2 = 61$  dB.

Λύση: Λύνοντας την εξίσωση της ηχοστάθμης ως προς  $I$ , έχουμε

$$I = I_0 \times 10^{\beta/10} \quad (3.191)$$

Για  $\beta = 60$  dB, έχουμε  $I = 10^{-6}$  W/m<sup>2</sup> και για  $\beta = 61$  dB, έχουμε  $I = 1.3 \times 10^{-6}$  W/m<sup>2</sup>. Ο λόγος των δυο είναι 1.3.

Παράδειγμα 3.21:

Δυο ηχεία σε υπερυψωμένες πλατφόρμες βρίσκονται στις απέναντι θέσεις σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους. Καιθένα εκπέμπει με την ίδια ισχύ και τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε όλες τις κατευθύνσεις ως κυματικά μέτωπα. Η ηχοστάθμη σε ένα σημείο στη μέση της μεταξύ τους απόστασης είναι 75 dB. Ποιά είναι η ηχοστάθμη στο σημείο του ενός τατάρτου της μεταξύ τους απόστασης, αν υποθέσουμε ότι μετράμε τις ηχοστάθμες σε μια νοητή ευθεία γραμμή που ενώνει τα ηχεία μεταξύ τους;

Λύση: Έστω  $d$  η απόσταση των ηχείων. Έστω ότι η ένταση στη μέση της απόστασης ( $d/2$ ) είναι  $I_1$  και η ηχοστάθμη εκεί είναι  $\beta_1 = 75$  dB. Έστω  $I_2$  και  $\beta_2$  τα αντίστοιχα μεγέθη σε απόσταση ενός τετάρτου της συνολικής απόστασης  $d$  από το ένα ηχείο και τρία τέταρτα της  $d$  από το άλλο ηχείο, στη νοητή ευθεία που τα συνδέει. Ξέρουμε ότι

$$I = \frac{P_{avg}}{A} = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.192)$$

Οπότε

$$I_1 = \frac{P_{avg}}{4\pi(d/2)^2} + \frac{P_{avg}}{4\pi(d/2)^2} = \frac{2P_{avg}}{\pi d^2} \quad (3.193)$$

$$I_2 = \frac{P_{avg}}{4\pi(d/4)^2} + \frac{P_{avg}}{4\pi(3d/4)^2} = \frac{40P_{avg}}{9\pi d^2} = \frac{20}{9}I_1 \quad (3.194)$$

Επίσης

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} = 3.48 \text{ dB} \quad (3.195)$$

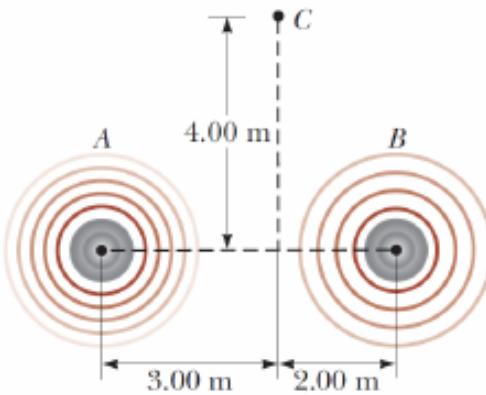
Οπότε

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = 75 + 3.48 = 78.48 \text{ dB} \quad (3.196)$$

Παράδειγμα 3.22:

Δύο μικρά ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα διαφορετικών συχνοτήτων, κατά τον ίδιο τρόπο προς κάθε κατεύθυνση, όπως στο Σχήμα 3.32. Το ηχείο  $A$  έχει εξαγώμενη ισχύ 1.00 mW και το ηχείο  $B$  έχει εξαγώμενη ισχύ 1.50 mW. Υπολογίστε το επίπεδο του ήχου στο σημείο  $C$ , σε dB, υποθέτοντας ότι (α') μόνο ο  $A$  εκπέμπει ήχο

- (β') μόνο ο  $B$  εκπέμπει ήχο  
 (γ') και οι δύο εκπέμπουν ήχο



Σχήμα 3.32: Μικρά ηχεία σε εκπομπή.

Λύση: Καθώς τα ηχεία μεταδίδουν τον ήχο ομοίως προς κάθε κατεύθυνση η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή του ήχου.

(α') Είναι  $r_{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  m. Άρα

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi(5)^2} = 3.18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2. \quad (3.197)$$

Οπότε

$$\beta = 10 \log \left( \frac{3.18 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \times 6.5 = 65 \text{ dB}. \quad (3.198)$$

(β') Είναι  $r_{BC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47$  m. Άρα

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{4\pi(4.47)^2} = 5.97 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 \quad (3.199)$$

Οπότε

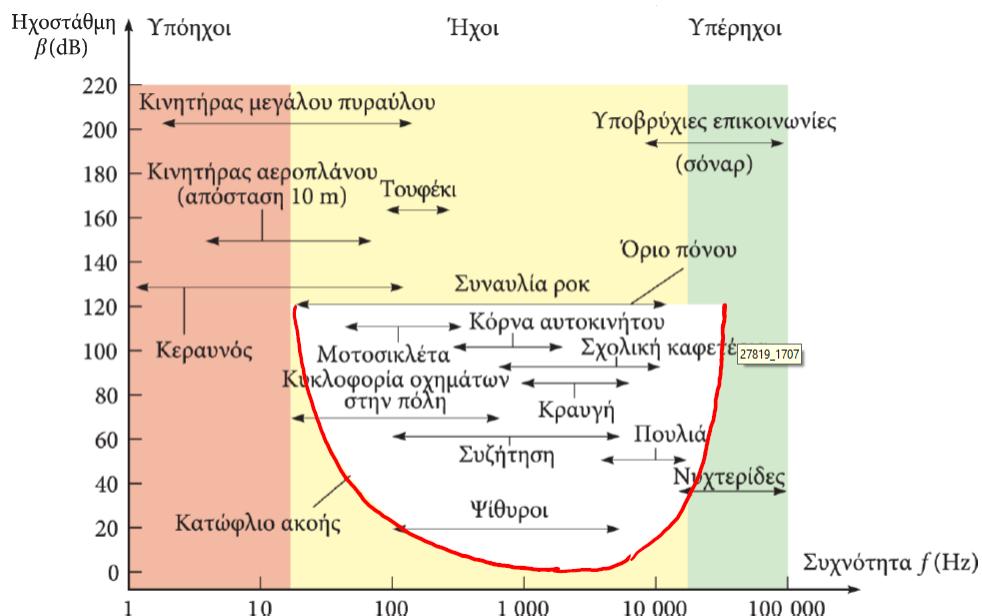
$$\beta = 10 \log \left( \frac{5.97 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 67.8 \text{ dB} \quad (3.200)$$

(γ') Είναι  $I = 3.18 \mu\text{W/m}^2 + 5.97 \mu\text{W/m}^2$ . Άρα

$$\beta = 10 \log \left( \frac{9.15 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 69.6 \text{ dB} \quad (3.201)$$

### 3.7.4 Ψυχοακουστική

Παρουσιάσαμε νωρίτερα την ηχοστάθμη των 1000 Hz ως ηχοστάθμη αναφοράς για διάφορα προβλήματα και είδαμε ότι το κατώφλι της έντασης είναι  $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , δηλ. η ηχοστάθμη είναι  $\beta = 0 \text{ dB}$ . Όμως στα 100 Hz, το κατώφλι της ηχοστάθμης είναι  $\beta = 30 \text{ dB}$ ! Με άλλα λόγια, η ψυχολογική μας αντίδραση στους δύο ήχους είναι η ίδια, παρ' όλο που αριθμητικά η τιμή του κατώφλιου ηχοστάθμης είναι διαφορετική! Αν μετρήσουμε το κατώφλι ακοής σε διάφορες συχνότητες, θα δούμε ότι η ηχοστάθμη μεταβάλλεται με τη συχνότητα όπως στο Σχήμα 3.33. Η κόκκινη καμπύλη παρουσιάζει το κατώφλι ακοής. Παρατηρήστε ότι για να ακούσουμε μια συχνότητα των 40 Hz, η ηχοστάθμη της πρέπει να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή της συχνότητας των 1000 Hz. Το άνω όριο της λευκής περιοχής αντιπροσωπεύει το όριο του πόνου. Ο άνθρωπος λοιπόν μπορεί



Σχήμα 3.33: Ηχοστάθμη συναρτήσει της συχνότητας.

να ακούσει συχνότητες από 20 ως 20000 Hz.

Η επιστήμη της ψυχοακουστικής έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον θεωρητικά αλλά και πρακτικά, καθώς η ψυχοακουστική ανάλυση έχει κεντρικό ρόλο σε ένα πολύ γνωστό σας πρότυπο συμπίεσης ήχου: το MP3! Όλοι/ες γνωρίζετε ότι μπορεί κανένας να συμπιέσει ένα αρχείο .WAV σε μορφή .MP3, εξοικονομώντας πολλά MB, χωρίς ίδιαίτερη απώλεια ποιότητας ήχου. Πώς γίνεται αυτό; Το πρότυπο MP3 είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο αλλά μπορούμε να περιγράψουμε το τμήμα που σχετίζεται με όσα έχουμε συζητήσει. Για την επίτευξη αυτού του βαθμού συμπίεσης του ήχου, το πρότυπο MP3 αξιοποιεί τρείς βασικούς παράγοντες:

- I. Εξάλειψη ήχων που βρίσκονται κάτω από το κατώφλι ακοής.
- II. Χρησμοποίηση της ευαισθησίας του αυτιού μας στο εύρος συχνοτήτων που ακούμε.
- III. Φαινόμενο επικάλυψης ήχων από γειτονικούς τους.

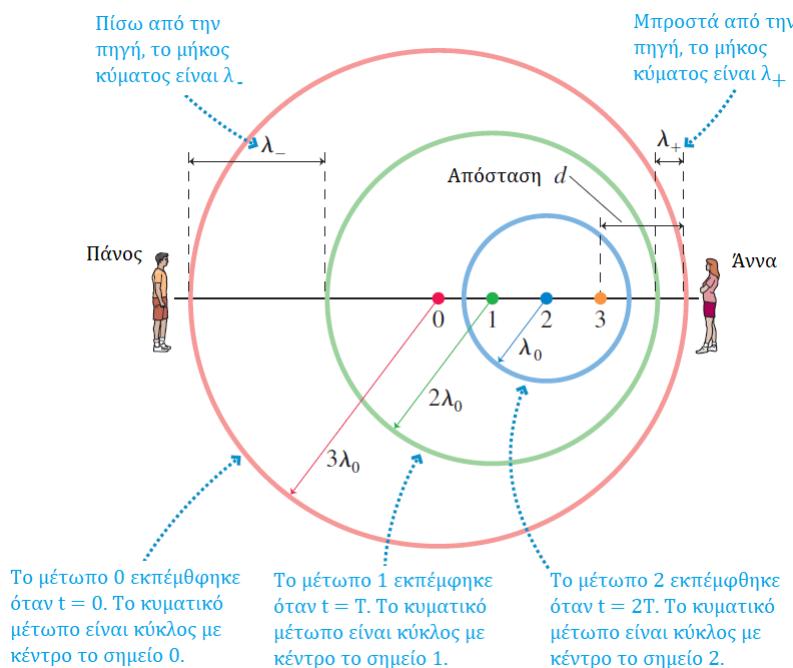
Με λίγο περισσότερη λεπτομέρεια, ο παράγοντας I αφορά την ανίχνευση των ήχων της αρχικής ηχογράφησης που δεν τους αντιλαμβανόμαστε γιατί η ηχοστάθμη τους βρίσκεται κάτω από το κατώφλι ακοής. Αυτό προϋποθέτει να μπορούμε να αναλύσουμε την ηχογράφηση σε συχνότητες και στη συνέχεια να ελέγξουμε ποιές έχουν ηχοστάθμη που βρίσκεται κάτω από την κόκκινη καμπύλη του Σχήματος 3.33. Αυτές οι συχνότητες μπορούν να μην αποθηκευθούν στο συμπιεσμένο αρχείο. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε απώλεια πληροφορίας μεν (και άρα συμπίεση του αρχικού αρχείου), μη αντιληπτή δε. Ο παράγοντας II αφορά την ευαισθησία του αυτιού μας σε διαφορετικές συχνότητες. Πειραματικά έχει αποδειχθεί ότι όχι μόνο το αυτί μας “ακούει λογαριθμικά” αλλά και ότι είναι πολύ περισσότερο ευαίσθητο στις χαμηλές συχνότητες σε σχέση με τις υψηλές. Οπότε χρειαζόμαστε περισσότερη διαχριτική ικανότητα (ανάλυση) για χαμηλόσυχνους ήχους και λιγότερη για υψησυχνους ήχους. Τέλος, ο παράγοντας III αφορά δύο κοντινές συχνότητες που εμφανίζονται ταυτόχρονα, και στην ικανότητα ενός δυνατότερου ήχου να επικαλύψει τον ασθενέστερο γειτονικό του. Το φαινόμενο ονομάζεται frequency masking, αλλά υπάρχει παρόμοιο φαινόμενο και στο πεδίο του χρόνου (temporal masking): αν ακούσουμε ένα δυνατό ήχο, όταν αυτός σταματήσει θα μας πάρει λίγη ώρα να αντιληφθούμε έναν ακολουθούμενο τόνο. Και στις δύο περιπτώσεις, μπορούμε να εξοικονομήσουμε bits με το να μην αποθηκεύσουμε τους ήχους που δεν αντιλαμβανόμαστε. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εδώ: <https://en.wikipedia.org/wiki/MP3>, ενώ ένα αρκετά πιο τεχνικό paper μπορείτε να βρείτε εδώ: <https://www.csd.uoc.gr/hy438/lectures/PerceptualCodingAudio.pdf>.

### 3.7.5 Το Φαινόμενο Doppler

Έχετε ποτέ παρατηρήσει τι συμβαίνει όταν κάθεστε στο μπαλκόνι του σπιτιού σας και ακούτε ένα πυροσβεστικό όχημα να τρέχει γρήγορα στο δρόμο από μια κατεύθυνση προς την άλλη; Αν ναι, τότε έχετε βιώσει το φαινόμενο Doppler! :) Τσως έχετε παρατηρήσει ότι η σειρήνα του οχήματος έχει υψηλότερη συχνότητα όσο πλησιάζει προς εσάς και χαμηλότερη συχνότητα κανώς απομακρύνεται. Πώς εξηγείται κάτι τέτοιο;

Ας χρησιμοποιήσουμε μια αναλογία περισσότερο “οπτική” για να κατανοήσουμε τι συμβαίνει. Έστω ότι βρίσκεστε σε μια βάρκα στη θάλασσα. Αν είστε ακίνητος/η, τα κύματα της θάλασσας θα χτυπούν τη βάρκα με περίοδο  $T$ : Θα βλέπετε ένα κυματάκι να σκάει στην πλώρη της βάρκας κάθε  $T$  δευτερόλεπτα. Αρχίζετε να κάνετε κουπί (ή εκκινείτε τη μηχανή της βάρκας) προς τη θεωρητική πηγή των κυμάτων, δηλ. προς το μέρος από το οποίο προέρχονται τα κύματα. Αν παρατηρήσετε την πλώρη της βάρκας, κάθε κυματισμός θα σκάει πιο συχνά τώρα, αφού τόσο εσείς όσο και τα κύματα κινείστε ο ένας προς τον άλλο. Η περίοδος των κυμάτων που μετράτε τώρα είναι  $T' < T$ , αφού τα κύματα φτάνουν πιο συχνά: η συχνότητα εμφάνισης είναι μεγαλύτερη,  $f' = 1/T' > f = 1/T$  απ' ό,τι πριν. Σκεφτείτε τώρα ότι κινείστε αντίθετα. Αν μετρήσετε τον αριθμό των κυμάτων που σκάνε στην πλώρη της βάρκας, θα τα βρείτε λιγότερα στην ίδια μονάδα του χρόνου. Γιατί; Γιατί εσείς και τα κύματα απομακρύνεστε μεταξύ σας! Η περίοδος που θα μετράτε τώρα θα είναι  $T' > T$ , αφού  $f' = 1/T' < f = 1/T$ . Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για μια πηγή ήχου που κινείται προς ή μακριά από σας.

Μετά από αυτήν την εισαγωγική ιδέα, ας πάμε πιο κοντά στην πραγματικότητα. Παρατηρήστε την Εικόνα 3.34. Έστω ότι η συχνότητα εκπομπής της πηγής είναι  $f_0$  και η ταχύτητα της είναι  $v_s$ . Η Άννα μετρά



Σχήμα 3.34: Φαινόμενο Doppler για κινούμενη πηγή.

τη συχνότητα του κύματος που εκπέμφηκε από την κινούμενη προς αυτήν πηγή και τη βρίσκει  $f_+$ . Την ίδια στιγμή, ο Πάνος μετρά τη συχνότητα του κύματος που εκπέμφηκε από την κινούμενη μακριά από αυτόν πηγή και τη βρίσκει  $f_-$ . Θα δούμε τώρα πως συσχετίζεται η συχνότητα  $f_0$ , η ταχύτητα της πηγής  $v_s$  και οι συχνότητες  $f_-, f_+$ .

Είναι σημαντικό να καταλάβετε ότι όταν ένα κυματικό μέτωπο “φύγει” από την πηγή, η κίνησή του εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης. Με άλλα λόγια, η κίνηση της πηγής δεν επηρεάζει πλέον το ηχητικό κύμα που έχει εκπεμφθεί. Έτσι, κάθε κυκλικό κυματικό (που στην πραγματικότητα είναι σφαρικό)

μέτωπο του Σχήματος 3.34 έχει κέντρο το σημείο εκπομπής του. Το σημείο 3 έχει μόλις εκπέμψει ένα κυματικό μέτωπο αλλά δε φαίνεται στο σχήμα καθώς δεν έχει προλάβει να ταξιδέψει καμιά απόσταση.

Παρατηρήστε ότι τα κυματικά μέτωπα έχουν έλθει πιο κοντά στην κατεύθυνση κίνησης της πηγής και έχουν απομακρυνθεί πίσω της. Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών μετώπων είναι ένα μήκος κύματος  $\lambda_0$ , οπότε το μήκος κύματος  $\lambda_+$  που μετράει η Άννα είναι μικρότερο από το μήκος κύματος  $\lambda_0 = \frac{u}{f_0}$  που θα εζέπεμπε η πηγή αν ήταν ακίνητη. Όμοια, το μήκος κύματος  $\lambda_-$  είναι μεγαλύτερο του μήκους κύματος  $\lambda_0$ . Τα κύματα διαδίδονται μέσω στο μέσο με ταχύτητα  $u$ . Κατά συνέπεια, η συχνότητα  $f_+ = \frac{u}{\lambda_+}$  που ακούει ο παρατηρητής στον οποίο πλησιάζει η πηγή (Άννα) είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα  $f_0$ . Η απόσταση  $d$  που φαίνεται στο Σχήμα 3.34 είναι η διαφορά μεταξύ του πόσο μακριά κινήθηκε το κύμα και πόσο μακριά ταξίδεψε η πηγή τη χρονική στιγμή  $t = 3T$ . Αυτές οι αποστάσεις ισούνται με

$$\Delta x_{wave} = ut = 3uT \quad (3.202)$$

$$\Delta x_{source} = u_s t = 3u_s T \quad (3.203)$$

Η απόσταση  $d$  καλύπτει τρια μήκη κύματος: οπότε το μήκος κύματος που εκπέμφηκε από την πηγή που πλησιάζει την Άννα είναι

$$\lambda_+ = \frac{d}{3} = \frac{\Delta x_{wave} - \Delta x_{source}}{3} = (u - u_s)T \quad (3.204)$$

Η συχνότητα που ακούει η Άννα είναι

$$f_+ = \frac{u}{\lambda_+} = \frac{u}{u - u_s} f_0 \quad (3.205)$$

Μπορείτε να κάνετε τους ίδιους συλλογισμούς και να βρείτε τη συχνότητα  $f_-$  που ακούει ο Πάνος;

Ας συνοψίσουμε λοιπόν τώρα τις πιθανές καταστάσεις.

Κινούμενη πηγή προς ακίνητο παρατηρητή

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η πηγή είναι κινούμενη προς ακίνητο παρατηρητή. Η συχνότητα της πηγής είναι  $f_0 = 1/T$  και η ταχύτητά της  $u_s$ , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι  $u$ . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_+ = \frac{u}{\lambda_+} = \frac{u}{\lambda - \frac{u_s}{f_0}} = \frac{u}{\frac{u}{f_0} - \frac{u_s}{f_0}} = \left( \frac{u}{u - u_s} \right) f_0 = \left( \frac{1}{1 - \frac{u_s}{u}} \right) f_0 \quad (3.206)$$

δηλ. μια συχνότητα μεγαλύτερη της εκπεμπόμενης!

Κινούμενη πηγή από ακίνητο παρατηρητής

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πηγή είναι κινούμενη απομακρυνόμενη από ακίνητο παρατηρητή. Η συχνότητα της πηγής είναι  $f_0 = 1/T$  και η ταχύτητά της  $u_s$ , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι  $u$ . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_- = \frac{u}{\lambda_-} = \frac{u}{\lambda + \frac{u_s}{f_0}} = \frac{u}{\frac{u}{f_0} + \frac{u_s}{f_0}} = \left( \frac{u}{u + u_s} \right) f_0 = \left( \frac{1}{1 + \frac{u_s}{u}} \right) f_0 \quad (3.207)$$

δηλ. μια συχνότητα μικρότερη της εκπεμπόμενης!

Κινούμενος παρατηρητής προς ακίνητη πηγή

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πηγή είναι ακίνητη και ο παρατηρητής κινούμενος προς αυτή. Η συχνότητα της πηγής είναι  $f_0 = 1/T$  και η ταχύτητά του παρατηρητή  $u_o$ , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι  $u$ . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_+ = \frac{u'}{\lambda_0} = \left( \frac{u + u_o}{u} \right) f_0 = \left( 1 + \frac{u_o}{u} \right) f_0 \quad (3.208)$$

δηλ. μια συχνότητα μεγαλύτερη της εκπεμπόμενης! Η απόδειξη είναι διαφορετική από αυτή που είδαμε για την κινούμενη πηγή αλλά δε θα τη διατυπώσουμε εδώ.

Κινούμενος παρατηρητής από ακίνητη πηγή

Ας υποθέσουμε ότι η πηγή είναι ακίνητη και ο παρατηρητής κινούμενος απομακρυνόμενος από αυτή. Η συχνότητα της πηγής είναι  $f_0 = 1/T$  και η ταχύτητά του παρατηρητή  $u_o$ , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι  $u$ . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_- = \frac{u'}{\lambda_0} = \left( \frac{u - u_o}{u} \right) f_0 = \left( 1 - \frac{u_o}{u} \right) f_0 \quad (3.209)$$

δηλ. μια συχνότητα μικρότερη της εκπεμπόμενης! Η απόδειξη είναι διαφορετική από αυτή που είδαμε για την κινούμενη πηγή αλλά δε θα τη διατυπώσουμε εδώ.

### Γενική Σχέση του Doppler

Μπορούμε να ενοποιήσουμε τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις - και να συμπεριλάβουμε και σχετική κίνηση μεταξύ πηγής και παρατηρητή - με τη σχέση

$$f_{\pm} = \left( \frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f_0 \quad (3.210)$$

Προσέξτε ότι οι ταχύτητες μπαίνουν ως μέτρο στην παραπάνω σχέση. Πώς όμως επιλέγουμε τα πρόσημα στην παραπάνω σχέση; Αν η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται ο ένας προς τον άλλο, τότε επιλέγουμε πρόσημα που αυξάνουν τη συχνότητα  $f_{\pm}$ . Αν η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, τότε επιλέγουμε πρόσημα που μειώνουν τη συχνότητα  $f_{\pm}$ .

#### Παράδειγμα 3.23:

Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί “χολλάει” και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε (“αφήνετε”) από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μέτρα από το εδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Λύση: Επειδή η πηγή του ήχου απομακρύνεται από μας, αναμένουμε η συχνότητα που ακούμε να είναι μικρότερη από 600 Hz. Από τη σχέση του Doppler θα έχουμε

$$f_- = \frac{u}{u + u_s} f_0 \quad (3.211)$$

Έστω (A) η θέση που αφήνουμε το ξυπνητήρι από το παράθυρο, και η στιγμή που  $t = 0$ . Το ξυπνητήρι εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος - θέση (B). Θεωρούμε τη συμβολή των αζόνων μας στο σημείο (A), με θετική φορά προς τα πάνω. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το ξυπνητήρι στο έδαφος μπορεί να βρεθεί από την Κινητική ως

$$y_B = y_A + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.212)$$

$$-h = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.213)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.214)$$

Επίσης,

$$u_B = u_A - gt_B = 0 - gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \implies |u_B| = \sqrt{2gh} \text{ m/s} \approx 17.14 \text{ m/s} \quad (3.215)$$

με το πρόσημο — να δείχνει τη φορά της ταχύτητας (προς τα κάτω). Από τη σχέση του Doppler ξανά έχουμε

$$f_- = \frac{u}{u + u_B} f_0 = \frac{343}{343 + 17.14} 600 \approx 571 \text{ Hz} \quad (3.216)$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

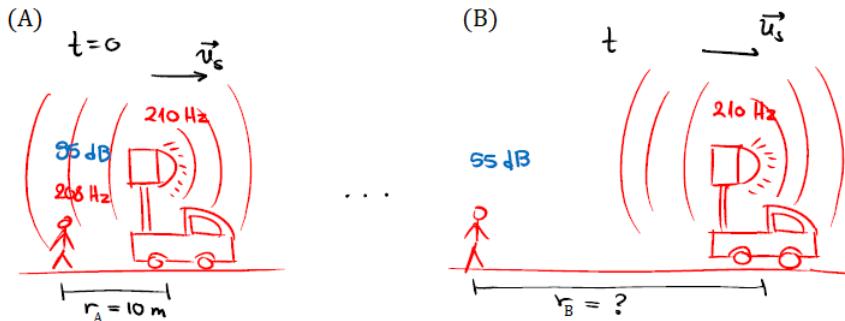
$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \quad (3.217)$$

για να βρείτε πιο εύκολα την ταχύτητα στη θέση  $B$ .

#### Παράδειγμα 3.24:

Από το ηχείο ενός πλανόδιου πωλητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα εκπέμπεται ένα ημίτονο στα 210 Hz. Όταν βρίσκεστε στα 10 m από το ηχείο, μετράτε την ηχοστάθμη του ήχου και τη βρίσκετε στα 95 dB στα 208 Hz. Πόσο χρόνο θα πάρει μέχρι η ηχοστάθμη να πέσει στα ανεκτά επίπεδα των 55 dB; Υποθέστε θερμοκρασία στους 20 βαθμούς Κελσίου.

Λύση: Δείτε το (καταπληκτικό :)) Σχήμα 3.35. Αρχικά, η ταχύτητα του ήχου είναι



Σχήμα 3.35: Πλανόδιος πωλητής με ηχείο.

$$u_s = 331 \sqrt{1 + \frac{20}{273}} \approx 343 \text{ m/s} \quad (3.218)$$

Από τη σχέση του Doppler έχουμε

$$f_- = \frac{u}{u + u_s} f_0 \implies u_s = \left( \frac{f_0}{f_-} - 1 \right) u = \left( \frac{210}{208} - 1 \right) 343 \approx 3.3 \text{ m/s} \quad (3.219)$$

αφού η πηγή απομακρύνεται από μας. Η ένταση του ήχου στις θέσεις (A), όπου είναι η θέση που μετράμε την ηχοστάθμη και στη θέση (B) που έχει φτάσει στα υποφερτά επίπεδα των 55 dB είναι αντίστοιχα

$$I_A = 10^{95/10} I_0 \quad (3.220)$$

$$I_B = 10^{55/10} I_0 \quad (3.221)$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{10^{9.5}}{10^{5.5}} = 10^4 \quad (3.222)$$

Όμως η ένταση του ήχου σχετίζεται με την απόσταση από την πηγή με τη σχέση

$$I_A = \frac{P_{avg}}{4\pi r_A^2} \quad (3.223)$$

και

$$I_B = \frac{P_{avg}}{4\pi r_B^2} \quad (3.224)$$

και διαιρώντας ξανά κατά μέλη λαμβάνουμε την πολύ χρήσιμη σχέση

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \quad (3.225)$$

Αφού ο λόγος των εντάσεων είναι  $10^4$ , το ίδιο θα είναι και ο λόγος των αποστάσεων, οπότε

$$\frac{r_B^2}{r_A^2} = 10^4 \implies r_B^2 = 10^4 r_A^2 = 10^6 \implies r_B = 1000 \text{ m} \quad (3.226)$$

Οπότε ο πωλητής πρέπει να φτάσει στο ένα χιλιόμετρο ώστε η ηχοστάθμη να πέσει τα 55 dB. Ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει αυτήν την απόσταση είναι

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{1000 - 10}{3.3} = \frac{990}{3.3} = 300 \text{ s} \quad (3.227)$$

Άρα τελικά πρέπει να περιμένουμε 5 λεπτά για να πέσει η ηχοστάθμη στα 55 dB.

### Παράδειγμα 3.25:

Μια σφυρίχτρα συχνότητας 540 Hz κινείται σε κύκλο ακτίνας 0.6 m με γωνιακή ταχύτητα 15 rad/s. Ποιά είναι η χαμηλότερη και η υψηλότερη συχνότητα που ακούει ένας ακροατής ακροατής ο οποίος βρίσκεται αρκετά μακριά από το κέντρο του κύκλου;

Λύση: Λόγω της απόστασης του ακροατή από τον κύκλο που διαγράφει η σφυρίχτρα, θεωρούμε ότι η κίνηση της σφυρίχτρας είναι ευθύγραμμη, μπρος-πίσω επάνω στη διάμετρο του κύκλου που ενώνει τον ακροατή με το κέντρο του κύκλου. Η γραμμική ταχύτητα της σφυρίχτρας ισούται με

$$u = \omega r \implies u = 0.6 \times 15 = 9 \text{ m/s} \quad (3.228)$$

Όταν η σφυρίχτρα πλησιάζει τον ακροατή, έχουμε

$$f_+ = \frac{u}{u - u_s} f_0 = \frac{343}{343 - 9} 540 = 555 \text{ Hz} \quad (3.229)$$

Όταν απομακρύνεται από αυτόν,

$$f_- = \frac{u}{u + u_s} f_0 = \frac{343}{343 + 9} 540 = 526 \text{ Hz} \quad (3.230)$$

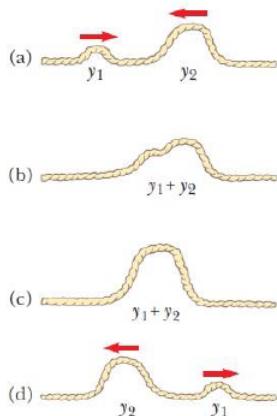
## 3.8 Υπέρθεση Κυμάτων

Στη μελέτη της κυματικής που έχουμε κάνει ως τώρα, δεν έχουμε τονίσει ένα σημαντικό γεγονός: μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ των κυμάτων και των σωμάτων είναι ότι αν αύριστουμε δύο σωματίδια, το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να είναι ένα (μεγαλύτερο) σωματίδιο, αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου - με άλλα λόγια, δε γίνεται δύο σωματίδια να καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο (το μεγαλύτερο σωματίδιο θα πιάνει περισσότερο χώρο απ' ό,τι καθένα μόνο του). Στην κυματική, το άυρισμα δύο κυμάτων είναι επίσης κύμα αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο του χώρου! Αυτή είναι μια πολύ σημαντική παρατήρηση: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συμβάλλουν στην ίδια θέση του χώρου! Τέτοιες συμπεριφορές μπορούν να αναλυθούν με βάση την αρχή της υπέρθεσης:

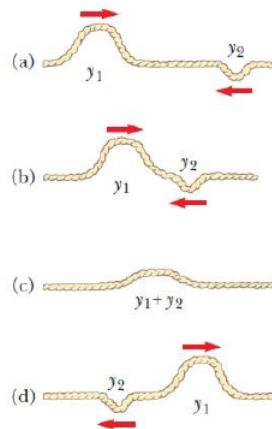
### Αρχή της Υπέρθεσης

Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό όθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων.

Κύματα που ικανοποιούν την παραπάνω αρχή ονομάζονται γραμμικά. Ο συνδυασμός γραμμικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου ονομάζεται συμβολή. Υπάρχουν τρια είδη συμβολής: η ενισχυτική συμβολή, όπου τα δυο κύματα συμβάλλουν σχηματίζοντας ένα μεγαλύτερου πλάτους κύμα, η καταστρεπτική συμβολή, όπου τα δυο κύματα συμβάλλουν σχηματίζοντας ένα μηδενικού πλάτους κύμα, και η ενδιάμεση συμβολή που είναι ουσιαστικά μια κατάσταση ανάμεσα στις δυο προηγούμενες. Δείτε το Σχήμα 3.36.



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

Σχήμα 3.36: Ενισχυτική και Καταστρεπτική Συμβολή.

#### 3.8.1 Υπέρθεση Ημιτονοειδών Κυμάτων

Ας επικεντρωθούμε ξανά στα ημιτονοειδή κύματα. Έστω δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά, έχοντας την ίδια συχνότητα  $\omega$ , μήκος κύματος  $\lambda$ , και πλάτος  $A$ , αλλά διαφορετική αρχική φάση  $\phi$ . Αυτά τα κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (3.231)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.232)$$

Το όθροισμα τους θα είναι

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (3.233)$$

$$= A \left[ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi) \right] \quad (3.234)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3.235)$$

με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Παρατηρήστε ότι εξακολουθούμε να έχουμε ένα οδεύουν ημιτονοειδές κύμα, καθώς έχουμε ακόμα μια συνάρτηση της μορφής  $f(kx \pm \omega t)$ . Όμως μπορούμε να διαχωρίσουμε μερικές περιπτώσεις για να κατανοήσουμε πως συμβάλλουν τα δυο κύματα. Η μόνη διαφορά τους είναι στην αρχική φάση  $\phi$ . Μπορούμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ως

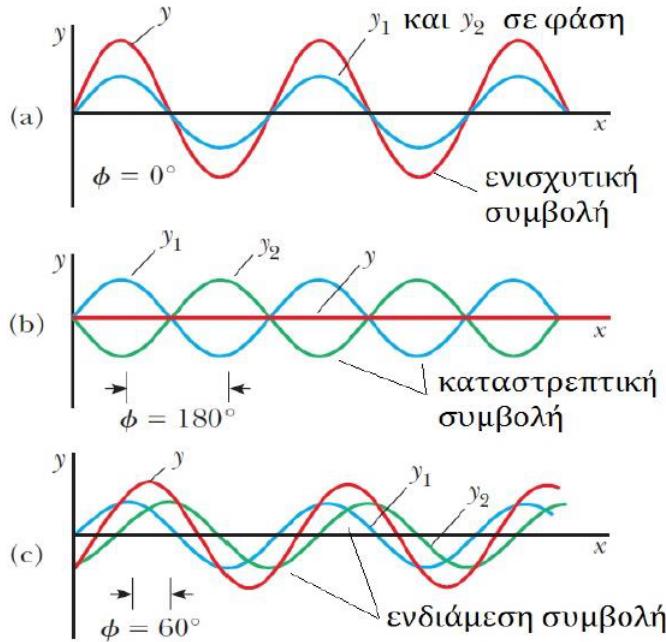
$$y(x, t) = A(\phi) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3.236)$$

και τότε - δείτε σε συνδυασμό το Σχήμα 3.37 - έχουμε:

(α')  $\phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ : στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A(\phi) = 2A \cos(k\pi) = \pm 2A \quad (3.237)$$

δηλ. το πλάτος του κύματος είναι  $2A$ , το μέγιστο δυνατό. Τότε λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται σε φάση και ονομάζουμε τη συμβολή ενισχυτική.



Σχήμα 3.37: Ενισχυτική, Καταστρεπτική, και Ενδιάμεση Συμβολή.

(β')  $\phi = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ : στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A(\phi) = 2A \cos((2k+1)\pi/2) = 0 \quad (3.238)$$

δηλ. το πλάτος του κύματος είναι  $0$ , το ελάχιστο δυνατό. Τότε λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται εκτός φάσης και ονομάζουμε τη συμβολή καταστρεπτική.

(γ') Σε οποιαδήποτε άλλη τιμή της φάσης  $0 < \phi < 2\pi$ ,  $\phi \neq \pi$ , το πλάτος παίρνει μια ενδιάμεση τιμή  $-2A < A(\phi) < 0$ ,  $0 < \phi < 2A$ , και η συμβολή ονομάζεται ενδιάμεση.

Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση, ενώ κατά τη διάδοση τους μπορεί να ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές. Έστω ένα ηχείο όπως στο Σχήμα 3.38. Τα κύματα αυτά ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές μέχρι το αυτί του δέκτη. Έχουν βέβαια ίδιο πλάτος και συχνότητα. Η απόσταση του ηχείου από το δέκτη ονομάζεται μήκος διαδρομής. Ως διαφορά διαδρομής ονομάζεται η ποσότητα

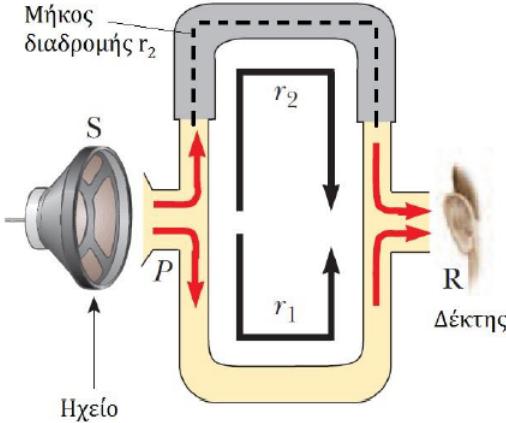
$$\Delta r = |r_2 - r_1| \quad (3.239)$$

Η συνολική φάση καθενός κύματος είναι

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \phi_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.240)$$

Τότε η συμβολή των κυμάτων περιγράφεται ως

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) = A(\Phi_1, \Phi_2) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \quad (3.241)$$



Σχήμα 3.38: Διάδοση ηχητικού κύματος σε διαφορετικές διαδρομές.

Τώρα πρέπει να μελετήσουμε το πλάτος  $A(\Phi_1, \Phi_2)$ . Έστω  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ , δηλ. το πλάτος μπορεί να γραφεί ως

$$A(\Delta\Phi) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \quad (3.242)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α') Αν  $\Delta\Phi = 2m\pi$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , τότε έχουμε ενισχυτική συμβολή, αφού

$$2A \cos(\Delta\Phi/2) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A \quad (3.243)$$

(β') Αν  $\Delta\Phi = (2m+1)\pi$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , τότε τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά, αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = 2A \cos(m\pi + \pi/2) = 0 \quad (3.244)$$

Όμως πως μπορούμε να σχετίσουμε τη διαφορά διαδρομής στην όλη υπόθεση της συμβολής; Υπάρχει κάποια σχέση διαφοράς διαδρομής και συμβολής; Ας το δούμε.

Αφού

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\phi \quad (3.245)$$

κι αν θεωρήσουμε ότι η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. όταν πρόκειται για κοινή πηγή ήχου), δηλ.  $\Delta\phi = 0$ , τότε

(α') έχουμε ενισχυτική συμβολή αν

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2m\pi \iff \Delta r = m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.246)$$

(β') έχουμε καταστρεπτική συμβολή αν

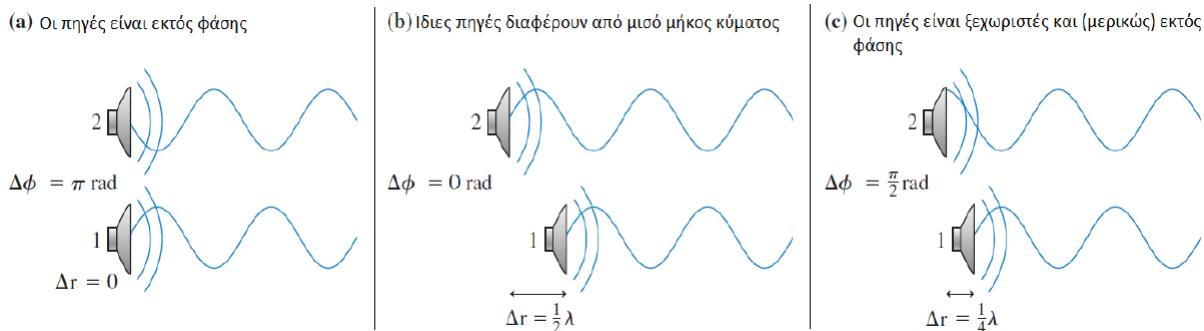
$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = (2m+1)\pi \iff \Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.247)$$

Η καταστρεπτική συμβολή είναι εν γένει ένα φαινόμενο που θα θέλαμε να αποφεύγουμε. Από όσα έχουμε συζητήσει, καταλαβαίνουμε ότι η καταστρεπτική συμβολή μπορεί να συμβεί

- λόγω διαφοράς αρχικής φάσης  $\Delta\phi$

- λόγω διαφορετικής ύψης της πηγής (διαφορά διαδρομής)
- λόγω και των δυο παραπάνω περιπτώσεων

Δείτε το Σχήμα 3.39. Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις, η συμβολή των δυο κυμάτων είναι καταστρεπτική.



Σχήμα 3.39: Καταστρεπτική συμβολή: περιπτώσεις.

Στην περίπτωση (a), τα δύο κύματα δεν έχουν διαφορά διαδρομής αλλά έχουν διαφορετική αρχική φάση, τέτοια ώστε  $\Delta\phi = \pi$ . Στην περίπτωση (b), τα δύο κύματα έχουν διαφορά διαδρομής  $\Delta r = \frac{\lambda}{2}$ , με ίδια αρχική φάση ( $\Delta\phi = 0$ ). Στην περίπτωση (c), τα δύο κύματα έχουν και διαφορά διαδρομής  $\Delta r = \frac{\lambda}{4}$  αλλά και διαφορετική αρχική φάση, τέτοια ώστε  $\Delta\phi = \pi/2$ , που μαζί δίνουν μια σχέση πλάτους με αποτέλεσμα μηδέν.

#### Παράδειγμα 3.26:

Μια κατασκευαστική εταιρία ανέθεσε στην εταιρία σας, την Ελληνική Ακουστική Α.Ε., την επίλυση του εξής προβλήματος. Οι εργαζόμενοί της παραπονούνται για έναν ενοχλητικό θόρυβο στο χώρο εργασίας τους. Μετά από έρευνα, διαπιστώνετε ότι ένα μηχάνημα παράγει έναν μάλλον ισχυρό ήχο συχνότητας 1200 Hz. Μετά από νέα έρευνα, διαπιστώνετε ότι δεν μπορείτε να λύσετε εξ' ολοκλήρου το πρόβλημα, αλλά ενημερώνετε τον διευθυντή της εταιρίας ότι μπορείτε να το λύσετε μερικώς, εξαλείφοντας τις ανακλάσεις του ήχου από τους τοίχους. Προτείνετε να τοποθετηθούν επιφάνειες πλέγματος στους τοίχους, ώστε μέρος του ήχου να ανακλάται από το πλέγμα, και μέρος του να διαπερνά το πλέγμα και να ανακλάται από τους τοίχους. Η ανάκλαση του ήχου αυτή θα πρέπει να δρα καταστρεπτικά στη συμβολή της με το αρχικό ηχητικό κύμα. Ποιά θα πρέπει να είναι η απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο ώστε να δουλέψει το σχέδιό σας; Δίδεται ότι η θερμοκρασία του αέρα στο κτήριο είναι 20°C.

Λύση: Η ταχύτητα του ήχου στο κτήριο είναι

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} = 343 \text{ m/s} \quad (3.248)$$

Το μήκος κύματος της πηγής ήχου είναι

$$u = \lambda f \implies \lambda = \frac{u}{f} = \frac{343}{1200} = 0.285 \text{ m/s} \quad (3.249)$$

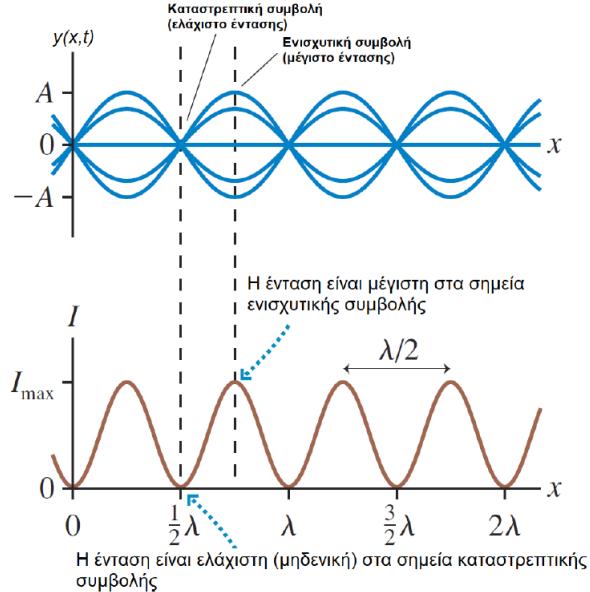
Θέλουμε να έχουμε καταστρεπτική συμβολή του ανακλώμενου κύματος από τον τοίχο με το κύμα στο πλέγμα, άρα πρέπει να ισχύει

$$2\Delta r = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \iff \Delta r = (2m+1) \frac{\lambda}{4} = (2m+1) \times 0.071 \quad (3.250)$$

όπου  $2\Delta r$  γιατί το κύμα που περνά το πλέγμα ταξιδεύει δύο φορές την απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο, μέχρι να συμβάλλει ξανά πίσω καταστρεπτικά. Άρα η ελάχιστη απόσταση ανάμεσά τους δίνεται για  $n = 0$ , δηλ.  $\Delta r = 0.071 \text{ m}$ .

### 3.8.2 Ένταση και Ισχυς

Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση  $I$  ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος,  $A^2$ . Επίσης, η ένταση του ήχου είναι μέγιστη στα σημεία ενισχυτικής συμβολής και μηδενική (ελάχιστη) στα σημεία καταστρεπτικής συμβολής. Δείτε το Σχήμα 3.40. Δεδομένου ότι η ισχύς είναι συνάρ-



Σχήμα 3.40: Συμβολή και Ένταση.

τηση της έντασης, τα ίδια ισχύουν και για αυτήν.

#### Παράδειγμα 3.27:

Δυο ραδιοκεραίες βρίσκονται σε απόσταση 100 m σε ευθεία γραμμή σε έναν άξονα βορρά-νότου. Μεταδίδουν και οι δύο ραδιοκύματα σε συχνότητα 3.0 MHz. Η δουλειά σας είναι να μετρήσετε την ισχύ του κύματος με μια φορητή συσκευή. Για να το κάνετε, περπατάτε 800 μέτρα ανατολικά από το μέσο της απόστασης των δύο κεραίων, και μετά 600 μέτρα βόρεια.

- Δείτε ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ραδιοκυμάτων στο σημείο που βρίσκεστε είναι  $1.2\pi$  rad.
- Η συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό το σημείο είναι καταστρεπτική, ενισχυτική, ή ενδιάμεση; Εξηγήστε.
- Αν τώρα ζεκινήσετε να περπατάτε ακόμα περισσότερο προς το βορρά, η ισχύς του κύματος αυξάνεται, μειώνεται, ή παραμένει σταθερή; Εξηγήστε. Βρείτε τι συμβαίνει π.χ. αν περπατήσετε 10 μέτρα προς βορρά από το σημείο που ήσασταν.

Λύση: Οι δύο κεραίες αποτελούν συμφασικές πηγές κυμάτων (δηλ. βρίσκονται σε φάση). Η επικάλυψη των κυμάτων προκαλεί συμβολή. Δείτε το Σχήμα 3.41.

(α') Η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο σημείο  $P$  είναι

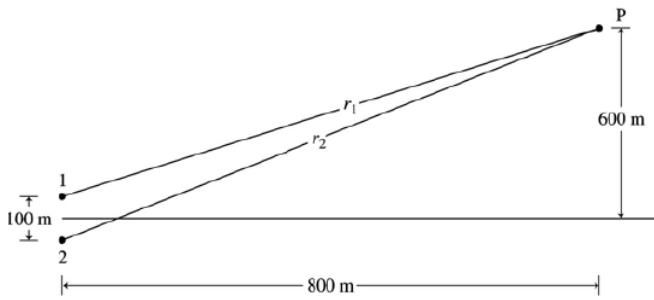
$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} \quad (3.251)$$

με

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{800^2 - 650^2} - \sqrt{800^2 - 550^2} = 59.96 \text{ m} \quad (3.252)$$

Το μήκος κύματος του ραδιοκυμάτος είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = 100 \text{ m} \quad (3.253)$$



Σχήμα 3.41: Ραδιοκεραίες σε απόσταση.

Η διαφορά φάσης στο σημείο  $P$  είναι τελικά

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{59.96}{100} = 1.2\pi \text{ rad} \quad (3.254)$$

(β') Αφού  $\Delta\phi = 0.6 \times 2\pi$ , το οποίο δεν είναι ούτε ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , ούτε  $(m + 1/2)$ -πολλαπλάσιο του  $2\pi$ , η συμβολή στο σημείο  $P$  δεν είναι ενισχυτική ούτε καταστρεπτική (είναι κάτι ανάμεσα).

(γ') Σε ένα σημείο 10 m πιο βόρεια, έχουμε

$$\Delta r = \sqrt{800^2 + 660^2} - \sqrt{800^2 - 560^2} = 60.58 \text{ m} \quad (3.255)$$

και

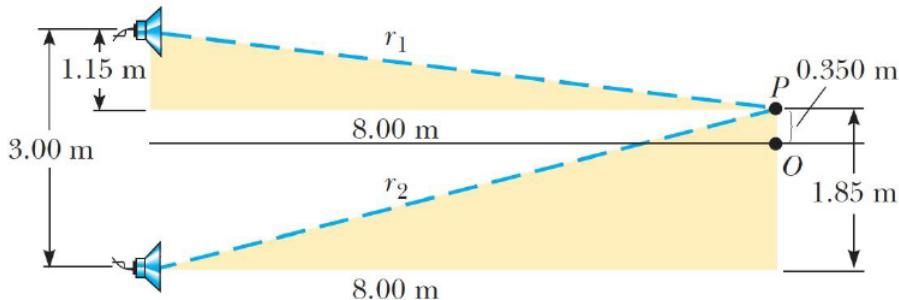
$$\Delta\phi = 2\pi \frac{60.58}{100} = 1.21\pi \text{ rad} \quad (3.256)$$

Αφού η διαφορά φάσης αυξάνεται όσο προχωρούμε βόρεια, μετακινούμαστε από καταστρεπτική συμβολή σε ενισχυτική συμβολή. Άρα η ισχύς του σήματος αυξάνεται.

### Παράδειγμα 3.28:

Δυο ηχεία απέχουν 3 m μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με το ίδιο στερεοφωνικό. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά στο σημείο  $O$ , που απέχει 8 m από το μέσον της ευθείας που ενώνει τα δύο ηχεία. Στη συνέχεια μετακινείται στο σημείο  $P$ , το οποίο έχει κάθετη απόσταση 0.35 m από το  $O$  και ακούει το πρώτο ελάχιστοτερης έντασης του ήχου. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 3.42. Ας βρούμε τις διαδρομές  $r_1$ ,  $r_2$ . Από το άνω τρίγωνο, έχουμε



Σχήμα 3.42: Ηχεία και ελάχιστα έντασης ήχου.

$$r_1^2 = (1.15)^2 + 8^2 \Rightarrow r_1 \approx 8.08 \text{ m} \quad (3.257)$$

και από το χάτω,

$$r_2^2 = (1.85)^2 + 8^2 \implies r_2 \approx 8.21 \text{ m} \quad (3.258)$$

Ξέρουμε ότι η διαφορά διαδρομής ισούται με

$$\Delta r = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.259)$$

για καταστρεπτική συμβολή. Άρα για  $m = 0$  (πρώτο ελάχιστο)

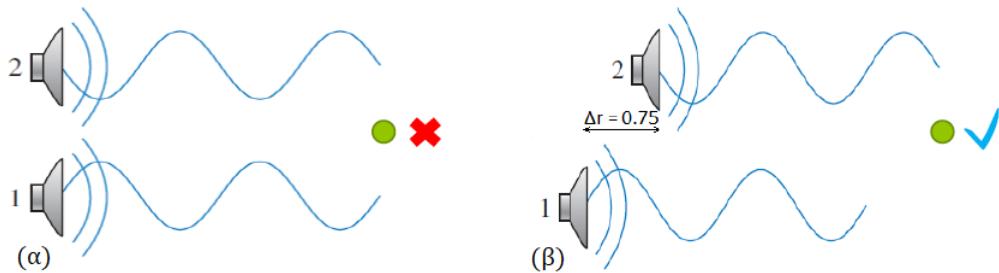
$$(2m+1) \frac{\lambda}{2} = 0.13 \implies 0.26 = \lambda \implies 0.26 = \frac{u}{f} \implies f = 1.3 \text{ kHz} \quad (3.260)$$

αφού  $u = 343 \text{ m/s}$ .

### Παράδειγμα 3.29:

Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας, δίπλα-δίπλα, και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση  $0.75 \text{ m}$  μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 3.43. Στην αρχική θέση ( $\alpha$ ) - που δεν ακούμε κάποιον ήχο αλλά τα ηχεία είναι



Σχήμα 3.43: Ηχεία και σχετική τους κίνηση.

δίπλα-δίπλα - έχουμε ελάχιστο της έντασης του συμβαλλόμενου κύματος και  $\Delta r = 0$ . Άρα η σχέση

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \quad (3.261)$$

για  $\Delta r = 0$ , δίνει

$$\Delta\Phi = 0 + \Delta\phi \iff \Delta\Phi = \Delta\phi \quad (3.262)$$

Έχουμε καταστροφική συμβολή στη θέση αυτή, οπότε

$$\Delta\Phi = (2m+1)\pi = \Delta\phi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.263)$$

και για  $m = 0$  έχουμε

$$\Delta\phi = \pi \quad (3.264)$$

δηλ. τα δυο ηχεία βρίσκονται εκτός φάσης. Στη θέση ( $\beta$ ) έχουμε το πρώτο μέγιστο της έντασης του ήχου. Άρα

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.265)$$

και εφ' όσον  $\Delta r = 0.75 \text{ m}$  και για  $m = 1$ , έχουμε

$$\frac{2\pi}{\lambda} 0.75 + \pi = 2\pi \implies \lambda = \frac{3}{2} \text{ m} \quad (3.266)$$

Σε μια θέση ( $\gamma$ ) όπου η ένταση του ήχου γίνεται ξανά ελάχιστη, θα είναι

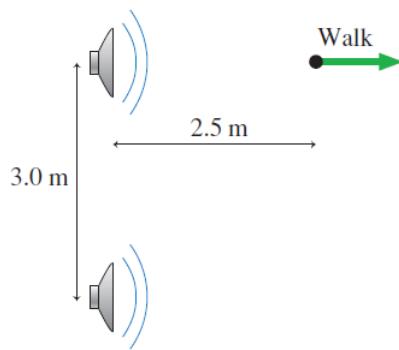
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r' + \Delta\phi = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} \Delta r' + \pi = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.267)$$

και για  $m = 1$  θα έχουμε

$$\Delta r' = \frac{3}{2} = \lambda \quad (3.268)$$

### Παράδειγμα 3.30:

Καθόμαστε 2.5 m μπροστά από ένα ηχείο (όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.44) ενός ζεύγους ηχείων. Τα ηχεία μεταξύ τους έχουν απόσταση 3 m και εκπέμπουν ήχο με συχνότητα 686 Hz στην ίδια φάση. Καθώς απομακρυνόμαστε από τα ηχεία σε ποια απόσταση θα ακούμε την ήχο με την ελάχιστη ένταση;



Σχήμα 3.44: Περπάτημα μπροστά από ηχεία.

Λύση: Η αλλαγή στην ένταση του ήχου οφείλεται στη συμβολή των δύο αλληλοεπικαλυπτόμενων ηχητικών κυμάτων. Η ελάχιστη ένταση υπονοεί καταστρεπτική συμβολή, η οποία συμβαίνει όταν η διαφορά του μήκους του μονοπατιού των δύο κυμάτων είναι  $\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda$ . Υποθέτουμε ότι  $\Delta\phi_0 = 0 \text{ rad}$  για τα ηχεία που εκπέμπουν ακριβώς τον ίδιο τόνο. Το μήκος κύματος του ήχου είναι  $\lambda = u_{sound}/f = 340/680 = 0.5 \text{ m}$ . Θεωρούμε ένα σημείο που έχει απόσταση  $x$  από το ένα ηχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, και υέτουμε  $r_1$  την απόσταση αυτού του σημείου από το ένα ηχείο και  $r_2$  από το άλλο. Άρα

$$r_1 = x \quad r_2 = \sqrt{x^2 + 3^2} \quad (3.269)$$

Η καταστρεπτική συμβολή συμβαίνει σε απόσταση  $x$  τέτοια ώστε

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + 9^2} - x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3.270)$$

Λύνουμε ως προς  $x$ :

$$x^2 + 9 = \left[x + \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\right]^2 = x^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda x + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\lambda^2 \implies x = \frac{9 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\lambda^2}{2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} \quad (3.271)$$

Τυπολογίζουμε το  $x$  για διαφορετικές τιμές του  $m$

$m$	$x(m)$
0	17.88
1	5.62
2	2.98
3	1.79

Καθώς η αρχική μας υέση είναι στα  $x = 2.5$  m και απομακρυνόμαστε από τα ηχεία, θα ακούσουμε τα ελάχιστα για τιμές  $x > 2.5$  m. Επομένως η ελάχιστη ένταση του ήχου εμφανίζεται στα σημεία 2.98 m, 5.62 m και 17.88 m.

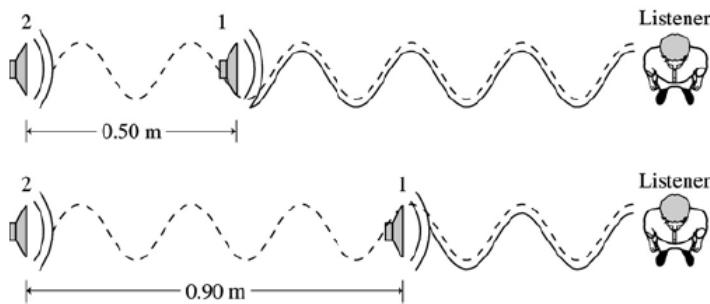
### Παράδειγμα 3.31:

Δύο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα κατα μήκος του άξονα  $x'$ . Δείτε το Σχήμα 3.45. Ένας ακροατής, που κάθεται μπροστά από τα δύο ηχεία, ακούει την μέγιστη ένταση όταν το ηχείο 2 βρίσκεται στο σημείο  $x = 0$  m και το ηχείο ένα  $x = 0.5$  m. Όταν το ηχείο 1 μετακινείται αργά προς τα δεξιά, η ένταση του ήχου αρχικά μειώνεται και ύστερα αυξάνεται, φτάνοντας ένα άλλο μέγιστο όταν το ηχείο 1 βρίσκεται στην υέση  $x = 0.9$  m.

- (α') Ποια είναι η συχνότητα του ήχου; Υποθέτουμε ότι  $u_{sound} = 340$  m/s.
- (β') Ποια είναι η διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο ηχεία;

Λύση:

Η ανάμειξη συμβαίνει κατά την διαφορά ανάμεσα στις φάσεις των δύο κυμάτων.



Σχήμα 3.45: Παρατηρητής ηχείων.

- (α') Η διαφορά φάσης ανάμεσα στα ηχητικά κύματα των δύο ηχείων είναι

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} + \Delta\phi_0 \quad (3.272)$$

Έχουμε την μέγιστη συχνότητα όταν  $\Delta x = 0.5$  m και  $\Delta x = 0.9$  m. Επομένως

$$\Delta\Phi = 2\pi \left( \frac{0.5}{\lambda} \right) + \Delta\phi = 2m\pi, \quad \Delta\Phi = 2\pi \left( \frac{0.9}{\lambda} \right) + \Delta\phi = 2(m+1)\pi \text{ rad} \quad (3.273)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$2\pi \left( \frac{0.4}{\lambda} \right) = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0.4 \Rightarrow f = \frac{u_{sound}}{\lambda} = \frac{340}{0.4} = 850 \text{ Hz} \quad (3.274)$$

- (β') Από τις εξισώσεις 3.273 βρίσκουμε

$$2\pi \left( \frac{0.5}{0.4} \right) + \Delta\phi = 2m\pi \Big|_{m=1} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi - \frac{10\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (3.275)$$

Στην τελευταία εξίσωση βάλλαμε  $m = 1$  καθώς συχνά υπολογίζουμε την φάση στο εύρος από  $-\pi$  έως  $\pi$  (ή από 0 έως  $2\pi$ ).<sup>4</sup>

### 3.9 Στάσιμα Κύματα

Ως τώρα, γνωρίσαμε μόνο οδεύοντα κύματα, δηλ. ηχητικά κύματα που συνέβαλλαν σε κάποιο σημείο στη διεύθυνση διάδοσης τους. Άραγε όταν αλλάζει κάτι αν βάλλουμε τις πηγές του ήχου αντικρυστά μεταξύ τους; Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κοινή πηγή που συνδέουμε δυο ηχεία τα οποία βρίσκονται αντικρυστά το ένα με το άλλο. Έτσι, τα κύματα θα έχουν την ίδια συχνότητα, το ίδιο μήκος κύματος, και το ίδιο πλάτος, αλλά διαφορετική ταχύτητα (αντίθετης φοράς, ίδιου μέτρου όμως). Ας δούμε πως αυτά συμβάλλουν στο χώρο ανάμεσα τους.

Είναι

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \quad (3.276)$$

$$= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \quad (3.277)$$

$$= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t) \quad (3.278)$$

με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Παρατηρήστε ότι το κύμα στο οποίο καταλήξαμε δεν έχει την εξίσωση του οδεύοντος κύματος, δηλ. δεν εξαρτάται από την έκφραση  $kx - \omega t$  - άρα δεν είναι ένα οδεύον κύμα. Τέτοια κύματα ονομάζονται στάσιμα κύματα. Σε ένα στάσιμο κύμα δεν υπάρχει η έννοια της κυματικής διάδοσης. Γενικότερα, στάσιμη ονομάζεται η ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Σίγουρα στεναχωρηθήκατε : ) που το αποτέλεσμα δεν ήταν ένα οδεύον κύμα σαν κι αυτά με τα οποία ασχολούμαστε τόσες παραγράφους πίσω, αλλά η εξίσωση πρέπει να σας είναι σχετικά οικεία. Ας επιλέξουμε ένα στοιχείο του μέσου διάδοσης του κύματος,  $x = x_0$ :

$$y(x_0, t) = (2A \sin(kx_0)) \cos(\omega t) = A(x_0) \cos(\omega t) \quad (3.279)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι κάθισε στοιχείο που βρίσκεται στη θέση  $x$  εκτελεί ΑΑΤ! Επίσης, το πλάτος της αρμονικής κίνησης,  $2A \sin(kx_0)$ , ενός στοιχείου  $x_0$  εξαρτάται από τη θέση του στοιχείου στο μέσο. Με άλλα λόγια, διαφορετικά στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα: με την ίδια συχνότητα  $\omega$  αλλά με διαφορετικό πλάτος.

#### 3.9.1 Δεσμοί και Αντιδεσμοί

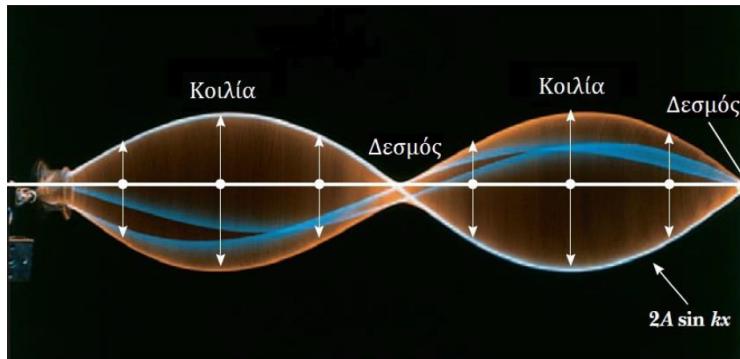
Δεδομένου ότι έχουμε μια στάσιμη ταλάντωση, θα αναρωτιέστε αν υπάρχουν στοιχεία του μέσου που να μην ταλαντώνονται κανόλου, δηλ. η θέση τους,  $x_0$ , να είναι τέτοια που  $2A \sin(kx_0) = 0$ . Πράγματι υπάρχουν τέτοια στοιχεία και αρκεί να λύσουμε την προηγούμενη εξίσωση για να τα βρούμε.

$$\sin(kx) = 0 \iff kx = n\pi \implies \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \implies x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.280)$$

Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται δεσμοί. Επίσης, υπάρχουν στοιχεία που εκτελούν ταλάντωση με το μεγαλύτερο δυνατό πλάτος που επιτρέπει το στάσιμο περίγραμμα τους. Μπορούμε να τα βρούμε λύνοντας τη σχέση

$$\sin(kx) = 1 \iff kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.281)$$

Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται αντιδεσμοί (ή κοιλίες). Είναι πολύ εύκολο να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλίων είναι ίση με  $\lambda/2$ , η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με  $\lambda/2$ , και η απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας είναι ίση με  $\lambda/4$ .



Σχήμα 3.46: Στάσιμο κύμα.

Ας δούμε - επιτέλους - ένα στάσιμο κύμα, τους δεσμούς και τους αντιδεσμούς του. Δείτε το Σχήμα 3.46. Παρατηρήστε στο σχήμα σημειωμένους τους δεσμούς και τους αντιδεσμούς, το περίγραμμα του κύματος, και κάποια ενδιάμεσα σημεία.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 3.32:

Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x, t) = 4 \sin(3x - 2t) \quad (3.282)$$

$$y_2(x, t) = 4 \sin(3x + 2t) \quad (3.283)$$

με  $x, y$  να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α') Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = 2.3$  εκατοστά.

(β') Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα όχρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο  $x = 0$ .

Λύση:  
(α') Έχουμε

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 8 \sin(3x) \cos(2t) \quad (3.284)$$

με χρήση απλής τριγωνομετρίας. Οπότε

$$8 \sin(3 \times 2.3) = 8 \sin(6.9) \approx 4.6 \text{ cm} \quad (3.285)$$

(β') Για τους δεσμούς έχουμε

$$x_\delta = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.286)$$

και για τους αντιδεσμούς

$$x_a = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.287)$$

Το μήκος κύματος είναι  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$  m, οπότε

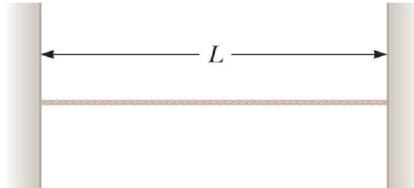
$$x_\delta = \frac{n\pi}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.288)$$

<sup>4</sup>Θα μπορούσαμε αντί για  $m = 1$  να βάλουμε  $m = 2$  το οποίο θα έδινε το ισοδύναμο αποτέλεσμα:  $\frac{3}{2}\pi$  rad.

$$x_a = \frac{(2n+1)\pi}{6}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.289)$$

### 3.9.2 Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

Δείτε το Σχήμα 3.47. Έχουμε ένα νήμα τεντωμένο και δεμένο στα άκρα του με δυο τοίχους. Το τελευταίο



Σχήμα 3.47: Τεντωμένο νήμα.

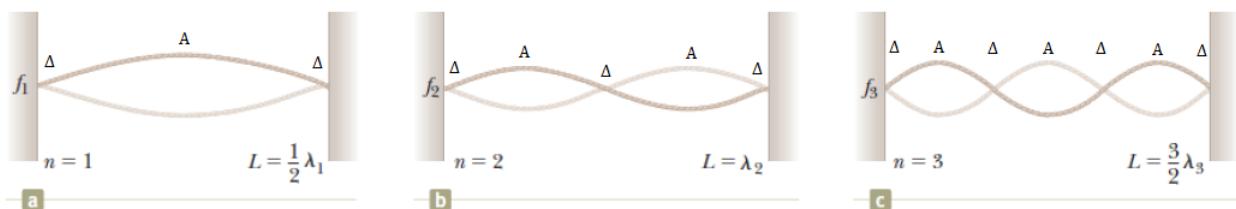
έχει ως συνέπεια το νήμα να έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του, αν ένα στάσιμο κύμα δημιουργηθεί επάνω του. Ας πούμε ότι διεγείρουμε το νήμα στο μέσον του, με το δάχτυλό μας. Τότε θα δημιουργήσουμε δυο ημιτονοειδή κύματα που θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατεύθυνσεις, θα ανακλαστούν όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, και θα επιστρέψουν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα.

Ονομάζουμε οριακή συνθήκη το γεγονός ότι το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του. Αυτό έχει άμεση συνέπεια στο μήκος κύματος του στάσιμου κύματος: θα είναι προκαθορισμένο, αφού

$$2A \sin(kL) = 0 \implies kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.290)$$

Αφού  $u = \lambda f \implies f_n = \frac{n}{2L}$ , και η συχνότητα του κύματος είναι επίσης προκαθορισμένη. Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται κανονικοί τρόποι ή ιδιομορφές (modes). Κάθε μια ιδιομορφή έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα. Το φαινόμενο όπου μόνο συγκεκριμένες συχνότητες ταλάντωσης οδηγούν σε στάσιμο κύμα λέγεται κβαντισμός.

Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης ορίζεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει  $1/4$  του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό. Δείτε το Σχήμα 3.48. Στο σχήμα βλέπετε τους τρεις πρώτους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Με  $\Delta$  έχουν σημειωθεί



Σχήμα 3.48: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

οι δεσμοί και με  $A$  οι αντιδεσμοί. Για το  $n$ -οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.291)$$

και οι φυσικές συχνότητες θα είναι

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = n f_1, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.292)$$

Αν το νήμα έχει τάση  $T$  και γραμμική πυκνότητα μάζας  $\mu$ , τότε οι φυσικές συχνότητες περιγράφονται ως

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.293)$$

Για  $n = 1$ , η συχνότητα  $f_1$  λέγεται ψεμελιώδης συχνότητα. Από την εξίσωση (3.292) παρατηρούμε ότι όλες οι υπόλοιπες συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της ψεμελιώδους και οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης με αυτές τις συχνότητες ονομάζονται αρμονικές. Στο Σχήμα 3.48 βλέπετε την πρώτη, τη δεύτερη, και την τρίτη αρμονική. Για να παρουσιαστεί μόνο μια αρμονική, πρέπει το νήμα να διεγερθεί ώστε να πάρει το σχήμα της επιθημητής αρμονικής. Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα. Προφανώς καταλαβαίνετε ότι αυτό μπορούμε να το κάνουμε για το πολύ τις τρεις - τέσσερις πρώτες αρμονικές, γιατί μετά το πράγμα δυσκολεύει :). Αν όμως διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα “επιζήσουν” στο νήμα: οι αρμονικές. :)

### Παράδειγμα 3.33:

Οι βιολόγοι πιστεύουν ότι μερικά είδη αράχνης “κουρδίζουν” τον ιστό τους με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι βέλτιστος στην παραγωγή συχνοτήτων που αντιστοιχούν στην “πάλη” που κάνει ένα ύγραμα όταν πιαστεί σε αυτόν. Ένα νήμα του ιστού μιας αράχνης έχει τυπική διάμετρο  $20 \text{ μm}$  και ο ιστός έχει πυκνότητα  $1300 \text{ kg/m}^3$ . Για την παραγωγή ψεμελιώδους συχνότητας στα  $100 \text{ Hz}$ , πόση πρέπει να είναι η τάση ενός νήματος μήκους  $12 \text{ εκατοστών}$  που πρέπει να υφάνει η αράχνη;

Λύση: Το μήκος κύματος ενός στάσιμου κύματος σε ένα νήμα που ταλαντώνεται στη ψεμελιώδη συχνότητα είναι  $\lambda_1 = 2L$ . Η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι  $\mu = \rho A = 1300 \times \pi r^2 = 3.14 \times 10^{-10} \text{ m}^2$ . Για να ταλαντωθεί το νήμα στη ψεμελιώδη συχνότητα ( $n = 1$ ) των  $100 \text{ Hz}$ , θα πρέπει

$$f_1 = \frac{u}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = 4L^2 f_1^2 \mu A = 2.4 \times 10^{-4} \text{ N} \quad (3.294)$$

### Παράδειγμα 3.34:

Ένα σπάνιο βιολί Stradivarius παιζει μια νότα μήκους κύματος  $39.1 \text{ cm}$  η οποία ακούγεται μελωδικά στο αυτί σας. Το δωμάτιο είναι σχετικά ζεστό, οπότε η ταχύτητα του ήχου είναι  $344 \text{ m/s}$ . Αν η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι  $0.6 \text{ gr/m}$  και η τάση του νήματος είναι  $150 \text{ N}$ , πόσο είναι το μήκος του ταλαντούμενου τμήματος της χορδής του βιολιού;

Λύση: Το κύμα σε ένα τεντωμένο νήμα με δεσμούς στα δυο άκρα του είναι στάσιμο. Το μήκος κύματος ενός στάσιμου κύματος σε ένα νήμα που ταλαντώνεται στη ψεμελιώδη συχνότητα είναι  $\lambda_1 = 2L$ . Το μήκος κύματος που φτάνει στο αυτί σας είναι  $\lambda = 0.391 \text{ m}$ , οπότε η συχνότητα είναι

$$f = \frac{u_{air}}{\lambda} = 879.8 \text{ Hz} \quad (3.295)$$

Αυτή είναι και η συχνότητα που φέρει το κύμα στη χορδή. Έτσι

$$879.8 = \frac{u_{string}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \Rightarrow \lambda = 0.568 \text{ m} \quad (3.296)$$

Οπότε

$$L = \frac{\lambda}{2} = 28.4 \text{ cm} \quad (3.297)$$

### 3.9.3 Διακροτήματα

Στη μελέτη των στάσιμων κυμάτων, είδαμε φαινόμενα συμβολής κυμάτων με την ίδια συχνότητα. Ανάλογα με τη ύλη του στοιχείου στο χώρο, είχαμε διαφορετικό πλάτος ταλάντωσης του στοιχείου, σύμφωνα με τη σχέση

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (3.298)$$

Αυτού του είδους η συμβολή ονομάζεται χωρική συμβολή. Όμως τι όταν συμβεί αν τα συμβαλλόμενα κύματα έχουν λίγο διαφορετική συχνότητα; Τότε σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου τα συμβαλλόμενα κύματα θα είναι πότε σε φάση και πότε εκτός φάσης. Αυτό μπορεί να περιγραφεί ως μια χρονική εναλλαγή μεταξύ καταστρεπτικής και ενισχυτικής συμβολής. Η συμβολή αυτή ονομάζεται χρονική συμβολή. Αυτή η περιοδική μεταβολή του πλάτους του κύματος σε ένα δεδομένο σημείο λόγω της υπέρθεσης κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες ονομάζεται διαχρότημα. Μπορείτε να ακούσετε ένα διαχρότημα αν παίξετε δυο γειτονικά πλήκτρα στο πιάνο. Με λίγο περισσότερη λεπτομέρεια, έστω οι συχνότητες  $f_1, f_2$  για δυο κύματα με ίσα πλάτη. Οι σχέσεις που τα περιγράφουν είναι

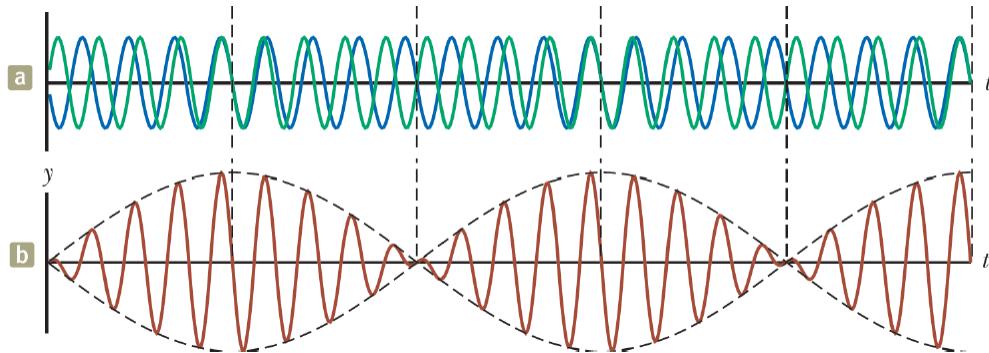
$$y_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t) \quad (3.299)$$

$$y_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t) \quad (3.300)$$

Το συνολικό κύμα θα είναι

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi(f_1 + f_2)t}{2}\right) \quad (3.301)$$

Τα δυο κύματα  $y_1(t)$  και  $y_2(t)$  φαίνονται στο Σχήμα 3.49(a) και το συνολικό κύμα στο Σχήμα 3.49(b). Η



Σχήμα 3.49: Διαχρότημα.

διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα ονομάζεται περιβάλλουσα - *envelope*, με εξίσωση

$$y_{env}(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)t}{2}\right) \quad (3.302)$$

Η περιβάλλουσα εμφανίζει ακρότατα όταν

$$\cos(\pi(f_1 - f_2)t) = \pm 1 \quad (3.303)$$

Άρα υπάρχουν δυο μέγιστα σε κάθε περίοδο του κύματος. Έτσι η συχνότητα του διαχροτήματος είναι

$$f_{beat} = \frac{2|f_1 - f_2|}{2} = |f_1 - f_2| \quad (3.304)$$

### Παράδειγμα 3.35:

Η Μυρέτα περιμένει στην πλατφόρμα ενός σταθμού τρένων ενώ δυο τρένα πλησιάζουν από την ίδια πλευρά της πλατφόρμας με ταχύτητα 8.0 m/s. Και τα δυο τρένα σφυρίζουν την άφιξή τους, με μια σειρήνα ίδιας συχνότητας  $f_0$ , και το ένα τρένο βρίσκεται σε μια απόσταση πίσω από το άλλο. Αφού το πρώτο τρένο περάσει το σημείο που βρίσκεται η Μυρέτα αλλά πριν την προσπεράσει και το δεύτερο, αυτή ακούει ένα διαχρότημα στα 4.0 Hz. Ποιά είναι η συχνότητα των σειρηνών των τρένων;

Λύση: Η Μυρέτα είναι ακίνητη ως παρατηρητής, ενώ τα τρένα την πλησιάζουν. Από τη σχέση του Doppler έχουμε

$$f_+ = \frac{u}{u - u_s} f_0 \quad (3.305)$$

Για το τρένο που πλησιάζει, η Μυρέτα ακούει συχνότητα

$$f_+ = \frac{343}{335} f_0 \quad (3.306)$$

Για το τρένο που βρίσκεται πίσω, η Μυρέτα ακούει συχνότητα

$$f'_+ = \frac{u}{u + u_s} f_0 = \frac{343}{351} f_0 \quad (3.307)$$

Η συχνότητα του διακροτήματος είναι

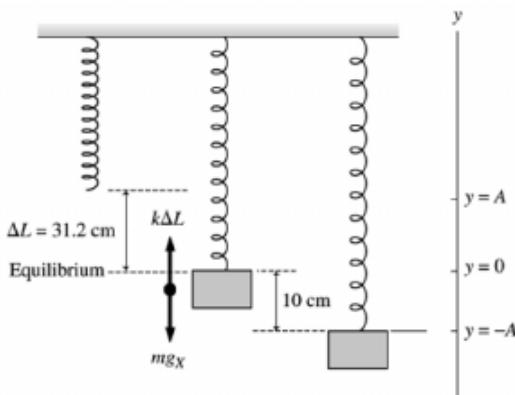
$$f_{beat} = |f_+ - f'_+| \implies f_+ - f'_+ = f_{beat} \iff \left[ \frac{343}{335} - \frac{343}{351} \right] f_0 = 4 \implies f_0 = 85.7 \text{ Hz} \quad (3.308)$$

### 3.10 Ασκήσεις

#### Παράδειγμα 3.36:

Κατά το πρώτο σας διαπλανητικό ταξίδι στον πλανήτη  $X$  έτυχε να πάρετε μαζί σώμα μάζας 200 g, ένα ελατήριο μήκους 40 cm, ένα μέτρο και ένα χρονόμετρο. Θέλετε να μελετήσετε την επιτάχυνση κατά την ελεύθερη πτώση στον πλανήτη  $X$ , όπου οι απλές εργασίες φαίνονται ευκολότερες συγκρητικά με την Γη, καθώς δεν συμπεριλαμβάνετε στον τουριστικό οδηγό. Μια νύχτα χρειάζεται το ελατήριο από το ταβάνι του δωματίου σας και του χρειάζεται το σώμα. Παρατηρείτε ότι το σώμα τεντώνει το ελατήριο κατά 31.2 cm. Τότε επιμηκύνεται το ελατήριο κατά 10 cm και το αφήνετε. Με το χρονόμετρο βρίσκετε ότι οι 10 ταλαντώσεις χρειάζονται 14.5 s. Βάσει των παρεχόμενων πληροφοριών πόσο είναι το  $g$ ;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 3.50. Στο σημείο ισορροπίας η συνολική δύναμη του σώματος μάζας  $m$  στον



Σχήμα 3.50: Μέτρηση  $g$  στον Πλανήτη  $X$ .

πλανήτη  $X$  είναι:

$$F_{net} = k\Delta L - mg_X = 0 \implies \frac{k}{m} = \frac{g_X}{\Delta L} \quad (3.309)$$

Για την απλή αρμονική κίνηση  $k/m = \omega^2$ , επομένως

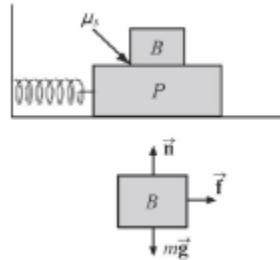
$$\omega^2 = \frac{g_X}{\Delta L} \implies \omega = \sqrt{\frac{g_X}{\Delta L}} = \frac{2\pi}{L} \implies g_X = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Delta L = \left(\frac{2\pi}{14.5}\right)^2 (0.312) = 5.86 \text{ m/s}^2 \quad (3.310)$$

#### Παράδειγμα 3.37:

Ένα μεγάλο κουτί  $P$ , το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα λεπτό ελατήριο, εκτελεί οριζόντια, απλή αρμονική κίνηση καθώς γλιστράει κατά μήκος μιας λείας επιφανείας με συχνότητα  $f = 1.5 \text{ Hz}$ . Ένα κουτί  $B$  βρίσκεται ακίνητο πάνω στο  $P$  και ο συντελεστής της στατικής τριβής ανάμεσα στα δύο κουτιά είναι  $\mu_s = 0.6$ . Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης για το οποίο το κουτί  $B$  δεν ολισθαίνει;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 3.51. Η μέγιστη επιτάχυνση για το ταλαντευόμενο σύστημα είναι  $a_{max} = A\omega^2 = 4\pi^2 Af^2$ . Η δύναμη της τριβής που δημιουργείται μεταξύ των δύο κουτιών πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μπορεί το κουτί  $B$  να επιταχυνθεί με αυτήν την επιτάχυνση. Επομένως αν είναι έτοιμο να γλιστρήσει

$$f = f_{max} = \mu_s n = \mu_s mg = m(4\pi^2 Af^2) \quad (3.311)$$



Σχήμα 3.51: Κουτιά το ένα πάνω στο άλλο.

το οποίο δίνει και το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης

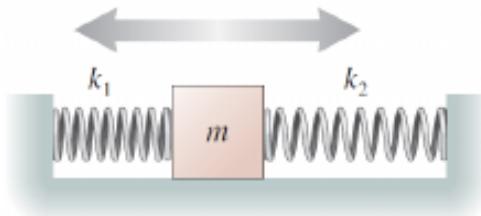
$$A = \frac{\mu_s g}{4\pi^2 f^2} = \frac{(0.6)(980)}{4\pi^2 (1.5)^2} = 6.62 \text{ cm} \quad (3.312)$$

### Παράδειγμα 3.38:

Ένα κουτί κείται πάνω σε λεία επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.52, και συνδέεται με δύο ελατήρια, σταθερές  $k_1$  και  $k_2$  αντίστοιχα. Δείξτε ότι η συχνότητα ταλαντωσης του κουτιού δίνεται από τον τύπο

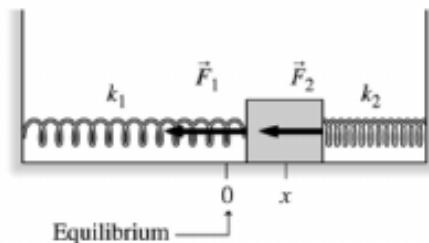
$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

όπου  $f_1$  και  $f_2$  είναι οι συχνότητες με τις οποίες θα ταλαντωνόταν αν ήταν συνδεδεμένο μόνο με ένα εξ' αυτών.



Σχήμα 3.52: Κουτί με δύο ελατήρια.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 3.53 Στο κουτί ασκούνται δύο δυνάμεις. Αν το κουτί έχει θετική μετατόπιση,



Σχήμα 3.53: Κουτί με ελατήρια και δυνάμεις.

δηλαδή  $x > 0$ , και οι δύο δυνάμεις (η μια απωθητική η άλλη ελκτική) έχουν κατεύθυνση προς τα αριστερά και

έχουν αρνητικές τιμές:

$$F_{\text{net}_x} = F_{sp1_x} + F_{sp2_x} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -k_{\text{eff}}x \quad (3.313)$$

όπου  $k_{\text{eff}} = k_1 + k_2$  είναι η συνολική σταθερά των ελατηρίων. Αυτό σημαίνει ότι η ταλάντωση του κουτιού υπό την δράση και των δύο ελατηρίων είναι ίδια με την ταλάντωση που θα εκτελούσε αν το κουτί ήταν δεμένο σε ένα ελατήριο, με σταθερά  $k_{\text{eff}}$ . Επομένως για την συχνότητα του κουτιού έχουμε

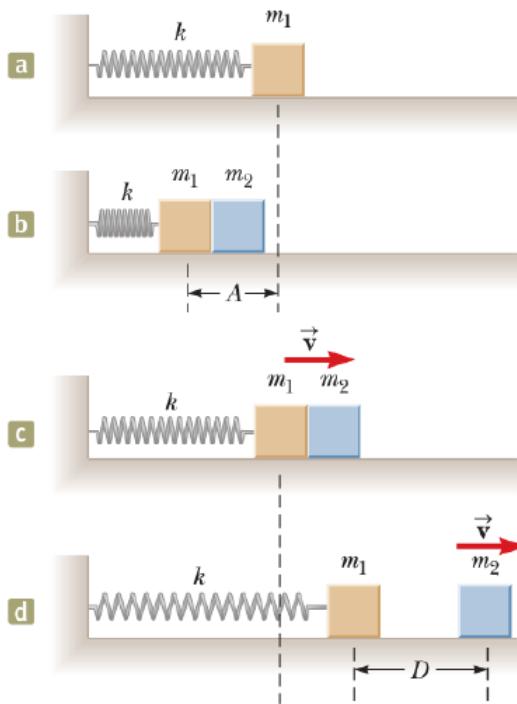
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_1}{4\pi^2 m} + \frac{k_2}{4\pi^2 m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.314)$$

### Παράδειγμα 3.39:

Ένα σώμα μάζας  $m_1 = 9 \text{ kg}$  συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς  $k = 100 \text{ N/m}$  βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία, όπως στο Σχήμα 3.54(a). Ένα δεύτερο σώμα μάζας  $m_2 = 7 \text{ kg}$  κινείται αργά προς τα αριστερά σπρώχνοντας το σώμα  $m_1$  και συμπιέζει το ελατήριο κατά  $A = 0.2 \text{ m}$ , όπως στο Σχήμα 3.54(b). Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα σώματα αρχίζουν να κινούνται προς τα δεξιά. Η τριβή του επιπέδου θεωρείται αμελητέα. Όταν το σώμα  $m_1$  φτάνει στο σημείο ισορροπίας, χάνει την επαφή με το  $m_2$  (γιατί;) και εκείνο συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $u$ .

(α') Βρείτε την ταχύτητα  $u$ .

(β') Πόσο απέχουν τα σώματα όταν το ελατήριο είναι πλήρως τεντωμένο για πρώτη φορά;



Σχήμα 3.54: Κουτιά με ελατήριο.

Λύση:

(α') Η συνολική ενέργεια στη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου είναι  $\frac{1}{2}kA^2 = 2 \text{ J}$  και ισούται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος. Σε ισορροπία, η συνολική ενέργεια είναι μόνο κινητική, δηλ.  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = E_{\text{mech}} \quad (3.315)$$

$$u^2 = \frac{2E_{mech}}{m_1 + m_2} \quad (3.316)$$

$$u = 0.5 \text{ m/s} \quad (3.317)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα του  $m_1$  και του  $m_2$  στο σημείο ισορροπίας. Πριν από το σημείο αυτό, το σώμα  $m_2$  κινείται με σταθερή ταχύτητα 0.5 m/s, ενώ το σώμα  $m_1$  αρχίζει να επιβραδύνει λόγω της δύναμης του ελατηρίου.

(β') Η ενέργεια του συστήματος ελατήριο-σώμα  $m_1$  σε ισορροπία είναι

$$\frac{1}{2}m_1u^2 = 1.125 \text{ J} \quad (3.318)$$

Αυτό είναι ίσο επίσης με  $\frac{1}{2}k(A')^2$ , όπου  $A'$  είναι το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος σώμα  $m_1$ -ελατήριο. Έτσι,

$$\frac{1}{2}100(A')^2 = 1.125 \implies A' = 0.15 \text{ m} \quad (3.319)$$

Η περίοδος του συστήματος σώμα  $m_1$ -ελατήριο είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 1.885 \text{ s} \quad (3.320)$$

και απαιτείται χρόνος  $\frac{1}{4}T = 0.47$  s αφού περάσει το σημείο ισορροπίας για να φτάσει το ελατήριο σε πλήρη έκταση για πρώτη φορά. Η απόσταση που χωρίζει τα σώματα  $m_1$  και  $m_2$  είναι

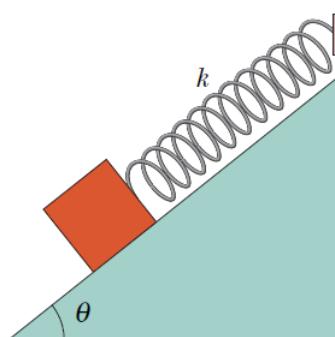
$$D = u\left(\frac{T}{4}\right) - A' = 8.56 \text{ cm} \quad (3.321)$$

#### Παράδειγμα 3.40:

Στο Σχήμα 3.55, ένα σώμα βάρους 14 N που ολισθαίνει χωρίς τριβές σε κεκλιμένο γωνίας  $40^\circ$ , συνδέεται με το πάνω μέρος του κεκλιμένου μέσω ελατηρίου μήκους 0.45 m και σταθεράς 120 N/m.

(α') Αν το σώμα αφευθεί απαλά μετά τη σύνδεση με το ελατήριο (χωρίς να ταλαντωθεί), πόσο μακριά από την κορυφή του κεκλιμένου βρίσκεται η θέση ισορροπίας του συστήματος;

(β') Αν το σώμα τραβιέται ελαφρά προς το κάτω μέρος του κεκλιμένου και αφήνεται ελεύθερο, ποιά είναι η περίοδος της ταλάντωσης που πραγματοποιείται;



Σχήμα 3.55: Ελατήριο, σώμα, και κεκλιμένο.

Λύση:

- (α') Αφού το σώμα συνδεθεί στο ελατήριο, θα τεντώσει το ελατήριο για κάποια απόσταση και μετά θα ισορροπήσει. Έστω  $d$  αυτή η απόσταση μέχρι τη θέση ισορροπίας. Έστω ένας νοητός άξονας  $x'$  παραλληλος του κεχλιμένου. Στη θέση αυτή, αφού το σώμα ισορροπεί θα ισχύει ότι

$$\sum F_x = 0 \iff F_s = B_x \iff kd = mg \sin(\theta) \implies d = \frac{mg \sin(\theta)}{k} = 0.075 \text{ m} \quad (3.322)$$

Άρα το σώμα θα ισορροπήσει σε συνολική απόσταση από την κορυφή του κεχλιμένου ίση με  $0.075 + 0.45 = 0.525 \text{ m}$ .

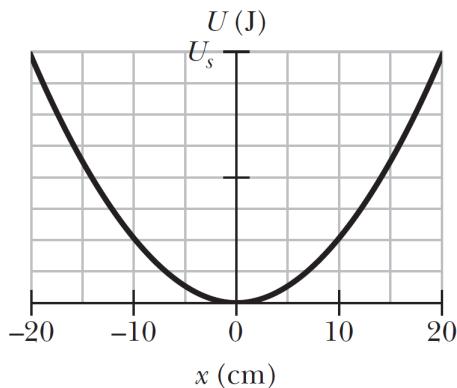
- (β') Η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ελατηρίου και του σώματος, καθώς

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.686 \text{ s} \quad (3.323)$$

### Παράδειγμα 3.41:

Το Σχήμα 3.56 δίνει ένα γενικό γράφημα για την ελαστική δυναμική ενέργεια για ένα σώμα μάζας 2 κιλών στη μορφή  $bx^2$ , με το  $x$  σε εκατοστά. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η τιμή  $U_s$  που είναι μαρκαρισμένη στον κάλυτο άξονα ισούται με 2.0 J.

- (α') Αν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα 85 cm/s, θα επιστρέψει πίσω πριν φτάσει τη θέση  $x = 15 \text{ cm}$ ;  
(β') Αν ναι, σε ποιά θέση θα το κάνει αυτό, αν όχι, ποιά είναι η ταχύτητά του στη θέση  $x = 15 \text{ cm}$ ;



Σχήμα 3.56: Γράφημα και ΑΑΤ.

Λύση: Το σύστημα σώμα+ελατήριο είναι απομονωμένο, οπότε η μηχανική του ενέργεια είναι σταθερή. Γνωρίζουμε ότι όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας, έχει μέγιστη ταχύτητα (και μηδενική ελαστική δυναμική ενέργεια, καθώς το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος). Όλη η μηχανική ενέργεια σε αυτή τη θέση είναι κινητική ενέργεια, άρα

$$E_{mech} = K_{max} = \frac{1}{2}mu_{max}^2 = 0.72 \text{ J} \quad (3.324)$$

Κοιτάζοντας το γράφημα, βλέπουμε ότι  $U(x=10) = 0.5 \text{ J}$ . Αφού η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι της μορφής  $bx^2$ , η σταθερά  $b$  θα είναι ίση με  $5.0 \times 10^{-3} \text{ J/cm}^2$ . Άρα

$$U(x) = 5.0 \times 10^{-3} \cdot 12^2 = 0.72 \text{ J} \quad (3.325)$$

όταν  $x = 12 \text{ cm}$ . Άρα το σώμα πράγματι επιστρέφει πίσω πριν φτάσει τη θέση  $x = 15$ , αφού το σύστημα για  $x = 12 \text{ cm}$  έχει δυναμική ενέργεια που ισούται με τη συνολική μηχανική του ενέργεια.

Παράδειγμα 3.42:

Ένα σώμα μάζας 10 γραμμαρίων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος 2.0 mm, μέγιστη επιτάχυνση  $8.0 \times 10^3 \text{ m/s}^2$ , και άγνωστη αρχική φάση  $\phi$ . Βρείτε

- (α') την περίοδο της κίνησης,  $T$
- (β') τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος,  $u_{max}$
- (γ') τη συνολική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή
- (δ') το μέτρο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα όταν αυτό βρισκεται στη θέση μέγιστης μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας, και στη θέση μισής μέγιστης μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Λύση:

(α') Για να βρούμε την περίοδο χρειαζόμαστε κάποια συχνότητα. Από τη σχέση της μέγιστης επιτάχυνσης, έχουμε

$$a_{max} = \omega^2 A = 8.0 \times 10^3 \implies \omega = \sqrt{\frac{a_{max}}{A}} = 2000 \text{ rad/s} \quad (3.326)$$

Άρα

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.1 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (3.327)$$

(β') Η μέγιστη ταχύτητα είναι  $u_{max} = \omega A = 4.0 \text{ m/s}$ .

(γ') Η συνολική ενέργεια είναι

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (3.328)$$

αλλά δε γνωρίζουμε το  $k$ , τη σταθερά του ελατηρίου. Όμως ξέρουμε ότι  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies k = \omega^2 m = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$ . Οπότε

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 = 0.08 \text{ J} \quad (3.329)$$

(δ') Η δύναμη δίνεται από τη γνωστή σχέση  $F_s = -kx(t)$ . Στη μέγιστη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, η δύναμη θα είναι (κατά μέτρο)

$$F_s = kx \Big|_{x=A} = (4.0 \times 10^4)(2.0 \times 10^{-3}) = 80 \text{ N} \quad (3.330)$$

ενώ στη μισή μέγιστη μετατόπιση θα είναι

$$F_s = kx \Big|_{x=A/2} = (4.0 \times 10^4)(1.0 \times 10^{-3}) = 40 \text{ N} \quad (3.331)$$

Παράδειγμα 3.43:

Ένα ημιτονοειδές κύμα σε χορδή περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = 0.15 \sin(0.8x - 50t) \quad (3.332)$$

με  $x, y$  σε μέτρα και  $t$  σε δευτερόλεπτα. Η πυκνότητα μάζας της χορδής είναι  $\rho = 12 \text{ gr/m}$ .

(α') Βρείτε τη μέγιστη εγκάρσια επιτάχυνση ενός σημείου της χορδής.

(β') Προσδιορίστε τη μέγιστη εγκάρσια δύναμη σε ένα τμήμα της χορδής μήκους 1 cm.

(γ') Προσδιορίστε την τάση του σχοινιού και συγχρίνετε με τη μέγιστη εγκάρσια δύναμη επαναφοράς του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση: Συγχρίνοντας τη δεδομένη σχέση με τη γενική εξίσωση κύματος, έχουμε ότι  $k = 0.8 \text{ rad/m}$ ,  $\omega = 50 \text{ rad/s}$ ,  $A = 0.15 \text{ m}$ .

(α') Έχουμε

$$a = \frac{\theta^2 y}{\theta t^2} = -0.15 \times (-50)^2 \times \sin(0.8x - 50t) \quad (3.333)$$

άρα  $a_{max} = 0.15 \times 50^2 = 375 \text{ m/s}^2$ .

(β') Για το τμήμα του ενός εκατοστού με μέγιστη δύναμη να ασκείται πάνω του,

$$\Sigma F = ma = 0.045 \text{ N} \quad (3.334)$$

(γ') Για να βρούμε την τάση του νήματος, υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα του κύματος  $u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 62.5 \text{ m/s}$ . Οπότε

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \implies T = \mu u^2 = 46.9 \text{ N} \quad (3.335)$$

Οι δυο δυνάμεις έχουν λόγο περίπου  $10^3$ , δηλ. η μια είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από την άλλη!

#### Παράδειγμα 3.44:

Ένα εγκάρσιο γηιτονοειδές κύμα κινείται κατά μήκος νήματος στη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'$  με ταχύτητα  $80 \text{ m/s}$ . Για  $t = 0$ , το απειροστά μικρό τμήμα του νήματος στη θέση  $x = 0$  έχει εγκάρσια μετατόπιση 4.0 εκατοστών από τη θέση ισορροπίας του και δεν κινείται. Η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του ίδιου τμήματος είναι  $16 \text{ m/s}$ .

(α') Ποιά η συχνότητα  $f$  του κύματος;

(β') Ποιό το μήκος κύματος  $\lambda$ ;

(γ') Γράψτε την κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα.

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι το απειροστά μικρό τμήμα νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση  $u_{max} = \omega A$ , άρα

$$\omega = \frac{16}{0.04} = 400 \text{ rad/s} \quad (3.336)$$

Οπότε  $f = \omega / (2\pi) = 64 \text{ Hz}$ .

(β') Από τη σχέση  $u = \lambda f$ , παίρνουμε  $f = \frac{u}{\lambda} = \frac{80}{64} = 1.26 \text{ m}$ .

(γ') Για την κυματοσυνάρτηση  $y(x, t)$  μπορούμε να γράψουμε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (3.337)$$

Το πλάτος είναι  $A = 0.04 \text{ m}$  από εκφώνηση. Ο κυματοριθμός  $k$  δίνεται ως  $k = 2\pi/\lambda \approx 5.0 \text{ rad/m}$ , και γνωρίζουμε από το (α) ερώτημα ότι  $\omega = 400 \text{ rad/s}$ . Άρα

$$y(x, t) = 0.04 \sin(5x - 400t + \phi) \quad (3.338)$$

με το πρόσημο — να οφείλεται στη διάδοση προς τα δεξιά (όπως αναφέρει η εκφώνηση). Η αρχική φάση  $\phi$  μπορεί να βρεθεί αν αξιοποιήσουμε το απειροστά μικρό τμήμα νήματος στη θέση  $x = 0$ , που έχει εγκάρσια μετατόπιση  $y(0, 0) = 0.04 \text{ m}$ . Οπότε

$$y(0, 0) = 0.04 \sin(\phi) = 0.04 \iff \sin(\phi) = 1 \implies \phi = \frac{\pi}{2} \quad (3.339)$$

Οπότε συνολικά

$$y(x, t) = 0.04 \sin(5x - 400t + \pi/2) \quad (3.340)$$

Παράδειγμα 3.45:

Η εξίσωση ενός εγκάρσιου κύματος που ταξιδεύει σε μακρύ νήμα δίνεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t) = 6.0 \sin(0.02\pi x + 4.0\pi t) \quad (3.341)$$

με  $x, t$  σε εκατοστά και δευτερόλεπτα αντίστοιχα. Βρείτε

- (α') το πλάτος της κυματοσυνάρτησης
- (β') το μήκος κύματος
- (γ') τη συχνότητα του κύματος
- (δ') την ταχύτητα του κύματος
- (ε') τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος
- (φ') τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ενός σωματιδίου του νήματος
- (ζ') πόση είναι η εγκάρσια μετατόπιση για το σημείο  $x = 3.5$  cm του νήματος, όταν  $y = 0.26$  s

Λύση:

- (α') Από την κυματοσυνάρτηση, το πλάτος είναι  $A = 6.0$  cm.
- (β') Από τον κυματαριθμό  $k$ , έχουμε  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = 1$  m.
- (γ') Η συχνότητα είναι  $\omega = 4.0\pi$  rad/s, οπότε  $f = \omega/(2\pi) = 2.0$  Hz.
- (δ') Η ταχύτητα του κύματος είναι  $u = \lambda f = 2$  m/s.
- (ε') Το κύμα διαδίδεται στο  $x$ -άξονα προς τα αριστερά, αφού το πρόσημο της συχνότητας  $\omega$  είναι θετικό στην είσωση της κυματοσυνάρτησης.
- (φ') Αφού κάθε τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ξέρουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα του θα είναι  $u_{max} = \omega A = 0.75$  m/s.
- (ζ') Για το ζητούμενο σημείο τη δεδομένη χρονική στιγμή, θα έχουμε

$$y(3.5, 0.26) = 6.0 \sin(0.02\pi(3.5) + 4.0\pi(0.26)) = 6.0 \sin(1.11\pi) = -2.02 \text{ cm} \quad (3.342)$$

Παράδειγμα 3.46:

Ένας τρόπος να μετρήσουμε την αύξηση θερμοκρασίας του πλανήτη, είναι να μετρήσουμε τη μέση θερμοκρασία του ωκεανού. Ο τρόπος με τον οποίο παίρνουν μετρήσεις οι ερευνητές είναι καταμετρώντας το χρόνο που χρειάζεται να διαθοισούν οι ηχητικοί παλμοί σε μεγάλες υποβρύχιες αποστάσεις. Σε βάθος 1000 m, όπου η θερμοκρασία της θάλασσας είναι σταθερή γύρω στους  $4^{\circ}\text{C}$ , η μέση ταχύτητα του ήχου είναι 1480 m/s. Από εργαστηριακές μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται κατά 4 m/s για κάθε μοναδιαία ( $1.0^{\circ}\text{C}$ ) αύξηση της θερμοκρασίας. Σε ένα πείραμα, όπου παρήχθησαν ήχοι στην Καλιφόρνια και έγιναν αντιληπτοί στο Νότιο Ειρηνικό, τα ηχητικά κύματα διένυσαν 8000 km.

- (α') Σε πόσα δευτερόλεπτα  $T$  ταξιδεψαν τα κύματα τη συγκεκριμένη απόσταση;
- (β') Αν η ελάχιστη χρονική μεταβολή που μπορεί να εντοπιστεί με ακρίβεια είναι  $\Delta t = 1.0$  s, ποιά η ταχύτητα των κυμάτων σε χρόνο  $T' = T + \Delta t$  δευτερόλεπτα;
- (γ') Ποιά είναι η μικρότερη μεταβολή της μέσης θερμοκρασίας  $\Delta C$  που μπορεί να μετρηθεί, λόγω αυτού του περιορισμού στη χρονική ακρίβεια;

Σε όλους τους υπολογισμούς σας, κρατήστε 2 δεκαδικά ψηφία.

Λύση:

- (α') Προφανώς από την Κινητική έχουμε

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.343)$$

$$\Delta t = t - 0 = T = \frac{\Delta x}{u} \quad (3.344)$$

$$= \frac{8000000}{1480} = 5405.40 \text{ s} \quad (3.345)$$

(β') Επίσης, ξανά από τους νόμους της Κίνησης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.346)$$

$$= \frac{8000000}{5406.40} = 1479.72 \text{ s} \quad (3.347)$$

(γ') Από τα παραπάνω, θα είναι

$$u = 1480 + 4\Delta C \implies |\Delta C| = \frac{|u - 1480|}{4} = \frac{|1479.72 - 1480|}{4} = 0.07 \text{ C}^\circ \quad (3.348)$$

### Παράδειγμα 3.47:

Μια κατασκευαστική εταιρία ανέθεσε στην εταιρία σας, την Ελληνική Ακουστική Α.Ε., την επίλυση του εξής προβλήματος. Οι εργαζόμενοί της παραπονούνται για έναν ενοχλητικό ύδρυμα στο χώρο εργασίας τους. Μετά από έρευνα, διαπιστώνετε ότι ένα μηχάνημα παράγει έναν μάλλον ισχυρό ήχο συχνότητας 1200 Hz. Μετά από έρευνα, διαπιστώνετε ότι δεν μπορείτε να λύσετε εξ' ολοκλήρου το πρόβλημα, αλλά ενημερώνετε τον διευθυντή της εταιρίας ότι μπορείτε να το λύσετε μερικώς, εξαλείφοντας τις ανακλάσεις του ήχου από τους τοίχους. Προτείνετε να τοποθετηθούν επιφάνειες πλέγματος στους τοίχους, ώστε μέρος του ήχου να ανακλάται από το πλέγμα, και μέρος του να διαπερνά το πλέγμα και να ανακλάται από τους τοίχους. Η ανάκλαση του ήχου αυτή θα πρέπει να δρα καταστρεπτικά στη συμβολή της με το αρχικό ηχητικό κύμα. Ποιά θα πρέπει να είναι η απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο ώστε να δουλέψει το σχέδιό σας; Δίδεται ότι η θερμοκρασία του αέρα στο κτήριο είναι 20° C.

Λύση: Η ταχύτητα του ήχου στο κτήριο είναι

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} = 343 \text{ m/s} \quad (3.349)$$

Το μήκος κύματος της πηγής ήχου είναι

$$u = \lambda f \implies \lambda = \frac{u}{f} = \frac{343}{1200} = 0.285 \text{ m/s} \quad (3.350)$$

Θέλουμε να έχουμε καταστρεπτική συμβολή του ανακλώμενου κύματος από τον τοίχο με το κύμα στο πλέγμα. Οπότε το κύμα θα διανύει διαδρομή  $2\Delta r$ , καθώς περνά το πλέγμα,, κτυπά στον τοίχο, κι επιστρέφει για να συμβάλλει με τον εαυτό του. Άρα πρέπει να ισχύει

$$2\Delta r = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \iff \Delta r = (2n+1) \frac{\lambda}{4} = (2n+1) \times 0.071 \quad (3.351)$$

όπου  $2\Delta r$  γιατί - όπως είπαμε - το κύμα που περνά το πλέγμα ταξιδεύει δυο φορές την απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο, μέχρι να συμβάλλει ξανά πίσω καταστρεπτικά. Άρα η ελάχιστη απόσταση ανάμεσά τους δίνεται για  $n = 0$ , δηλ.  $\Delta r = 0.071 \text{ m}$ .

Παράδειγμα 3.48:

Ένα πρωινό Σαββάτου, οπότε και θέλετε να ξεκουραστείτε από τις διαλέξεις Φυσικής της εβδομάδας που πέρασε, ο γείτονάς σας αποφασίζει να περάσει καλώδιο ethernet από το σαλόνι στην κουζίνα του, μέσω του τοίχου, για να έχει internet και στην κουζίνα. Ο τοίχος είναι αρκετά παχύς και το τρυπάνι του δυσκολεύεται, κάνοντας αρκετό όρυγμα, πράγμα που σας εκνευρίζει και δυσκολεύει την προσπάθειά σας να κοιμηθείτε ξανά. Σαν να μην έφτανε αυτό, ο άλλος γείτονάς σας, στην άλλη πλευρά του ορόφου, θέλει να στερεώσει την smart TV του στον τοίχο του σαλονιού του. Επειδή γενικά η πολυκατοικία είναι γερή κατασκευή, το τρυπάνι και του δεύτερου γείτονα προστίθεται στο συνολικό όρυγμα. Θεωρήστε ότι τα δύο τρυπάνια δουλεύουν σε περίπου ίση απόσταση από το κρεβάτι σας, και η ένταση των ηχητικών κυμάτων των δύο εργαλείων είναι περίπου ίδια. Πάνω στα νεύρα σας, γιατί δε σας αφήνουν να κοιμηθείτε, παίρνετε τηλέφωνο το φίλο σας και του λέτε “Δεν μπορώ να κλείσω μάτι, η ηχοστάθμη με τα δύο τρυπάνια είναι διπλάσια αυτής με το ένα τρυπάνι!” Ο φίλος σας, που μόλις τελείωσε το διάβασμα της ύλης της Κυματικής, κρυφογελάει με αυτή σας την κουβέντα. Γιατί;

Λύση: Η φράση “Δεν μπορώ να κλείσω μάτι, η ηχοστάθμη με τα δύο τρυπάνια είναι διπλάσια αυτής με το ένα τρυπάνι!” υπονοεί ότι η ηχοστάθμη μιας έντασης  $I_1$  διπλασιάζεται όταν διπλασιάζεται η ένταση  $2I_1$ , δηλ. ότι αν

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.352)$$

η ηχοστάθμη του ενός τρυπανιού, τότε ισχύει

$$\beta_2 = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 2\beta_1 \quad (3.353)$$

Ας δούμε αν αυτό ισχύει.

$$\beta_2 = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 2\beta_1 = 2 \times 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.354)$$

$$10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_1^2}{I_0^2} \quad (3.355)$$

$$\frac{2I_1}{I_0} = \frac{I_1^2}{I_0^2} \quad (3.356)$$

$$2 = \frac{I_1}{I_0} \quad (3.357)$$

$$I_1 = 2I_0 \quad (3.358)$$

Παρατηρούμε ότι ο διπλασιασμός της ηχοστάθμης όταν διπλασιάζεται η ένταση συμβαίνει μόνον όταν  $I_1 = 2I_0$ . Προφανώς, η ένταση των τρυπανιών είναι πολύ μεγαλύτερη από την ελάχιστη αντιληπτή ένταση  $I_0$ , άρα η φράση είναι όντως λάθος στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Παράδειγμα 3.49:

Δείξτε ότι η διαφορά μεταξύ των επιπέδων decibel  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ενός ήχου συνδέεται με το λόγο των αποστάσεων  $r_1$ ,  $r_2$  από την ηχητική πηγή με τη σχέση

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \quad (3.359)$$

Λύση: Είναι

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}, \quad \beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.360)$$

οπότε

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \quad (3.361)$$

Επίσης,

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}, \quad I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad (3.362)$$

που δίνει

$$\frac{I_2}{I_1} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad (3.363)$$

Άρα

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \quad (3.364)$$

### Παράδειγμα 3.50:

Ο υπολογιστής σας “χράσαρε” πετώντας μπλέ οιδόνη, την ώρα που ακούγατε σε υψηλή ένταση την αγαπημένη σας μουσική. Λόγω του κρασαρίσματος, ο ήχος “κόλλησε” σε ένα ημίτονο των 1000 Hz, κάνοντας την ακρόαση αφάνταστα ενοχλητική. Θεωρήστε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα.

(α') Δείξτε ότι ο λόγος δυο ηχητικών εντάσεων  $I_1, I_2$  της ίδιας πηγής ισούται με τον αντίστροφο λόγο των αποστάσεων,  $r_1, r_2$ , από την πηγή, στο τετράγωνο, δηλ. δείξτε ότι

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(β') Όταν ο H/Y σας “χολλάει”, βρίσκεστε σε απόσταση 1 m από αυτόν. Με μεγάλη δυσκολία, μετράτε τον ήχο και βρίσκετε ότι έχει ηχοστάθμη 95 dB. Λόγω της ενόχλησής σας, αρχίζετε να τρέχετε μακριά. Σε πόση απόσταση πρέπει να φτάσετε για να ακούτε τον ενοχλητικό ήχο σε μια υποφερτή ηχοστάθμη των 55 dB;

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα και η εντάσεις τους δίνονται από τη σχέση

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.365)$$

με  $r$  την ακτίνα του κυματικού μετώπου. Για δυο ηχητικά κύματα εντάσεων  $I_1, I_2$  που έρχονται από την ίδια πηγή έχουμε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_{avg}}{4\pi r_1^2}}{\frac{P_{avg}}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.366)$$

(β') Ο ήχος με ηχοστάθμη 95 dB έχει ένταση

$$\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \iff 9.5 = \log_{10} \frac{I_1}{10^{-12}} \iff 10^{9.5} = \frac{I_1}{10^{-12}} \iff I_1 = 10^{-2.5} \text{ W/m}^2 \quad (3.367)$$

Όμοια, για τον ήχο με ηχοστάθμη 55 dB θα έχει ένταση

$$\beta_2 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0} \iff 5.5 = \log_{10} \frac{I_2}{10^{-12}} \iff 10^{5.5} = \frac{I_2}{10^{-12}} \iff I_2 = 10^{-6.5} \text{ W/m}^2 \quad (3.368)$$

Άρα από το προηγούμενο ερώτημα

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \iff \frac{10^{-2.5}}{10^{-6.5}} = \frac{r_2^2}{1^2} \iff r_2^2 = 10^4 \implies r_2 = 10^2 \text{ m} \quad (3.369)$$

Άρα πρέπει να απομακρυνθούμε 100(!) μέτρα από τον υπολογιστή μας. Καλύτερα να του κάνουμε επανεκκίνηση! :)

### Παράδειγμα 3.51:

Μια νυχτερίδα για να εντοπίσει έντομα εκπέμπει ένα υπερηχητικό “τερέτισμα” και μετά ακούει την ηχώ των εντόμων. Θεωρούμε ότι το τερέτισμα της νυχτερίδας έχει συχνότητα 25 kHz. Πόσο γρήγορα και προς ποιά κατεύθυνση πρέπει να πετάξει η νυχτερίδα για να είμαστε εμείς σε θέση να ακούσουμε έστω και αμυδρά το τερέτισμα στα 20 kHz;

Λύση: Προφανώς εμείς είμαστε ακίνητοι και η νυχτερίδα πρέπει να πετάξει μακριά από εμάς, ώστε η συχνότητα που θα ακούσουμε να είναι μικρότερη από την παραγόμενη. Άρα από τη σχέση του Doppler

$$f_- = \frac{u}{u + u_{bat}} f_0 \iff \frac{20}{25} = \frac{u}{u + u_{bat}} \iff \frac{4}{5} = \frac{343}{343 + u_{bat}} \implies u_{bat} = 85.75 \text{ m/s} \quad (3.370)$$

### Παράδειγμα 3.52:

Μια σφυρίχτρα συχνότητας 540 Hz κινείται σε κύκλο ακτίνας 0.6 m με γωνιακή ταχύτητα 15 rad/s. Ποιά είναι η χαμηλότερη και η υψηλότερη συχνότητα που ακούει ένας ακίνητος ακροατής ο οποίος βρίσκεται αρκετά μακριά από το κέντρο του κύκλου;

Λύση: Λόγω της απόστασης του ακροατή από τον κύκλο που διαγράφει η σφυρίχτρα, θεωρούμε ότι η κίνηση της σφυρίχτρας είναι ευθύγραμμη, μπρος-πίσω επάνω στη διάμετρο του κύκλου που ενώνει τον ακροατή με το κέντρο του κύκλου. Η γραμμική ταχύτητα της σφυρίχτρας ισούται με

$$u = \omega r \implies u = 0.6 \times 15 = 9 \text{ m/s} \quad (3.371)$$

Όταν η σφυρίχτρα πλησιάζει τον ακροατή, έχουμε

$$f_+ = \frac{u}{u - u_s} f_0 = \frac{343}{343 - 9} 540 = 555 \text{ Hz} \quad (3.372)$$

Όταν απομακρύνεται από αυτόν,

$$f_- = \frac{u}{u + u_s} f_0 = \frac{343}{343 + 9} 540 = 526 \text{ Hz} \quad (3.373)$$

### Παράδειγμα 3.53:

Ένα υποβρύχιο A ταξιδεύει οριζόντια μέσα στον ωκεανό με ταχύτητα 11 m/s. Εκπέμπει ευθεία μπροστά ένα ηχητικό σήμα συχνότητας  $f = 5.27 \times 10^3$  Hz. Το υποβρύχιο B βρίσκεται μπροστά από το A και ταξιδεύει με 3 m/s προς την ίδια κατεύθυνση με το A.

- (α') Ποιά είναι η ταχύτητα του ήχου σε αυτήν την περίπτωση;  
 (β') Βρείτε τη συχνότητα που λαμβάνει ένα μέλος του πληρώματος στο B.

Λύση:

- (α') Η ταχύτητα του ήχου πρέπει να είναι αυτή του μέσου διάδοσης, δηλ. του θαλασσινού νερού,  $u = 1533 \text{ m/s}$ .  
 (β') Τα δυο υποβρύχια πλησιάζουν το ένα το άλλο και κινούνται και τα δυο, αλλά προς την ίδια κατεύθυνση. Από τη σχέση του Doppler έχουμε

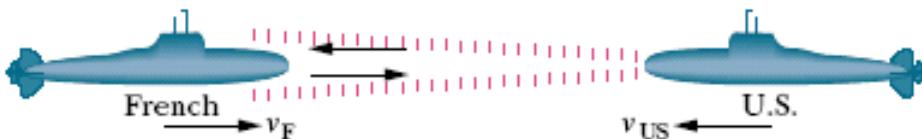
$$f_+ = f_0 \frac{u + u_B}{u - u_A} = 5298 \text{ Hz} \quad (3.374)$$

με  $u_B$ ,  $u_A$  οι ταχύτητες των αντίστοιχων υποβρυχίων.

#### Παράδειγμα 3.54:

Στο Σχήμα 3.57, ένα Γαλλικό κι ένα Αμερικανικό υποβρύχιο (μη επανδρωμένα και τα δυο) κινούνται το ένα προς το άλλο κατά τη διάρκεια εμπλοκής σε ακίνητα νερά στο Βόρειο Ατλαντικό. Το Γαλλικό υποβρύχιο κινείται με ταχύτητα  $v_F = 50.0 \text{ km/h}$  και το αμερικανικό με ταχύτητα  $v_{US} = 70.0 \text{ km/h}$ . Το Γαλλικό υποβρύχιο στέλνει ένα σήμα σόναρ (sonar) (ηχητικό κύμα στο νερό) συχνότητας  $f = 10^3 \text{ Hz}$ . Τα κύματα σόναρ διαδίδονται με ταχύτητα  $v_{sonar} = 5470 \text{ km/h}$ .

- (α') Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνέυεται από το Αμερικανικό υποβρύχιο;  
 (β') Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνέυεται από το Γαλλικό υποβρύχιο στο σήμα που επιστρέφει αφού ανακλασθεί από το Αμερικανικό υποβρύχιο;  
 (γ') Το ένα από τα δύο υποβρύχια ρίχνει μια τορπίλη και βυθίζει το άλλο υποβρύχιο. Το υποβρύχιο που χτυπήθηκε βυθίζεται στον πυθμένα της θάλασσας όπου και εκρήγνυται. Η έκρηξη μεταδίδει έναν παλμό προς την επιφάνεια του νερού κι έναν προς τον πυθμένα. Ο παλμός που ταξιδεψε προς την επιφάνεια, ανακλάστηκε και επέστρεψε πίσω στον πυθμένα. Αυτή η διαδρομή του παλμού συνέβη αρκετές φορές. Κάθε φορά που χτυπούσε στον πυθμένα, ένας σεισμογράφος κατέγραψε τη δόνηση του εδάφους λόγω του παλμού. Οι διαδοχικές καταγραφές των παλμών στο σεισμογράφο απείχαν χρονικά  $\Delta t = 0.11 \text{ s}$ . Σε πόσο βάθος  $D$  βυθίστηκε το υποβρύχιο; Θεωρήστε ότι οι παλμοί αυτοί διαδίδονται στο θαλασσινό νερό με ταχύτητα  $v_p = 1500 \text{ m/s}$ .



Σχήμα 3.57: Υποβρύχια σε αντιπαράθεση.

Λύση:

- (α') Έχουμε κινούμενη πηγή προς κινούμενο παρατηρητή (και οι δύο πλησιάζουν μεταξύ τους). Η συχνότητα που ανιχνεύεται το αμερικανικό υποβρύχιο είναι

$$f_{us} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f = \frac{5470 + 70}{5470 - 50} 1000 = \frac{5540}{5420} 1000 = 1022 \text{ Hz} \quad (3.375)$$

Μπορούμε να αφήσουμε τις ταχύτητας ως  $\text{km/h}$  χωρίς να κάνουμε μετατροπές, αφού ο λόγος ταχυτήτων είναι καθαρός αριθμός, αρκεί τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής να εκφράζονται σε  $\text{km/h}$ .

(β') Η συχνότητα που ανιχνεύει το γαλλικό υποβρύχιο είναι

$$f_{fr} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f_{us} = \frac{5470 + 50}{5470 - 70} 1022 = 1044 \text{ Hz} \quad (3.376)$$

(γ') Η διαδρομή του παλμού από τη στιγμή που ξεκινά για την επιφάνεια ως ότου χτυπήσει στον πυθμένα και καταγραφεί από το σεισμογράφο είναι  $2D$ . Τη διαδρομή αυτή τη διανύει σε  $\Delta t = 0.11$  s. Αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι  $u = 1500$  m/s, τότε

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2D}{\Delta t} \implies 2D = u\Delta t = 1500 \cdot 0.11 \implies D = 82.5 \text{ m} \quad (3.377)$$

Άρα το υποβρύχιο βυθίστηκε στα 82.5 m.

### Παράδειγμα 3.55:

- (α') Έχετε κλείσει εισιτήριο για τη συναυλία του Μαραβέγια στο Ηράκλειο. Λόγω κίνησης φτάνετε καθυστερημένος/η στο χώρο αλλά η φίλη σας έχει κρατήσει χώρο για σας. Τρέχετε γρήγορα στη θέση σας, πλησάζοντας ευθύγραμμα το συναυλιακό χώρο, και παρατηρείτε ότι ένας ήχος από την κιθάρα του συχνότητας 262 Hz σας ακούγεται 1 Hz υψηλότερα. Πόσο γρήγορα τρέχετε;
- (β') Ένας ομιλητής που μιλά κανονικά παράγει ομιλία ηχοστάθμης 40 dB σε απόσταση 0.9 m. Αν η ελάχιστη ηχοστάθμη για την καθαρή ακρόαση του ομιλητή είναι 20 dB, δείξτε ότι η απόσταση που μπορεί κανείς να ακούσει καθαρά τον ομιλητή είναι 9 m.

Λύση:

(α') Προφανώς η πηγή είναι ακίνητη, άρα  $u_s = 0$ , ενώ εμείς είμαστε ο κινούμενος παρατηρητής με ταχύτητα  $u_o$ . Από το φαινόμενο Doppler και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του ήχου είναι  $u = 343$  m/s, θα έχουμε

$$f_+ = f_0 \frac{u + u_o}{u} \implies u_o = u \left( \frac{f_+}{f_0} - 1 \right) \implies u_o = 343 \left( \frac{263}{262} - 1 \right) \approx 1.31 \text{ m/s} \quad (3.378)$$

(β') Επειδή τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα, η ένταση ενός κύματος σε απόσταση  $r$  από την πηγή εκπομπής δίνεται ως

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.379)$$

Έστω δύο κύματα εντάσεων  $I_1, I_2$  σε αποστάσεις  $r_1, r_2$  που αντιστοιχούν σε ηχοστάθμη 40 και 20 dB αντίστοιχα. Θα έχουμε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.380)$$

Από την ηχοστάθμη του πρώτου κύματος, είναι

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \implies \frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{\beta_1}{10}} \quad (3.381)$$

ενώ για το δεύτερο κύμα

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} \implies \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{\beta_2}{10}} \quad (3.382)$$

Ο λόγος  $I_1/I_2$  δίνει

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{r_2^2}{0.9^2} \implies r_2^2 = 10^2 \cdot 0.9^2 = 81 \implies r_2 = 9 \text{ m} \quad (3.383)$$

**Παράδειγμα 3.56:**

Λύστε ξανά το παρακάτω πρόβλημα που είδατε στο τμήμα της θεωρίας σχετικά με το φαινόμενο Doppler αλλά χρησιμοποιώντας ενεργειακά θεωρήματα αυτή τη φορά: Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρώι “κολλάει” και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε (“αφήνετε”) από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μέτρα από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

**Λύση:** Θεωρούμε ως σύστημα το ξυπνητήρι και τη Γη. Το σύστημα είναι απομονωμένο καθώς μόνο η δύναμη του βάρους ασκείται πάνω στο ξυπνητήρι, και αυτή η δύναμη είναι συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος και θετική φορά της κίνησης προς τα επάνω. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ του σημείου ρίψης και του σημείου επαφής με το έδαφος.

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{g_{A \rightarrow B}} = 0 \quad (3.384)$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0 \quad (3.385)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 - mgh = 0 \quad (3.386)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (3.387)$$

$$u_B = -\sqrt{2gh} \quad (3.388)$$

με το πρόσημο να δηλώνει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας έχει αντίθετη φορά της θετικής, δηλ. “δείχνει” προς τα κάτω (Γη). Αντικαθιστώντας, το μέτρο της ταχύτητας στη θέση B είναι  $u_B = 17.14$  m/s. Επειδή το ξυπνητήρι (πηγή ήχου) απομακρύνεται από εμάς, θα ισχύει

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f = \frac{343}{343 + 17.14} 600 = 571 \text{ Hz} \quad (3.389)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως σύστημα το ξυπνητήρι, και ως μη απομονωμένο (αφού του ασκείται η εξωτερική δύναμη του βάρους), μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ από τη θέση ρίψης ως τη θέση επαφής με το έδαφος. Θα είναι

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_{F_g} \quad (3.390)$$

$$K_B - K_A = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} \quad (3.391)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = -F_g \vec{j} \cdot (0 - h) \vec{j} \quad (3.392)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = -mg(-h) \quad (3.393)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (3.394)$$

$$u_B = -\sqrt{2gh} \quad (3.395)$$

η οποία είναι ίδια απάντηση με αυτή που μας έδωσε η ΑΔΜΕ, κ η υπόλοιπη λύση είναι ίδια.

**Παράδειγμα 3.57:**

Ένας εκκεντρικός γιατρός πιστεύει ότι μπορεί να θεραπεύσει την φαλάκρα ζεσταίνοντας το χρανίο με ηχητικά κύματα. Οι ασθενείς του κάθονται κάτω από μεγάφωνα, όπου τα κεφάλια τους βομβαρδίζονται με 93 dB καταπραϋντικων ηχητικών κυμάτων των 800 Hz. Έστω ότι μοντελοποιούμε το φαλακρό κεφάλι ως ένα ημισφαίριο με διάμετρο 16 cm. Αν τα 10 J ηχητικής ενέργεια θεωρούνται κατάλληλη δισολογία, πόσα λεπτά πρέπει να διαρκεί μια επίσκεψη στον γιατρό;

**Λύση:** Σύμφωνα με την εκφώνηση θεωρούμε το φαλακρό κεφάλι ως ημισφαίριο με ακτίνα  $R = 0.08$  m. Αυτό συνεπάγεται ότι το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$A = 2\pi R^2 = 0.0402 \text{ m}^2 \quad (3.396)$$

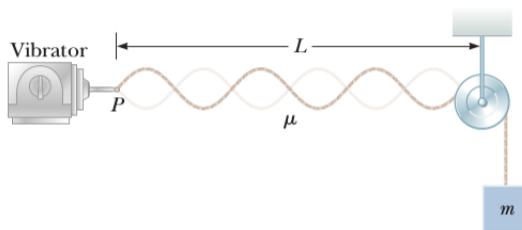
Γνωρίζουμε ότι  $\beta = 93$  dB και  $\Delta E = 0.10$  J. Επίσης γνωρίζουμε ότι  $I = I_0 \times 10^{\beta/10}$ ,  $P = IA$  όπως και  $P = \Delta E \Delta t$ . Επομένως

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{\Delta E}{IA} = \frac{0.1}{(10^{-12} \times 10^{9.3})(0.0402)} = 1250 \text{ s} = 21 \text{ min} \quad (3.397)$$

### Παράδειγμα 3.58:

Στην παραχώτα διάταξη του Σχήματος 3.58, ένα σώμα κρέμεται από σχοινί πυκνότητας μάζας  $\mu = 0.002$  kg/m που περνάει από μια (αβαρή και χωρίς τριβές) τροχαλία. Το σχοινί συνδέεται σε ένα δονητή σταθερής συχνότητας  $f$  και το μήκος του σχοινιού ανάμεσα στο δονητή και την τροχαλία είναι  $L = 2$  m. Όταν η μάζα  $m$  του σώματος είναι 16 ή 25 kg παρατηρούνται στάσιμα κύματα στο σχοινί. Άν όμως η μάζα του είναι μεταξύ 16 και 25 kg, τότε δεν παρατηρούνται στάσιμα κύματα.

- (α') Ποιά είναι η συχνότητα του δονητή; (σημειώστε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τάση στο σχοινί τόσο μικρότερος θα είναι ο αριθμός των κόμβων του στάσιμου κύματος)
- (β') Ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή μάζας του σώματος για την οποία θα παρατηρηθούν στάσιμα κύματα;



Σχήμα 3.58: Δονητής με νήμα και σώμα.

**Λύση:**

(α') Έστω ότι  $n$  είναι ο αριθμός των κόμβων του στάσιμου κύματος που προκύπτει από το σώμα μάζας 25 kg. Οπότε,  $n+1$  είναι ο αριθμός των κόμβων για το στάσιμο κύμα που προκύπτει από το σώμα μάζας 16 kg. Για στάσιμα κύματα, είναι  $\lambda = \frac{2L}{n}$  και η συχνότητα είναι  $f = \frac{n}{\lambda}$ . Η συχνότητα δεν αλλάζει όταν αλλάζουν οι μάζες. Άρα

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_n}{\mu}} \quad (3.398)$$

$$f = \frac{n+1}{2L} \sqrt{\frac{T_{n+1}}{\mu}} \quad (3.399)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις

$$\frac{n+1}{n} = \frac{5}{4} \quad (3.400)$$

Άρα,  $4n+4 = 5n \implies n = 4$ , και άρα  $f = 350$  Hz.

(β') Για την τάση  $T_n = mg$ , έχουμε

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_n}{\mu}} \implies m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g} \quad (3.401)$$

Για  $n = 1$ , είναι

$$m = 400 \text{ kg}$$

(3.402)





## 4. Ηλεκτρισμός

### 4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα φαινόμενα που σχετίζονται με τον ηλεκτρισμό. Ο ηλεκτρισμός - μαζί με το μαγνητισμό - είναι κεφαλαιώδους σημασίας για τον τεχνολογικό πλούτο που βλέπουμε γύρω μας, ξεκινώντας από τα θυμέλια του: οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού έθεσαν πριν από λίγες δεκάδες χρόνια τις βάσεις για την έκρηξη της τεχνολογίας. Από τα smartphones, τις τηλεοράσεις, τους ηλεκτροκινητήρες, τους υπολογιστές, και τα ηχοσυστήματα, μέχρι τους επιταχυντές σωματιδίων, τους δορυφόρους, τα διαστημικά τηλεσκόπια, και τους πυραύλους, οι νόμοι αυτοί είναι πάντα παρόντες.

Η λέξη “ηλεκτρικός” προέρχεται από την αρχαία Ελληνική λέξη “ήλεκτρο”, που σημαίνει το κεχριμπάρι. Το κεχριμπάρι είναι απολιθωμένη ρητίνη, παράγωγο των κωνοφόρων δένδρων.

### 4.2 Ηλεκτρικές Δυνάμεις

Όλοι μας έχουμε “δει” ηλεκτρικά πεδία γύρω μας. Αρκεί να τρίψουμε ένα μπαλόνι στα μαλλιά μας και θα δούμε ότι μπορεί να έλξει μικρά κομματάκια χαρτιού. Μια τέτοια συμπεριφορά της ύλης αναφέρεται ως ηλεκτρική φόρτιση. Με απλά πειράματα οι επιστήμονες έδειξαν ότι υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικής φόρτισης: θετική και αρνητική. Σε ένα άτομο, τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητική φόρτιση και τα πρωτόνια έχουν θετική φόρτιση, ενώ τα νετρόνια (το έτερο σωματίδιο του πυρήνα του ατόμου, μαζί με τα πρωτόνια) είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Πειραματικά επίσης αποδείχθηκαν οι εξής δυο κανόνες:

- Φορτία ίδιου προσήμου απωθούνται
- Φορτία αντίθετου προσήμου έλκονται

Η έλξη και η απώθηση γίνεται μέσω έγερσης ηλεκτρικών δυνάμεων επάνω στα φορτία.

Όταν σε ένα απομονωμένο σύστημα υπάρχει μεταφορά φορτίου, το συνολικό φορτίο του συστήματος διατηρείται: αυτή είναι η περίφημη Αρχή Διατήρησης του Ηλεκτρικού Φορτίου. Η μεταφορά φορτίου δημιουργεί απλώς πλεόνασμα φορτίου σε ένα σώμα και έλλειψη φορτίου στο άλλο. Ποιός είναι όμως ο φορέας των φορτίων; Φορέας φορτίου ονομάζεται ένα σωματίδιο που φέρει ηλεκτρικό φορτίο και μπορεί να κινηθεί ελεύθερα.

Τέτοιοι φορείς φορτίου μπορεί να είναι ηλεκτρόνια ή ιόντα, μεταξύ άλλων. Πλέον γνωρίζουμε ότι στα μέταλλα τα ηλεκτρόνια είναι αυτά που μπορούν να μεταφέρουν το ηλεκτρικό φορτίο από ένα σώμα σε ένα άλλο, μεταφέροντας απλά τον εαυτό τους από το ένα στο άλλο σώμα, δημιουργώντας έτσι πλεόνασμα θετικού φορτίου στο σώμα που εγκατέλειψαν (θετική φόρτιση) ή πλεόνασμα αρνητικού φορτίου στο σώμα που μεταφέρθησαν (αρνητική φόρτιση).

Το 1909, ο R. Milikan ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό φορτίο, που συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα  $q$  ή  $Q$ , απαντάται στη φύση σε ακέραια πολλαπλάσια ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου  $e$ :

$$q = Ne, \quad N \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

Αυτή η παρατήρηση χαρακτηρίζει το ηλεκτρικό φορτίο ως κβαντισμένο. Το στοιχειώδες αυτό φορτίο φέρει και το ηλεκτρόνιο, με αρνητικό πρόσημο,  $-e$ , ενώ ένα πρωτόνιο φέρει θετικό φορτίο  $+e$ . Το μικρότερο φορτίο που έχει βρεθεί ελεύθερο στη φύση είναι ίσο με  $e = 1.602 \times 10^{-19}$  C, με τη μονάδα μέτρησης C να προέρχεται από το Coulomb, προς τιμήν του Charles Coulomb, για τον οποίο θα μιλήσουμε πολύ σύντομα.

#### 4.2.1 Κατηγορίες Τλικών

Τα υλικά γύρω μας κατηγοριοποιούνται σε τρεις (τουλάχιστον) κατηγορίες με βάση την ηλεκτρική συμπεριφορά τους:

- Αγωγοί: υλικά όπου κάποια ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα και δεν είναι δεσμευμένα σε άτομα, και μπορούν να κινηθούν σχετικά ελεύθερα στο υλικό. Όταν τέτοια υλικά φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται σε όλη την επιφάνεια του υλικού.
- Μονωτές: υλικά που όλα τα ηλεκτρόνια τους είναι δεσμευμένα σε άτομα και δεν μπορούν να κινηθούν ελεύθερα. Όταν τέτοια υλικά φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται σε μια συγκεκριμένη τους περιοχή.
- Ημιαγωγοί: υλικά που με την προσθήκη κατάλληλης ποσότητας ατόμων στο υλικό, εναλλάσσουν τη φύση τους από αγωγού σε μονωτές.

#### 4.2.2 Ο Νόμος του Coulomb

Ο Charles Coulomb ανακάλυψε το μέτρο των ηλεκτρικών δυνάμεων ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια. Από τα πειράματά του προέκυψε ότι:

##### Νόμος του Coulomb

Η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια  $q_1, q_2$  (σημειακά - αμελητέων διαστάσεων) που απέχουν απόσταση  $r$  μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (4.2)$$

όπου  $k_e$  μια σταθερά που ονομάζεται σταθερά του Coulomb.

Ξανά πειραματικά, αποδείχθηκε ότι η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική. Ως δύναμη, η μονάδα μέτρησής της το Διεθνές Σύστημα είναι το Newton - N. Η σταθερά  $k_e$  έχει την τιμή

$$k_e = 8.987 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (4.3)$$

και πολλές φορές τη χρησιμοποιούμε αριθμητικά στη μορφή

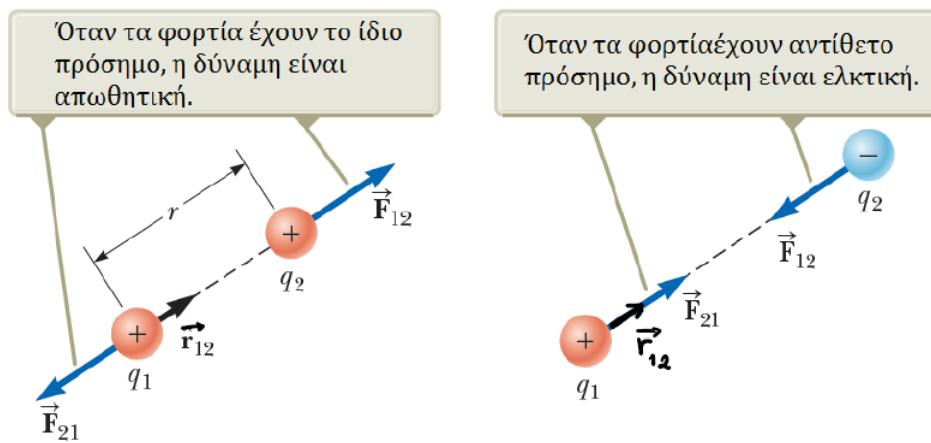
$$k_e = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (4.4)$$

ενώ όταν η αριθμητική τιμή δεν είναι απαραίτητη, είναι βολικότερο να τη γράψουμε ως

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.5)$$

με  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$  μια νέα σταθερά που ονομάζεται διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Κάθε δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος, όμως το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης σημειωκών φορτίων που γνωρίσαμε δεν είναι γραμμένο ως τέτοιο. Για να γράψουμε τη διανυσματική του μορφή θα πρέπει να ορίσουμε ένα διάνυσμα μοναδιάσιου μέτρου, που να ξεκινά από το ένα φορτίο και να καταλήγει σε ένα άλλο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο φορτία, όπως στο Σχήμα 4.1. Στο αριστερό τμήμα του σχήματος, έχουμε



Σχήμα 4.1: Δύναμη Coulomb σε διανυσματική μορφή.

δυο θετικά φορτία  $q_1, q_2$  σε απόσταση  $r$ . Ως ομόσημα φορτία, αυτά απωθούνται. Η δύναμη  $\vec{F}_{12}$  που ασκεί το φορτίο  $q_1$  στο φορτίο  $q_2$  πρέπει να ξεκινά από το  $q_2$  και να “φεύγει” μακριά από αυτό, με διεύθυνση αυτή της ευθείας που ενώνει τα δύο φορτία. Αντίστοιχα θα είναι και η κατεύθυνση της δύναμης  $\vec{F}_{21}$ . Οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \quad (4.6)$$

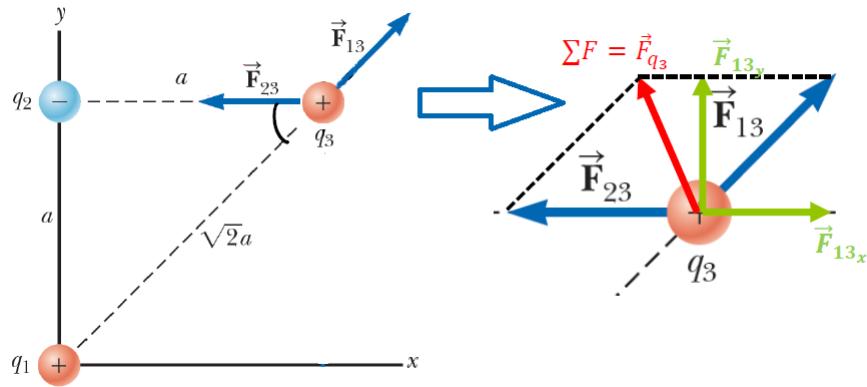
και να σχεδιάσουμε όπως στο σχήμα. Στο δεξιό τμήμα του σχήματος, έχουμε δύο ετερόσημα φορτία. Η μόνη διαφορά είναι στο ότι τα φορτία έλκονται και οι δυνάμεις πρέπει να σχεδιαστούν όπως στο σχήμα. Βλέπετε ότι τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{r}_{12}, \vec{r}_{21}$  έχουν την ίδια φορά και στις δύο περιπτώσεις. Η φορά της δύναμης εξαρτάται από την αλγεβρική τιμή της, δηλ. από την ποσότητα  $k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , και συγκεκριμένα από το γινόμενο  $q_1 q_2$ , καθώς οι υπόλοιπες ποσότητες είναι σταθερές.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.1:

Τρία ακίνητα σημειωκά φορτία βρίσκονται στις γωνίες ενός ισκοσελούς ορθογωνίου τριγώνου όπως στο Σχήμα 4.2. Δίνεται ότι  $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2 \mu\text{C}$ , και  $a = 0.1 \text{ m}$ . Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο  $q_3$ .

Λύση: Δυο δυνάμεις ασκούνται επάνω στο φορτίο  $q_3$ : η απωσιακή δύναμη  $\vec{F}_{13}$  από το φορτίο  $q_1$  και η ελκτική δύναμη  $\vec{F}_{23}$  από το φορτίο  $q_2$ , όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 4.2. Θα προβάλλουμε τις δυνάμεις σε



Σχήμα 4.2: Συνισταμένη δύναμη τριών φορτίων.

άξονες παράλληλους με τους άξονες  $xy$ . Θα έχουμε

$$\vec{F}_{13} = k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \vec{r}_{13} = k_e \frac{5.5 \times 10^{-12}}{2(0.1)^2} \approx 11.2 \text{ N} \quad (4.7)$$

$$\vec{F}_{23} = k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \vec{r}_{23} = k_e \frac{2.5 \times 10^{-12}}{(0.1)^2} \approx 9.0 \text{ N} \quad (4.8)$$

Στον  $x$ -άξονα θα έχουμε

$$\vec{F}_{q_{3x}} = \vec{F}_{13x} + \vec{F}_{23x} \implies F_{13x} - F_{23} = F_{13} \cos(\pi/4) - F_{23} = 7.9 - 9.0 = -1.1 \text{ N} \quad (4.9)$$

Στον  $y$ -άξονα,

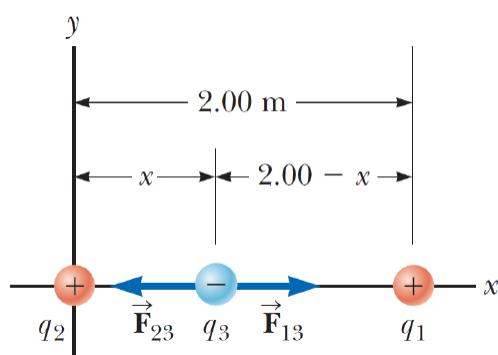
$$\vec{F}_{q_{3y}} = \vec{F}_{13y} \implies F_{q_{3y}} = F_{13} \sin(\pi/4) \approx 7.9 \text{ N} \quad (4.10)$$

Οπότε

$$\vec{F}_{q_3} = F_{q_{3x}} \vec{i} + F_{q_{3y}} \vec{j} = -1.1 \vec{i} + 7.9 \vec{j} \text{ N} \quad (4.11)$$

### Παράδειγμα 4.2:

Τρια φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται επάνω στον  $x$ -άξονα όπως στο Σχήμα 4.3. Το φορτίο  $q_1 = 15 \mu\text{C}$  βρίσκεται στη θεση  $x = 2 \text{ m}$ , το φορτίο  $q_2 = 6 \mu\text{C}$  βρίσκεται στην αρχή των άξονων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο  $q_3$  είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του  $q_3$ .



Σχήμα 4.3: Μηδενική συνισταμένη δύναμη δύο φορτίων.

Λύση: Από την εκφώνηση ισχύει ότι

$$\sum \vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \implies F_{23} - F_{13} = 0 \implies F_{23} = F_{13} \quad (4.12)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Coulomb έχουμε

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \quad (4.13)$$

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} \quad (4.14)$$

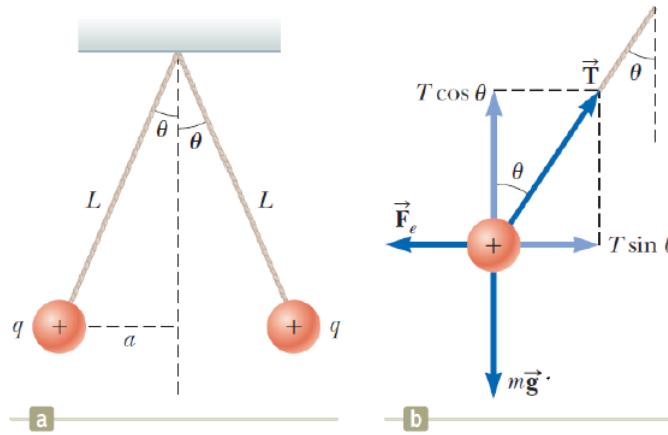
και εξισώνοντας έχουμε

$$\frac{|q_2|}{x^2} = \frac{|q_1|}{(2-x)^2} \iff 3x^2 + 8x - 8 = 0 \quad (4.15)$$

Το τριώνυμο έχει δύο λύσεις, την  $x_1 = 0.755$  m και την  $x_2 = -3.44$  m. Επιλέγουμε τη λύση  $x_1$  καθώς αυτή είναι θετική, όπως πρέπει βάσει της εκφώνησης και του σχήματος. Η άλλη ρίζα  $x_2$  αποτελεί μια θέση στον  $x$ -άξονα όπου  $F_{13} = F_{23}$  αλλά οι δυνάμεις αυτές έχουν την ίδια φορά - οπότε το φορτίο δεν ισορροπεί.

### Παράδειγμα 4.3:

Δυο όμοιες φορτισμένες σφαίρες, καθεμιά μάζας  $m = 3 \times 10^{-2}$  kg, κρέμονται σε ισορροπία όπως στο Σχήμα 4.4. Το μήκος κάθε σχοινιού είναι 0.15 m, ενώ η γωνία  $\theta$  είναι 5 μοίρες. Βρείτε το μέτρο του φορτίου κάθε σφαίρας.



Σχήμα 4.4: Κρεμαστά φορτία.

Λύση: Το σώμα φορτίου  $q$  και μάζας  $m$  ισορροπεί. Άρα από το 2o νόμο του Newton θα είναι

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (4.16)$$

Αναλύοντας κατά άξονες, προβάλλοντας την τάση του νήματος  $T$  όπως στο σχήμα, θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = 0 \implies F_e = T_x = T \sin(\theta) \iff k_e \frac{|q|^2}{(2a)^2} = T \sin(\theta) \quad (4.17)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \implies T_y = mg \implies T \cos(\theta) = mg \quad (4.18)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{k_e \frac{|q|^2}{4a^2}}{mg} = \tan(\theta) \iff |q|^2 = \frac{4a^2 mg \tan(\theta)}{k_e} \quad (4.19)$$

Από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε ότι

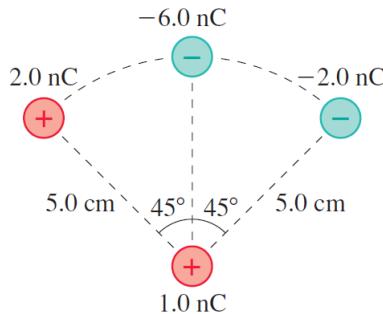
$$a = L \sin(\theta) \quad (4.20)$$

οπότε

$$|q|^2 = \frac{4L^2 \sin^2(\theta) mg \tan(\theta)}{k_e} \implies |q| = \sqrt{\frac{4L^2 \sin^2(\theta) mg \tan(\theta)}{k_e}} \quad (4.21)$$

#### Παράδειγμα 4.4:

Ποιά είναι η συνισταμένη δύναμη  $\vec{F}$  στο σωματίδιο φορτίου  $1 \text{ nC}'$  στο κάτω μέρος του Σχήματος 4.5;



Σχήμα 4.5: Φορτία σε κυκλικό τόξο.

Δώστε την απάντησή σας υπό μορφή συνιστωσών. Θεωρήστε ότι  $k_e = 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .

$${}'1 \text{ nC} = 1 \times 10^{-9} \text{ C}$$

Λύση: Έστω ότι το φορτίο  $1 \text{ nC}$  βρίσκεται στο σημείο αναφοράς ενός συστήματος συντεταγμένων και έστω ότι το ονομάζουμε  $q_1$ . Αντίστοιχα,  $q_3 = -6.0 \text{ nC}$ , ενώ το φορτίο  $q_2$  θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και το  $q_4$  στο τέταρτο τεταρτημόριο. Η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο  $q_1$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών δυνάμεων από τα άλλα τρία φορτία. Άρα

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_2 \quad (4.22)$$

$$= 0.72 \times 10^{-5}, \text{ με φορά προς το } q_2 \quad (4.23)$$

$$= 0.72 \times 10^{-5} (\cos(45^\circ) \vec{i} + \sin(45^\circ) \vec{j}) \quad (4.24)$$

$$\vec{F}_{31} = k_e \frac{|q_3||q_1|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_3 \quad (4.25)$$

$$= 2.16 \times 10^{-5} \vec{j} \quad (4.26)$$

$$\vec{F}_{41} = k_e \frac{|q_4||q_1|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_4 \quad (4.27)$$

$$= 0.72 \times 10^{-5} (\cos(45^\circ) \vec{i} - \sin(45^\circ) \vec{j}) \quad (4.28)$$

Αναλύοντας και προσθέτοντας τις συνιστώσες (χάντε το! - εξάσκηση  $\oplus$ ) έχουμε

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = 1.02 \times 10^{-5} \vec{i} + 2.2 \times 10^{-5} \vec{j} \text{ N} \quad (4.29)$$

### 4.3 Ηλεκτρικά Πεδία

Ένα πολύ άμεσο ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε είναι το εξής: “Πώς γνωρίζει ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο ότι στην ευρύτερη περιοχή του υπάρχει ένα δεύτερο φορτίο ώστε να αναπτυχθεί ηλεκτρική αλληλεπίδραση μέσω ηλεκτρικής δύναμης;” Σε αυτό θα μας βοηθήσει η έννοια του ηλεκτρικού πεδίου που αναπτύχθηκε από τον M. Faraday. Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο  $q$  που ονομάζεται πηγή φορτίου. Όταν ένα άλλο (μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο  $q_0$  εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο, μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του. Ορίζουμε λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο - λόγω της επίδρασης της πηγής φορτίου επάνω σε άλλα φορτισμένα σωματίδια - ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται ανά μονάδα φορτίου:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (4.30)$$

Λύνοντας ως προς  $\vec{F}_e$  βρίσκουμε ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο ( $q_0$ ) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} \quad (4.31)$$

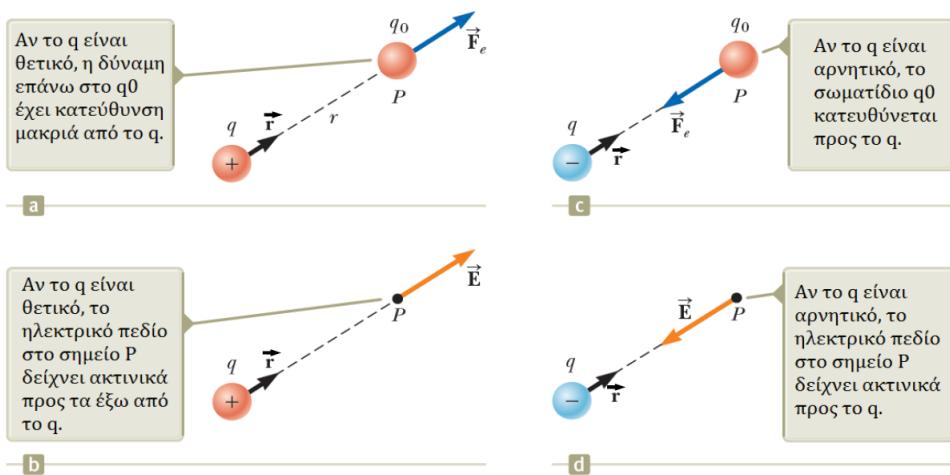
Παρατηρήστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι διάνυσμα. Προσέξτε επίσης ότι αν το  $q_0$  είναι θετικό, η ηλεκτρική δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ αν είναι αρνητικό, η ηλεκτρική δύναμη και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αντίρροπα διανύσματα. Αντικαθιστώντας τη σχέση του Coulomb στη σχέση του ηλεκτρικού πεδίου καταλήγουμε ότι

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad (4.32)$$

με το μέτρο του πεδίου να δίνεται απλά ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2} \quad (4.33)$$

με  $r$  την απόσταση μεταξύ της πηγής φορτίου  $q$  και του σημειακού φορτίου  $q_0$ . Πολλές φορές ονομάζουμε αυτό το δεύτερο μικρότερο φορτίο  $q_0$  ως δοκιμαστικό φορτίο. Παρατηρήστε στο Σχήμα 4.6 ότι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή φορτίου. Από το ίδιο σχήμα, το ηλεκτρικό πεδίο εξ'



Σχήμα 4.6: Ηλεκτρικό πεδίο και σημειακά φορτία.

αιτίας πηγής φορτίου  $q$  σε ένα σημείο  $P$  του χώρου έχει τη φορά που θα είχε η ηλεκτρική δύναμη επάνω σε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο που θα τοποθετούνταν στο σημείο  $P$ .

### 4.3.1 Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειωκών Φορτίων

Στην περίπτωση πολλών πηγών φορτίων  $q_i$ , συμπεριφερόμαστε όπως και με τις δυνάμεις, δηλ. χειριζόμαστε το πεδίο ως διανυσματικό μέγεθος και προσθέτουμε διανυσματικά τις επιμέρους συνεισφορές.

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad (4.34)$$

με  $r_i$  την απόσταση κάθε πηγής φορτίου από ένα σημείο  $P$  και  $\vec{r}_i$  το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή  $i$  στο σημείο  $P$ . Φυσικά μεγάλη ευκολία μας προσφέρει όχι τόσο η παραπάνω γραφή όσο η ανάλυση σε συνιστώσες όπως τη γνωρίζουμε από το κεφάλαιο της Μηχανικής.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

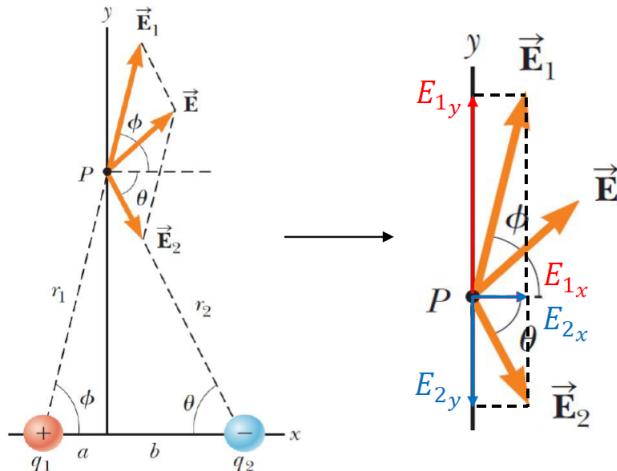
#### Παράδειγμα 4.5:

Φορτία  $q_1, q_2$  βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις  $a$  και  $b$  αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο Σχήμα 4.7.

(α') Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $P(0,y)$ .

(β') Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$  στην ειδική περίπτωση που  $|q_1| = |q_2|$  και  $a = b$ .

(γ') Στο β) ερώτημα βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν  $y \gg a$ .



Σχήμα 4.7: Ηλεκτρικό πεδίο λόγω σημειωκών φορτίων.

Λύση:

(α') Τα μέτρα των ηλεκτρικών πεδίων εξ' αιτίας των φορτίων  $q_1, q_2$  στο σημείο  $P$  είναι

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \quad (4.35)$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \quad (4.36)$$

και αναλύοντας σε συνιστώσες τα διανύσματα αυτά, υιοθετώντας τις συμβατικές θετικές φορές ενός συστήματος συντεταγμένων, έχουμε

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} \quad (4.37)$$

$$E_y = E_{1y} - E_{2y} \quad (4.38)$$

και οι προβολές τους στο σύστημα αξόνων είναι

$$E_{1x} = E_1 \cos(\phi) = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos(\phi) \quad (4.39)$$

$$E_{1y} = E_1 \sin(\phi) = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin(\phi) \quad (4.40)$$

$$E_{2x} = E_2 \cos(\theta) = k_e \frac{|q_1|}{b^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.41)$$

$$E_{2y} = E_2 \sin(\theta) = k_e \frac{|q_1|}{b^2 + y^2} \sin(\theta) \quad (4.42)$$

Οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων στο σημείο  $P$  θα είναι

$$\vec{E}_P = (E_{1x} + E_{2x})\vec{i} + (E_{1y} - E_{2y})\vec{j} \quad (4.43)$$

(β') Η ισότητα των φορτίων ( $|q_1| = |q_2| = q$ ) και των αποστάσεων φέρνει και την ισότητα των γωνιών  $\phi$  και  $\theta$ . Αντικαθιστώντας στις προηγούμενες σχέσεις

$$E_x = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) + k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.44)$$

$$E_y = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin(\theta) - k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin(\theta) = 0 \quad (4.45)$$

Άρα

$$E = E_x = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.46)$$

και επειδή  $\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$ , θα είναι

$$E = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.47)$$

(γ') Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι

$$E_P = 2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.48)$$

Αν  $y \gg a$ , αυτό σημαίνει ότι  $y^2 + a^2 \approx y^2$ , οπότε

$$E_P = 2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \approx 2k_e \frac{qa}{y^3} \quad (4.49)$$

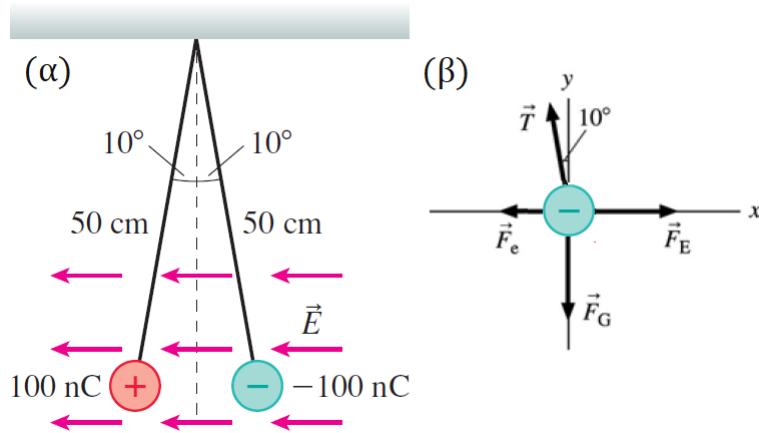
### Παράδειγμα 4.6:

Δυο όμοιες μικρές σφαίρες φορτίζονται με φορτία  $100 \times 10^{-9}$  C και  $-100 \times 10^{-9}$  C αντίστοιχα, και χρέωνται σε ισορροπία από νήμα μήκους 0.5 m υπό επιδραση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου 100000 N/C, όπως στο Σχήμα 4.8(a). Θεωρήστε ότι  $k_e = 9.0 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C. Πόση είναι η μάζα κάθε σφαίρας;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 4.8(b). Οι δύο ηλεκτρικές δυνάμεις υπολογίζονται ως

$$F_E = |q|E = 1.00 \times 10^{-2} \text{ N} \quad (4.50)$$

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{9.0 \times 10^{-5}}{r^2} \quad (4.51)$$



Σχήμα 4.8: Κρεμαστές σφαίρες σε ηλεκτρικό πεδίο.

Από τη γεωμετρία του Σχήματος 4.8, έχουμε

$$\sin(10^\circ) = \frac{\frac{r}{2}}{0.5} \implies r = 0.174 \quad (4.52)$$

οπότε

$$F_e = 3 \times 10^{-3} \text{ N} \quad (4.53)$$

Ξανά από το σχήμα, παρατηρούμε ότι λόγω ισορροπίας στους  $x$  και  $y$  άξονες ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, και άρα

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_x + \vec{F}_E + \vec{F}_e = \vec{0} \implies T \sin(10^\circ) + F_e = F_E \quad (4.54)$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_y + \vec{F}_G = \vec{0} \implies T \cos(10^\circ) = mg \quad (4.55)$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\tan(10^\circ) = \frac{F_E - F_e}{mg} \implies m = \frac{F_E - F_e}{g \tan(10^\circ)} = 0.41 \times 10^{-2} = 4.1 \text{ gr} \quad (4.56)$$

### 4.3.2 Ηλεκτρικό Πεδίο Κατανομής Φορτίου

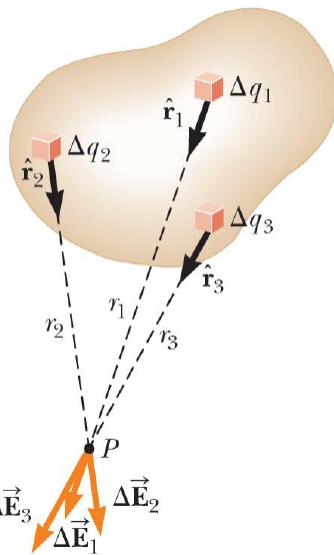
Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία. Πολλές φορές όμως έχουμε μια κατανομή φορτίου αντί για σημειακά φορτία. Σε αυτές τις περιπτώσεις η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι συνεχώς και ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο το μήκος ή την επιφάνεια ή τον όγκο του φορτισμένου σώματος. Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 4.9. Μπορούμε να τιμηματοποιήσουμε την κατανομή σε μικρότερα φορτία  $\Delta q_i$ , με το καθένα να απέχει απόσταση  $r_i$  από το σημείο  $P$ , και να πούμε ότι στο σημείο  $P$  το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να περιγραφεί ως

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad (4.57)$$

Αν αυτή η τιμηματοποίηση “σπάει” την κατανομή φορτίου σε μικρά φορτία  $\Delta q$ , τα οποία όμως αν είναι απειροστά μικρά, δηλ.  $dq$ , τότε το παραπάνω άνθροισμα μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα

$$\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{r} \quad (4.58)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό. Θα δούμε όμως πως μπορούμε να το χειριστούμε χωρίς κανένα πρόβλημα. Στην προσπάθεια μας αυτή θα ορίσουμε τρεις χρήσιμες ποσότητες:



Σχήμα 4.9: Κατανομή φορτίου.

- γραμμική πυκνότητα φορτίου:  $\lambda = Q/l$
- επιφανειακή πυκνότητα φορτίου:  $\sigma = Q/A$
- χωρική πυκνότητα φορτίου:  $\rho = Q/V$

με  $l, A, V$  το μήκος, το εμβαδό, και τον όγκο μιας επιφάνειας αντίστοιχα. Το σκεπτικό πίσω από την εύρεση ποσοτήτων (είτε είναι τώρα το ηλεκτρικό πεδίο είτε αργότερα το ηλεκτρικό δυναμικό και άλλα - ακόμα και η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ μη σημειακών σωμάτων) είναι το παρακάτω:

#### Εύρεση Ηλεκτρικού Πεδίου Κατανομής Φορτίου

- Ελέγχουμε την κατανομή φορτίου για τυχούσες συμμετρίες που διευκολύνουν την κατάσταση (π.χ. ακυρώνοντας κάποιες συνιστώσες).
- Υπολογίζουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου  $dE$  που συνεισφέρει ένα απειροστά μικρό τμήμα της κατανομής, ψεωρώντας το ως σημειακό φορτίο  $dq$ .
- Εκφράζουμε (συνήθως) το φορτίο  $dq$  συναρτήσει της εκάστοτε πυκνότητας φορτίου.
- Προσπαθούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές ποσότητες στο ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει γνωστών σταθερών - πάντα ως υπάρχει όμως μια μεταβλητή ολοκλήρωσης.
- Αναλύουμε το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκαμε σε συνιστώσες κατά  $x$  και  $y$ .
- Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές από όλα τα απειροστά μικρά τμήματα της κατανομής παίρνοντας το ολοκλήρωμα για κάθε συνιστώσα

$$E_x = \int dE_x \text{ και } E_y = \int dE_y \quad (4.59)$$

και βρίσκουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο ως

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \quad (4.60)$$

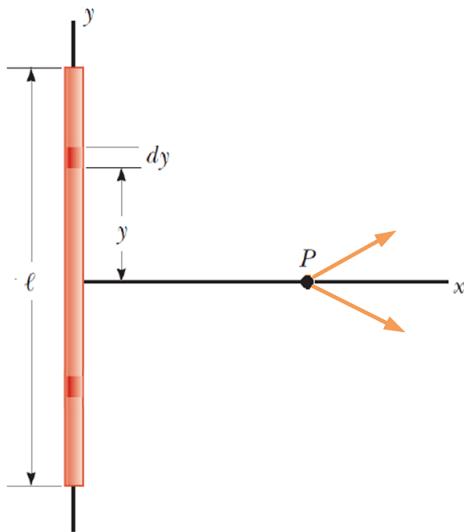
Ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα - υπάρχουν αρκετά ακόμα στο τέλος του κεφαλαίου, στην παράγραφο “Ασκήσεις”.

Παράδειγμα 4.7:

- (α') Αν μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ , μήκους  $l$ , και συνολικού φορτίου  $Q$  βρίσκεται κάθετα στον άξονα  $x'$ , και πάνω στον άξονα  $y'$ , όπως στο Σχήμα 4.10, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$  που απέχει απόσταση  $x$  από το σημείο  $(0,0)$  που αποτελεί το μέσον της ράβδου. Σας δίνεται ότι

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (4.61)$$

- (β') Πως συμπεριφέρεται η ράβδος αν την απομακρύνουμε αρκετά από το σημείο  $(0,0)$ , δηλ. αν  $x \gg l$ ;  
 (γ') Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στην περίπτωση που η ράβδος γίνει απειροστά μεγάλη, διατηρώντας την γραμμική πυκνότητά της  $\lambda$  σταθερή, δηλ. υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο όταν  $l \rightarrow +\infty$ . Θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσετε το υπόριζο της απάντησής σας στο ερώτημα (α).



Σχήμα 4.10: Κατανομή φορτίου σε ράβδο.

Λύση:

- (α') Τμηματοποιούμε τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα φορτίου  $dq$  και μήκους  $dy$ , όπως στο Σχήμα 4.10. Για κάθε τέτοιο τμήμα θα ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy} \implies dq = \lambda dy \quad (4.62)$$

Αν όμως πάρουμε δυο συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'$  τμήματα της ράβδου και υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, παρατηρούμε πως λόγω της συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο θα έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα, διότι οι  $y$ -συνιστώσες αλληλοακυρώνονται. Αυτό ισχύει γιατί τα συμμετρικά φορτία είναι ίδια, όπως και οι αποστάσεις τους από το σημείο  $P$ . Άρα για ένα απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου  $dy$  με απειροστά μικρό φορτίο  $dq$ , το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $P$  θα είναι

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \quad (4.63)$$

Η  $x$ -συνιστώσα του παραπάνω θα είναι

$$dE_x = dE \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.64)$$

με  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας με την απόσταση  $r$ . Από την τριγωνομετρία του σχήματος, έχουμε

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.65)$$

Τότε

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \cos(\theta) = k_e \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \cos(\theta) = k_e \lambda \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.66)$$

Μπορούμε να αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) τις συνεισφορές από όλα τα απειροστά μικρά τμηματα φορίου  $dq$ . Αφού η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι  $dy$ , θα πρέπει στα άκρα του ολοκληρώματος να βάλουμε τις τεταγμένες των φορτίων στα άκρα της ράβδου. Έτσι, για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο

$$E = E_x = \int dE_x = \int k_e \lambda \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.67)$$

$$= k_e \lambda x \left. \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{y=-l/2}^{l/2} = k_e \lambda x \left( \frac{l/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} - \frac{-l/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \right) \quad (4.68)$$

$$= k_e \lambda x \frac{l}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \quad (4.69)$$

και επειδή  $\lambda l = Q$ , έχουμε τελικά

$$\vec{E}_x = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \vec{i} \quad (4.70)$$

(β') Αν  $x \gg l$ , τότε  $x^2 + (l/2)^2 \approx x^2$ , οπότε

$$E_x = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2}} = k_e \frac{Q}{x^2} \quad (4.71)$$

οπότε η συμπεριφορά της είναι ως σημειακό φορτίο. Τέτοιους ελέγχους πρέπει να κάνουμε συχνά για να καταλαβαίνουμε αν το αποτέλεσμα μας έχει νόημα. Όταν απομακρυνόμαστε αρκετά από μια κατανομή φορτίου τότε αυτή πιθανότατα θα συμπεριφέρεται πλέον σαν σημειακό φορτίο.

(γ') Γράφουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως

$$E_x = k_e \frac{Q}{xl/2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2/l^2}} = k_e \frac{2\lambda}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2/l^2}} \quad (4.72)$$

και υέτοντας  $l \rightarrow +\infty$ , έχουμε

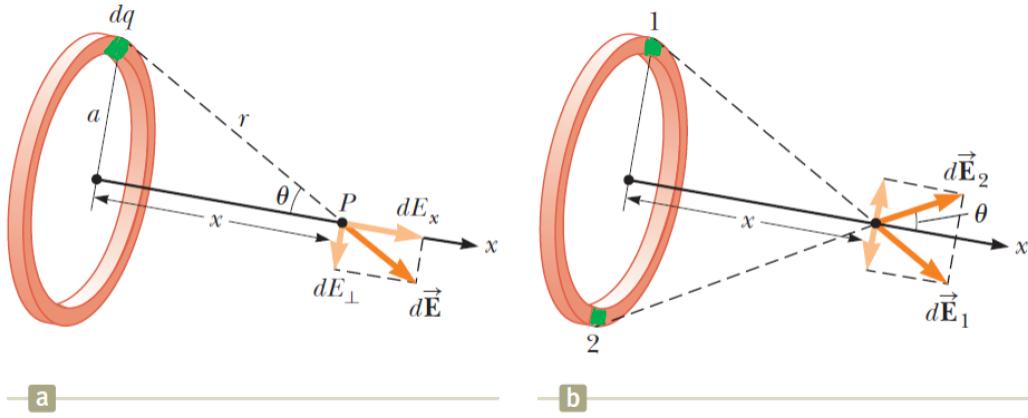
$$E = k_e \frac{2\lambda}{x} \quad (4.73)$$

Στην περίπτωση αυτή, η ράβδος μήκους  $l$  έχει πλέον άπειρο μήκος. Βλέπετε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο του  $x$  και όχι του  $x^2$ .

#### Παράδειγμα 4.8:

Ένας δακτύλιος ακτίνας  $a$  φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο  $Q$ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , όπως δείχνει το Σχήμα 4.11, που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του δακτυλίου και στον ίδιο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου. Τι συμβαίνει αν  $x \gg a$ ;

Λύση: Μπορείτε να παρατηρήσετε στο Σχήμα 4.11(a) ότι για ένα απειροστά μικρό τμήμα δακτυλίου φορτίου  $dq$  και μήκους  $ds$ , το ηλεκτρικό πεδίο  $dE$  στο σημείο  $P$  έχει δυο συνιστώσες,  $dE_x$  και  $dE_y$ . Για ένα συμμετρικό ως προς τον άξονα  $x'$  και αντιδιαμετρικό του προηγούμενου σημείο, η  $y$ -συνιστώσα του αλληλοαναρρέιται



Σχήμα 4.11: Κατανομή φορτίου σε δακτύλιο.

με την  $y$ -συνιστώσα του προηγούμενου σημείου, όπως στο Σχήμα 4.11(b). Οπότε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$  έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα. Άρα

$$\vec{E}_P = \vec{E}_x \quad (4.74)$$

Ας βρούμε τη συνεισφορά  $dE$  του σημειακού φορτίου  $dq$  στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο. Θα είναι

$$dE_x = dE \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + a^2} \cos(\theta) \quad (4.75)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος έχουμε

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (4.76)$$

οπότε

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{xdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.77)$$

Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές ηλεκτρικού πεδίου από όλα τα σημειακά φορτία  $dq$  του δακτυλίου και έχουμε

$$E_P = E_x = \int dE_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.78)$$

Εδώ μπορούμε να κάνουμε ένα “κόλπο” για να συντομεύσουμε τη λύση μας. Το διαφορικό της ολοκλήρωσης είναι το  $dq$ , και η μεταβλητή  $q$  δεν υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, ενώ όλες οι άλλες ποσότητες είναι σταθερές. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$E_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e x \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq \quad (4.79)$$

αρχεί να ερμηνεύσουμε σωστά το ολοκλήρωμα

$$\int dq \quad (4.80)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό σημαίνει πολύ απλά “το άθροισμα όλων των σημειακών φορτίων  $dq$  του δακτυλίου”. Μα το άθροισμα όλων αυτών των φορτίων μας δίνει το συνολικό φορτίο  $Q$ ! Οπότε

$$\int dq = Q \quad (4.81)$$

και τελικά

$$E_x = k_e x \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.82)$$

Ας δούμε και μια άλλη λύση όμως. Κάνοντας τα ίδια με πριν καταλήγουμε ξανά στη σχέση

$$dE_x = k_e \frac{xdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.83)$$

Ο δακτύλιος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος, οπότε έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda = Q/l$ , με  $l$  το συνολικό μήκος του δακτυλίου, που είναι  $2\pi a$ . Ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{ds} \implies dq = \lambda ds \quad (4.84)$$

Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές ηλεκτρικού πεδίου από όλα τα σημειακά φορτία  $dq$  του δακτυλίου και έχουμε

$$E_P = E_x = \int dE_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e x \int \frac{\lambda ds}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.85)$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς το μήκος του δακτυλίου, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$E_x = k_e x \frac{\lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int ds \quad (4.86)$$

και αρκεί να ερμηνεύσουμε σωστά το ολοκλήρωμα

$$\int ds \quad (4.87)$$

που βέβαια σημαίνει “το άθροισμα όλων των απειροστά μικρών τμημάτων  $ds$  του δακτυλίου”. Το άθροισμα όλων αυτών δεν είναι άλλο από το συνολικό μήκος του δακτυλίου που είναι  $2\pi a$ . Άρα

$$\int ds = 2\pi a \quad (4.88)$$

και τελικά

$$E_x = k_e x \frac{\lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int ds = E_x = k_e x \frac{2\pi a \lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.89)$$

Η σχέση απλοποιείται αν χρησιμοποιήσουμε ότι

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2\pi a} \implies Q = 2\pi a \lambda \quad (4.90)$$

οπότε τελικά

$$E_x = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.91)$$

Είδατε λοιπόν ότι και στις δύο περιπτώσεις, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$  γράφεται ως

$$\vec{E}_P = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i} \quad (4.92)$$

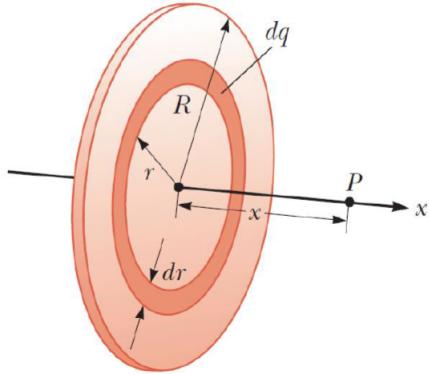
Στην περίπτωση που  $x \gg a$ , τότε  $a^2 + x^2 \approx x^2$  και έτσι το αποτέλεσμα γράφεται ως

$$E_P = k_e \frac{Qx}{x^3} = k_e \frac{Q}{x^2} \quad (4.93)$$

πράγμα που δείχνει ότι ο δακτύλιος συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο όταν απομακρυνθούμε πολύ από αυτόν.

Παράδειγμα 4.9:

Ένας δίσκος ακτίνας  $R$  φέρει ομοιόμορφα κατανευμημένο επιφανειακό θετικό φορτίο  $Q$  πυκνότητας  $\sigma$ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , όπως δείχνει το Σχήμα 4.12, που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του δίσκου και στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου. Τι συμβαίνει όταν  $R \rightarrow \infty$ ;



Σχήμα 4.12: Κατανομή φορτίου σε δίσκο.

Λύση: Μπορούμε να αξιοποιήσουμε την προηγούμενη άσκηση και να υεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από “σημειακούς” δακτυλίους. Από το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν, το ηλεκτρικό πεδίο ενός δακτυλίου ακτίνας  $a$  στο σημείο  $P$  είναι

$$E_P = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.94)$$

Η συμετρία και η αλληλοακύρωση της  $y$ -συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει και εδώ. Ένας δακτύλιος ακτίνας  $r$ , φορτίου  $dq$ , και “πάχους”  $dr$  θα συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$

$$dE_P = dE_x = k_e \frac{dq x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.95)$$

Ο δίσκος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ , δηλ.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (4.96)$$

Για ένα δακτυλιοειδές τμήμα δίσκου, θα είναι

$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r dr} \implies dq = 2\pi r \sigma dr \quad (4.97)$$

Άρα η συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $P$  από ένα “σημειακό” δακτύλιο είναι

$$dE_P = k_e \frac{dq x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = 2\pi \sigma x k_e \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.98)$$

Αν αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) τις συνεισφορές από κάθε “σημειακό” δακτύλιο θα έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο του συνολικού δίσκου, δηλ.

$$E_P = \int dE_P = 2\pi \sigma x k_e \int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.99)$$

Τα άκρα του ολοκληρώματος πρέπει να είναι οι ακραίες πιθανές ακτίνες κάθε δακτυλίου που συνιστούν το δίσκο (αφού το διαφορικό μας είναι  $dr$ ). Οι δυνατές ακτίνες είναι από 0 ως  $R$ , κι έτσι

$$E_P = 2\pi\sigma x k_e \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.100)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να μας δωθεί ή να βρεθεί σε πίνακες, αλλά ας δοκιμάσουμε να το λύσουμε με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε

$$u = r^2 + x^2 \implies du = 2r dr \quad (4.101)$$

και

$$u_1 = 0^2 + x^2 = x^2 \quad (4.102)$$

$$u_2 = R^2 + x^2 \quad (4.103)$$

Οπότε

$$E_P = k_e \pi \sigma x \int_x^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{3/2}} = -2k_e \pi \sigma x \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{R^2+x^2} \quad (4.104)$$

$$= 2k_e \pi x \sigma \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = 2k_e \pi \sigma \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \quad (4.105)$$

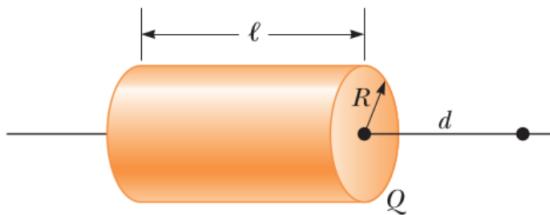
Στην περίπτωση που  $R \rightarrow \infty$ , ο δίσκος γίνεται άπειρου μεγέθους, και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_P = \lim_{R \rightarrow \infty} 2k_e \pi \sigma \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = 2k_e \pi \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.106)$$

Μπορείτε να ελέγξετε τι συμβαίνει αν  $x \gg R$ ; Πρέπει να βρείτε ότι ο δίσκος συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο! ☺

### Παράδειγμα 4.10:

- (α') Στο Σχήμα 4.13, ο κυλινδρικός φλοιός ακτίνας  $R$  είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο  $Q$ , και έχει μήκος  $\ell$ . Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $d$  δεξιά του.
- (β') Αντί για φλοιό, θεωρήστε ένα συμπαγή κύλινδρο με ίδιες διαστάσεις όπως προηγουμένως και φορτίο  $Q$  ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο του, και ξαναλύστε το πρόβλημα.



Σχήμα 4.13: Κατανομή φορτίου σε κύλινδρο.

Λύση:

- (α') Θεωρούμε τον φλοιό ως ένα σύνολο από φορτισμένους δακτυλίους. Ισχύουν οι συμμετρίες που αναφέραμε σε προηγούμενη άσκηση. Ξέρουμε ότι το μέτρο ηλεκτρικού πεδίου που προκαλεί ένας δακτύλιος πάνω στην ευθεία που περνάει απ' το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση

$$E = k_e Q \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.107)$$

και αφορά μόνο τη  $x$ -συνιστώσα του, ενώ  $x$  είναι μια θέση πάνω στον άξονα που υπολογίζουμε το πεδίο. Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος διακτύλιος με πάχος  $dx$  έχει φορτίο  $Qdx/l$ , και συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο που δίνεται ως

$$dE = \frac{k_e x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l} \quad (4.108)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα της συνεισφοράς ηλεκτρικού πεδίου κάθε σημειακού διακτύλιου, δηλ.

$$E = \int dE = \int_d^{d+l} \frac{k_e x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l} \quad (4.109)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \int_d^{d+l} (x^2 + R^2)^{-3/2} 2xdx \quad (4.110)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \left. \frac{(x^2 + R^2)^{-1/2}}{-1/2} \right|_d^{d+l} \quad (4.111)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \left[ \frac{1}{(d^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2 + R^2)^{1/2}} \right] \quad (4.112)$$

και άρα

$$\vec{E} = \frac{k_e \lambda}{2} \left[ \frac{1}{(d^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2 + R^2)^{1/2}} \right] \vec{i} \quad (4.113)$$

(β') Θεωρήστε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο από φορτισμένους δίσκους, καθένας με πάχος  $dx$ , φορτίο  $Qdx/l$  και επιφανειακό φορτίο  $\sigma = Qdx/\pi R^2 l$ . Ισχύουν οι συμμετρίες που αναφέραμε σε προηγούμενη άσκηση. Ξέρουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει ένας δίσκος πάνω στην ευθεία που περνάει απ' το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{2k_e Q}{R^2} \left( 1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right) \quad (4.114)$$

και αφορά μόνο τη  $x$ -συνιστώσα του, ενώ  $x$  είναι μια θέση πάνω στον άξονα που υπολογίζουμε το πεδίο. Ένας δίσκος συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο

$$dE = \frac{2\pi k_e Q dx}{\pi R^2 l} \left( 1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (4.115)$$

Οπότε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα της συνεισφοράς ηλεκτρικού πεδίου κάθε δίσκου, δηλ.

$$E = \int dE = \int_d^{d+l} \frac{2k_e Q dx}{\pi R^2 l} \left( 1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (4.116)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[ \int_d^{d+l} dx - \frac{1}{2} \int_d^{d+l} (x^2 + R^2)^{-1/2} 2xdx \right] \quad (4.117)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[ x \Big|_d^{d+l} - \frac{1}{2} \frac{(x^2 + R^2)^{1/2}}{1/2} \Big|_d^{d+l} \right] \quad (4.118)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[ l + (d^2 + R^2)^{1/2} - ((d+l)^2 + R^2)^{1/2} \right] \quad (4.119)$$

και άρα

$$\vec{E} = \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[ l + (d^2 + R^2)^{1/2} - ((d+l)^2 + R^2)^{1/2} \right] \vec{i} \quad (4.120)$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε την ίδια φιλοσοφία προσέγγισης: από ένα μικρό, “σημειακό” φορτίο (είτε πραγματικό είτε απλά κατανομή μικρού φορτίου) γενικεύσαμε σε ολόχληρη την κατανομή φορτίου: υπολογίσαμε αρχικά τη συνεισφορά του πεδίου σε ένα σημείο λόγω σημειακού φορτίου και ανθροίσαμε (ολοκληρώσαμε) όλες τις συνεισφορές που οφείλονται στα σημειακά φορτία που αποτελούν την κατανομή, βρίσκοντας έτσι το ηλεκτρικό της πεδίο.

#### 4.3.3 Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

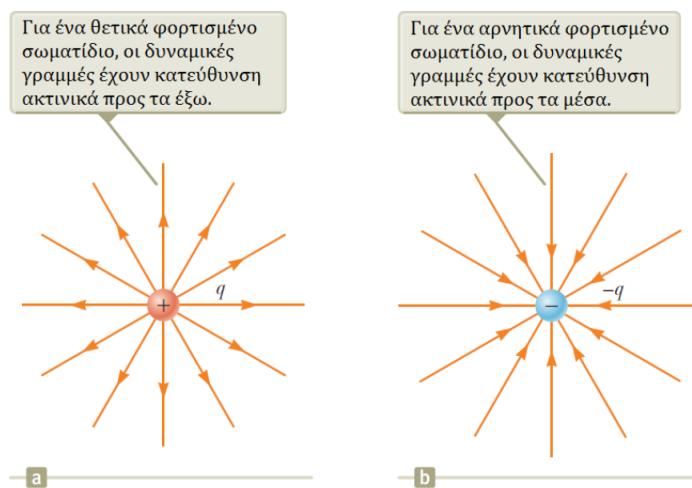
Ένα σημαντικό διαισθητικό πρόβλημα στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων είναι ότι δεν μπορούμε να τα δούμε. Μπορούμε να καταλάβουμε την ύπαρξη τους αλλά μέχρι εκεί. Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι οι δυναμικές γραμμές. Οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται με συγκεκριμένο τρόπο, ακολουθώντας τους παραχώτων κανόνες:

- Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο του χώρου.
- Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με αυτή της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο.
- Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου: με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνότερες όπου η “δύναμη” του πεδίου είναι μεγαλύτερη.

Το φλέγον ερώτημα λοιπόν είναι πως τις σχεδιάζουμε. Ξανά, μπορούμε να σημειώσουμε τρεις κανόνες:

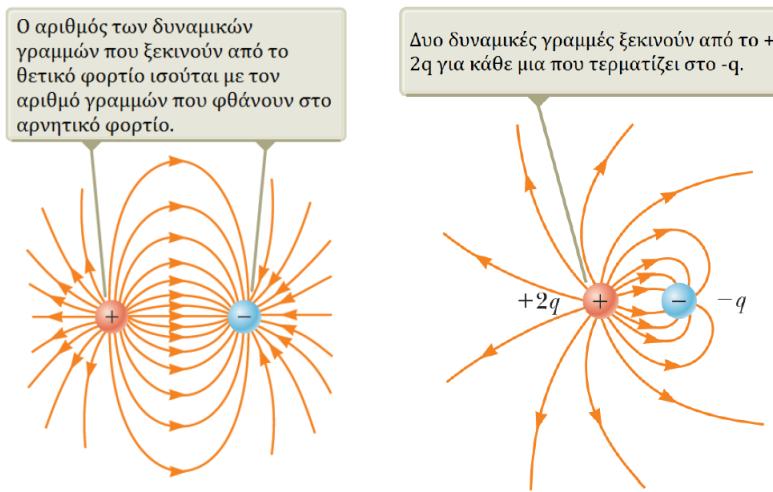
- Για μεμονωμένα σημειακά φορτία, οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα “έξω” (θετικό φορτίο) ή προς τα “μέσα” (αρνητικό φορτίο)
- Για δύο ανόμοια φορτία, οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε κάποιες δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
- Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
- Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Για ένα θετικό κι ένα αρνητικό σημειακό φορτίο, οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο Σχήμα 4.14. Όταν



Σχήμα 4.14: Δυναμικές γραμμές σημειακών φορτίων.

δυο ή περισσότερα φορτία βρίσκονται στον ίδιο χώρο, τότε οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται με βάσει τους παραπάνω κανόνες και φαίνονται στο Σχήμα 4.15.



Σχήμα 4.15: Δυναμικές γραμμές σε ζεύγος σημειακών φορτίων.

#### 4.3.4 Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο

Πολλές πρακτικές εφαρμογές περιλαμβάνουν τη χρήση ενός ομογενούς (ή σχεδόν ομογενούς) ηλεκτρικού πεδίου. Ομογενές ονομάζεται το ηλεκτρικό πεδίο που έχει όλες τις δυναμικές γραμμές του παράλληλες και ομόρροπες μεταξύ τους, που ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά, ενώ το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι παντού σταθερό.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$ . Το ηλεκτρικό πεδίο θα εγείρει ηλεκτρική δύναμη επάνω στο σωματίδιο. Το σωματίδιο θα κινηθεί υπό επίδραση δύναμης, δηλ. θα αποκτήσει επιτάχυνση η οποία δίνεται ως

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (4.121)$$

Καταλαβαίνετε ότι αν το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο  $q > 0$ , η κίνηση του σωματιδίου θα είναι προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Στην αντίθετη περίπτωση το σωματίδιο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.11:

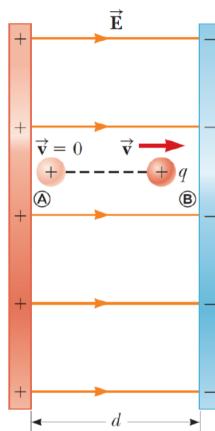
Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  με κατεύθυνση επάνω στον άξονα  $x'$  δημιουργείται ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση  $d$ , όπως στο Σχήμα 4.16. Σωματίδιο φορτίου  $+q$  και μάζας  $m$  αφήνεται από το σημείο (A) και επιταχύνεται ως στο σημείο (B).

- (α') Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου στη θέση (B) με εξισώσεις Κινητικής.
- (β') Υπολογίστε ξανά το προηγ. ερώτημα με χρήση ενεργειακών θεωρημάτων.

Λύση:

- (α') Το σώμα μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  εκτελεί ευθύγραμη επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Από τις εξισώσεις της Κινητικής

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x \Delta x = 0 + 2a_x \Delta x \quad (4.122)$$



Σχήμα 4.16: Φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Από το 2o νόμο του Newton στην οριζόντια κίνηση έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_e = m\vec{a}_x \implies F_e = ma_x \iff qE = ma_x \implies a_x = \frac{qE}{m} \quad (4.123)$$

και έτσι

$$u_B^2 = 2a_x \Delta x = 2a_x d = \frac{2qEd}{m} \implies u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \text{ m/s} \quad (4.124)$$

- (β') Θεωρούμε ως σύστημα το φορτίο. Η ηλεκτρική δύναμη που του ασκείται είναι εξωτερική στο σύστημα. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ ανάμεσα στα σημεία (A) και (B).

$$\Delta K = W_{F_e} \quad (4.125)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = qEd \quad (4.126)$$

$$u_B^2 = \frac{2qEd}{m} \quad (4.127)$$

$$u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad (4.128)$$

### Παράδειγμα 4.12:

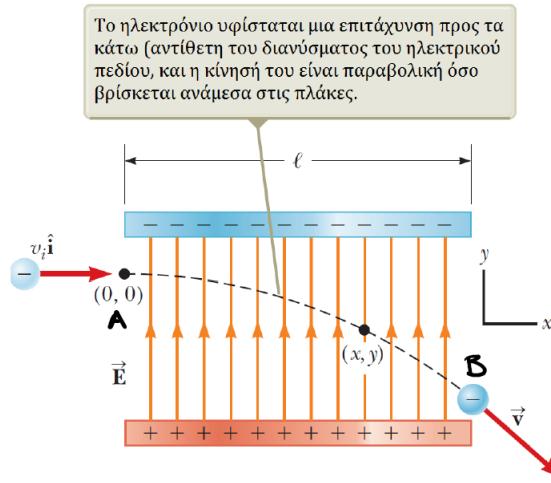
Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο Σχήμα 4.17. Η αρχική ταχύτητα του είναι  $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$  και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι  $E = 200 \text{ N/C}$ . Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι  $l = 0.1 \text{ m}$ . Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου  $m_e$  και το φορτίο του,  $e$ .

- (α') Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.
- (β') Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.
- (γ') Υποθέτοντας ότι η  $y$ -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι  $y = 0$ , ποιά είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Λύση:

- (α') Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται λόγω του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη  $\vec{F}_e$  με φορά προς τα κάτω, αντίθετα από τη φορά των δυναμικών γραμμών. Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα στον οριζόντιο άξονα ενώ επιταχύνεται στον κατακόρυφο άξονα της κίνησής του. Άρα

$$\sum \vec{F}_y = 0 \iff \vec{F}_e = m_e \vec{a}_y \implies -F_e = m_e a_y \implies a_y = -\frac{eE}{m_e} \text{ m/s}^2 \quad (4.129)$$



Σχήμα 4.17: Ηλεκτρόνιο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

- (β') Το ηλεκτρόνιο βγαίνει από το πεδίο όταν διανύσει οριζόντια απόσταση  $l$ , όσο το μήκος των πλακών. Στον οριζόντιο όξονα το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, δηλ.

$$x_B = x_A + u_x t \iff l = 0 + u_x t \iff t = \frac{l}{u_x} = \frac{10^{-1}}{3 \times 10^6} = \frac{1}{3} \times 10^{-7} \text{ s} \quad (4.130)$$

- (γ') Ξανά στον  $y$ -άξονα, από τις εξισώσεις της Κινητικής

$$y_B = y_A + u_{y_A} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (4.131)$$

$$= 0 + 0t + \frac{1}{2} \left( -\frac{eE}{m_e} \right) \left( \frac{l}{u_x} \right)^2 \quad (4.132)$$

$$= -\frac{eEl^2}{2m_e u_x^2} \quad (4.133)$$

$$\approx -0.0195 \text{ m} \quad (4.134)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με τη διαίσθησή μας και το σχήμα.

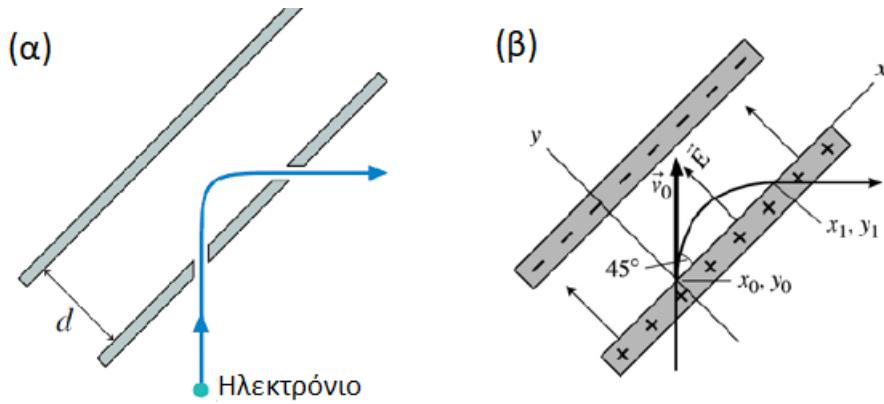
### Παράδειγμα 4.13:

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, χρειάζεται να κάνουμε μια δέσμη ηλεκτρονίων να στρίψει κατά  $90^\circ$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της διάταξης του παρακάτω σχήματος. Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια  $3 \times 10^{-17} \text{ J}$  εισέρχεται από μια μικρή οπή από το κάτω μέρος της διάταξης, όπως στο Σχήμα 4.18.

- (α') Πως θα πρέπει να είναι φορτισμένες οι δύο πλάκες ώστε το ηλεκτρόνιο να στρίψει δεξιά;  
 (β') Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου αν το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από οπή η οποία βρίσκεται 1 cm μακριά από την οπή εισόδου;

**Λύση:** Το ηλεκτρικό πεδίο στην διάταξη είναι ομοιόμορφο, επομένως τα ηλεκτρόνια θα έχουν σταθερή επιτάχυνση. Δείτε το Σχήμα 4.18(β).

- (α') Η πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης θα έχει θετική φόρτιση. Το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να απωθηθεί από την πλάκα του άνω μέρους, δηλαδή θα πρέπει να έχει αρνητική φόρτιση. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.18, άρα η κατεύθυνση του ηλεκτρονίου άνευ προς την πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος.  
 (β') Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων  $xy$  ώστε ο άξονας  $x'$  να είναι παράλληλος με την πλάκα, που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης. Η αρχή των αξόνων είναι το σημείο εισόδου του ηλεκτρονίου.



Σχήμα 4.18: Ηλεκτρόνιο σε στροφή 90 μοιρών σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Τότε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, που είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο, είναι  $\vec{a} = a\vec{j}$ . Για την κινητική ενέργεια έχουμε

$$K = \frac{1}{2}mu_0^2 = 3 \times 10^{-17} \text{ J} \quad (4.135)$$

η οποία μας δίνει αρχική ταχύτητα

$$u_0 = 2^{1/2} = 8.115 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (4.136)$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας, στην αρχική κατάσταση, είναι

$$u_{x0} = u_0 \cos 45^\circ = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s} \quad u_{y0} = u_0 \sin 45^\circ = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (4.137)$$

Ποια επιτάχυνση  $\vec{a}$  επιτρέπει στο ηλεκτρόνιο να περάσει από το σημείο  $(x_1, y_1) = (1 \text{ cm}, 0 \text{ cm})$ ; Για τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$x_1 = x_0 + u_{x0}t_1 + \frac{1}{2}a_x t_1^2 = u_{x0}t_1 = 0.01 \text{ m} \quad (4.138)$$

$$y_1 = y_0 + u_{y0}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 = 0.01 \text{ m} \quad (4.139)$$

Από την εξίσωση στον άξονα  $x'$  βρίσκουμε

$$t_1 = \frac{x_1}{u_{x0}} = 1.742 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (4.140)$$

Συνεπώς από την εξίσωση στον άξονα  $y'$  έχουμε

$$a_y = \frac{2u_{y0}t_1}{t_1^2} = -6.59 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (4.141)$$

Όμως η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο είναι

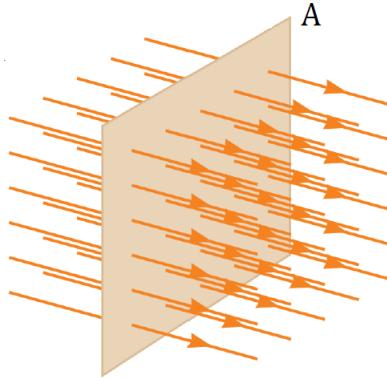
$$a_y = \frac{F_e}{m} = \frac{q_e E}{m} = -\frac{eE}{m} \implies E = -\frac{ma}{e} = 37.5 \text{ N/C} \quad (4.142)$$

#### 4.4 Ο Νόμος του Gauss

Σε αυτήν την παράγραφο θα γνωρίσουμε τον περίφημο Νόμο του Gauss, ο οποίος αποτελεί μια από τις διάσημες εξισώσεις του Maxwell. Ο Νόμος του Gauss είναι ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο στις περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και το τελευταίο έχει κάποια γεωμετρική συμμετρία. Πριν πάμε όμως στο Νόμο του Gauss πρέπει να περάσουμε από μια άλλη σημαντική έννοια: αυτή της ηλεκτρικής ροής.

#### 4.4.1 Ηλεκτρική Ροή

Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών με ποιοτικό τρόπο. Ήρθε η ώρα να το μελετήσουμε λίγο περισσότερο “ποσοτικά”. Έστω ότι έχουμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$ , όπως στο Σχήμα 4.19. Οι



Σχήμα 4.19: Επιφάνεια κάθετη σε ομογενές πεδίο.

δυναμικές γραμμές “κόβουν” κάθετα την επιφάνεια, η οποία έστω ότι έχει εμβαδόν  $A$ . Στην εισαγωγή μας για τις δυναμικές γραμμές αναφέραμε ότι η πυκνότητα των γραμμών είναι ανάλογη του μέτρου του πεδίου: πυκνές γραμμές σημαίνει μεγάλο μέτρο πεδίου, ενώ αραιές γραμμές σημαίνει μικρό μέτρο πεδίου. Μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών είναι ανάλογος του γινόμενου  $EA$ . Αυτό το γινόμενο ονομάζεται ηλεκτρική ροή  $\Phi_E$ . Προτού προχωρήσουμε, ας γίνει ξεκάθαρο ότι δεν υπάρχει τίποτα “ρευστό” στην παραπάνω κατάσταση ή στον ορισμό της ροής. Το πεδίο είναι στατικό, και απλώς είναι μια λέξη που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο που “διαπερνά” μια επιφάνεια. Έχουμε λοιπόν τον πρώτο ορισμό της ηλεκτρικής ροής για κάθετες στις δυναμικές γραμμές επιφάνειες:

$$\Phi_E = EA \quad (4.143)$$

Αν όμως η επιφάνεια δεν είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές; Δεδομένου ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που περνά την κάθετη επιφάνεια και τη μη-κάθετη επιφάνεια είναι ο ίδιος, αυτό που αλλάζει είναι το εμβαδό, το οποίο στην μη-κάθετη επιφάνεια είναι

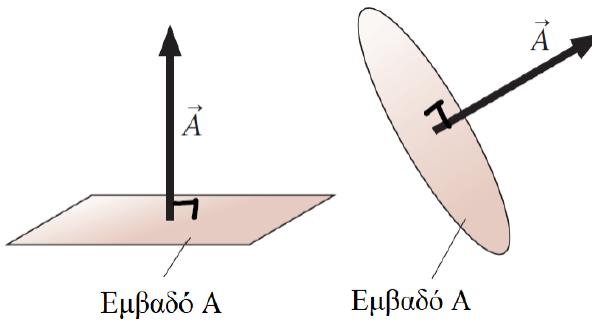
$$A = A_{perp} \cos(\theta) \quad (4.144)$$

με  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα. Αν  $\theta = 0$ , τότε η επιφάνεια είναι παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές και η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν. Άρα για επιφάνειες όχι κάθετες με τις δυναμικές του ηλεκτρικού πεδίου, η ηλεκτρική ροή δίνεται ως

$$\Phi_E = EA \cos(\theta) \quad (4.145)$$

Όμως το πεδίο σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι ομογενές: μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με το μέρος της επιφάνειας. Οι ορισμοί που δώσαμε έχουν νόημα για μικρές επιφάνειες με σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, αλλά όμως φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι στη συνέχεια. Επίσης, το γινόμενο  $EA \cos(\theta)$  πρέπει να σας θυμίζει κάτι: μοιάζει με το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων  $\vec{E}$  και  $\vec{A}$ . Μόνο που πράγματι το  $\vec{E}$  είναι διάνυσμα αλλά το εμβαδό  $A$  της επιφάνειας είναι μονόμετρο μέγεθος (αριθμητική τιμή). Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό; Μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα  $\vec{A}$  το οποίο θα είναι πάντα κάθετο σε μια επιφάνεια που θα του αντιστοιχίσουμε. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο του διανύσματος αυτού να είναι πάντα ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία αντιστοιχίζεται! Τέτοια διάνυσματα  $\vec{A}$  βλέπετε στο Σχήμα 4.20. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε τώρα να γράψουμε την ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου  $E$  διαμέσου μιας επιφάνειας εμβαδού  $A$  ως ένα εσωτερικό γινόμενο:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta) \quad (4.146)$$

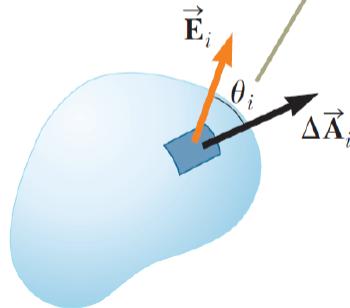


Σχήμα 4.20: Διάνυσμα  $\vec{A}$  μιας επιφάνειας.

με  $\theta$  τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Ας φύγουμε από τις επίπεδες επιφάνειες και ας πάμε σε γενικότερες. Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας, καθένα με εμβαδό  $\Delta A$ . Ας ορίσουμε το διάνυσμα  $\Delta \vec{A}_i$  του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του  $i$ -οστού στοιχείου της επιφάνειας. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού  $\Delta A_i$  της επιφάνειας. Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $\vec{E}_i$  στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία  $\theta_i$  με το διάνυσμα  $\Delta \vec{A}_i$ , όπως στο Σχήμα 4.21. Η ηλεκτρική ροή διαμέσου αυτής της επιφάνειας θα είναι

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία  $\theta_i$  με το διάνυσμα  $\Delta \vec{A}_i$ , που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



Σχήμα 4.21: Τμήμα γενικής επιφάνειας και διανύσματα  $\vec{E}$ ,  $\Delta \vec{A}_i$ .

$$\Delta \Phi_{E_i} = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = E_i \Delta A_i \cos(\theta_i) \quad (4.147)$$

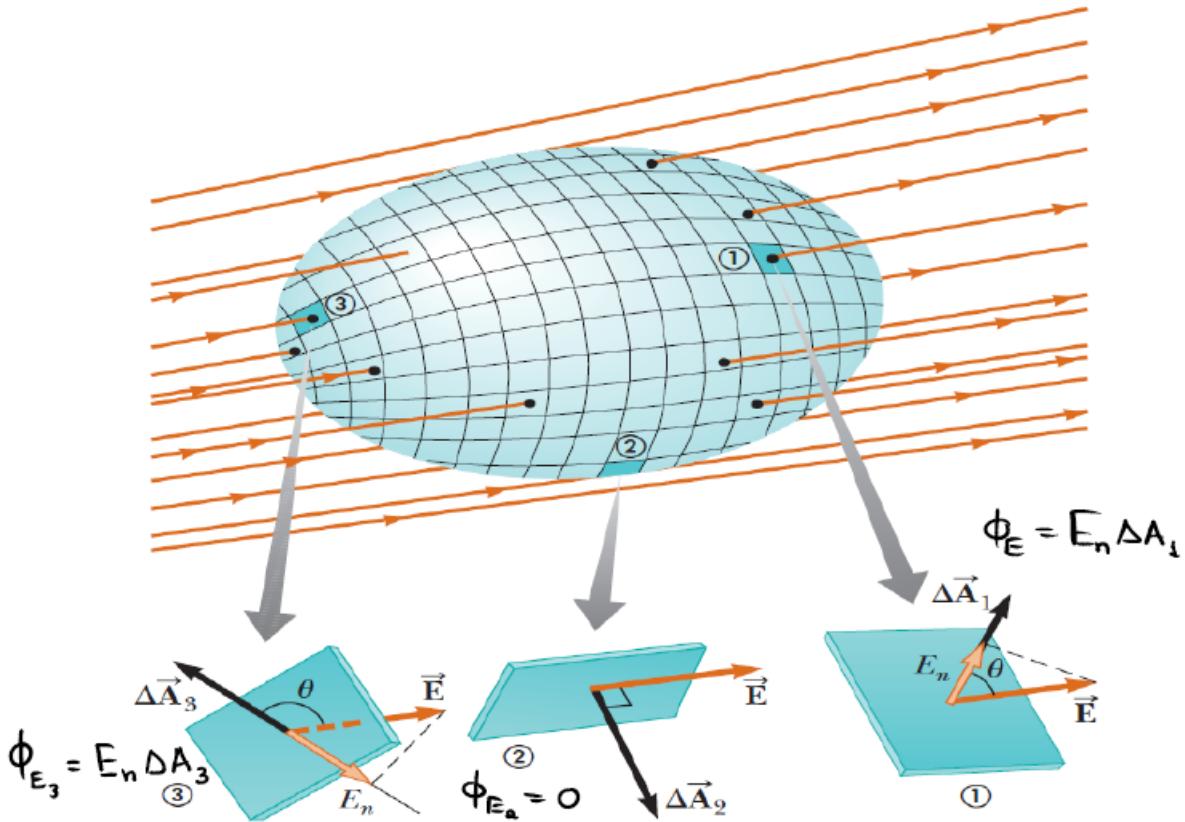
Η συνολική ροή μπορεί να βρεθεί αν τμηματοποιήσουμε σε μικρά τμήματα τη γενική επιφάνεια, υπολογίσουμε τη συνεισφορά ηλεκτρικής ροής από κάθε τμήμα, και ανθροίσουμε όλες τις συνεισφορές ροής  $\Delta \Phi_{E_i}$  από όλα τα μικρά τμήματα επιφάνειας  $\Delta A_i$ . Αν τα τμήματα αυτά γίνουν απειροστά μικρά τότε

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta \Phi_{E_i} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (4.148)$$

Μη σας προβληματίζει το διανυσματικό ολοκλήρωμα επάνω σε μια επιφάνεια<sup>1</sup>. Θα δούμε τρόπους να το υπολογίζουμε αρκετά απλά και εύκολα.

<sup>1</sup>Εντάξει, δε λέω πως δεν είναι τρομακτικό... :)

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι κλειστές επιφάνειες για την εύρεση της ηλεκτρικής ροής διαμέσου των επιφανειών αυτών. Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου. Μια τέτοια κλειστή επιφάνεια είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας. Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που το ηλεκτρικό πεδίο, ως διάνυσμα, επιδρά σε τμήματα μιας κλειστής επιφάνειας. Δείτε το Σχήμα 4.22. Παρατηρήστε τις περιπτώσεις (1), (2), (3). Στην περίπτωση (1), το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα  $\vec{A}_1$



Σχήμα 4.22: Επιφάνεια και δυναμικές γραμμές.

σχηματίζουν γωνία  $\theta < 90^\circ$ , οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{\Delta A}_1 = EA_1 \cos(\theta) = E_n A_1 > 0 \quad (4.149)$$

με  $E_n = E \cos(\theta)$  την προβολή του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο διάνυσμα  $\vec{\Delta A}_1$ . Στην περίπτωση (2), το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα  $\vec{\Delta A}_2$  σχηματίζουν γωνία  $\theta = 90^\circ$ , οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{\Delta A}_2 = EA_2 \cos(90^\circ) = 0 \quad (4.150)$$

Στην περίπτωση (3), το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα  $\vec{\Delta A}_3$  σχηματίζουν γωνία  $\theta > 90^\circ$ , οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{\Delta A}_3 = EA_3 \cos(\theta) = E_n A_3 < 0 \quad (4.151)$$

με  $E_n = E \cos(\theta)$  την προβολή του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο διάνυσμα  $\vec{\Delta A}_3$ . Η ηλεκτρική ροή μπορεί λοιπόν να είναι θετική, αρνητική, ή μηδενική.

Νωρίτερα αναφέραμε ότι μια κλειστή επιφάνεια έχει “εσωτερικό” και “εξωτερικό”. Το διάνυσμα  $d\vec{A}$  ενός απειροστά μικρού τμήματος της κλειστής επιφάνειας δείχνει πάντα προς τα “έξω”, σε αντίθεση με μια απλή επιφάνεια (όχι κλειστή), η οποία έχει  $d\vec{A}$  που μπορεί να δείχνει προς τη μια ή την άλλη πλευρά της.

Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA \quad (4.152)$$

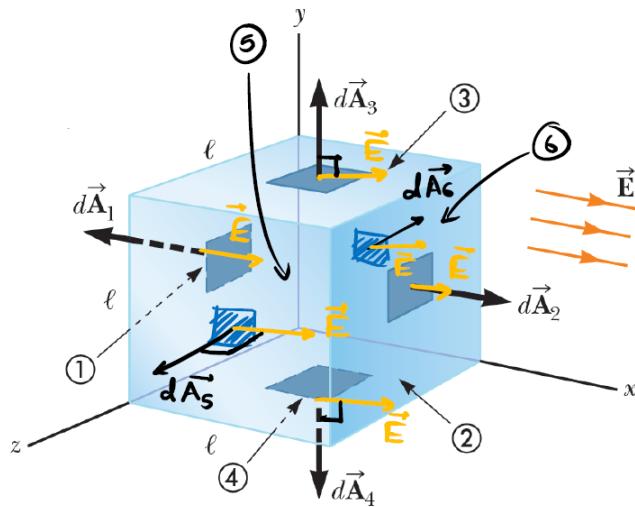
με  $E_n$  τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια (ή εναλλακτικά, παράλληλη με το διάνυσμα  $d\vec{A}$ ). Με βάση όσα έχουμε πει ως τώρα, η συνολική ηλεκτρική ροή  $\Phi_E$  διαιμέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον των αριθμών των δυναμικών γραμμών που εισέρχονται στην επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι:

- Μπαίνουν περισσότερες δυναμικές γραμμές από όσες βγαίνουν; Αρνητική  $\Phi_E$  διαιμέσου της επιφάνειας
- Βγαίνουν περισσότερες δυναμικές γραμμές από όσες μπαίνουν; Θετική  $\Phi_E$  διαιμέσου της επιφάνειας

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 4.14:

Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  με προσανατολισμό στο  $x$ -άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής  $l$  τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο Σχήμα 4.23. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαιμέσου της επιφάνειας του κύβου.



Σχήμα 4.23: Κύβος σε ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση: Από όσα έχουμε πει, περιμένουμε η ηλεκτρική ροή θα είναι μηδέν, αφού όσες δυναμικές γραμμές μπαίνουν από τη μια πλευρά του κύβου, τόσες βγαίνουν από την άλλη (απέναντι) του πλευρά (ο κύβος αποτελεί κλειστή επιφάνεια). Ας επιβεβαιώσουμε τη διαίσθησή μας. Αριθμούμε κάθε πλευρά του κύβου από 1 ως 6. Επιλέγουμε μικρές επιφάνειες εμβαδού  $dA_i$  σε καθεμιά και σχεδιάζουμε το κάθετο διάνυσμα  $d\vec{A}_i$  σε αυτές. Έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^6 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_i \quad (4.153)$$

Επειδή οι πλευρές 3, 4, 5, 6 είναι παράλληλες με τις δυναμικές γραμμές, η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν. Μένουν οι επιφάνειες 1, 2. Οπότε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 \quad (4.154)$$

Τα διανύσματα  $\vec{E}$ ,  $d\vec{A}_1$  είναι αντίρροπα ενώ τα  $\vec{E}$ ,  $d\vec{A}_2$  ομόρροπα, οπότε

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = -EdA_1 \quad (4.155)$$

και

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = EdA_2 \quad (4.156)$$

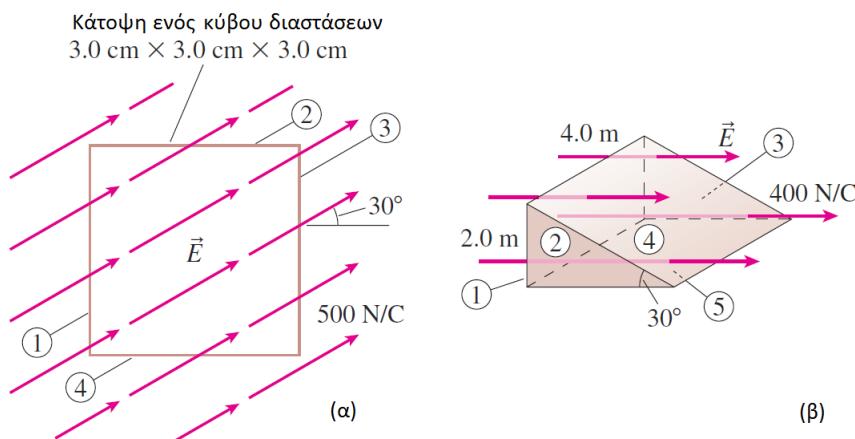
και άρα

$$\Phi_E = - \oint EdA_1 + \oint EdA_2 = -E \oint dA_1 + E \oint dA_2 \quad (4.157)$$

Όμως  $\oint dA_1 = \oint dA_2$ , μια και πρόκειται για πλευρές κύβου, και τελικά  $\Phi_E = 0$ , όπως αναμέναμε.

#### Παράδειγμα 4.15:

- (α') Το Σχήμα 4.24(α) δείχνει μια κάτοψη ενός κύβου διαστάσεων  $3 \times 3 \times 3$  εκατοστών. Βρείτε την ηλεκτρική ροή  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  των επιφανειών 1 ως 4. Πόση είναι η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του κύβου;
- (β') Βρείτε την ηλεκτρική ροή  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  των επιφανειών 1 ως 5 του Σχήματος 4.24(β). Πόση είναι η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του στερεού;



Σχήμα 4.24: Ηλεκτρική ροή διαμέσου στερεών.

Λύση:

- (α') Η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας επιφάνειας  $A$  είναι  $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta)$ , όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος  $\vec{A}$  που είναι κάθετο στην επιφάνεια, έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας, και δείχνει προς τα έξω από την επιφάνεια. Άρα

$$\Phi_1 = EA \cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(150^\circ) = -0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.158)$$

$$\Phi_2 = EA \cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(60^\circ) = 0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.159)$$

$$\Phi_3 = EA \cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(30^\circ) = 0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.160)$$

$$\Phi_4 = EA \cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(120^\circ) = -0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.161)$$

Η συνολική ροή διαμέσου των επιφανειών είναι  $\Phi_T = \sum \Phi_i = 0 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .

- (β') Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια 1 και παράλληλο στις επιφάνειες 2, 3, και 5. Επίσης, η γωνία μεταξύ των  $\vec{E}$  και  $\vec{A}_4$  είναι  $60$  μοίρες. Η ηλεκτρική ροή σε αυτές τις 5 επιφάνειες είναι

$$\Phi_1 = E_1 A_1 \cos(\theta_1) = 400 \times 2 \times \cos(180^\circ) = -3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.162)$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.163)$$

$$\Phi_4 = E_4 A_4 \cos(\theta_4) = 400 \times \frac{2}{\sin(30^\circ)} \times 4 \times \cos(60^\circ) = 3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.164)$$

Η συνολική ηλεκτρική ροή είναι μηδέν ξανά.

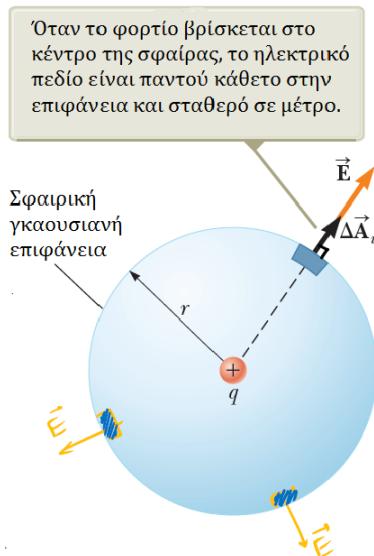
Τώρα που γνωρίζουμε κάποια πράγματα για την ηλεκτρική ροή, υπάρχει άφαγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που περικλείεται μέσα σε αυτήν; Η απάντηση είναι ναι και η σχέση αυτή ονομάζεται Νόμος του **Gauss**.

Ο Νόμος του **Gauss** είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων, καθώς αποτελεί το ισοδύναμο του νόμου του Coulomb για ηλεκτρικά πεδία σημειωκών φορτίων, αλλά εφαρμόζεται σε συνεχείς κατανομές πολύ πιο εύκολα απ' ότι ο νόμος του Coulomb, ενώ επίσης εφαρμόζεται και σε κινούμενα φορτία κάθε ταχύτητας. Με άλλα λόγια, αποτελεί έναν περισσότερο θεμελιώδη νόμο για τα ηλεκτρικά πεδία από το νόμο του Coulomb.

Η φράση “κλειστή επιφάνεια” θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχεια - ήδη γνωρίζουμε τον ορισμό της, πολλές φορές θα την αναφέρουμε και ως γκαουσιανή (Gaussian) επιφάνεια. Ας δούμε λοιπόν το νόμο του Gauss. Έστω ένα θετικό φορτίο  $q$  στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας  $r$ . Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2} \quad (4.165)$$

Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας, όπως βλέπετε από το Σχήμα 4.25. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι πάντα παράλληλο με οποιοδήποτε διάνυσμα  $\Delta \vec{A}$  που ανήκει σε τμήμα της



Σχήμα 4.25: Φορτίο στο κέντρο γκαουσιανής σφαιρικής επιφάνειας.

σφαίρας  $\Delta A$ . Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  θα είναι αλγεβρικό. Αν το τμήμα αυτό γίνει πολύ μικρό ( $dA$ ) τότε η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας της σφαίρας θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA \quad (4.166)$$

Το ολοκλήρωμα  $\oint dA$  ισούται με το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας, δηλ.

$$\oint dA = 4\pi r^2 \quad (4.167)$$

Οπότε

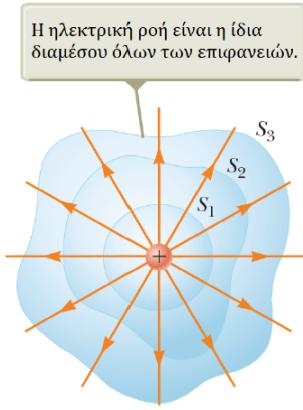
$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q \quad (4.168)$$

και αν θέσουμε  $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , τελικά θα έχουμε

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.169)$$

Βρήκαμε λοιπόν την ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας σφαιρικής επιφάνειας που περικλείει ένα φορτίο  $q$ .

Εύκολα μπορεί να θέσει κάποιος/α το ερώτημα “και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;”. Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια. Αν λοιπόν ένα φορτίο περικλείεται από μια ακανόνιστη επιφάνεια, ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που θα τη διαπερνούν θα είναι ακριβώς ο ίδιος που διαπερνά μια σφαιρική επιφάνεια! Δείτε το Σχήμα 4.26. Το σχήμα επιβεβαιώνει το συμπέρασμά μας. Η επιφάνεια  $S_1$  είναι σφαιρική, άρα  $\Phi_E = q/\epsilon_0$ , και αυτή είναι η



Σχήμα 4.26: Ηλεκτρική ροή διαμέσου ακανόνιστων επιφανειών.

τιμή της ηλεκτρικής ροής για κάθε μια από τις υπόλοιπες επιφάνειες  $S_2, S_3$ . Οπότε

#### Ηλεκτρική Ροή Κλειστής Επιφάνειας

Η ηλεκτρική ροή  $\Phi_E$  διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο είναι

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.

Τα ερωτήματα όμως παραμένουν: “τι θα αλλάξει αν το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;”. Η απάντηση εδώ είναι ότι κάθε δυναμική γραμμή του πεδίου του φορτίου που εισέρχεται στην κλειστή επιφάνεια βγαίνει από ένα άλλο μέρος της επιφάνειας. Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν! Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας που ΔΕΝ περιέχει φορτίο είναι μηδέν! Μπορείτε μάλιτα να το αποδείξετε, θεωρώντας μικρές επιφάνειες εισόδου με εμβαδόν  $\Delta A$  και μικρές επιφάνειες εξόδου  $\Delta A$  των δυναμικών γραμμών, και να υπολογίσετε την ηλεκτρική ροή σε καθεμιά, και μετά να τις προσθέσετε.

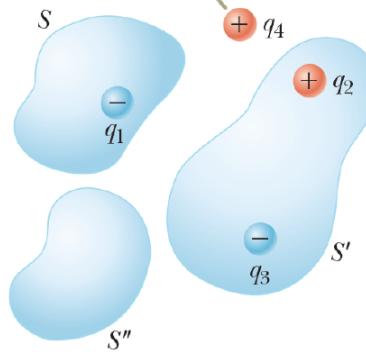
#### 4.4.2 Νόμος του Gauss και Σημειακά Φορτία

Ας επεκτείνουμε τη συζήτησή μας για πολλά ( $M$  το πλήθος) φορτία. Η ηλεκτρική ροή για  $M$  σημειακά φορτία θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left( \sum_{i=1}^M \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{A} \quad (4.170)$$

Για παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 4.27. Η ηλεκτρική ροή διαφέσου της επιφάνειας  $S$  είναι  $\Phi_E = \frac{q_1}{\epsilon_0}$ . Για την

Το φορτίο  $q_4$  δε συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή καμάτι επιφάνειας επειδή βρίσκεται εκτός όλων των επιφανειών.



Σχήμα 4.27: Ηλεκτρική ροή από πολλά φορτία.

επιφάνεια  $S'$ , είναι  $\Phi_E = \frac{q_2+q_3}{\epsilon_0}$ , ενώ για την επιφάνεια  $S''$  είναι μηδέν, καθώς δεν περικλείει φορτίο. Το φορτίο  $q_4$  δε συνεισφέρει ηλεκτρική ροή σε καμία επιφάνεια. Εν τέλει

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.171)$$

με  $q_{in}$  το φορτίο που περιέχεται εντός της επιφάνειας και  $\vec{E}$  το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο αυτής.

#### Παράδειγμα 4.16:

Μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει φορτίο  $q$  και έχει ηλεκτρική ροή  $\Phi_E$ . Τι συμβαίνει στην τελευταία αν

- (α') το φορτίο εντός της τριπλασιάζεται
- (β') η ακτίνα της σφαίρας διπλασιάζεται
- (γ') η επιφάνεια μετατρέπεται σε κύβο
- (δ') το φορτίο μετακινείται σε άλλο σημείο

Λύση:

(α') Σύμφωνα με τη σχέση

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon} \quad (4.172)$$

αν  $q'_{in} = 3q_{in}$ , τότε προφανώς  $\Phi'_E = 3\Phi_E$ .

- (β') Αν η σφαίρα εξακολουθεί να περικλείει το ίδιο φορτίο, τότε δεν αλλάζει η ηλεκτρική ροή.
- (γ') Το σχήμα της επιφάνειας δεν παίζει ρόλο, άρα η ηλεκτρική ροή παραμένει ίδια.
- (δ') Αν το φορτίο παραμένει εντός της επιφάνειας τότε δεν αλλάζει κάτι.

#### 4.4.3 Νόμος του Gauss και Κατανομή Φορτίου

Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμος για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική. Αυτό συμβαίνει με την κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα  $d\vec{A}$  στο ολοκλήρωμα ορίζεται - και υπολογίζεται - εύκολα. Η επιλογή της γκαουσιανής

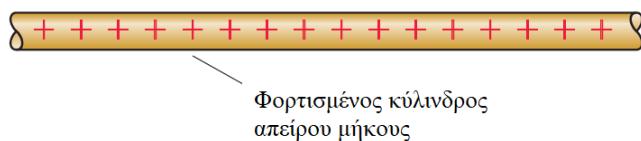
επιφάνειας πρέπει να είναι τέτοια που να ταιριάζει στη συμμετρία της κατανομής φορτίου. Επιπλέον πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  εκτός ολοκληρώματος. Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, τότε ο νόμος του Gauss εξακολουθεί να ισχύει αλλά δε μας είναι χρήσιμος για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου.

Ας δούμε μερικά είδη συμμετρίας για να κατανοήσουμε καλύτερα την επιλογή επιφάνειας που πρέπει να κάνουμε κάθε φορά. Υποθέστε ότι για ένα ηλεκτρικό πεδίο δε γνωρίζετε τίποτα εκτός του ότι:

- η φορά του είναι από θετικά προς αρνητικά φορτία
- το πεδίο εγείρει μια ηλεκτρική δύναμη σε ένα φορτισμένο σωματίδιο που θα βρεθεί εντός του

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το ηλεκτρικό πεδίο; Σίγουρα όχι πολλά περισσότερα. Αν όμως σας πει κάποιος ότι το ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται σε μια κατανομή φορτίου που διατηρεί μια συμμετρία, θα αλλάξει η απάντησή σας; Πριν απαντήσουμε, ας εξηγήσουμε τι ονομάζουμε συμμετρική κατανομή φορτίου: είναι η κατανομή που δε μεταβάλλεται από κάποια ομάδα γεωμετρικών μετασχηματισμών που εφαρμόζεται πάνω της.

Για παράδειγμα, θεωρήστε τον φορτισμένο κύλινδρο του Σχήματος 4.28. Ο κύλινδρος έχει άπειρο μήκος.



Σχήμα 4.28: Ομοιόμορφα φορτισμένος κύλινδρος απείρου μήκους.

Κλείστε τα μάτια σας και αφήστε ένα φίλο σας να

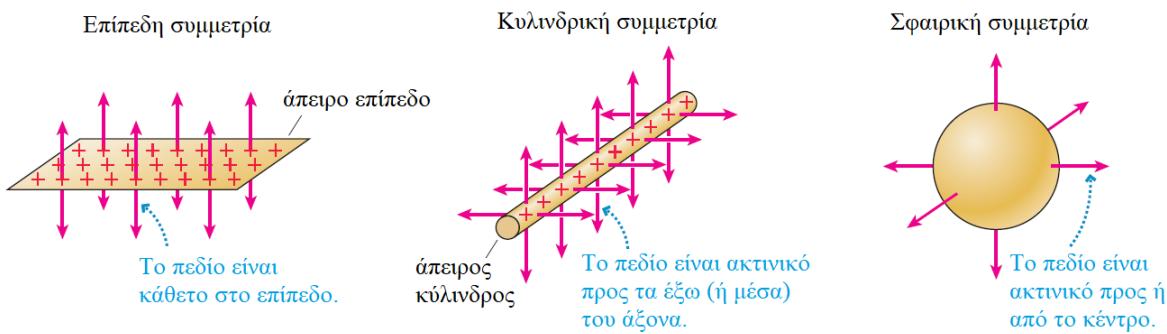
- μετατοπίσει δεξιά-αριστερά τον κύλινδρο (παράλληλα με τον άξονά του)
- περιστρέψει τον κύλινδρο γύρω από τον άξονά του
- αντανακλάσει σε έναν καυρόπη τον κύλινδρο και σας παρουσιάσει το είδωλό του ως την πραγματική κατανομή

Ανοίξτε τώρα τα μάτια σας. Μπορείτε να καταλάβετε, εμπειρικά ή πειραματικά, αν η κατανομή φορτίου άλλαξε μετά τους μετασχηματισμούς του φίλου σας; Αν όχι, τότε λέμε ότι η κατανομή είναι συμμετρική όσον αφορά τον ή τους μετασχηματισμούς που εκτελέστηκαν. Στο παράδειγμα του κυλίνδρου, η συμμετρία είναι κυλινδρική, καιώνων ικανοποιεί και τους τρεις μετασχηματισμούς. Όμως υπάρχουν και άλλες συμμετρίες: σφαιρική ή επιπέδου, όπως θα δούμε σύντομα (ή και καθόλου συμμετρίες, βέβαια).

Με βάση τα παραπάνω, η συμμετρία του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να ταιριάζει στη συμμετρία της κατανομής φορτίου! Αν αυτό δεν ισχυει, τότε θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το ηλεκτρικό πεδίο για να μάθετε αν άλλαξε η κατανομή του φορτίου μέσω μετασχηματισμού. Με τέτοιους τρόπους μπορούμε να κατανοήσουμε το σχήμα του ηλεκτρικού πεδίου.

Θα μας απασχολήσουν οι ακόλουθες συμμετρίες του Σχήματος 4.29 στα επόμενα παραδείγματα.

Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε τέτοια επιφάνεια γύρω από το φορτίο ή την κατανομή του έτσι ώστε να ικανοποιείται τουλάχιστον μια από τις παρακάτω συνθήκες σε όλη ή σε τμήμα της επιφάνειας:



Σχήμα 4.29: Κατανομές φορτίων που διατηρούν συμμετρία.

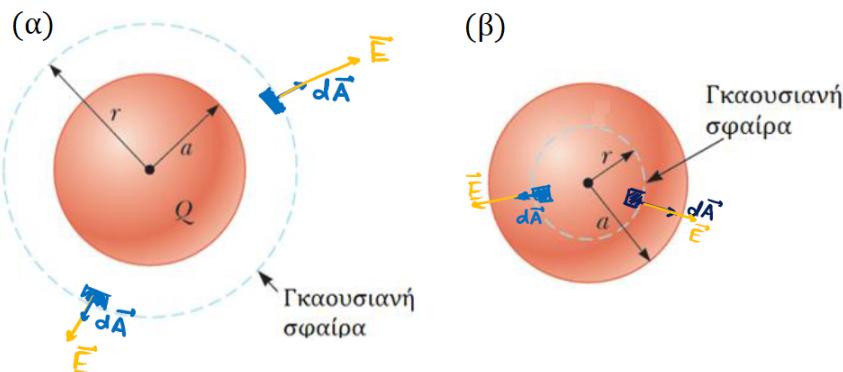
1. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να υπερηφανεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω σε όλη την επιφάνεια
2. Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο  $E_dA$ , δηλ. τα  $\vec{E}$ ,  $d\vec{A}$  είναι παράλληλα
3. Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα
4. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας

Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Ο γενικός κανόνας είναι η γκαουσιανή επιφάνεια που θα επιλέξουμε να “ταιριάζει” με τη συμμετρία της κατανομής φορτίου.

#### Παράδειγμα 4.17:

Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας  $a$  έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho$  σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο  $Q$ .

- (α') Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εκτός της σφαίρας.
- (β') Επανολάβετε για ένα σημείο εντός της σφαίρας.



Σχήμα 4.30: Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα.

Λύση:

- (α') Δείτε το Σχήμα 4.30(a). Ως σφαιρική κατανομή, αναγνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας  $r$ . Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1), (2). Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss και έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.173)$$

Η συνθήκη (2) μας επιτρέπει να γράψουμε ότι  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$  και η συνθήκη (1) μας επιτρέπει να βγάλουμε

το  $E$  έξω από το ολοκλήρωμα. Άρα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdA = E \oint dA \quad (4.174)$$

Το ολοκλήρωμα  $\oint dA$  ισούται με το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας και είναι  $A = 4\pi r^2$ , οπότε

$$\Phi_E = E \oint dA = 4E\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (4.175)$$

Άρα η σφαιρική συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

- (β') Επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας  $r < a$ . Η επιφάνεια περικλείει ένα μικρότερο όγκο σφαιρικών για τον οποίο πρέπει να βρούμε πόσο φορτίο περιέχει. Ισχύει ότι

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (4.176)$$

Ξανά, ικανοποιούνται οι συνθήκες (1), (2). Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \quad (4.177)$$

$$(4.178)$$

Λόγω της συνθήκης (2), το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως αλγεβρικό, και λόγω της (1) μπορούμε να βγάλουμε την ποσότητα  $E$  έξω από το ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\Phi_E = \oint EdA = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} \iff E \oint dA = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} \iff 4E\pi r^2 = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} \quad (4.179)$$

και άρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο

$$E = k_e \frac{Q}{a^2} \frac{r}{a} \quad (4.180)$$

Παρατηρήστε τη διαφορά σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα - ένα σφαιρικό υποσύνολο της σφαιρικής δε συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

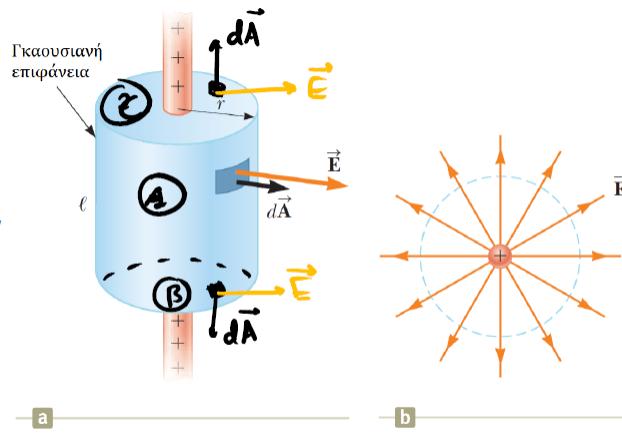
#### Παράδειγμα 4.18:

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $r$  από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και άπειρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ .

Λύση: Δείτε το Σχήμα 4.31. Το πρόβλημα έχει κυλινδρική συμμετρία, οπότε επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια έναν κύλινδρο ακτίνας  $r$  και μήκους  $l$ . Επειδή το μήκος της ράβδου είναι άπειρο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό σε κάθε σημείο που ισαπέχει απόσταση  $r$  από τη ράβδο. Αυτό το δείξαμε ρητά στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο μακριά από μια φορτισμένη ράβδο μήκους  $l$ . Λόγω αυτού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό σε κάθε σημείο της επιφάνειας (Α). Ικανοποιείται έτσι η συνθήκη (1). Στις επιφάνειες (Β), (C) ισχύει ότι  $\vec{E} \perp d\vec{A}$ . Άρα το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν: ικανοποιείται η συνθήκη (3). Τέλος, στην επιφάνεια (Α) ισχύει  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$ , γιατί τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι ομόρροπα: ικανοποιείται η συνθήκη (2). Έχουμε λοιπόν

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.181)$$

$$= \oint EdA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.182)$$



Σχήμα 4.31: Ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδοις απείρου μήκους.

$$= E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.183)$$

Το ολοκλήρωμα  $\oint dA$  αποτελεί το εμβαδό της επιφάνειας, που είναι  $2\pi rl$  και άρα

$$2E\pi rl = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \iff E = \frac{1}{2\pi r} \frac{\lambda}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (4.184)$$

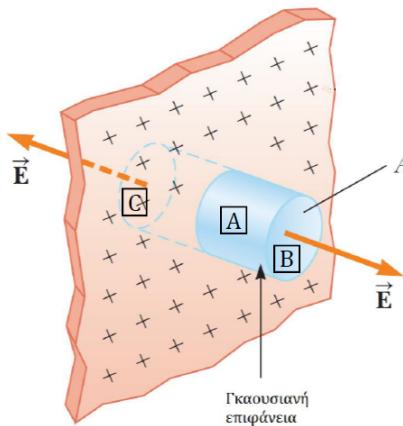
και με  $k_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$  έχουμε

$$E = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.185)$$

Ανατρέξτε στο Παράδειγμα 4.7(γ) για να δείτε ότι είχαμε καταλήξει ακριβώς σε αυτό το αποτέλεσμα.

#### Παράδειγμα 4.19:

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου  $\sigma$ .



Σχήμα 4.32: Ομοιόμορφα φορτισμένη επιφάνεια.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 4.32. Για την επιφάνεια ισχύει  $\sigma = Q/A \implies q_{in} = \sigma A$ . Επιλέγουμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια<sup>2</sup> κάθετη στο επίπεδο. Όπως δείξαμε και στο Παράδειγμα 4.9, επειδή το επίπεδο έχει

<sup>2</sup>Δεν ταιριάζει με την κατανομή αλλά θα δείτε ότι δεν έχει σημασία σε αυτό το παράδειγμα.

άπειρες διαστάσεις, το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο μακριά από το επίπεδο όπου είναι σταθερό. Αλλά ας υποθέσουμε ότι δεν το ξέρουμε αυτό, και ας υπερχρήσουμε ότι είναι απλά σταθερό σε μια επιφάνεια παράλληλη του επιπέδου, απόστασης  $r$  από αυτό, δηλ. στις επιφάνειες (B), (C) ικανοποιείται η συνθήκη (1). Στις ίδιες επιφάνειες (B), (C), το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στα διανύσματα  $d\vec{A}$  των αντίστοιχων επιφανειών, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι αλγεβρικό γινόμενο. Αντίθετα, στην επιφάνεια (A) το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο διάνυσμα  $d\vec{A}$ , οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Ικανοποιείται η συνθήκη (3). Οπότε τελικά με το νόμο του Gauss έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \iff E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \quad (4.186)$$

Το ολοκλήρωμα  $\oint dA$  αποτελεί το εμβαδό των δυο επιφανειών (B), (C), δηλ.

$$\oint dA = 2\pi r^2 \quad (4.187)$$

και έτσι

$$2E\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.188)$$

σταθερό σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας. Δείτε ότι είχαμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα και στο Παράδειγμα 4.9.

#### 4.4.4 Αγωγοί και Ηλεκτρικό Πεδίο

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένας στέρεος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία (τα φορτία του δεν κινούνται) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του και έχει μέτρο  $E = \sigma/\epsilon_0$ .
- Το ηλεκτρικό πεδίο εντός του αγωγού είναι μηδέν.
- Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του.
- Σε έναν αγωγό ακανόνιστου σχήματος, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη εκεί που η κυρτότητά του είναι μεγαλύτερη.

#### 4.5 Ηλεκτρικό Δυναμικό

Στη μελέτη της Μηχανικής, κάναμε εκτενή χρήση των δυνάμεων και των νόμων του Newton, μέχρι που είδαμε ότι παρ' όλη τη δύναμή τους δεν μπορούν να λύσουν πολλά προβλήματα με ευκολία. Στραφήκαμε τότε στις έννοιες της ενέργειας, και τα πράγματα έγιναν σημαντικά απλούστερα. Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής δύναμης. Ήρθε η ώρα να συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της ενέργειας! Θα ορίσουμε σύντομα την έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού. Θα περιγράψουμε φαινόμενα με μεγαλύτερη ευκολία από ότι με χρήση πεδίων και δυνάμεων - όπως ακριβώς περιγράψαμε ευκολότερα τα φαινόμενα της Κινητικής με ενεργειακά θεωρήματα σε σχέση με την περιγραφή μέσω δυνάμεων και διανυσμάτων. Φυσικά οι εφαρμογές ποικίλουν και ξεκινούν από τα απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και συσκευές μέχρι τους πυρηνικούς αντιδραστήρες και τους ενεργειακούς επιταχυντές.

Ας υπερχρήσουμε ένα φορτίο  $q$  τοποθετημένο σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$ . Θεωρούμε το φορτίο και το πεδίο ως ένα σύστημα<sup>3</sup>. Λόγω του πεδίου εγείρεται στο φορτίο ηλεκτρική δύναμη μέτρου  $F_e = qE$ . Η δύναμη αυτή οφείλεται στο πεδίο - σε μέρος του συστήματος δηλαδή - και το φορτίο κινείται λόγω της δύναμης αυτής. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική και εσωτερική στο σύστημα και όρα το έργο της είναι εσωτερικό στο σύστημα. Με άλλα λόγια, το ηλεκτρικό πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα, όπως ακριβώς η δύναμη

<sup>3</sup>Σας ψυμίζει κάτι;

της βαρύτητας (το βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα Γης + βιβλίο, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος.

Έστω τώρα μια απειροστά μικρή μετατόπιση  $d\vec{s}$  του σημειακού φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο. Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης θα είναι κι αυτό απειροστά μικρό, έστω  $dW_{int}$ , δηλ.

$$dW_{int} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.189)$$

Ας ξεσκονίσουμε λίγο τη Μηχανική κι ας υψηλούμε ότι το έργο μιας εσωτερικής δύναμης σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας (εδώ, της ηλεκτρικής δυναμικής του ενέργειας,  $U_e$ ):

$$dW_{int} = -dU_e \quad (4.190)$$

Άρα

$$dU_e = -dW_{int} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.191)$$

Για μια πεπερασμένη μετατόπιση από το σημείο (A) στο (B) θα ανθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) όλες τις απειροστά μικρές μετατοπίσεις  $d\vec{s}$ , και θα έχουμε μια ηλεκτρική δυναμική ενέργεια της μορφής

$$\Delta U_e = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.192)$$

Για μια συγκεκριμένη θέση του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια  $U_e$  σε σχέση με μια άλλη θέση που έχει δυναμική ενέργεια  $U_e = 0$ . Διαιρώντας την  $U_e$  με το φορτίο έχουμε

$$V = \frac{U_e}{q} \quad (4.193)$$

το οποίο και ονομάζουμε ηλεκτρικό δυναμικό  $V$ . Η διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  ορίζεται ως η μεταβολή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν ένα φορτίο  $q$  μετακινείται μεταξύ δύο σημείων (A) και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} = -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.194)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρά δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, και έτσι μετράται σε J/C, η οποία ποσότητα ονομάζεται Volt - V, προς τιμήν του Alessandro Volta (1745-1827), Ιταλού Φυσικοχημικού, στον οποίο πιστώνεται - μεταξύ άλλων - η εφεύρεση της μπαταρίας.

Παρατηρήστε ότι η διαφορά δυναμικού δεν εξαρτάται από το φορτίο  $q$  που μετακινείται, παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο. Άρα το ηλεκτρικό δυναμικό είναι ένα χαρακτηριστικό του ηλεκτρικού πεδίου! Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο διαφορές δυναμικού έχουν νόημα. Πολλές φορές, όπως και στη Μηχανική, ορίζουμε εμείς ένα σημείο/μια περιοχή του ηλεκτρικού πεδίου ως μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

Ένα κοινό λάθος που γίνεται στην ερμηνεία του ηλεκτρικού δυναμικού είναι ότι η διαφορά δυναμικού παρομοιάζεται με τη διαφορά ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Αυτό δεν ισχύει: οι δύο ποσότητες δεν είναι το ίδιο, δε σημαίνουν το ίδιο πράγμα. Η διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  μεταξύ δύο σημείων (A) και (B) υπάρχει αποκλειστικά λόγω μιας πηγής φορτίου και εξαρτάται από την κατανομή αυτής. Για να υπάρχει διαφορά δυναμικής ενέργειας, πρέπει να υπάρχει ένα σύστημα με τουλάχιστον δύο φορτία! Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και αλλάζει μόνον αν ένα φορτίο μετακινηθεί σε σχέση με τη θέση ηρεμίας του συστήματος!

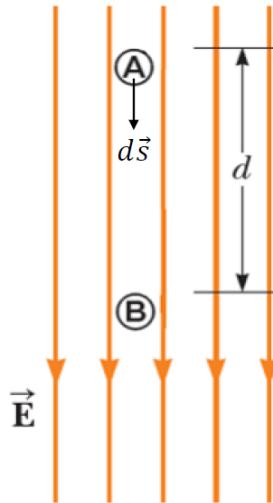
Μπορείτε να σκεφτείτε την αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο και την ηλεκτρική δύναμη: το πεδίο υπάρχει λόγω μιας πηγής φορτίου, ενώ η ηλεκτρική δύναμη εγείρεται σε ένα άλλο φορτίο στο χώρο του πεδίου - απαιτούνται δηλαδή τουλάχιστον δύο φορτία για την έγερση δύναμης.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάποια εξωτερική δύναμη μετακινεί ένα φορτίο  $q$  στο πεδίο, από ένα σημείο (A) σε ένα σημείο (B), χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια. Προφανώς όμως αλλάζει η διάταξη του συστήματος, οπότε αλλάζει η δυναμική του ενέργεια! Το έργο αυτής της δύναμης θα είναι

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U_e = 0 + q\Delta V = q\Delta V \quad (4.195)$$

#### 4.5.1 Δυναμικό σε Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο

Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα :). Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο όπως στο Σχήμα 4.33. Ας υπολο-



Σχήμα 4.33: Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

γίσουμε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  ανάμεσα στα σημεία (A) και (B), απόστασης  $d$  μεταξύ τους. Μια απειροστά μικρή μετατόπιση  $d\vec{s}$  από το (A) στο (B) είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές, οπότε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και της απειροστά μικρής μετατόπισης είναι ομόρροπα. Με βάση τον ορισμό θα έχουμε

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds = -E \int_A^B ds = -Ed \quad (4.196)$$

Οπότε καταλήξαμε στο ότι

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ed \quad (4.197)$$

Ας βάλουμε τώρα ένα φορτίο  $+q$  που κινείται (αναγκαστικά) από το (A) στο (B), όπως στο Σχήμα 4.34. Η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας είναι

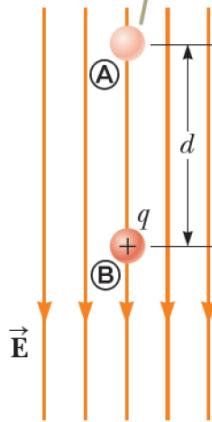
$$\Delta U_e = q\Delta V_{A \rightarrow B} = -qEd \quad (4.198)$$

Παρατηρήστε ότι  $\Delta U_e < 0$ . Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όταν το θετικό φορτίο κατευθύνεται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (A) ένα φορτίο  $+q$  αυτό θα κινηθεί προς τα “κάτω” λόγω έγερσης ηλεκτρικής δύναμης. Η παρουσία δύναμης επιταχύνει το φορτίο, δηλ. αποκτά κινητική ενέργεια! Όσο το φορτίο προχωρά προς τα κάτω, τόσο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται και τόσο η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται! Σας εκπλήσσει αυτό; Καταλαβαίνετε γιατί συμβαίνει;

Για να δούμε τι θα συμβεί αν - στην ίδια διάταξη - τοποθετήσουμε ένα φορτίο  $-q$ , το οποίο (αναγκαστικά) θα κινηθεί από το (B) στο (A). Ξανά, η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta U_e = -q\Delta V_{B \rightarrow A} = -q(Ed) = -qEd \quad (4.199)$$

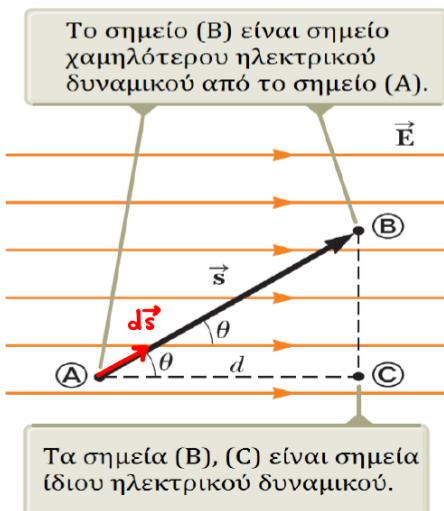
Όταν ένα θετικό φορτίο μετακινείται από το (A) στο (B), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μικραίνει.



Σχήμα 4.34: Φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

και ξανά βλέπουμε ότι  $\Delta U_e < 0$ ! Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει ξανά όταν το αρνητικό φορτίο κατευθύνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (B) ένα φορτίο  $-q$  αυτό θα κινηθεί προς τα “πάνω” λόγω έγερσης ηλεκτρικής δύναμης. Η παρουσία δύναμης επιταχύνει το φορτίο, δηλ. αποκτά κινητική ενέργεια! Όσο το φορτίο προχωρά προς τα πάνω, τόσο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται και τόσο η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται!

Ας γενικέψουμε τώρα για μετατόπιση μη παράλληλη στις δυναμικές γραμμές. Εστω η μετατόπιση  $s$  από το (A) στο (B) όπως στο Σχήμα 4.35. Για τη μετατόπιση αυτή θα έχουμε



Σχήμα 4.35: Φορτίο σε κίνηση υπό γωνία με τις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

$$\Delta V_1 = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds \cos(\theta) = -E \cos(\theta) \int_A^B ds = -E s \cos(\theta) = -Ed \quad (4.200)$$

αφού  $\int_A^B ds = s$ . Άρα για το σύστημα πεδίο-φορτίο ισχύει

$$\Delta U_e = q\Delta V_1 = -qEd \quad (4.201)$$

Όμως νωρίτερα δείξαμε ότι

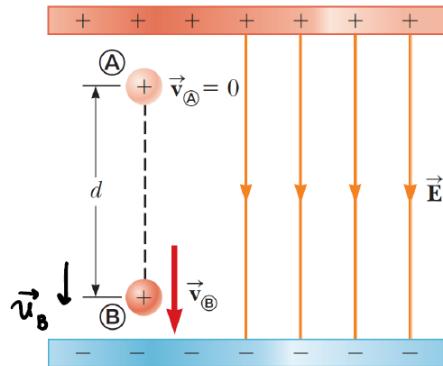
$$\Delta V_2 = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \int_A^C d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} = -Ed \quad (4.202)$$

Άρα  $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ! Από αυτό συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στο πεδίο έχουν ίδιο δυναμικό (αποτελούν ισοδυναμικές επιφάνειες).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.20:

Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (A) σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου  $8 \times 10^4 \text{ V/m}$ . Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου  $d = 0.5 \text{ m}$  στο σημείο (B) στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου αμέσως μετά τη μετατόπισή του. Θεωρήστε ότι  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  και  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .



Σχήμα 4.36: Πρωτόνιο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση: Θεωρούμε το σύστημα φορτίο + πεδίο. Το σύστημα είναι απομονωμένο και η μόνη δύναμη που ασκείται εντός του συστήματος είναι η ηλεκτρική δύναμη  $\vec{F}_e$ , η οποία είναι και συντηρητική. Ισχύει η ΑΔΜΕ από το σημείο (A) στο σημείο (B).

$$K_B + U_B = K_A + U_A \quad (4.203)$$

$$\frac{1}{2}m_p u_B^2 - 0 = -\Delta U_{A \rightarrow B} \quad (4.204)$$

$$\frac{1}{2}m_p u_B^2 = qEd \quad (4.205)$$

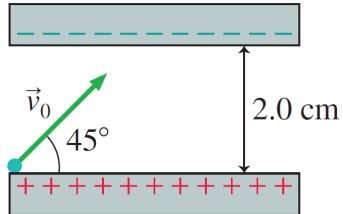
$$u_B^2 = \frac{2qEd}{m_p} \quad (4.206)$$

$$u_B \approx 2.8 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (4.207)$$

υποθέτωντας ότι θετική φορά της κίνησης είναι προς τη κατεύθυνση του διανύσματος του σχήματος.

Παράδειγμα 4.21:

Δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες (Σχήμα 4.37) σε απόσταση 2.0 cm δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου  $10^4$  N/C. Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται υπό γωνία 45° μοιρών από τη θετική πλάκα. Δείξτε ότι η μέγιστη αρχική ταχύτητα  $u_0$  που μπορεί να λάβει το ηλεκτρόνιο χωρίς να χτυπήσει πάνω στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα είναι  $u_0 = 1.19 \times 10^7$  m/s



Σχήμα 4.37: Παράλληλες φορτισμένες πλάκες.

Λύση: Αφού το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο του είναι σταθερό παντού. Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο μέσα στο πεδίο είναι

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \implies \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (4.208)$$

και άρα

$$a_y = -1.756 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (4.209)$$

Η αρχική ταχύτητα  $u_0$  έχει δυο συνιστώσες  $u_{0x} = u_0 \cos(45^\circ)$  και  $u_{0y} = u_0 \sin(45^\circ)$ . Το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά προς τα θετικά του άξονα y. Άρα το ηλεκτρόνιο έχει αρνητική επιτάχυνση που προκαλεί μείωση της y-συνιστώσας της ταχύτητας. Απαιτούμε  $u_{1y} = 0$  ώστε να μη χτυπήσει στην πλάκα. Από τις εξισώσεις της Κινητικής,

$$u_{1y}^2 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \implies 0 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \quad (4.210)$$

$$u_{0y} = \sqrt{-2a_y \Delta y} = \sqrt{-2(-1.756 \times 10^{15} \times 0.02)} \quad (4.211)$$

$$= 8.381 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (4.212)$$

και άρα

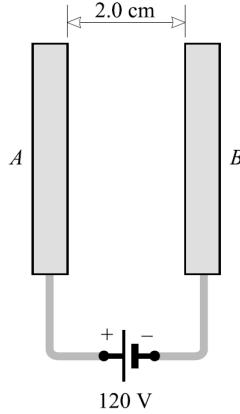
$$u_0 = \frac{8.381 \times 10^6}{\sin(45^\circ)} = 1.19 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (4.213)$$

Παράδειγμα 4.22:

Στο Σχήμα 4.38, δυο μεγάλες πλάκες είναι συνδεδεμένες με μια μπαταρία 120 V. Θεωρήστε ότι οι πλάκες βρίσκονται στο κενό, και ότι είναι πολύ μεγαλύτερης διάστασης απ' ότι φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε

- (α') το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες.
- (β') τη δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο ανάμεσα στις πλάκες.
- (γ') την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που χάνει το σύστημα πεδίο-ηλεκτρόνιο λόγω της κίνησης του ηλεκτρονίου από την πλάκα B στην πλάκα A.
- (δ') την ταχύτητα του ηλεκτρονίου που φεύγει από την πλάκα B λίγο πριν χτυπήσει στην πλάκα A.

Λύση:



Σχήμα 4.38: Παράλληλες πλάκες σε μπαταρία.

- (α') Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται από τη θετική πλάκα A προς την αρνητική πλάκα B. Είναι ομογενές μεταξύ μεγάλων παράλληλων πλακών, και άρα το μέτρο του δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{120}{0.02} = 6000 \text{ V/m} = 6 \text{ kV/m} \quad (4.214)$$

- (β') Η δύναμη που ασκείται δίνεται από τη σχέση

$$F_e = qE = -1.6 \times 10^{-19} \times 6000 = -9.6 \times 10^{-16} \text{ N} \quad (4.215)$$

Το αρνητικό πρόσημο μας λέει ότι το διάνυσμα της ηλεκτρικής δύναμης είναι αντίθετο σε φορά από το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου. Αφού η πλάκα A είναι θετικά φορτισμένη, το ηλεκτρόνιο έλκεται από αυτήν. Άρα η φορά της δύναμης είναι προς τα αριστερά (όπως βλέπουμε το σχήμα).

- (γ') Ξέρουμε ότι η

$$\Delta U_E = \Delta V q = 120 \times (-1.6 \times 10^{-19}) = -1.92 \times 10^{-17} \text{ J} \quad (4.216)$$

- (δ') Μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του ηλεκτρονίου από την πλάκα B στην πλάκα A. Έχουμε

$$\Delta U_E^{B \rightarrow A} + \Delta K^{B \rightarrow A} = 0 \quad (4.217)$$

$$U_A - U_B + K_A - K_B = -1.92 \times 10^{-17} + \frac{1}{2} m u_A^2 - 0 \quad (4.218)$$

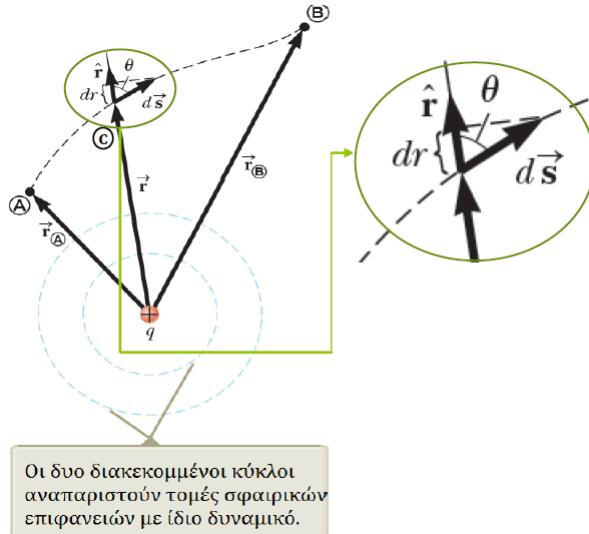
$$u_A = 6.5 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (4.219)$$

#### 4.5.2 Ηλεκτρικό Δυναμικό Σημειακών Φορτίων

Πέρα από ομογενή πεδία, που είναι βέβαια πολύ σημαντικά στην πράξη, θέλουμε να μπορούμε να βρίσκουμε ηλεκτρικά δυναμικά τόσο σε σημειακά φορτία όσο και σε κατανομές φορτίων. Ας ξεκινήσουμε από τα πρώτα και στη συνέχεια ως γενικεύσουμε για κατανομές.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημειακό φορτίο  $+q$ . Γνωρίζουμε ότι γύρω του αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$ , σε ακτινική μορφή. Ας βρούμε το δυναμικό σε απόσταση  $r$  από το φορτίο (σημείο C), όπως στο Σχήμα 4.39, ξεκινώντας από το γενικό ορισμό της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των σημείων (A) και (B). Έστω το (C) ως τυχαίο σημείο της διαδρομής. Θα είναι - προσέξτε λίγο τους συμβολισμούς

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} \quad (4.220)$$



Σχήμα 4.39: Υπολογισμός δυναμικού γύρω από σημειακό φορτίο.

$$= - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} |\hat{\mathbf{r}}| ds \cos(\theta) = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} ds \cos(\theta) \quad (4.221)$$

$$= - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} dr \quad (4.222)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας λένε ότι κάθε μετατόπιση  $d\vec{s}$  από το (A) στο (B) προκαλεί μια μεταβολή  $d\vec{r}$  στο μέτρο του  $\vec{r}$ , δηλ. του διανύσματος θέσης. Άρα

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r} \Big|_{r=r_A}^{r=r_B} \quad (4.223)$$

Οπότε

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q}{r_B} - k_e \frac{q}{r_A} = V_B - V_A \quad (4.224)$$

Παρατηρήστε ότι η διαφορά δυναμικού είναι ανεξάρτητη της διαδρομής - άρα το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό! Επίσης, παρατηρήστε την εξάρτηση από τα  $r_A, r_B$ . Παρ' όλα αυτά εμείς δεν έχουμε βρει ακόμα το ζητούμενο:  $V_C$ ! Για να το κάνουμε αυτό, ας θεωρήσουμε τη διαφορά δυναμικού

$$V_C - V_\infty \quad (4.225)$$

με

$$V_\infty = k_e \frac{q}{r_\infty} = 0 \quad (4.226)$$

καθώς  $r_\infty = \infty$ . Θα είναι τότε

$$V_C - 0 = V_C = k_e \frac{q}{r_C} \quad (4.227)$$

Για περισσότερα του ενός φορτία, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος, οπότε

$$V = \sum_i V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (4.228)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα φορτίο  $q_2$  έρχεται στο πεδίο πηγής φορτίου  $q_1$  σε απόσταση  $r_{12}$  μέσω εξωτερικής δύναμης έργου  $W = q_2 \Delta V$ . Το φορτίο  $q_2$  έρχεται από πολύ "μακριά":  $V_{μακριά} = 0$ . Επίσης, όταν το φορτίο  $q_2$  βρίσκεται "μακριά", θεωρούμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων ως μηδενική. Το έργο  $W$  μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια  $U_e$  του συστήματος! Άρα

$$\Delta U_e = W \quad (4.229)$$

$$U_e - 0 = q_2(V - V_{\text{μακριά}}) \quad (4.230)$$

$$U_e = q_2(k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0) \quad (4.231)$$

$$= k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (4.232)$$

Αν η παραπάνω ποσότητα είναι θετική, το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι θετικό, άρα εισάγεται ενέργεια στο σύστημα: τα φορτία απωθούνται, άρα πρέπει να εισάγει κανείς ενέργεια μέσω έργου για να τα φέρει σε απόσταση  $r_{12}$ . Αν η παραπάνω ποσότητα είναι αρνητική, τότε το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι αρνητικό, άρα εξάγεται ενέργεια από το σύστημα: τα φορτία έλκονται, άρα πρέπει να παραχθεί αρνητικό έργο (δύναμη αντίθετη στη μετατόπιση-έλξη των φορτίων) για να τα φέρουμε σε απόσταση  $r_{12}$ . Γενικεύοντας για πολλά φορτία

$$U = k_e \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad i < j \quad (4.233)$$

Με απλά λογια, ανθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων.

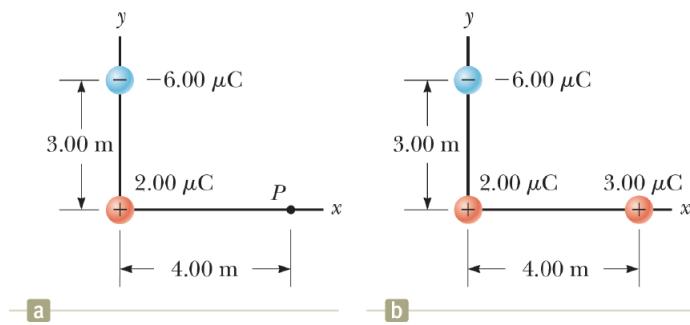
Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.23:

Στο Σχήμα 4.40, ένα φορτίο  $q_1 = 2 \mu\text{C}$  βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ ένα φορτίο  $q_2 = -6 \mu\text{C}$  στη θέση  $(0,3) \text{ m}$ .

(α') Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$  με συντεταγμένες  $(4,0) \text{ m}$ .

(β') Βρείτε τη μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δύο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο  $q_3 = 3 \mu\text{C}$ , όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο  $P$ .



Σχήμα 4.40: Φορτία στο επίπεδο.

Λύση:

(α') Το δυναμικό στο σημείο  $P$  αποτελείται από το άνθροισμα των συνεισφορών δυναμικού λόγω των φορτίων  $q_1, q_2$ . Άρα

$$V_P = k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2} \quad (4.234)$$

$$= 8.987 \times 10^9 \left( \frac{2 \times 10^{-6}}{4} - \frac{6 \times 10^{-6}}{5} \right) \quad (4.235)$$

$$\approx -6.3 \times 10^3 \text{ Volt} \quad (4.236)$$

(β') Θεωρούμε ότι όταν το φορτίο  $q_3$  βρίσκεται στο άπειρο, η συνολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων είναι μηδέν. Άρα όταν έρχεται στο σημείο  $P$ , το σύστημα αποκτά ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με

$$\Delta U_e = U_f - U_i = U_f - 0 = q_3 V_P = 3 \times 10^{-6} \times (-6.3 \times 10^3) \approx -1.9 \times 10^{-2} \text{ J} \quad (4.237)$$

**Παράδειγμα 4.24:**

Δυο σημειακά φορτία βρίσκονται σε απόσταση 2.0 cm μεταξύ τους και έχουν ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με  $-180 \times 10^{-6}$  J. Το άθροισμα των φορτίων τους είναι  $30 \times 10^{-9}$  C. Βρείτε το φορτίο του καθενός.

Λύση: Έστω  $Q_1$  και  $Q_2$  τα άγνωστα φορτία. Πρέπει

$$Q_1 + Q_2 = 30 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (4.238)$$

και

$$U = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} = -180 \times 10^{-6} \text{ J} \quad (4.239)$$

δηλ.

$$Q_1 Q_2 = -4 \times 10^{-16} \text{ C}^2 \quad (4.240)$$

Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς  $Q_2$  και αντικαθιστώντας στην δεύτερη, έχουμε

$$Q_1(30 \times 10^{-9} - Q_1) = -4 \times 10^{-16} \Rightarrow Q_1 = 40 \times 10^{-9} \text{ C}, Q_2 = -10 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (4.241)$$

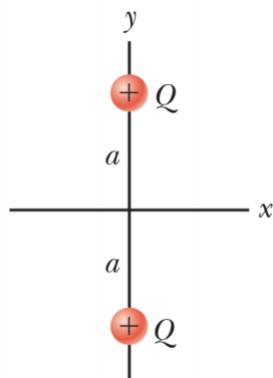
οι οποίες προκύπτουν ως δυο ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. Άρα τα δυο φορτία είναι  $-10 \text{ nC}$  και  $40 \text{ nC}$ .

**Παράδειγμα 4.25:**

Δυο σωματίδια με ίδιο φορτίο βρίσκονται αντικρυστά πάνω και κάτω από τον άξονα  $x$ , όπως στο Σχήμα 4.41.

(α') Σχεδιάστε, σε μονάδες  $kQ/a$ , το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα  $x$  στο διάστημα  $-3a < x < 3a$ .

(β') Θεωρήστε ότι το φορτίο του σωματιδίου που βρίσκεται στο  $y = -a$  γίνεται αρνητικό. Σχεδιάστε το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα  $y$  στο διάστημα  $-4a < y < 4a$ .



Σχήμα 4.41: Φορτία στον άξονα  $x$ .

Λύση:

(α') Το δυναμικό από τα δυο φορτία κατά μήκος του άξονα  $x$  είναι

$$V(x) = \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + (-a)^2}} \quad (4.242)$$

$$= \frac{2k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e Q}{a} \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \quad (4.243)$$

και για τη γραφική παράσταση

$$\frac{V(x)}{k_e Q/a} = \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \quad (4.244)$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.42(α).

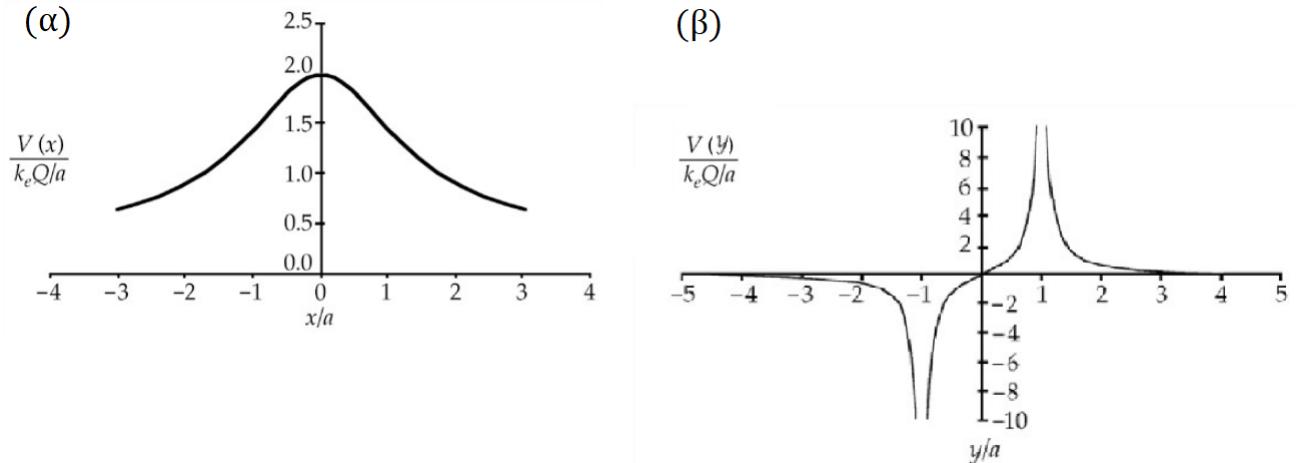
(β') Το δυναμικό κατά μήκος του  $y$  άξονα είναι

$$V(x) = \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{|y-a|} + \frac{-k_e Q}{|y+a|} \quad (4.245)$$

$$= \frac{k_e Q}{a} \left( \frac{1}{|y/a - 1|} - \frac{1}{|y/a + 1|} \right) \quad (4.246)$$

$$\frac{V(x)}{k_e Q/a} = \left( \frac{1}{|y/a - 1|} - \frac{1}{|y/a + 1|} \right) \quad (4.247)$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.42(β).



Σχήμα 4.42: Γραφικές παραστάσεις δυναμικού.

#### 4.5.3 Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό

Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει δυο εξαιρετικές ιδιότητες: (α) είναι μονόμετρο αντί για διανυσματικό μέγεθος, και (β) περιγράφει ένα ηλεκτρικό πεδίο με ενεργειακό τρόπο. Δεδομένων αυτών, μήπως μπορούμε να βρούμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  από το ηλεκτρικό δυναμικό  $\Delta V$ ;

Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού  $dV$  μεταξύ δυο σημειών απειροστά μικρής απόστασης  $d\vec{s}$ , τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.248)$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα, τότε

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx \quad (4.249)$$

και άρα

$$E_x = -\frac{d}{dx} V(x) \quad (4.250)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και την  $y$ -συνιστώσα,

$$E_y = -\frac{d}{dy} V(y) \quad (4.251)$$

και αντίστοιχα για κάθε συνιστώσα ενός χώρου, ακόμα κι αν το δυναμικό είναι συνάρτηση των  $x, y, z$ . Η σχέση αυτή πρέπει να σας θυμίζει από τη Μηχανική τη σχέση μεταξύ συντηρητικής δύναμης και δυναμικής ενέργειας<sup>4</sup>. Αν όμως η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το πεδίο έχει άλλου είδους συμμετρία, π.χ. σφαιρική, τότε η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται από την ακτινική απόσταση  $r$ . Η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$E_r = -\frac{d}{dr}V(r) \quad (4.252)$$

Δείτε ότι η παραπάνω σχέση δουλεύει για την απλή περίπτωση σημειακού φορτίου, που έχει ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο γύρω του:

$$E_r = -\frac{d}{dr}V(r) = -\frac{d}{dr}\frac{k_e q}{r} = -k_e q \frac{d}{dr}\frac{1}{r} = k_e \frac{q}{r^2} \quad (4.253)$$

#### Παράδειγμα 4.25:

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια περιοχή του χώρου δίνεται ως

$$V(x, y, z) = 5x - 3x^2u + 2yz^2 \quad (4.254)$$

(α') Βρείτε την έκφραση για τις συνιστώσες  $x, y, z$  του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή.

(β') Ποιό είναι το μέτρο του πεδίου στο σημείο  $P$  με συντεταγμένες  $(1, 0, -2)$ ;

Λύση:

(α') Έχουμε

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -5 + 6xy \quad (4.255)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 2z^2 \quad (4.256)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -4yz \quad (4.257)$$

οπότε το πεδίο γράφεται ως

$$\vec{E} = (-5 + 6xy)\vec{i} + (3x^2 - 2z^2)\vec{j} - (4yz)\vec{k} \quad (4.258)$$

(β') Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση και έχουμε

$$\vec{E} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 0\vec{k} \implies E = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2} = 7.07 \text{ N/C.} \quad (4.259)$$

#### Παράδειγμα 4.25:

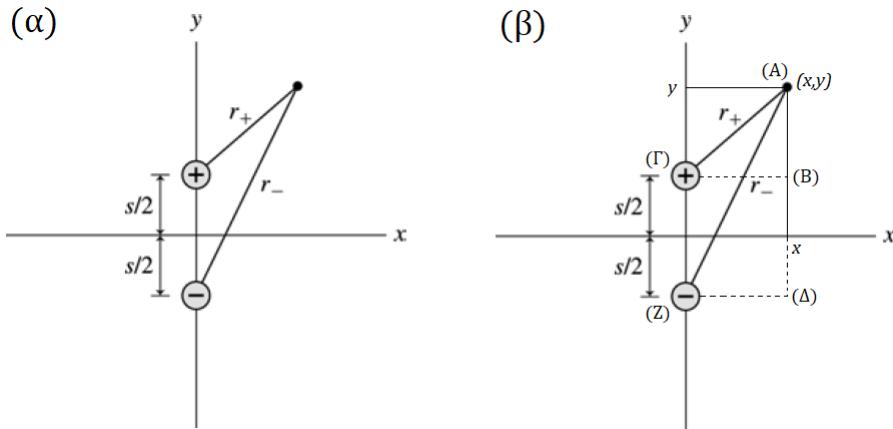
Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο φορτία  $+q, -q$  σε απόσταση  $s$  μεταξύ τους. Έστω ότι ένα τέτοιο δίπολο βρίσκεται επάνω στον άξονα  $y'$ , με το θετικό φορτίο στο σημείο  $(0, s/2)$  και το αρνητικό στο σημείο  $(0, -s/2)$ , όπως στο Σχήμα 4.43(α).

(α') Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό  $V(x, y)$  σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου.

(β') Χρησιμοποιήστε τη διωνυμική προσέγγιση για να γράψετε την παραπάνω απάντηση σας πιο απλά.  
Θεωρήστε  $s \ll x$  και  $s \ll y$ .

<sup>4</sup> $F_x = -\frac{d}{dx}U(x)$

(γ') Θεωρώντας  $s \ll x, y$ , βρείτε εκφράσεις για τις  $x-$  και  $y-$  συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 4.43: Δίπολο στον άξονα  $y'y$ .

Λύση:

(α') Έστω  $r_+$  και  $r_-$  οι αποστάσεις των φορτίων του διπόλου από ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, όπως στο Σχήμα 4.43(α). Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος, οπότε απλά αθροίζουμε τις συνεισφορές ηλεκτρικού δυναμικού του κάθε φορτίου. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα  $ABG$  και  $AΔZ$  του Σχήματος 4.43(β) βρίσκουμε ότι

$$r_+ = \sqrt{x^2 + (y - s/2)^2} \quad (4.260)$$

$$r_- = \sqrt{x^2 + (y + s/2)^2} \quad (4.261)$$

Άρα

$$V(x, y) = V_+ + V_- = k_e \frac{q}{r_+} + k_e \frac{-q}{r_-} = k_e q \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - s/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + s/2)^2}} \right) \quad (4.262)$$

(β') Η διωνυμική προσέγγιση μας λέει ότι

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad \text{αν } x \ll 1 \quad (4.263)$$

Για να την αξιοποιήσουμε πρέπει να γράψουμε το πρώτο κλάσμα ως

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - s/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - sy + s^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-sy+s^2/4}{x^2+y^2}}} \quad (4.264)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-sy+s^2/4}{x^2+y^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{s^2/4 - sy}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.265)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{sy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{8} \frac{s^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.266)$$

Αν επαναλάβουμε - κάντε το! - για το δεύτερο κλάσμα, καταλήγουμε στο

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + s/2)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{sy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{8} \frac{s^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.267)$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$V(x,y) = k_e \frac{qsy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.268)$$

(γ') Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου δίνονται αν παραγωγίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό  $V(x,y)$  ως προς  $x$  και  $y$ , δηλ.

$$E_x = -\frac{d}{dx} V(x,y) = -k_e qsy \left( -\frac{3}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) = k_e \frac{qs(3xy)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \quad (4.269)$$

$$E_y = -\frac{d}{dy} V(x,y) = -k_e \frac{qs}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - k_e qsy \left( -\frac{3}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) = k_e \frac{qs(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \quad (4.270)$$

και έτσι το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται ως

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = k_e \frac{qs(3xy)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{i} + k_e \frac{qs(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{j} \quad (4.271)$$

#### 4.5.4 Ηλεκτρικό Δυναμικό Κατανομής Φορτίου

Τα πράγματα ήταν σχετικά απλά σε περιπτώσεις με μονωμένων σημειακών φορτίων. Τι συμβαίνει όμως σε συνεχείς κατανομές φορτίων; Θα ακολουθήσουμε παρόμοιο σκεπτικό με την εύρεση των ηλεκτρικών πεδίων, δηλ. ότι θεωρήσουμε την κατανομή ως άθροισμα σημειακών φορτίων. Ας δούμε τους δύο τρόπους που μπορούμε να ενεργήσουμε:

- Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή, θεωρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό  $dV$  σε σημείο  $P$  απόστασης  $r$  λόγω σημειακού φορτίου  $dq$ . Το δυναμικό αυτό δίνεται ως

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \quad (4.272)$$

Ολοκληρώνουμε για κάθε σημειακό φορτίο  $dq$  παίρνοντας

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r} \quad (4.273)$$

- Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό από κάποια άλλη μέθοδο (π.χ. νόμος Gauss), τότε εκτιμούμε το  $\vec{E}$  και αντικαθιστούμε στη σχέση

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.274)$$

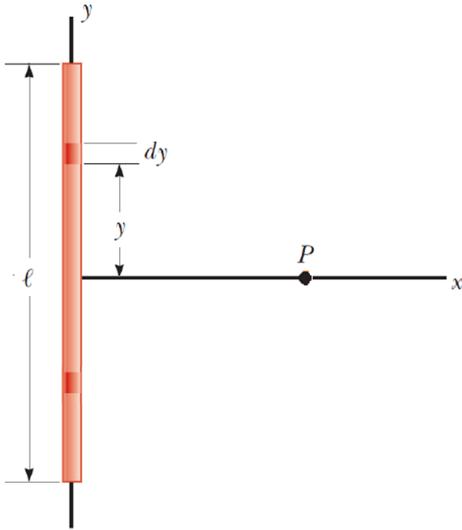
για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ . Τέλος, επιλέγουμε βολικό σημείο μηδενικού δυναμικού

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.26:

Αν μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ , μήκους  $l$ , και συνολικό φορτίο  $Q$  βρίσκεται κάθετα στον άξονα  $x'$ , και πάνω στον άξονα  $y'$ , όπως στο Σχήμα 4.44, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$  που απέχει απόσταση  $x$  από το σημείο  $(0,0)$ . Έπειτα υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω του ηλεκτρικού δυναμικού. Σας δίνεται ότι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (4.275)$$



Σχήμα 4.44: Κατανομή φορτίου σε ράβδο.

**Λύση:** Τυμηματοποιούμε τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα φορτίου  $dq$  και μήκους  $dy$ , όπως στο Σχήμα 4.44. Για κάθε τέτοιο τμήμα θα ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy} \implies dq = \lambda dy \quad (4.276)$$

Για ένα τμήμα της ράβδου  $dy$  με φορτίο  $dq$  το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$  θα είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.277)$$

Για όλη τη ράβδο, το ηλεκτρικό δυναμικό θα είναι

$$V = \int dV = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int k_e \lambda \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.278)$$

$$= k_e \lambda \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_{-l/2}^{l/2} \quad (4.279)$$

$$= k_e \lambda \left( \ln(l/2 + \sqrt{x^2 + (l/2)^2}) - \ln(-l/2 + \sqrt{x^2 + (l/2)^2}) \right) \quad (4.280)$$

$$= k_e \lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \quad (4.281)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει  $x$ -συνιστώσα μόνο - όπως έχουμε δει σε αντίστοιχη άσκηση στο ηλεκτρικό πεδίο - οπότε αρκεί να παραγωγίσουμε ως προς  $x$ .

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} k_e \lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \quad (4.282)$$

$$= -k_e \lambda \frac{d}{dx} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \quad (4.283)$$

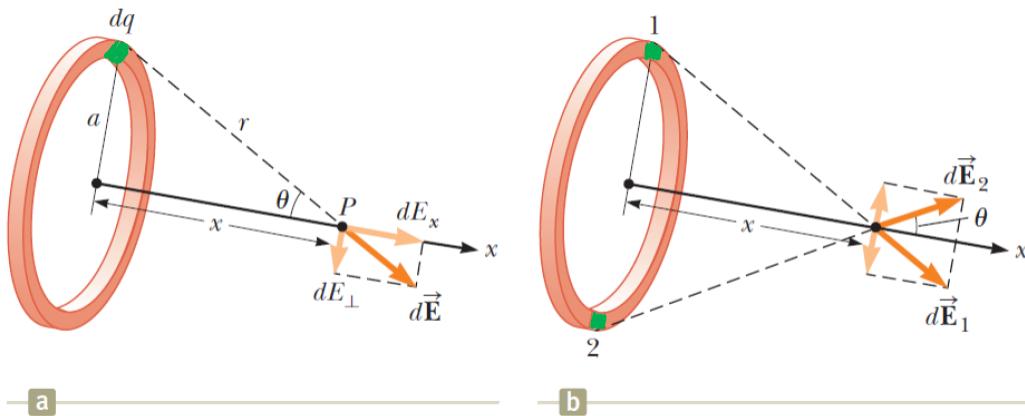
και μετά από αρκετές παραγώγους και άλγεβρα καταλήγουμε στο

$$E_x = \frac{k_e \lambda l}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \quad (4.284)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

### Παράδειγμα 4.27:

Ένας δακτύλιος ακτίνας  $a$  φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο  $Q$ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$ , όπως δείχνει το Σχήμα 4.45, που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου. Ποιό είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ ;



Σχήμα 4.45: Κατανομή φορτίου σε δακτύλιο.

**Λύση:** Έστω τμήμα του δακτυλίου με φορτίο  $dq$ . Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$  λόγω του φορτίου  $dq$  θα είναι

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (4.285)$$

Για το δυναμικό όλου του δακτυλίου στο σημείο  $P$  θα έχουμε

$$V_P = \int dV_P = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq \quad (4.286)$$

Επειδή  $\int dq = Q$ , όπως έχουμε δει, θα είναι τελικά

$$V_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (4.287)$$

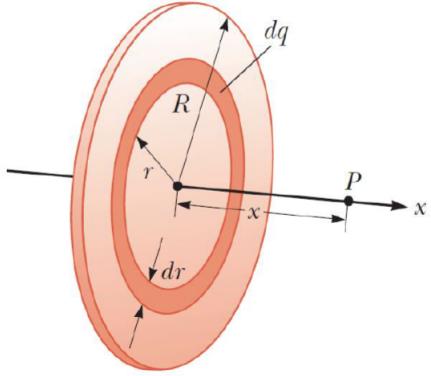
Λόγω συμμετρίας της κατανομής, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα στο σημείο  $P$ . Έτσι

$$E_x = -\frac{d}{dx} V_P = -\frac{d}{dx} k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -k_e Q \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.288)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

### Παράδειγμα 4.28:

Ένας δίσκος ακτίνας  $R$  φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο επιφανειακό θετικό φορτίο  $Q$  πυκνότητας  $\sigma$ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$ , όπως δείχνει το Σχήμα 4.46, που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του δίσκου και στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου. Ποιό το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ ;



Σχήμα 4.46: Κατανομή φορτίου σε δίσκο.

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο δίσκος αποτελείται από “πολλούς” δακτυλίους πάχους  $dr$  και ακτίνας  $r$ , με  $0 < r < R$ . Επίσης, για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ισχύει

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \implies dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr \quad (4.289)$$

Θα βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό που συνεισφέρει ένας δακτύλιος ακτίνας  $r$  και φορτίου  $dq$ . Για έναν τέτοιο διακτύλιο, θα είναι

$$dV_P = k_e \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (4.290)$$

από το προηγούμενο παράδειγμα. Άρα

$$V_P = \int dV_P = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k_e \int_0^R \frac{2\pi r \sigma dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \quad (4.291)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο  $x$ -συνιστώσα, λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου. Άρα

$$E_x = -\frac{d}{dx} V_P = -\frac{d}{dx} 2\pi k_e \sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x) = 2\pi k_e \sigma \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \quad (4.292)$$

μετά από αρκετές πραξιώλες. :) Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

#### 4.5.5 Αγωγοί και Ηλεκτρικό Δναμικό

Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία οι οποίες είναι σχετιζόμενες με το ηλεκτρικό δυναμικό. Έστω δύο σημεία (A) και (B) της επιφάνειας του αγωγού. Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνεια του από το (A) στο (B), το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη μεταπόσιη  $d\vec{s}$ . Άρα

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.293)$$

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.

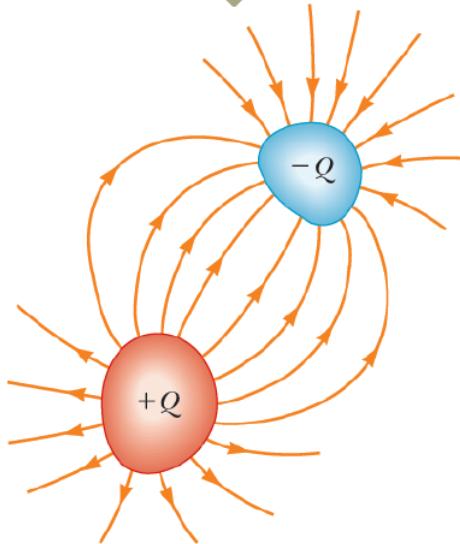
#### 4.6 Χωρητικότητα

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε για το πρώτο από τα τρία βασικά συστατικά των ηλεκτρικών κυκλωμάτων: τον πυκνωτή. Οι πυκνωτές δεν είναι τίποτα περισσότερο από διατάξεις που αποθηκεύουν ηλεκτρική

ενέργεια. Πυκνωτές θα βρείτε παντού: στις μητρικές κάρτες των υπολογιστών σας, στα ραδιόφωνά σας, στις παροχές ρεύματος στο σπίτι σας, στο φλας της φωτογραφικής μηχανής σας, κ.α.

Έστω δυο αγωγοί όπως στο Σχήμα 4.47. Αυτή η απλή διάταξη που βλέπετε ονομάζεται πυκνωτής. Οι

Όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου και αντίθετου προσήμου.



Σχήμα 4.47: Φορτισμένοι αγωγοί σε διάταξη πυκνωτή.

αγωγοί λέγονται αγώγμες πλάκες (κι ας μην είναι πλάκες :)) ή αλλιώς, οπλισμοί. Αν οι αγωγοί φέρουν φορτίου ίδιου μέτρου  $|q|$  τότε αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους - αν και καταλαβαίνετε ότι το συνολικό φορτίο τους είναι (ανθροιστικά) μηδέν. Αλήθεια, τι καθορίζει πόσο φορτίο μπορεί να φέρουν; Πειραματικά έχει δειχθεί ότι η ποσότητα φορτίου  $Q$  σε ένα πυκνωτή είναι γραμμικά ανάλογη με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους αγωγούς. Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από το σχήμα και την απόσταση των αγωγών. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

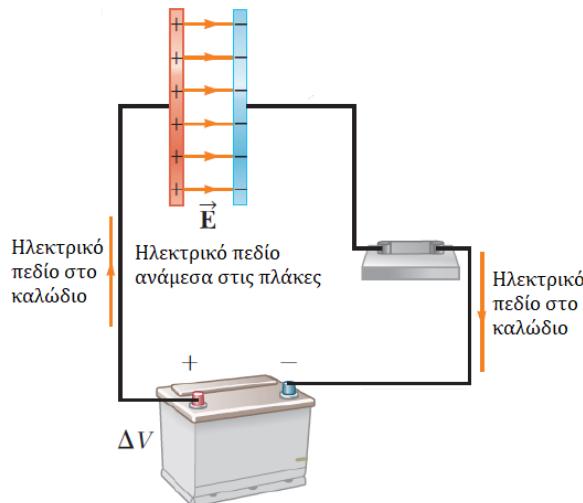
$$Q = C \Delta V \quad (4.294)$$

αν ορίσουμε τη χωρητικότητα  $C$  ως το λόγο του μέτρου του φορτίου σε έναν εν των δυο αγωγών προς το μέτρο της διαφοράς δυναμικού ανάμεσά τους:

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} \quad (4.295)$$

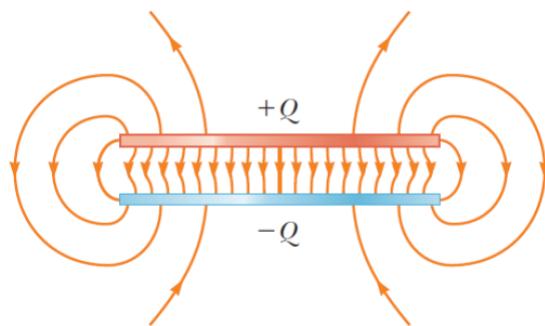
Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας είναι 1 C/V ή αλλιώς 1 Farad, προς τιμήν του Michael Faraday.

Ας ψεωρήσουμε έναν πυκνωτή που αποτελείται από δυο παράλληλες πλάκες, όπως στο Σχήμα 4.48. Ένας τρόπος να τον φορτίσουμε είναι να τον συνδέσουμε σε ένα κύκλωμα με μπαταρία. Πριν προχωρήσουμε, μερικές εξηγήσεις: ηλεκτρικό κύκλωμα ονομάζεται ένα μονοπάτι στο οποίο μπορούν να ρέουν φορτία, ενώ ως μπαταρία εννοούμε μια συσκευή που μορεί να διατηρεί μια διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  ανάμεσα στους πόλους της. Πόλοι ονομάζονται περιοχές της μπαταρίας που φορτία μπορούν να βγαίνουν (από τον έναν) και να μπαίνουν (από τον άλλο). Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, η μπαταρία εγκαθιστά ηλεκτρικό πεδίο στα καλώδια. Ας δούμε τη “δεξιά” (μπλέ) πλάκα. Η μπαταρία εγκαθιστά διαφορά δυναμικού μεταξύ πόλου και πλάκας. Έτσι, εγείρεται ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και άρα μια ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια του, τα οποία κινούνται προς την πλάκα. Γιατί; Διότι τα ηλεκτρόνια - λόγω αρνητικού φορτίου - κινούνται προς περιοχές υψηλού



Σχήμα 4.48: Πυκνωτής παράλληλων πλακών.

δυναμικού. Η κίνηση συνεχίζεται ως ότου η πλάκα, το καλώδιο, και ο αρνητικός πόλος της μπαταρίας έχουν όλα το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Όταν αυτό γίνει, η διαφορά δυναμικού παύει να υπάρχει, αφού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται. Η (μπλέ) πλάκα φέρει πλέον αρνητικό φορτίο  $-Q$ . Τα ακριβώς ίσα όμοια ισχύουν και για την “αριστερή” (κόκκινη) πλάκα, με τη διαφορά ότι η πλάκα φορτίζεται θετικά. Στην πραγματικότητα, το ηλεκτρικό πεδίο ενός τέτοιου πυκνωτή είναι όπως στο Σχήμα 4.49. Είναι



Σχήμα 4.49: Ηλεκτρικό πεδίο σε πραγματική πυκνωτή παράλληλων πλακών.

όμως βοικό να θεωρούμε ότι αν οι πλάκες είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους, δηλ. η απόσταση τους  $d$  είναι πολύ μικρή, τότε το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα τους είναι σχεδόν ομογενές. Φυσικά αγνοούμε τα (ενδιαφέροντα) φαινόμενα που συμβαίνουν στα άκρα των πλακών.

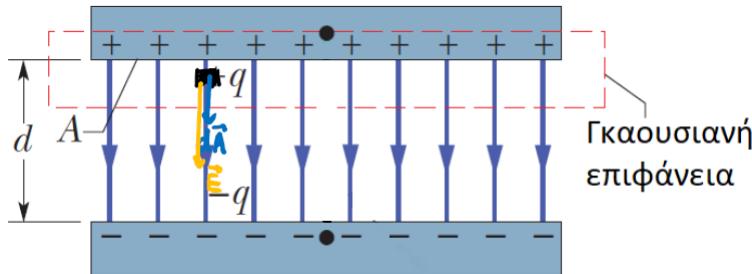
Ας βρούμε τώρα μια έκφραση για τη χωρητικότητα  $C$  ενός ζεύγους πλακών φορτίου  $Q$  η καθεμιά. Η διαδικασία μπορεί θεωρηθεί ως εξής:

1. Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή (ή το ηλεκτρικό φορτίο, αν δεν είναι γνωστό)
2. Υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  μεταξύ των πλακών
3. Βρίσκουμε τη χωρητικότητα με τη σχέση  $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Ο υπολογισμός όλων αυτών είναι σχετικά απλός αν η γεωμετρία του πυκνωτή είναι απλή.

### 4.6.1 Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών

Ας δούμε πρώτα έναν πυκνωτή παράλληλων πλακών, όπως στο Σχήμα 4.50. Έστω ότι οι πλάκες έχουν απόσταση  $d$  και εμβαδόν  $A$ , η μια πλάκα φέρει φορτίο  $Q$  και η άλλη  $-Q$ . Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι  $\sigma = Q/A$ . Θεωρούμε ότι οι πλάκες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται ανάμεσά τους είναι ομογενές. Ξέρουμε ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες του έχει μέτρο



Σχήμα 4.50: Πυκνωτής παράλληλων πλακών.

$$|\Delta V| = Ed \quad (4.296)$$

Χρειαζόμαστε να βρούμε το φορτίο του,  $Q$ . Θα μας φανεί χρήσιμος ο νόμος του Gauss. Θεωρούμε γκαουσιανή επιφάνεια η οποία περιλαμβάνει όλο τον έναν οπλισμό και πάνω σε αυτή ένα τμήμα εμβαδού  $dA$ . Ισχύουν οι συνθήκες:

- Τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι παράλληλα μεταξύ τους.
- Το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι σταθερό.

Οπότε

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \iff Q = EA\epsilon_0 \quad (4.297)$$

Τελικά, η χωρητικότητα του πυκνωτή παράλληλων πλακών είναι

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.298)$$

### 4.6.2 Κυλινδρικός Πυκνωτής

Ο πυκνωτής παράλληλων πλακών δεν είναι ο μόνος που υπάρχει, οπότε ας γνωρίσουμε και τον κυλινδρικό πυκνωτή. Ο τελευταίος αποτελείται από ένα στέρεο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $a$  και φορτίου  $Q$ , και περικλείεται από ομοαξονικό αγωγό με κυλινδρικό κέλυφος αμελητέου πάχους, ακτίνας  $b > a$  και φορτίου  $-Q$ . Οι αγωγοί έχουν γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ . Ας βρούμε τη χωρητικότητα ενός τέτοιου πυκνωτή αν το μήκος του είναι  $l$ . Δείτε το Σχήμα 4.51. Από το νόμο του Gauss είχαμε βρει ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $r$  μιας άπειρου μήκους ράβδου είναι

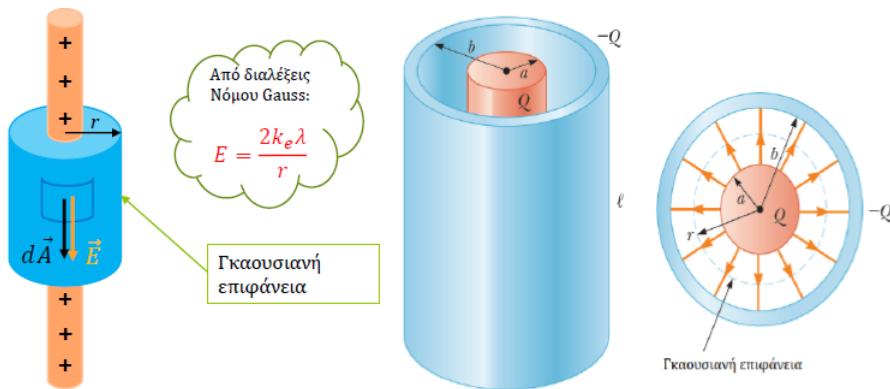
$$E_r = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.299)$$

Για τη χωρητικότητα όμως θέλουμε τη διαφορά δυναμικού. Πώς θα τη βρούμε; Έστω η διαδρομή από το εξωτερικό μέρος του εσωτερικού αγωγού ως το εσωτερικό μέρος του εξωτερικού, δηλ. από την ακτίνα  $a$  ως την  $b$ . Οπότε

$$\Delta V_{a \rightarrow b} = V_b - V_a = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = -2k_e \lambda \int_a^b \frac{dr}{r} \quad (4.300)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μας δίνει

$$\Delta V = -2k_e \lambda \ln \frac{b}{a} \quad (4.301)$$



Σχήμα 4.51: Κυλινδρικός πυκνωτής.

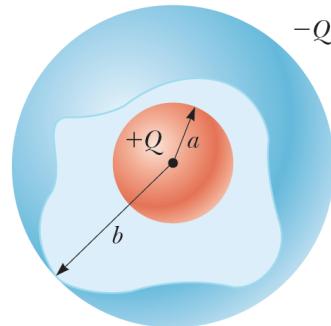
Η χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή είναι

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{2k_e \lambda \ln \frac{b}{a}} = \frac{l}{2k_e \ln \frac{b}{a}} \quad (4.302)$$

Ένας πολύ γνωστός σας κυλινδρικός πυκνωτής είναι το ομοαξονικό καλώδιο που χρησιμοποιείται στις τηλεοράσεις.

#### 4.6.3 Σφαιρικός Πυκνωτής

Τέλος, μια ακόμα σημαντική κατηγορία πυκνωτών είναι οι σφαιρικοί πυκνωτές. Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από ένα σφαιρικό αγώγιμο κέλυφος ακτίνας  $b$  και φορτίου  $-Q$ , ομόκεντρο με μια μικρότερη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας  $a$  και φορτίου  $Q$ , όπως στο Σχήμα 4.52. Ο πυκνωτής έχει σφαιρική συμμετρία, οπότε



Σχήμα 4.52: Σφαιρικός πυκνωτής.

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα από προηγούμενες παραγράφους για να βρούμε τη χωρητικότητα. Έχουμε ήδη δει ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου εκτός ενός ομοιόμορφου σφαιρικού φορτίου είναι ακτινική και το μέτρο του είναι

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (4.303)$$

Στην περίπτωση μας το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για το πεδίο ανάμεσα στις δύο σφαίρες, δηλ. για  $a < r < b$ . Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις σφαίρες για μια μετατόπιση  $d\vec{s}$  είναι

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E_r dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q \frac{a - b}{ab} \quad (4.304)$$

δεδομένου ότι το διάνυσμα  $\vec{E}$  και το διάνυσμα  $d\vec{s}$  είναι παράλληλα σε κάθε ακτίνα. Πλέον μπορούμε να βρούμε τη χωρητικότητα ως

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{k_e Q \frac{a-b}{ab}} = \frac{ab}{k_e(b-a)} \quad (4.305)$$

#### 4.6.4 Απομονωμένος Αγωγός

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα είχαμε ένα ζεύγος αγωγών που σχηματίζαν ένα πυκνωτή. Όμως ακόμα και ένας αγωγός έχει χωρητικότητα! Για παράδειγμα, σκεφτείτε έναν απομονωμένο, σφαιρικό, φορτισμένο αγωγό. Το ηλεκτρικό πεδίο γύρω του είναι ακριβώς το ίδιο όπως θα ήταν αν τον περιέβαλλε ένα ομόκεντρο, αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος άπειρης ακτίνας, με αντίθετο φορτίο από του σφαιρικού αγωγού. Μπορούμε να φανταστούμε αυτό το φανταστικό κέλυφος ως το δεύτερο αγωγό ενός ζεύγους αγωγών που σχηματίζουν έναν πυκνωτή! Το ηλεκτρικό δυναμικό της σφαίρας ακτίνας  $a$  είναι απλά

$$V_a = k_e \frac{Q}{a} \quad (4.306)$$

και άρα

$$C = \frac{Q}{\Delta V_{\infty \rightarrow a}} = \frac{Q}{k_e \frac{Q}{a} - 0} = \frac{a}{k_e} = 4\pi \epsilon_0 a \quad (4.307)$$

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα ενός απομονωμένου, φορτισμένου σφαιρικού αγωγού είναι ανάλογη της ακτίνας  $a$  και ανεξάρτητη από το φορτίο του και τη διαφορά δυναμικού του. Δεν ήταν ακριβώς το ίδιο σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα; :)

#### Παράδειγμα 4.29:

Όπως ίσως ακούσατε στην περίπτωση του πυρηνικού ατυχήματος της Fukushima<sup>a</sup>, για τη μέτρηση της ραδιενέργειας χρησιμοποιείται μια συσκευή γνωστή ως μετρητής Geiger, ο οποίος αποτελείται από έναν κυλινδρικό μεταλλικό σωλήνα μήκους  $l$ , διαμέτρου  $D_1 = 0.025$  m, και φορτίου  $+Q$ , σφραγισμένο στα άκρα του, και ένα καλώδιο διαμέτρου  $D_2 = 0.001$  m εντός του σωλήνα, κατά μήκος του άξονά του, φορτίου  $-Q$ . Κάτοψη του μετρητή Geiger βλέπετε στο Σχήμα 4.53. Ο κύλινδρος και το καλώδιο έχουν την ίδια γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$  και διαχωρίζονται από ένα αέριο χαμηλής πίεσης.

(α') Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από τις προηγούμενες παραγράφους, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  μεταξύ του κυλίνδρου και του καλώδιου, σε ένα σημείο απόστασης  $r$  από το κέντρο της διάταξης.

(β') Βρείτε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  ανάμεσα στο καλώδιο και στον κύλινδρο. Αξιοποιήστε τη συμμετρία του σχήματος για να απλοποιήσετε το ολοκλήρωμα.

(γ') Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση  $r$  εντός του κυλίνδρου συναρτήσει των  $R_1, R_2$ , που αποτελούν τις ακτίνες του κυλίνδρου και του καλώδιου, αντίστοιχα.

(δ') Ποιά είναι η χωρητικότητα  $C$  της διάταξης;

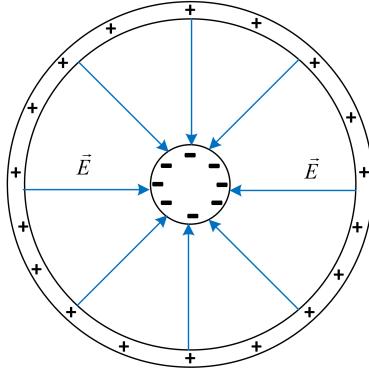
<sup>a</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Fukushima\\_Daiichi\\_nuclear\\_disaster](https://en.wikipedia.org/wiki/Fukushima_Daiichi_nuclear_disaster)

#### Λύση:

(α') Ο νόμος του Gauss μας λέει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα σε κυλίνδρους οφείλεται μόνο στο φορτίο του εσωτερικού κυλίνδρου. Άρα, το  $\vec{E}$  είναι το πεδίο σε απόσταση  $r$  ενός μεγάλου, φορτισμένου καλωδίου, και το οποίο βρήκαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι είναι

$$E_r = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.308)$$

με κατεύθυνση ακτινικά προς το εσωτερικό.



Σχήμα 4.53: Κάτοψη μετρητή Geiger.

(β') Θα είναι

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.309)$$

Θα ολοκληρώσουμε ακτινικά, από  $R_1$  στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου ως  $R_2$  σε αυτήν την εξωτερικού. Το πεδίο  $\vec{E}$  είναι αρνητικό, ενώ η μεταβλητή  $d\vec{s}$  θα αντικαταστηθεί με  $d\vec{r}$ . Άρα

$$\Delta V = - \int \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = - \int_{R_1}^{R_2} -k_e \frac{2\lambda}{r} dr \quad (4.310)$$

$$= 2k_e \lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 2k_e \lambda \left[ \ln(r) \right]_{R_1}^{R_2} \quad (4.311)$$

$$= 2k_e \lambda \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (4.312)$$

(γ') Από τη σχέση

$$E = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.313)$$

και τη σχέση

$$\Delta V = 2k_e \lambda \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (4.314)$$

εύκολα λαμβάνουμε ότι

$$E = \frac{\Delta V}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (4.315)$$

(δ') Η χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση

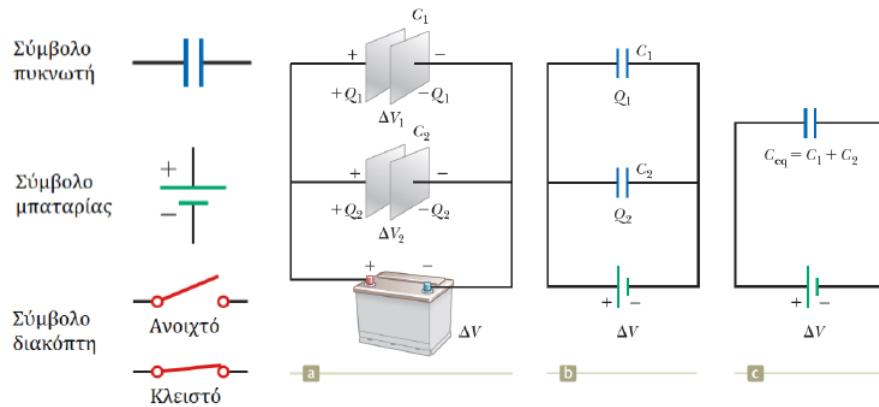
$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{2k_e \lambda \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.316)$$

κι αφού  $\lambda = Q/l$ 

$$C = \frac{l}{2k_e \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.317)$$

#### 4.6.5 Συνδυασμοί Πυκνωτών

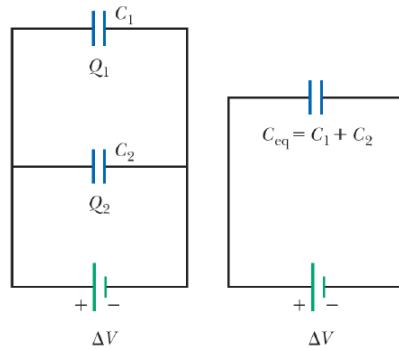
Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι θα συμβεί αν βάλουμε τους πυκνωτές μας σε διάφορες διατάξεις μεταξύ τους και μεταξύ μιας μπαταρίας (που δουλεύει σαν παροχή διαφοράς δυναμικού, όπως είπαμε). Πρέπει να βρούμε έναν ευκολότερο τρόπο να σχεδιάζουμε τέτοιες συνδεσμολογίες. Δείτε το Σχήμα 4.54. Οι πυκνωτές θα συμβολίζονται στο εξής με δύο ίσες παράλληλες γραμμές σε μικρή απόσταση μεταξύ τους (με μπλε χρώμα, εν γένει), ενώ η πηγή δυναμικού θα συμβολίζεται με δύο άνισες παράλληλες γραμμές σε μικρή απόσταση (με πράσινο χρώμα, εν γένει). Το Σχήμα 4.54(c) δείχνει το τελικό σχέδιο.



Σχήμα 4.54: Συμβολισμοί.

## Παράλληλη Σύνδεση

Η πρώτη συνδεσμολογία που θα δούμε αφορά την παράλληλη σύνδεση μεταξύ δύο πυκνωτών με τη μπαταρία, όπως στο Σχήμα 4.55. Προσέξτε, η λέξη “παράλληλα” δε σχετίζεται με τη σχεδίαση της διάταξης. Σχετίζεται με τη σχεδίαση της διάταξης.



Σχήμα 4.55: Παράλληλη Σύνδεση.

ται με το ότι οι πυκνωτές είναι απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον έναν τους οπλισμό και απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον άλλο. Η ίδια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα των δύο ζευγών συνδεδεμένων οπλισμών. Αυτό σημαίνει ότι οι πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους.

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι ίση με  $\Delta V$ , δηλ.

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V \quad (4.318)$$

με  $\Delta V_1, \Delta V_2$  η διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός πυκνωτή. Οι πυκνωτές φορτίζονται με φορτίο

$$Q_1 = C_1 \Delta V \quad (4.319)$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V \quad (4.320)$$

Το συνολικό φορτίο στους πυκνωτές αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους φορτίων, δηλ.

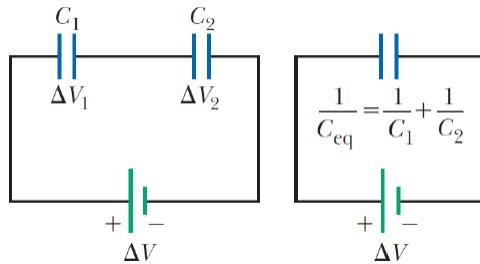
$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V \quad (4.321)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι οι δύο πυκνωτές μπορούν να αντικατασταθούν από έναν, με χωρητικότητα  $C_{eq} = C_1 + C_2$ . Γενικότερα, για  $N$  συνδεδεμένους παράλληλους πυκνωτές ισχύει

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (4.322)$$

Σύνδεση σε Σειρά

Η δεύτερη συνδεσμολογία που θα δούμε αφορά τη σειριακή σύνδεση μεταξύ δύο πυκνωτών όπως στο Σχήμα 4.56. Ξανά, η λέξη “σειριακή” δε σημαίνει κάτι όσον αφορά τη σχεδίαση. Σημαίνει ότι οι πυκνωτές συνδέονται ο



Σχήμα 4.56: Σειριακή Σύνδεση.

ένας μετά τον άλλο, και η όποια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα της δίλης συνδεσμολογίας. Συγκεχριμένα, όπως βλέπετε στο Σχήμα 4.56, η αριστερή πλάκα του  $C_1$  και η δεξιά πλάκα του  $C_2$  είναι συνδεδεμένες με την πηγή. Οι άλλες δύο πλάκες είναι απλά συνδεδεμένες μεταξύ τους, και εφ' όσον το συνολικό τους φορτίο είναι μηδέν, έτσι πρέπει να παραμείνει και μετά απ' οτιδήποτε συμβεί, αφού αποτελούν ένα απομονωμένο - ηλεκτρικά - σύστημα!

Ας θεωρήσουμε αρχικά αφόρτιστους πυκνωτές. Όταν συνδέουμε την μπαταρία, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από την αριστερή πλάκα του  $C_1$  στη δεξιά πλάκα του  $C_2$ . Ένα ισόποσο φορτίο, αλλά αρνητικό, εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του  $C_2$  και άρα αυτή καταλήγει να έχει πλεόνασμα (θετικού) φορτίου. Το αρνητικό φορτίο που εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του  $C_2$  προκαλεί συσσώρευση αρνητικού φορτίου στη δεξιά πλάκα του  $C_1$ . Έτσι και οι δύο πυκνωτές έχουν δεξιές πλάκες με φορτίο  $-Q$  και αριστερές πλάκες με φορτίο  $+Q$ . Με άλλα λόγια, το φορτίο των δύο σειριακών πυκνωτών είναι ίδιο:  $Q_1 = Q_2 = Q$ .

Προφανώς η διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε πυκνωτή δεν είναι ίδια, αφού δε συνδέονται οι οπλισμοί τους κατευθείαν με την πηγή, όμως σίγουρα θα ισχύει

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \quad (4.323)$$

Οπότε

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (4.324)$$

Αν θεωρήσουμε έναν πυκνωτή που έχει την ίδια επίδραση στη συνδεσμολογία με τους δύο πυκνωτές, τότε

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (4.325)$$

Εξισώνοντας βλέπετε ότι

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}} \quad (4.326)$$

Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση για οποιαδήποτε σειριακή σύνδεση πυκνωτών έχουμε

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (4.327)$$

Συνοψίζοντας:

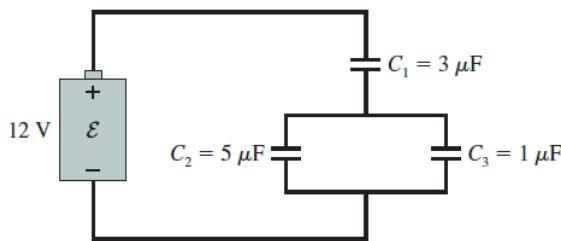
- Οι παράλληλα συνδεδεμένοι πυκνωτές έχουν όλοι την ίδια διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ , αυτή της πηγής. Οι σειριακά συνδεδεμένοι πυκνωτές έχουν όλοι το ίδιο ποσό φορτίου,  $\pm Q$ .

- Η ισοδύναμη χωρητικότητα μιας παράλληλης συνδεσμολογίας πυκνωτών είναι μεγαλύερη από οποιονδήποτε πυκνωτή στη συνδεσμολογία. Η ισοδύναμη χωρητικότητα μιας συνδεσμολογίας σε σειρά είναι μικρότερη από οποιονδήποτε πυκνωτή στη συνδεσμολογία.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

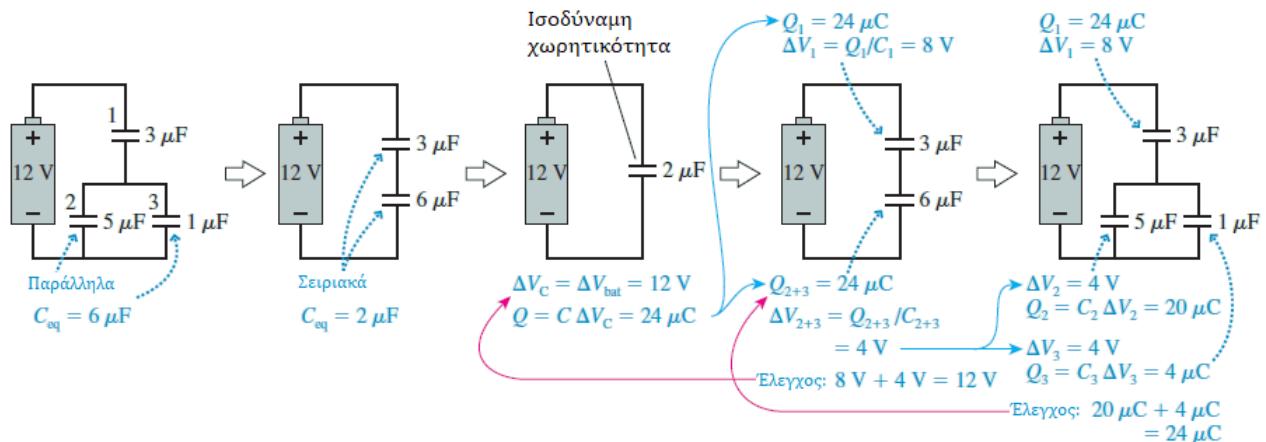
#### Παράδειγμα 4.30:

Βρείτε το φορτίο και τη διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός από τους τρεις πυκνωτές του Σχήματος 4.57.



Σχήμα 4.57: Κύκλωμα πυκνωτών.

Λύση: Η μπαταρία παρέχει διαφορά δυναμικού  $\Delta V = 12 \text{ V}$ . Οι τρεις πυκνωτές δεν είναι συνδεδεμένοι ούτε σε σειρά ούτε παράλληλα, αλλά μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες που είναι είτε σειριακά είτε παράλληλα συνδεδεμένοι. Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων συνίσταται στο συνδυασμό των στοιχείων ώστε να βρεθεί το ισοδύναμο στοιχείο, και μετά στην αντιστροφή της διαδικασίας για να βρεθούν οι ζητούμενες τιμές για κάθε στοιχείο. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 4.58. Ξεκινώντας από το αριστερό κύκλωμα, η ισοδύναμη



Σχήμα 4.58: Ανάλυση κυκλώματος πυκνωτών.

χωρητικότητα των πυκνωτών των  $5 \mu\text{F}$  και  $1 \mu\text{F}$  σε παραλληλία είναι

$$C_{eq} = 5 + 1 = 6 \mu\text{F} \quad (4.328)$$

Η ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών των  $3 \mu\text{F}$  και  $6 \mu\text{F}$  σε σειρά είναι

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = 2 \mu\text{F} \quad (4.329)$$

Η ισοδύναμη χωρητικότητα μας δίνει ότι το συνολικό φορτίο είναι

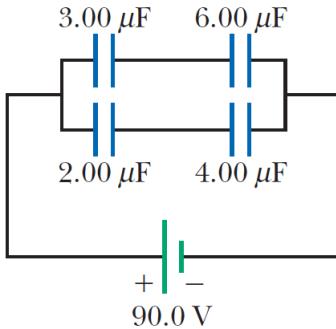
$$Q = C\Delta V = 24 \mu C \quad (4.330)$$

Μπορούμε τώρα να πάμε προς τα πίσω. Οι πυκνωτές σε σειρά έχουν όλοι το ίδιο φορτίο, οπότε το φορτίο στον  $C_1$  και στον  $C_{2+3}$  θα είναι  $\pm 24 \mu C$ . Βρίσκουμε έτσι ότι  $\Delta V_1 = 8 V$  και  $\Delta V_{2+3} = 4 V$ . Οι πυκνωτές σε παραλληλία έχουν όλοι την ίδια διαφορά δυναμικού, οπότε  $\Delta V_2 = \Delta V_3 = 4 V$ . Βρίσκουμε έτσι ότι  $Q_2 = 20 \mu C$  και ότι  $Q_3 = 4 \mu C$ . Το φορτίο και η διαφορά δυναμικού σε καθένα από τους τρεις πυκνωτές φαίνεται στο δεξιά κύκλωμα του Σχήματος 4.58.

### Παράδειγμα 4.31:

Για το σύστημα του Σχήματος 4.59, βρείτε:

- (α') την ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος
- (β') το φορτίο σε καθένα πυκνωτή
- (γ') τη διαφορά δυναμικού σε κάθε πυκνωτή



Σχήμα 4.59: Συνδυασμός Πυκνωτών.

Λύση: Οι δείκτες των μεταβλητών  $i$  υποδηλώνουν τον πυκνωτή χωρητικότητας  $i \mu F$ .

(α') Για την άνω ομάδα των πυκνωτών σε σειρά, η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$\frac{1}{C_{up}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_{up} = 2 \mu F \quad (4.331)$$

Για την κάτω ομάδα των πυκνωτών σε σειρά, η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$\frac{1}{C_{low}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow C_{low} = 1.33 \mu F \quad (4.332)$$

Αυτές οι δύο χωρητικότητες συνδέονται παράλληλα και έτσι η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$C_{eq} = C_{up} + C_{low} = 2 + 1.33 = 3.33 \mu F \quad (4.333)$$

(β') Παρατηρήστε ότι η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας είναι αυτή που έχον στα άκρα τους οι δύο ομάδες πυκνωτών, η άνω και η κάτω. Κάθε συνδυασμός πυκνωτών σε σειρά έχει το ίδιο φορτίο με τον ισοδύναμο πυκνωτή. Για την άνω ομάδα

$$Q_3 = Q_6 = Q_{up} = C_{up}\Delta V = 180 \mu C \quad (4.334)$$

ενώ για την κάτω ομάδα

$$Q_2 = Q_4 = Q_{low} = C_{low}\Delta V = 120 \mu C \quad (4.335)$$

(γ') Η διαφορά δυναμικού κατά μήκος καθενός από τους πυκνωτές είναι

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 60 \text{ V} \quad (4.336)$$

$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 60 \text{ V} \quad (4.337)$$

$$\Delta V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = 30 \text{ V} \quad (4.338)$$

$$\Delta V_6 = \frac{Q_6}{C_6} = 30 \text{ V} \quad (4.339)$$

### Παράδειγμα 4.32:

Δυο πυκνωτές δίνουν ισοδύναμη χωρητικότητα  $C_p$  όταν συνδέονται παράλληλα και ισοδύναμη χωρητικότητα  $C_s$  όταν συνδέονται σε σειρά. Ποιά είναι η χωρητικότητα του καθενός;

Λύση: Έχουμε

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (4.340)$$

και

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.341)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη στη δεύτερη

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_p - C_1} = \frac{C_p - C_1 + C_1}{C_1(C_p - C_1)} = \frac{C_p}{C_1(C_p - C_1)} \quad (4.342)$$

Απλοποιώντας

$$C_1^2 - C_1 C_p + C_p C_s = 0 \quad (4.343)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου δίνονται ως

$$C_1 = \frac{C_p \pm \sqrt{C_p^2 - 4C_p C_s}}{2} = \frac{1}{2} C_p + \sqrt{\frac{1}{4} C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.344)$$

Διαλέξαμε το θετικό πρόσημο καθώς δεν αλλάζει κάτι στο αποτέλεσμα (το αρνητικό πρόσημο δίνει τις ίδιες τιμές αλλά ανάποδα στους πυκνωτές). Οπότε

$$C_2 = \frac{1}{2} C_p - \sqrt{\frac{1}{4} C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.345)$$

Οπότε τελικά

$$C_1 = \frac{1}{2} C_p + \sqrt{\frac{1}{4} C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.346)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C_p - \sqrt{\frac{1}{4} C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.347)$$

### Παράδειγμα 4.33:

Για να διορθώσετε ένα τροφοδοτικό για έναν στερεοφωνικό ενισχυτή, χρειάζεστε έναν πυκνωτή χωρητικότητας 100 μF ικανό να αντέξει διαφορά δυναμικού 90 V. Το μόνο άμεσα διαθέσιμο προϊόν στο ηλεκτρολογείο της γειτονιάς σας είναι ένα κουτί με πέντε (5) πυκνωτές χωρητικότητας 100 μF, ικανούς να αντέξουν διαφορά δυναμικού 50 V ο καθένας.

- (α') Ποιός συνδυασμός από αυτούς τους πυκνωτές έχει τα σωστά ηλεκτρικά χαρακτηριστικά; Θα χρησιμοποιήσετε όλους τους πυκνωτές στο κουτί;
- (β') Με το συνδυασμό που βρήκατε, ποιά είναι η μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός από τους πυκνωτές;

Λύση:

(α') Αν βάλουμε δυο ίδιους πυκνωτές σε σειρά, η διαφορά δυναμικού που θα παρέχεται στο κύκλωμα θα “κοπεί” στα δυο, ισόποσα στα άκρα καθενός πυκνωτή: έτσι ο καθένας θα έχει 45 V στα άκρα του, αλλά η συνολική χωρητικότητα θα μειωθεί στο μισό από όση θέλουμε. Για να διπλασιάσουμε τη χωρητικότητα, θέλουμε άλλο ένα ζεύγος πυκνωτών, ίδιο με αυτό που φτιάξαμε, αλλά σε παράλληλη σύνδεση με το προηγούμενο. Η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} + \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = 100 \text{ μF} \quad (4.348)$$

Προφανώς ένας πυκνωτής περισσεύει. Υπάρχει άλλη μια διάταξη που δουλεύει (που πάλι περισσεύει ένας πυκνωτής). Μπορείτε να τη βρείτε;

(β') Καθένας από τους τέσσερις πυκνωτές θα λάβει μέγιστη διαφορά δυναμικού 45 V.

#### 4.6.6 Ενέργεια Πυκνωτή

Ως τελευταίο ερώτημα αφήσαμε το ποσό της ενέργειας που αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή. Ας θεωρήσουμε μια υπεραπλουστευμένη, “μηχανική” διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή: ένα μικρό ποσό φορτίου μεταφέρεται από τη μια πλάκα μέσω δύναμης προς την άλλη πλάκα. Η δύναμη παράγει έργο στο φορτίο και δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού (μικρή) ανάμεσα στις πλάκες. Όσο μεταφέρουμε φορτίο από τη μια πλάκα στην άλλη, τόσο μεγαλώνει η διαφορά δυναμικού, καθώς περισσότερο έργο απαιτείται για τη μεταφορά μιας ποσότητας φορτίου. Το έργο που παράγεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εμφανίζεται ως μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Γιατί συμβαίνει αυτό; Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας!

Έστω ότι ο πυκνωτής έχει φορτίο  $q$  σε κάποιο στάδιο της παραπάνω διαδικασίας φόρτισης. Η διαφορά δυναμικού θα είναι

$$\Delta V = q/C \quad (4.349)$$

Το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά ενός απειροστά μικρού φορτίου  $dq$  από μια πλάκα φορτίου  $-q$  σε αυτή φορτίου  $+q$  είναι

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \quad (4.350)$$

Αν θέλουμε να βρούμε το συνολικό έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του πυκνωτή από μηδενικό φορτίο σε φορτίο  $Q$  θα είναι

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.351)$$

Οπότε το έργο που παράγεται κατά τη φόρτιση του πυκνωτή αποθηκεύεται ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια  $U_E$  και άρα

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (4.352)$$

με τις υπόλοιπες εκφράσεις να προκύπτουν από απλές αντικαταστάσεις από τη σχεση της χωρητικότητας. Θεωρούμε την ενέργεια σε έναν πυκνωτή ως αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες του, όσο φορτίζεται. Για έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες που απέχουν  $d$ , η ενέργεια που φέρει στους οπλισμούς του είναι

$$U_E = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 AdE^2 \quad (4.353)$$

Η χρησιμότητα ενός πυκνωτή προέρχεται από το γεγονός ότι μπορεί να φορτιστεί αργά (κάτι που εξαρτάται και από την μπαταρία) αλλά μπορεί να μεταφέρει ενέργεια πολύ γρήγορα! Ένα ανάλογο από τη Μηχανική είναι η “φόρτιση” ενός καταπέλτη. Χρειάζεται πολύς κόπος για να οπλίσεις ένα καταπέλτη αλλά πολύ γρήγορα εκλύει την ενέργεια του πετώντας κάποιο τεράστιο κομμάτι πέτρας. Σκεφτείτε επίσης το φλας της φωτογραφικής μηχανής - που είδαμε και σε παράδειγμα. Η μπαταρία της κάμερας φορτίζει τον πυκνωτή και όταν αυτό συμβεί μπορείτε να διαχύσετε την αποθηκευμένη ενέργεια σε μια λάμπα. Ακόμα και στα μοντέρνα κινητά τηλέφωνα δεν μπορείτε να βγάλετε δυο φωτογραφίες με φλας αμέσως γιατί παίρνει λίγο χρόνο η φόρτιση του αντίστοιχου πυκνωτή. Επίσης, ο απινδωτής είναι μια πολύ σημαντική εφαρμογή των πυκνωτών στην ιατρική. Μια καρδιακή προσβολή ή ένας τραυματισμός μπορεί να βάλει την καρδιά σας σε μια κατάσταση που λέγεται μαρμαρυγή: η καρδιά σας “αποσυγχρονίζεται” και δεν αντλεί σωστά το αίμα. Ένα δυνατό ηλεκτρικό σοκ στο στήθος σταματά πλήρως την καρδιά, επιτρέποντας στην καρδιά να επανασυγχρονιστεί. Η ενέργεια του απινδωτή - που φτάνει μέχρι τα 360 J - εκλύεται μόλις σε περίπου 2 ms μέσω δυο πλακών που βάζει ο γιατρός στο στήθος του ασθενούς.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.34:

Το “φλας” μιας φωτογραφικής μηχανής χρησιμοποιεί μια μπαταρία 3 V για να φορτίσει έναν πυκνωτή. Ο πυκνωτής αποφορτίζεται μέσω του λαμπτήρα που παράγει το φλας. Η εκφόρτιση γίνεται σε  $10 \times 10^{-6}$  s και η μέση ισχύς που παραδίδεται στο λαμπτήρα είναι 10 W. Ποιά είναι η χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή;

**Λύση:** Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή διαχέεται στο περιβάλλον μέσω του φλας, και εφόσον η μέση ισχύς ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, δηλ.

$$P = \frac{E}{\Delta t} \quad (4.354)$$

τότε είναι

$$E = P\Delta t = 10 \times 10 \times 10^{-6} = 10^{-4} \text{ J} \quad (4.355)$$

Αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή. Από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 \quad (4.356)$$

έχουμε

$$C = \frac{2U}{\Delta V^2} = 22 \times 10^{-6} \text{ F} \quad (4.357)$$

Παράδειγμα 4.35:

Δυο ίδιοι πυκνωτές παράλληλων πλακών, καθένας με χωρητικότητα  $10 \text{ } \mu\text{F}$  φορτίζονται σε διαφορά δυναμικού  $50 \text{ V}$  και μετά αποσυνδέονται από την μπαταρία. Στη συνέχεια, συνδέονται παράλληλα με τις πλάκες ίδιου φορτίου να συνδέονται μεταξύ τους. Τέλος, η απόσταση μεταξύ των πλακών στον έναν από τους δυο πυκνωτές διπλασιάζεται.

- (α') Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος των δυο πυκνωτών πριν το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (β') Βρείτε τη διαφορά δυναμικού σε κάθε πυκνωτή μετά το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (γ') Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος μετά το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (δ') Ερμηνεύστε τη διαφορά στις απαντήσεις (α), (c) με βάση τη διατήρηση της ενέργειας.

Λύση:

(α') Λόγω της παράλληλης μεταξύ τους σύνδεσης, η διαφορά δυναμικού είναι η ίδια:

$$U_E = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = C(\Delta V)^2 = 2.5 \times 10^{-2} \text{ J} \quad (4.358)$$

(β') Αφού η χωρητικότητα τέτοιου πυκνωτή δίνεται ως

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.359)$$

και η απόσταση  $d$  διπλασιάζεται, ο νέος πυκνωτής θα έχει χωρητικότητα  $C' = C/2$ . Το συνολικό φορτίο είναι το ίδιο με πριν, δηλ.

$$Q_{bef} = Q_{aft} \quad (4.360)$$

$$C(\Delta V) + C(\Delta V) = C(\Delta V') + \frac{C}{2}(\Delta V') \quad (4.361)$$

$$2C(\Delta V) = \frac{3}{2}C(\Delta V') \quad (4.362)$$

$$\Delta V' = \frac{4}{3}\Delta V = 66.7 \text{ V} \quad (4.363)$$

(γ') Η νέα συνολική ενέργεια θα είναι

$$U'_E = \frac{1}{2}C(\Delta V')^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}C(\Delta V')^2 = \frac{3}{4}C\left(\frac{4\Delta V}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}U_E = 3.3 \times 10^{-2} \text{ J} \quad (4.364)$$

(δ') Η διαφορά στις ενέργειες οφείλεται στο θετικό έργο που παρήχθη από κάποιον που τράβηξε τις πλάκες στη διπλάσια απόσταση.

#### 4.7 Ρεύμα και Αντίσταση

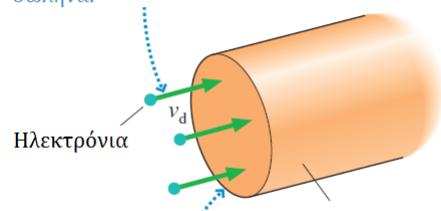
Ως τώρα θεωρούσαμε τα φορτία ως στάσιμα σε μια περιοχή του χώρου. Καιρός είναι να μελετήσουμε την κίνησή τους! Θα μάθουμε τον όρο ηλεκτρικό ρεύμα ή απλά ρεύμα, για την περιγραφή του ρυθμού ροής του ηλεκτρικού φορτίου. Ροές φορτίων υπάρχουν σε ατμοσφαιρικά ηλεκτρικά φαινόμενα, στο ανθρώπινο σώμα, σε ηλεκτρικά συστήματα, στο ηλιακό μας σύστημα, και σε τόσα άλλα μέρη. Θα μάθουμε τον όρο ηλεκτρική αντίσταση και θα εισάγουμε ένα νέο στοιχείο κυκλώματος, τον αντιστάτη.

Τα φορτία που κινούνται σε έναν αγωγό ονομάζονται φορείς φορτίου. Στα μέταλλα, οι φορείς φορτίου είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των ατόμων του αγωγού, αλλά μη νομίσετε ότι αυτό ισχύει καθολικά: σε ημιαγωγούς ή άλλους αγωγούς οι φορείς φορτίου είναι διαφορετικοί. Απλά λόγω της σημασίας των μετάλλων στα ηλεκτρικά

κυκλώματα, επικετρωνόμαστε σε αυτά. Τα αγώγιμα ηλεκτρόνια στα μέταλλα κινούνται τυχαία αλλά δεν έχουν προσανατολισμένη κίνηση προς μια ή άλλη κατεύθυνση. Μπορούμε να τα εξαναγκάσουμε σε μια τέτοια “τάση”, εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο θα προκαλέσει προσανατολισμένη κίνηση προς μια κατεύθυνση. Σκεφτείτε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι μικρά παιδιά σε ένα γεμάτο προαύλιο σχολείου: για έναν εξωτερικό παρατηρητή, κινούνται ακατάπαιντα και τυχαία σε διάφορες κατεύθυνσεις. Αν όμως ακουστεί το κουδούνι, όλα τα παιδιά θα κατευθυνθούν - πάλι με τυχαία κίνηση - προσανατολισμένα προς την είσοδο του σχολικού κτηρίου. Αυτή η συνολική κίνηση, η οποία συμβαίνει με τη λεγόμενη ταχύτητα ολίσθησης  $u_d$ , επιβάλλεται πάνω στην τυχαία θερμική κίνηση κάθε ηλεκτρονίου. Η ταχύτητα ολίσθησης είναι αρκετά μικρή - της τάξης των  $10^{-4}$  m/s.

Δείτε το Σχήμα 4.60. Το σχήμα δείχνει τη ροή της “θάλασσας” των ηλεκτρονίων που κινείται από

Η θάλασσα των ηλεκτρονίων ρέει  
διαμέσου του καλωδίου με ταχύτητα  
ολίσθησης όπως ένα υγρό διαμέσου ενός  
σωλήνα.



Το ηλεκτρικό ρεύμα  $i_e$  είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων που περνούν τη διατομή του καλωδίου ανά δευτερόλεπτο.

Σχήμα 4.60: Ηλεκτρόνια που ρέουν μια διατομή ενός καλωδίου.

αριστερά προς τα δεξιά με την ταχύτητα ολίσθησης μέσα σε ένα καλώδιο. Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τα ηλεκτρόνια όσο περνούν από τη διατομή του καλωδίου, τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε το ρεύμα ηλεκτρονίων (όχι ηλεκτρικού ρεύματος!)  $i_e$  ως τον αριθμό των ηλεκτρονίων ανά δευτερόλεπτο που περνούν τη διατομή του καλωδίου (ή όποιου άλλου αγωγού, φυσικά). Η μονάδα μέτρησης του ρεύματος ηλεκτρονίων είναι  $1/s$ . Με άλλα λόγια, το πλήθος  $N_e$  των ηλεκτρονίων που αναφέραμε σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$  είναι

$$N_e = i_e \Delta t \implies i_e = \frac{N_e}{\Delta t} \quad (4.365)$$

Η αύξηση της ταχύτητας ολίσθησης  $u_d$  θα αυξήσει τον αριθμό των ηλεκτρονίων που περνούν από το καλώδιο ανά δευτερόλεπτο - άρα θα αυξηθεί το ρεύμα ηλεκτρονίων. Μπορεί κανείς να δείξει ότι το ρεύμα ηλεκτρονίων μπορεί να γραφεί ως

$$i_e = n_e A u_d \quad (4.366)$$

με  $A$  το εμβαδό της διατομής,  $n_e$  ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά κυβικό μέτρο, και  $u_d$  η ταχύτητα ολίσθησης. Καταλαβαίνετε ότι μπορείτε να αυξήσετε το ρεύμα ηλεκτρονίων αν κάνετε τα ηλεκτρόνια να κινηθούν γρηγορότερα, αν έχετε περισσότερα ανά κυβικό μέτρο, ή αν αυξήσετε το μέγεθος του καλωδίου μέσα από το οποίο ρέουν, αυξάνοντας έτσι τη διατομή του.

Με βάση τα παραπάνω όμως, πώς γίνεται όταν ανάβετε το διακόπτη του φωτός στο δωμάτιο σας, η λάμπα να ανάβει ακαριαία ενώ τα ηλεκτρόνια στα καλώδια κινούνται τόσο αργά; Υποθέστε ότι το καλώδιο που συνδέει τη λάμπα στην οροφή του δωματίου σας με το διακόπτη είναι 6.0 m. Αν το ρεύμα ηλεκτρονίων έχει ταχύτητα ολίσθησης  $10^{-4}$  m/s - όπως τυπικά ισχύει - τότε θα πρέπει κανονικά να απαιτούνται  $6.0 / 10^{-4} = 60000$  δευτερόλεπτα! Αυτός ο χρόνος είναι περίπου 16.5 ώρες! Κάτι μάλλον πάει λάθος στους υπολογισμούς μας... ή όχι; Το σημείο που παραλείψαμε να αναφέρουμε - και που δίνει την απάντηση στο πρόβλημά μας - είναι ότι το καλώδιο είναι γεμάτο από ηλεκτρόνια. Σκεφτείτε την αναλογία με μια μάνικα γεμάτη με νερό. Αν ρίξετε

μια μόνο σταγόνα στη μια μεριά της, σχεδόν αμέσως μια άλλη σταγόνα ωστε πέσει από την άλλη. Έτσι και στο καλώδιο, όταν ένα ηλεκτρόνιο κινείται στο καλώδιο τη στιγμή που ανάβετε το διακόπτη, άμεσα ένα άλλο ηλεκτρόνιο κινείται στη λάμπα. Δε χρειάζεται να περιμένουμε το ηλεκτρόνιο κοντά στο διακόπτη να φτάσει στη λάμπα.

Αυτή η “θάλασσα ηλεκτρονίων” ωστε συνεχίσει να κινείται όσο εσείς τη “σπρώχνετε”. Αν σταματήσετε, τα ηλεκτρόνια ωστε πάψουν να κινούνται προς μια κατεύθυνση και ωστε επανέλθουν στην τυχαία θερμική τους κίνηση. Γιατί; Γιατί τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται σε κενό χώρο. Υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων και των ατόμων του μετάλλου, οι οποίες μετατρέπουν την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων σε θερμική - γι' αυτό ζεσταίνεται το καλώδιο όταν το έχουμε στο ρεύμα. Πρέπει λοιπόν να παρέχουμε συνεχώς “σπρώξιμο”. Πώς; Με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου! Αν τα άκρα ενός αγώγιμου καλωδίου ενωθούν σε ένα βρόχο (κλειστό μονοπάτι), όλα τα σημεία του βρόχου έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, άρα δεν υπάρχει ροή ηλεκτρονίων. Αν όμως τα άκρα του συνδεθούν με μια πηγή διαφοράς δυναμικού (π.χ. μπαταρία), δεν έχουν όλα τα σημεία του βρόχου το ίδιο δυναμικό, γιατί η πηγή εγκαθιστά διαφορά δυναμικού στα άκρα του βρόχου, δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο καλώδιο. Το πεδίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια του καλωδίου κι αυτά αρχίζουν να κινούνται προς μια κατεύθυνση, δημιουργώντας τελικά ροή ηλεκτρονίων! Μάλιστα η εγκατάσταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα καλώδιο γίνεται με “ταχύτητα” που ισούται με κάποιο ποσοστό της ταχύτητας του φωτός, γι' αυτό και τα ηλεκτρόνια κοντά στη λάμπα κινούνται “άμεσα” με το πάτημα του διακόπτη!

#### 4.7.1 Το Ηλεκτρικό Ρεύμα

Τώρα λοιπόν πρέπει να συνδέσουμε τις έννοιες που έχουμε συζητήσει με τη συμβατική έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος που γνωρίζουμε από την καθημερινότητά μας. Ορίζουμε το ηλεκτρικό ρεύμα ή απλά ρεύμα ως το ρυθμό ροής φορτίου στη μονάδα του χρόνου:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4.367)$$

Για σταθερό ρεύμα, το ποσό του φορτίου που υπάρχει σε ρεύμα  $I$  κατά το διάστημα  $\Delta t$  είναι

$$Q = I\Delta t \quad (4.368)$$

Μονάδα μέτρησης του ρεύματος στο Διεθνές Σύστημα είναι το Ampere - A, προς τιμήν του A. M. Ampere. Η παραπάνω σχέση σχετίζεται στενά με την εξίσωση (4.365). Κάθε ηλεκτρόνιο έχει φορτίο μέτρου  $e$ . Άρα το συνολικό φορτίο  $N_e$  ηλεκτρονίων είναι  $Q = eN_e$ . Κατά συνέπεια, το συμβατικό ρεύμα  $I$  και το ρεύμα ηλεκτρονίων  $i_e$  σχετίζονται ως

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{eN_e}{\Delta t} = ei_e \quad (4.369)$$

Επειδή τα ηλεκτρόνια είναι οι φορείς φορτίου στα μέταλλα, ο ρυθμός με τον οποίο κινείται το φορτίο είναι  $e$  φορές το ρυθμό με τον οποίο κινούνται τα ηλεκτρόνια. Κατά μια έννοια, η διαφορά των  $I$  και  $i_e$  είναι μόνο μια σταθερά. Παρόλα αυτά έχουν μια θεμελιώδη διαφορά: επειδή τα ρεύματα ήταν γνωστά πριν μάθουμε ποιοι είναι οι φορείς φορτίου, η κίνηση του ρεύματος ορίζεται να είναι η κατεύθυνση που φάίνεται να κινούνται τα θετικά φορτία. Με άλλα λόγια, η κατεύθυνση του ρεύματος  $I$  είναι αντίθετη στην κίνηση των ηλεκτρονίων. Έτσι, η κατεύθυνση του ρεύματος  $I$  και του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  ταυτίζονται. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε ότι:

#### Αρχή Διατήρησης του Ρεύματος

Το ρεύμα είναι το ίδιο σε κάθε σημείο του καλωδίου: η ροή ηλεκτρονίων που φεύγουν από μια συσκευή είναι ακριβώς ίδια με τη ροή ηλεκτρονίων που μπαίνουν σε μια άλλη συσκευή. Το ρεύμα δεν αλλάζει.

### 4.7.2 Πυκνότητα Ρεύματος

Είπαμε ότι το ρεύμα ηλεκτρονίων σε ένα καλώδιο διατομής  $A$  δίνεται ως  $i_e = n_e e u_d$ . Έτσι το ρεύμα θα είναι

$$I = e i_e = n_e e u_d A \quad (4.370)$$

Η ποσότητα  $n_e e u_d$  εξαρτάται από τους φορείς φορτίου και από το ηλεκτρικό πεδίο που καθορίζει την ταχύτητα ολίσθησης, ενώ το εμβαδό  $A$  είναι απλά μια φυσική διάσταση του καλωδίου. Θα είναι χρήσιμο να διαχωρίσουμε αυτές τις μεταβλητές, ορίζοντας την πυκνότητα ρεύματος  $J$  σε ένα καλώδιο ως το ρεύμα ανά τετραγωνικό μέτρο διατομής:

$$J = \frac{I}{A} = n_e e u_d \quad (4.371)$$

Οι μονάδες του είναι  $\text{A/m}^2$ . Ένα συγκεκριμένο μεταλλικό καλώδιο με εμβαδό διατομής  $A$  φέρει ρεύμα  $I = J A$ .

### 4.7.3 Ειδική Αγωγιμότητα και Ειδική Αντίσταση

Ας ορίσουμε ως ειδική αγωγιμότητα  $\sigma$  ενός υλικού μια σταθερά που περιγράφει την πυκνότητα ρεύματος  $J$  δεδομένης μιας τιμής του ηλεκτρικού πεδίου  $E$ . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$J = \sigma E \quad (4.372)$$

Η ειδική αγωγιμότητα χαρακτηρίζει το υλικό ως όλον. Όλα τα τμήματα χαλκού, για παράδειγμα, έχουν την ίδια τιμή του  $\sigma^5$ , αλλά η ειδική αγωγιμότητα του αλουμινίου είναι διαφορετική από του χαλκού. Η εξίσωση (4.372) είναι θεμελιώδους σημασίας και ονομάζεται νόμος του **Ohm**, γιατί μας πληροφορεί για τρία πράγματα:

- Το ρεύμα προκαλείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο που ασκεί δύναμη στους φορείς φορτίου.
- Η πυκνότητα ρεύματος, και άρα το ρεύμα  $I = J/A$ , εξαρτάται γραμμικά από το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου. Για να διπλασιάσουμε το ρεύμα, πρέπει να διπλασιάσουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που “σπρώχνει” τα φορτία.
- Η πυκνότητα ρεύματος επίσης εξαρτάται από την ειδική αγωγιμότητα του υλικού. Διαφορετικοί αγωγοί έχουν διαφορετικές ειδικές αγωγιμότητες.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές είναι βολικότερο να χρησιμοποιούμε το αντίστροφο της ειδικής αγωγιμότητας, που ονομάζεται ειδική αντίσταση:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (4.373)$$

Η ειδική αντίσταση ενός υλικού μας πληροφορεί για το πόσο “διστακτικά” είναι τα ηλεκτρόνια στην κίνηση τους σε απάντηση στο ηλεκτρικό πεδίο.

### 4.7.4 Αντίσταση

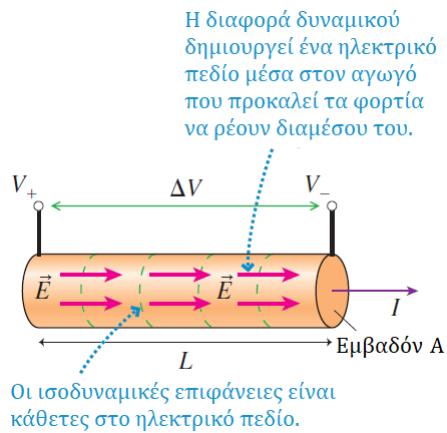
Το Σχήμα 4.61 δείχνει ένα τμήμα ενός αγωγού στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  δημιουργεί ρεύμα  $I$  “σπρώχνοντας” τους φορείς φορτίου. Γνωρίζουμε ήδη ότι το ηλεκτρικό πεδίο απαιτεί μια διαφορά δυναμικού και ότι δείχνει “προς τα κάτω” και είναι κάθετο σε ισοδυναμικές επιφάνειες. Θυμηθείτε ότι μια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σχετίζεται με το ηλεκτρικό δυναμικό ως

$$E_s = - \frac{dV}{ds} \quad (4.374)$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό μέσα σε έναν αγωγό σταθερής διαμέτρου, οπότε

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{\Delta V}{L} \quad (4.375)$$

<sup>5</sup>Αν βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία.



Σχήμα 4.61: Ρεύμα και διαφορά δυναμικού.

όπου  $\Delta V = V_+ - V_-$  είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του αγωγού μήκους  $L$ . Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το πεδίο  $E$  για να βρούμε το ρεύμα στον αγωγό. Βρήκαμε νωρίτερα ότι

$$J = \sigma E \quad (4.376)$$

και ότι το ρεύμα σε ένα καλώδιο σταθερής διατομής σχετίζεται με την πυκνότητα ρεύματος ως

$$I = JA \quad (4.377)$$

Οπότε

$$I = JA = A\sigma E = \frac{A}{\rho} E \quad (4.378)$$

με  $1/\rho$  την ειδική αντίσταση. Συνδυάζοντας τις σχέσεις έχουμε

$$I = \frac{A}{\rho L} \Delta V \quad (4.379)$$

Σπουδαίο αποτέλεσμα! Μας πληροφορεί ότι το ρεύμα είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των άκρων του αγωγού. Αν θέσουμε

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (4.380)$$

και ονομάσουμε αντίσταση την ποσότητα αυτή, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (4.381)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η εγκατάσταση διαφοράς δυναμικού  $\Delta V$  ανάμεσα στα άκρα ενός αγωγού αντίστασης  $R$  δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που με τη σειρά του δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα  $I = \Delta V/R$  διαμέσου του αγωγού. Πολλές φορές αναφέρεται κι αυτή ως ο νόμος του Ohm. Μονάδα μέτρησης της αντίστασης είναι το 1 Ohm = 1V/A, προς τιμήν του G. S. Ohm, Γερμανού Φυσικού που συνετέλεσε στην σύλληψη της ιδέας της αντίστασης, και συμβολίζεται με το γράμμα  $\Omega$ . Η αντίσταση είναι μια ιδιότητα καθενός αγωγού αφού εξαρτάται από το μήκος του, τη διάμετρό του, και την ειδική αντίστασή του.

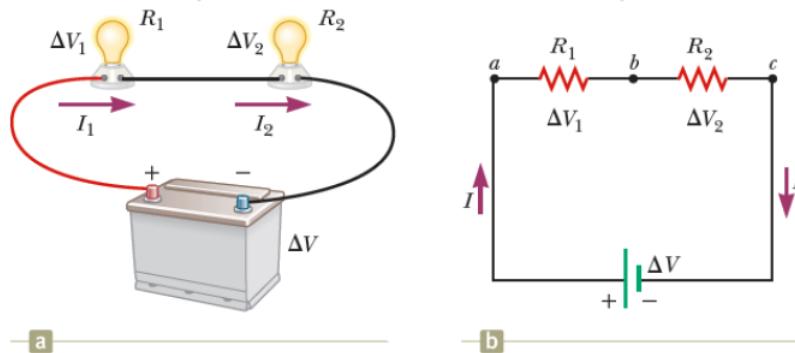
Προσέξτε ότι η παραπάνω σχέση δεν ισχύει καθολικά για κάθε υλικό. Ισχύει για υλικά που η αντίστασή τους είναι (σχεδόν) σταθερή. Τέτοια υλικά λέγονται ωμικά. Τα μη ωμικά υλικά έχουν την ιδιότητα το ρεύμα που περνά από αυτά να μην είναι ευθέως ανάλογο της διαφοράς δυναμικού που έχουν στα άκρα του. Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα ωμικά υλικά σε τριες κατηγορίες:

- Τα καλώδια είναι μέταλλα με πολύ μικρή ειδική αντίσταση  $\rho$  και άρα πολύ μικρή αντίσταση  $R$ . Ένα ιδανικό καλώδιο έχει  $R = 0 \Omega$ , οπότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι  $\Delta V = 0$ , ακόμα κι αν υπάρχει ροή ρεύματος. Θα υιοθετούμε τέτοια ιδανικά μοντέλα στη μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων που θα ακολουθήσει.
- Οι αντιστάτες είναι πολύ κακοί αγωγοί με αντιστάσεις της τάξης των  $10^1 - 10^6 \Omega$ . Χρησιμοποιούνται για να ελέγχεται το ρεύμα σε ένα κύκλωμα.
- Οι μονωτές είναι υλικά όπως το γυαλί, το πλαστικό, ο αέρας κ.α. Ένας ιδανικός μονωτής έχει άπειρη αντίσταση,  $R = \infty \Omega$ . Εποι, ακόμα κι αν υπάρχει διαφορά δυναμικού στα άκρα του ένας μονωτής δε διαρρέεται από ρεύμα,  $I = 0 \text{ A}$ . Πρακτικά, όλοι οι μονωτές έχουν  $R \gg 10^9 \Omega$  και μπορούν να υεωρηθούν ως ιδανικοί.

Η αντίσταση ενός καλωδίου ή αγωγού αυξάνεται όσο αυξάνεται το μήκος του. Η μείωση της διατομής του επίσης αυξάνει την αντίσταση. Επίσης, είναι σημαντικό να καταλάβετε τη διαφορά μεταξύ ειδικής αντίστασης και αντίστασης. Η πρώτη περιγράφει το υλικό. Η δεύτερη χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο κομμάτι του αγωγού, με συγκεκριμένη γεωμετρία. Η σχέση μεταξύ των δύο είναι ανάλογη της σχέσης που έχει η πυκνότητα μάζας και η μάζα ενός αντικειμένου.

#### 4.7.5 Συνδυασμοί Αντιστάσεων

Ας δούμε αν το νέο στοιχείο κυκλωμάτων, ο αντιστάτης, μπορεί να συνδυαστεί και να απλοποιηθεί όπως οι πυκνωτές. Για το συμβολισμό των αντιστατών έχετε ήδη δει παραδείγματα, ας το κάνουμε όμως πιο σαφές: δείτε το Σχήμα 4.62. Ένας αντιστάτης μπορεί να είναι μια λάμπα ή μια οποιαδήποτε συσκευή. Αντί να



Σχήμα 4.62: Συμβολισμός αντιστατών σε κύκλωμα.

σχεδιάζουμε το - όμορφο - σκίτσο αριστερά στο Σχήμα 4.62, προτιμάμε το απλούστερο ισοδύναμο του στα δεξιά.

Σύνδεση σε Σειρά

Ας ξεκινήσουμε από τη σειριακή σύνδεση, όπως στο Σχήμα 4.62, δεξιά. Όπως και στους πυκνωτές, η σειριακή σύνδεση δεν έχει σχέση με το πως σχεδιάζουμε το κύκλωμα στο χαρτί: έχει να κάνει με τη σύνδεση του άκρου ενός αντιστάτη απ' ευθείας με το άκρο ενός επόμενου, ακολουθιακά. Απ' όσα έχουμε πει για το ηλεκτρικό ρεύμα, η ποσότητα φορτίου  $Q$  που εξέρχεται του αντιστάτη  $R_1$  θα είναι ίδια με την ποσότητα που εισέρχεται στον αντιστάτη  $R_2$ . Γιατί; Αρχή Διατήρησης του Φορτίου! Οπότε το ρεύμα θα είναι

$$I_1 = I_2 = I \quad (4.382)$$

Η διαφορά δυναμικού που παρέχει η πηγή είναι  $\Delta V$  και ισχύει

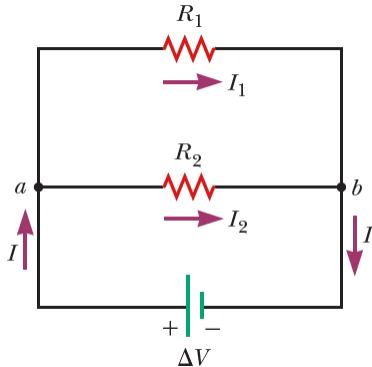
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2) \quad (4.383)$$

Οπότε όταν μπορούσαμε να “πετάξουμε” τους δύο αντιστάτες του κυκλώματος και να τους αντικαταστήσουμε με τον ισοδύναμο τους, αντίστασης  $R_{eq} = R_1 + R_2$ . Αυτό ισχύει και για  $N$  αντιστάτες σε σειρά, δηλ.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.384)$$

### Παράλληλη Σύνδεση

Ας δούμε τώρα την παράλληλη σύνδεση, όπως στο Σχήμα 4.63. Ξανά, η παραλληλία δεν έχει να κάνει με τη



Σχήμα 4.63: Αντιστάτες σε παραλληλία.

σχεδίαση αλλά με το ότι τα άκρα των δύο αντιστατών συνδέονται αντίστοιχα μεταξύ τους. Τα άκρα των δύο αντιστατών είναι απευθείας συνδεδεμένα με τους πόλους της μπαταρίας, οπότε οι δύο αντιστάτες έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους: αυτή που παρέχει η μπαταρία. Άρα

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (4.385)$$

Λόγω της Αρχής Διατήρησης του Φορτίου, το ρεύμα που ρέει τον αντιστάτη  $R_1$  και τον αντιστάτη  $R_2$  να είναι αθροιστικά το ίδιο με αυτό που ρέει στο υπόλοιπο κύκλωμα, δηλ.

$$I = I_1 + I_2 \quad (4.386)$$

Οπότε

$$I = I_1 + I_2 \iff \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \Delta V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.387)$$

Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.388)$$

Γενικότερα, για  $N$  αντιστάτες συνδεδεμένους παράλληλα θα έχουμε

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (4.389)$$

Συνοπτικά, και για σύγκριση με τους πυκνωτές που έχουμε δει νωρίτερα, ισχύει ο Πίνακας 4.1.

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις που εξάγουμε για τους αντιστάτες είναι “ανάποδα” από τι για τους πυκνωτές!

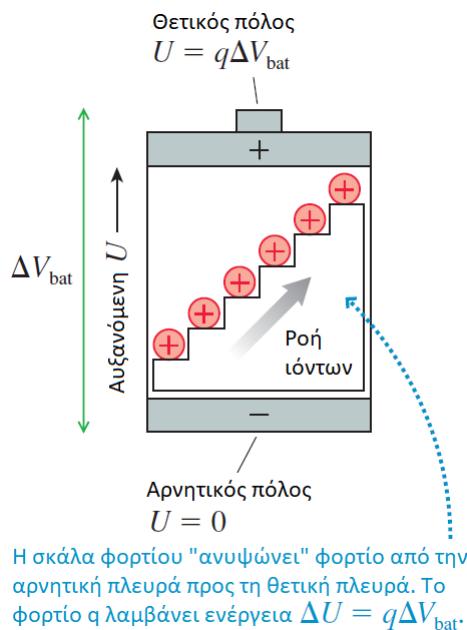
Σχέσεις Ισοδύναμων Πυκνωτών/Αντιστατών		
Συνδεσμολογία	Πυκνωτές	Αντιστάτες
Σε σειρά	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$	$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$
Σε παραλληλία	$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$

Πίνακας 4.1: Πίνακας Σχέσεων Ισοδύναμων Αντιστατών/Πυκνωτών.

#### 4.7.6 Μπαταρίες και Ρεύμα

Η μπαταρία θα είναι η βασική πηγή διαφοράς δυναμικού στη συνέχεια, οπότε θα είναι καλό να μελετήσουμε τη λειτουργία της.

Στην προσπάθειά μας, θα υιοθετήσουμε ένα ιδεατό μοντέλο μιας κυλιόμενης “σκάλας” φορτίου. Το Σχήμα 4.64 δείχνει τη σκάλα που δημιουργεί διαφορά δυναμικού  $\Delta V_{bat}$  στα άκρα της μπαταρίας, ανυψώνοντας θετικά φορτία (αφού θεωρήσαμε ως ρεύμα την κίνηση θετικών φορτίων - η πραγματικότητα είναι κάπως διαφορετική αλλά δεν επηρεάζει τη συζήτηση) από τον αρνητικό πόλο της μπαταρίας στο θετικό πόλο. Μόλις αυτά



Σχήμα 4.64: Μοντέλο μπαταρίας - σκάλας.

φτάσουν εκεί, τα θετικά φορτία κινούνται μέσα στο καλώδιο ως ρεύμα I. Στη συνέχεια, τα φορτία χάνουν την ενέργεια που κέρδισαν κατά την ανύψωση στη σκάλα καιών “περπατούν” στο κύκλωμα και συγχρούνται με τα άτομα των συσκευών που είναι συνδεδεμένες στο κύκλωμα. Αυτή η ενέργεια μεταφέρεται τόσο στα καλώδια (αν και στα δικά μας πλαίσια θεωρούνται ιδανικά) όσο και στις συσκευές. Άλλωστε μπορούμε να αντιληφθούμε αυτή τη μεταφορά ενέργειας με την αφή μας, καθώς η ενέργεια ζεσταίνει το καλώδιο και τις συσκευές συνδεδεμένες στο κύκλωμα, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη παράγραφο. Τελικά, τα φορτία καταλήγουν ξανά πίσω στον αρνητικό πόλο της μπαταρίας, όπου μπορούν να ανέβουν πάλι πάνω στην κυλιόμενη “σκάλα” και να επαναλάβουν το ταξίδι. Η μπαταρία έχει μια εσωτερική πηγή ενέργειας (τις ηλεκτροχημικές αντιδράσεις των ηλεκτρολυτών που περιέχει) που κρατά την κυλιόμενη σκάλα σε λειτουργία. Αυτή ακριβώς η σκάλα είναι που κρατά το ρεύμα στο καλώδιο “παρέχοντας” συνεχώς φορτίο στους πόλους της μπαταρίας.

Μια σημαντική συνέπεια του μοντέλου αυτού είναι ότι η μπαταρία είναι πηγή διαφοράς δυναμικού - το γνωρίζετε ήδη. Είναι αλήθεια ότι τα φορτία ρέουν μέσω του καλωδίου που συνδέει τους πόλους της μπαταρίας αλλά το ρεύμα είναι συνέπεια της διαφοράς δυναμικού της μπαταρίας. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη - ΗΕΔ της μπαταρίας είναι το αίτιο - θα μιλήσουμε γι' αυτή στη συνέχεια. Ο διαχωρισμός αιτίου - αποτελέσματος είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση της λειτουργίας της μπαταρίας σε ένα κύκλωμα. Παρακολουθήστε με προσοχή την παρακάτω λογική:

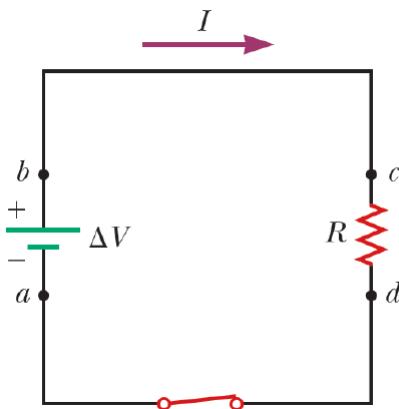
### Ρεύμα σε Καλώδιο Παρουσία Μπαταρίας

- Η μπαταρία είναι πηγή διαφοράς δυναμικού  $\Delta V_{bat}$ . Μια ιδανική μπαταρία έχει  $\Delta V_{bat} = \varepsilon$ , η οποία είναι η τιμή της ΗΕΔ της.
- Η μπαταρία δημιουργεί διαφορά δυναμικού  $\Delta V_{wire} = \Delta V_{bat}$  μεταξύ των άκρων ενός καλωδίου.
- Η διαφορά δυναμικού  $\Delta V_{wire}$  προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο  $E = \frac{\Delta V_{wire}}{L}$  στο καλώδιο.
- Το ηλεκτρικό πεδίο εγκαθιστά ρεύμα  $I = JA = \sigma AE$  στο καλώδιο.
- Το μέτρο του ρεύματος καθορίζεται από κοινού από την μπαταρία και την αντίσταση  $R$  του καλωδίου, ώστε τελικά να είναι  $I = \Delta V_{wire}/R$ .

### 4.7.7 Ηλεκτρική Ισχύς

Αρχίζουμε να πλησιάζουμε σιγά σιγά προς τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Ας δούμε ένα πολύ απλό τέτοιο κι ας μελετήσουμε τη μεταφορά ενέργειας από την πηγή (μπαταρία) που παρέχει διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  σε μια λάμπα ή μια συσκευή, που μοντελοποιείται από έναν αντιστάτη αντίστασης  $R$ .

Θεωήστε το κύκλωμα του Σχήματος 4.65. Στην πραγματικότητα κάποια ενέργεια μεταφέρεται στα κα-



Σχήμα 4.65: Απλό κύκλωμα μπαταρίας - αντιστάτη.

λώδια και τα θερμαίνει αλλά όπως αναφέραμε μόλις λίγες γραμμές νωρίτερα, θα θεωρήσουμε αυτήν την ενέργεια αμελητέα. Σε μια μπαταρία, ο θετικός πόλος της είναι υψηλότερου δυναμικού από τον αρνητικό, δηλ.  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a > 0$ . Ας θεωρήσουμε (πολύ υπεραπλουστευμένα) ότι ακολουθούμε ένα φορτίο  $Q$  που κινείται στο κύκλωμα κατά τη φορά του ρολογιού, ξεκινώντας από και καταλήγοντας στο σημείο (a). Από το (a) στο (b), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται κατά  $Q\Delta V$ , και εξίσου μειώνεται η χημική δυναμική ενέργεια της μπαταρίας. Όσο το φορτίο κινείται από το (c) στο (d), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται λόγω της σύγκρουσης ηλεκτρονίων με τα άτομα του αντιστάτη. Έτσι, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.

Όταν το φορτίο επιστρέφει στο σημείο (a), το συνολικό αποτέλεσμα είναι ότι ένα τμήμα της χημικής δυναμικής ενέργειας της μπαταρίας μεταφέρθηκε στον αντιστάτη και έμεινε εκεί ως θερμική ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση των ατόμων του αντιστάτη. Επειδή ο αντιστάτης είναι σε επαφή με τον αέρα, μεταφέρεται ενέργεια μέσω θερμότητας και εκπέμπεται ακτινοβολία. Μετά από λίγη ώρα, ο αντιστάτης επανέρχεται σε φυσιολογική θερμοκρασία.

Ας μετρήσουμε τώρα το ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όσο το φορτίο  $Q$  περνά από τον αντιστάτη:

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V \quad (4.390)$$

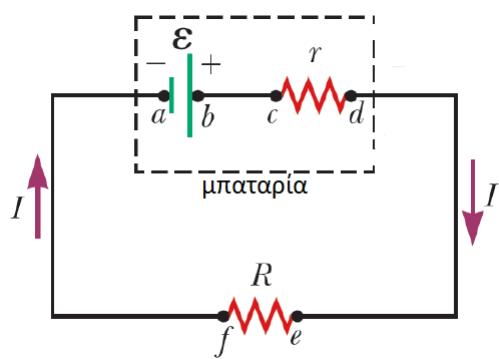
Το σύστημα αποκτά ξανά αυτή τη δυναμική ενέργεια όταν το φορτίο περάσει ξανά από την μπαταρία, φυσικά με το κόστος απώλειας χημικής ενέργειας από την μπαταρία. Ο ρυθμός απός είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η θερμική ενέργεια στον αντιστάτη. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι η ισχύς  $P$  που παραδίδεται στον αντιστάτη είναι

$$P = I\Delta V = I^2R = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (4.391)$$

## 4.8 Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Τα κυκλώματα που θα δούμε περιέχουν τους δομικούς λίθους που συζητήσαμε ως τώρα: αντιστάτες, πυκνωτές, και πηγές διαφοράς δυναμικού (μπαταρίες). Στην προσπάθεια μας να αναλύσουμε τέτοια κυκλώματα, θα μάθουμε τους δυο κανόνες του Kirchhoff, οι οποίοι προέρχονται από τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και φορτίου. Το ρεύμα που θα διερρέει τα κυκλώματά μας θα είναι (αρχικά) σταθερό σε μέτρο και φορά, αλλά θα δούμε και περιπτώσεις που το ρεύμα θα μεταβάλλεται με το χρόνο.

Ας μιλήσουμε αρχικά για τον “πάροχο ενέργειας”, την μπαταρία, ως στοιχείο κυκλώματος αυτή τη φορά. Στη μελέτη μας ως τώρα, η διαφορά δυναμικού στους πόλους μιας μπαταρίας είναι σταθερή για ένα δεδομένο κύκλωμα, το ρεύμα στο κύκλωμα είναι επίσης σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση, και ονομάζεται συνεχές ρεύμα. Στην πραγματικότητα, η μπαταρία έχει διάρκεια ζωής: ζεκινά δίνοντας διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ , η οποία φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Η μπαταρία καλείται είτε πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης είτε πηγή ΗΕΔ - δεν υπάρχει κάποια “δύναμη”, απλώς ο όρος έχει απομείνει από τον καιρό που τα πράγματα στον ηλεκτρισμό δεν ήταν τόσο ζεκάθαρα όσο σήμερα ☺. Η ΗΕΔ ε μιας μπαταρίας είναι η μέγιστη δυνατή διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  που μπορεί να δώσει ανάμεσα στους πόλους της. Χρησιμοποιήσαμε τη λέξη “μέγιστη” γιατί η μπαταρία έχει και αυτή τη δική της εσωτερική αντίσταση  $r$  η οποία αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Ιδανικά, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας ισούται με την ΗΕΔ ε αλλά στην πράξη αυτό δεν ισχύει. Ποιά είναι τότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πιο ρεαλιστικής μπαταρίας; Δείτε το Σχήμα 4.66. Το σχήμα



Σχήμα 4.66: Μοντέλο μπαταρίας σε κύκλωμα.

αυτό δείχνει ένα μοντέλο μπαταρίας (κούτι διακεκομμένων γραμμών). Η μπαταρία περιέχει μια ιδανική ΗΕΔ  $\epsilon$  και μια εσωτερική αντίσταση  $r$  σε σειρά. Ας υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V_{ad}$ .

$$V_d - V_a = (V_d - V_c) + (V_c - V_b) + (V_b - V_a) = -Ir + 0 + \epsilon \quad (4.392)$$

οπότε

$$\Delta V_{ad} = \epsilon - Ir \quad (4.393)$$

Πώς όμως προέκυψε αυτό το αποτέλεσμα; Με βάση την εξίσωση θα έχουμε

- $V_d - V_c = -Ir$ , γιατί το δυναμικό  $V_d$  είναι το ίδιο με το δυναμικό  $V_a$ , καθώς τα σημεία  $a, d$  συνδέονται με ιδανικό καλώδιο. Το ίδιο και για τα δυναμικά  $V_c, V_b$ . Επειδή λοιπόν  $V_c = V_b > V_d = V_a$ , καταλαβαίνουμε ότι στη διαδρομή  $c \rightarrow d$  υπάρχει πτώση του δυναμικού, άρα η διαφορά  $V_d - V_c$  είναι αρνητική και ίση με  $-Ir$ :

$$\Delta V_{cd} = -Ir \quad (4.394)$$

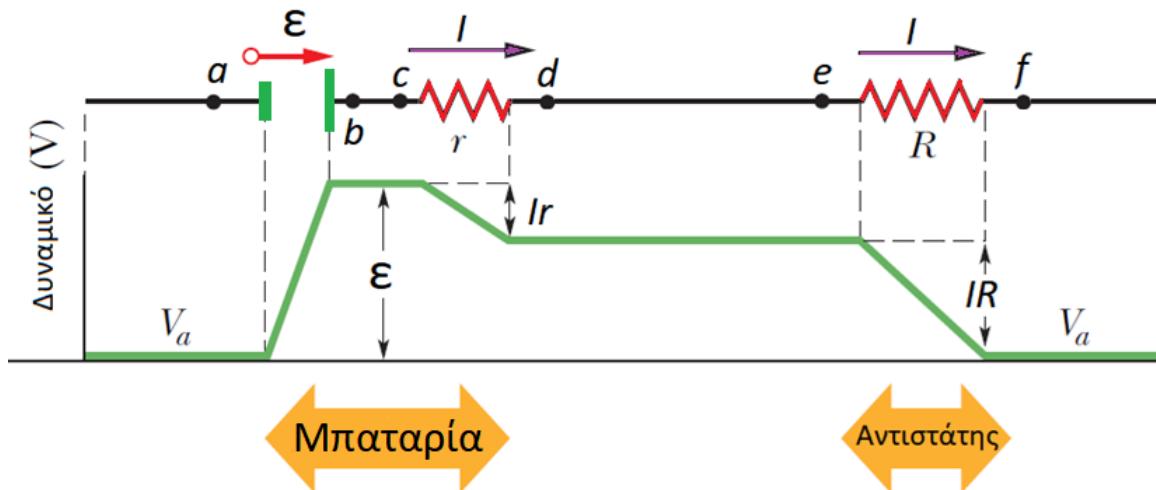
- $V_c - V_b = 0$ , γιατί τα δύο σημεία  $b, c$  ενώνονται με ιδανικό καλώδιο.
- $V_b - V_a = \epsilon$ , γιατί το σημείο  $b$  είναι υψηλότερου δυναμικού από το σημείο  $a$ , άρα η διαφορά είναι θετική ποσότητα και ίση με  $\epsilon$ :

$$\Delta V_{ab} = \epsilon \quad (4.395)$$

Αυτή λοιπόν η διαφορά δυναμικού,  $\Delta V_{ad}$ , παρέχεται στα άκρα του αντιστάτη  $R$ . Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του όμως ισούται και με  $\Delta V_{fe} = IR$ , οπότε σύμφωνα με τις δύο σχέσεις

$$\Delta V_{fe} = \Delta V_{ad} \iff I = \frac{\epsilon}{R+r} \quad (4.396)$$

Βλέπετε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα εξαρτάται τόσο από την εξωτερική αντίσταση  $R$  όσο και από την εσωτερική αντίσταση  $r$ . Δείτε το Σχήμα 4.67, που συνοψίζει τα παραπάνω.



Σχήμα 4.67: Δυναμικά κατά μήκος κυκλώματος.

Αν πολλαπλασιάσουμε με  $I$  και τα δύο μέλη, έχουμε

$$I\epsilon = I^2R + I^2r \iff P_{tot} = P_R + P_r \quad (4.397)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ισχύς κατανέμεται τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική αντίσταση. Βέβαια πρακτικά, η αντίσταση  $R$  είναι αρκετά μεγαλύτερη της  $r$ , αλλά όσο “γερνάει” η μπαταρία τόσο μεγαλώνει η τιμή της  $r$ . Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η μπαταρία είναι μια πηγή σταθερής ΗΕΔ: όχι σταθερού ρεύματος, όχι σταθερής διαφοράς δυναμικού!

**Παράδειγμα 4.36:**

Στο Σχήμα 4.66, η μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση  $r = 0.05 \Omega$ . Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με  $R = 3 \Omega$ .

(α') Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας.

(β') Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία.

Λύση:

(α') Ζητούμε το ρεύμα  $I$  το οποίο δίνεται ως

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{12}{3.05} \approx 3.93 \text{ A} \quad (4.398)$$

Η διαφορά δυναμικού δίνεται ως

$$\Delta V = \varepsilon - Ir = 11.8 \text{ V} \quad (4.399)$$

(β') Είναι

$$P_R = I^2 R = 46.3 \text{ W} \quad (4.400)$$

$$P_r = Ir = 0.772 \text{ W} \quad (4.401)$$

$$P_{tot} = P_R + P_r = 47.1 \text{ W} \quad (4.402)$$

### 4.8.1 Οι Κανόνες του Kirchhoff

Τιως σκέψτε ότι τα πράγματα όταν δυσκολέψουν αν τα κυκλώματα που συναντήσουμε στη συνέχεια είναι πιο πολύπλοκα. Το ίδιο σκέψτηκε και ο G. Kirchhoff, και διατύπωσε το 1845 τους δύο περίφημους κανόνες του, οι οποίοι πηγάζουν από την Αρχή Διατήρησης του Φορτίου και την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας. Ας τους δούμε:

- Κανόνας κόμβου: σε οποιονδήποτε κόμβο (διακλάδωση) κυκλώματος, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν:

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0 \quad (4.403)$$

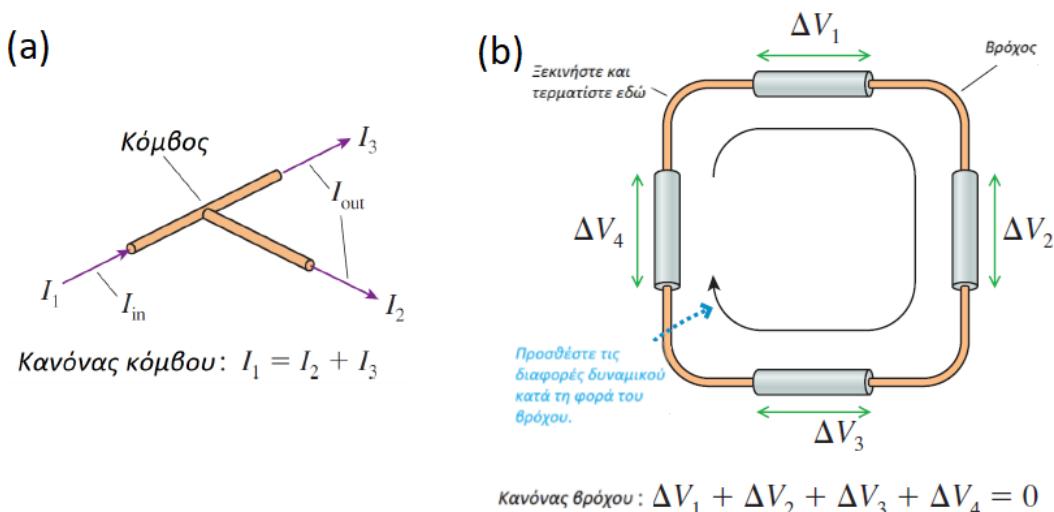
Ισοδύναμα, ο κανόνας μπορεί να διατυπωθεί ως: τα ρεύματα που μπαίνουν σε έναν κόμβο έχουν θετικό πρόσημο, ενώ αυτά που βγαίνουν έχουν αρνητικό πρόσημο. Το άθροισμά τους ισούται με μηδέν. Με μαθηματικά

$$I_{in} - I_{out} = 0 \iff I_{in} = I_{out} \quad (4.404)$$

- Κανόνας βρόχου: σε ένα βρόχο (χλειστή διαδρομή) κυκλώματος, το άθροισμα των διαφορών δυναμικού πρέπει να είναι μηδέν:

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0 \quad (4.405)$$

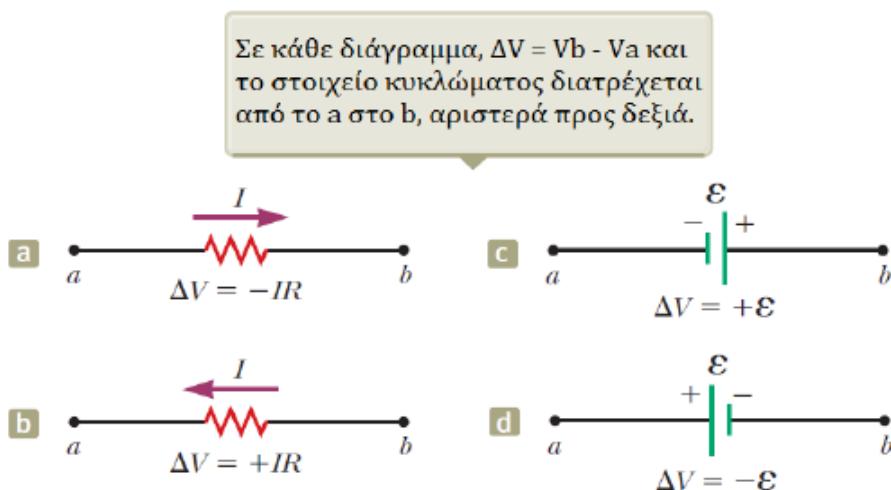
Ο κανόνας κόμβου προέρχεται από την Αρχή Διατήρησης του Φορτίου, και μπορείτε να τον δείτε οπτικοποιημένο στο Σχήμα 4.68(a) ενώ ο κανόνας βρόχου προέρχεται από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, και μπορείτε να τον δείτε οπτικοποιημένο στο Σχήμα 4.68(b). Η εφαρμογή του 2ου κανόνα προϋποθέτει να γνωρίζουμε ποιές διαφορές δυναμικού μετράμε, δηλ. ποιές είναι θετικές και ποιές αρνητικές. Κατ' αρχάς, η πρώτη μας κίνηση πρέπει να είναι να ορίσουμε ένα ή περισσότερα ρεύματα στο κύκλωμα. Η επιλογή της φοράς του ρεύματος είναι τυχαία - όταν δείτε σχετικό παράδειγμα άμεσα. Επιλέγουμε ένα χλειστό μονοπάτι του κυκλώματος, δηλ. ένα βρόχο, κι αν υποθέσουμε ότι διατρέχουμε κάθε στοιχείο από αριστερά προς τα δεξιά, εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες για κάθε στοιχείο που συναντάμε.



Σχήμα 4.68: (a) 1ος Κανόνας Kirchhoff - κανόνας κόμβου, (b) 2ος Κανόνας Kirchhoff - κανόνας βρόχου).

- (α') Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι  $-IR$ .
- (β') Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αντιστάτη αντίθετα της φοράς του ρεύματος είναι  $IR$ .
- (γ') Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι  $\epsilon$  αν τη διατρέχουμε από τον αρνητικό προς το θετικό πόλο.
- (δ') Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι  $-\epsilon$  αν τη διατρέχουμε από το θετικό προς τον αρνητικό πόλο.

Προσέξτε ιδιαίτερα ότι ο νόμος του Ohm μας δίνει το μέτρο της διαφοράς δυναμικού  $\Delta V_R = IR$  στα άκρα ενός αντιστάτη αντίστασης  $R$ . Ο κανόνας βρόχου απαιτεί από εσάς να αναγνωρίσετε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στα άκρα ενός αντιστάτη μειώνεται κατά τη φορά του ρεύματος. Δείτε το Σχήμα 4.69. Σε όλες τις περιπτώσεις μετράμε τη διαφορά δυναμικού  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$ . Βλέπετε ότι στην περίπτωση του αντιστάτη, το πρόσημο της διαφοράς δυναμικού εξαρτάται από τη φορά του ρεύματος. Αντίθετα, για την περίπτωση της πηγής ΗΕΔ, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της είναι  $\pm$ : το πρόσημο εξαρτάται από το πώς τη διατρέχουμε: από το θετικό προς τον αρνητικό πόλο (αρνητικό πρόσημο στη διαφορά δυναμικού) ή από τον αρνητικό προς το θετικό πόλο (θετικό πρόσημο στη διαφορά δυναμικού).

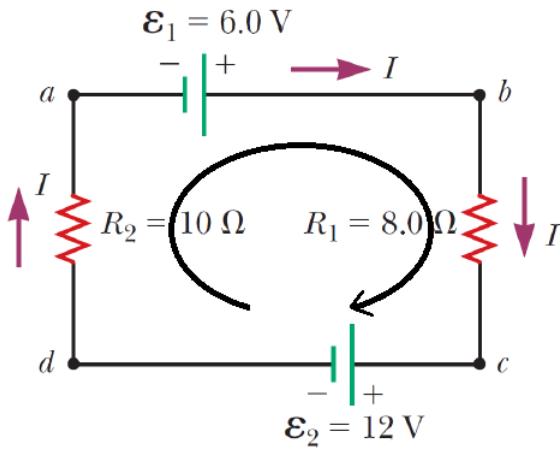


Σχήμα 4.69: Κανόνες προσήμου διαφοράς δυναμικού.

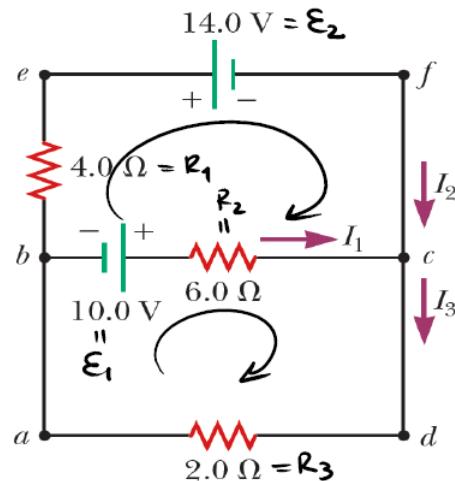
Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### Παραδείγμα 4.37:

Στο Σχήμα 4.70(a), το κύκλωμα περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές με τις αντίστοιχες τιμές του σχήματος. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.



(a)



(b)

Σχήμα 4.70: (α) Κύκλωμα και κανόνες Kirchhoff Παραδείγματος 4.37, (β) Κύκλωμα Παραδείγματος 4.38.

Λύση: Επιλέγουμε τη φορά του ρεύματος τυχαία όπως στο Σχήμα 4.70. Το κύκλωμα δεν έχει κόμβους, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 1ο κανόνα. Επιλέγουμε το μοναδικό βρόχο,  $abcd$ , και εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα:

$$\sum_{\text{abcd}} \Delta V = 0 \iff \epsilon_1 - I R_1 - \epsilon_2 - I R_2 = 0 \quad (4.406)$$

Αντικαθιστώντας

$$6 - 8I - 12 - 10I = 0 \iff I = -\frac{1}{3} \text{ A} \quad (4.407)$$

Το αρνητικό πρόσημο στο ρεύμα δηλώνει απλά ότι η φορά του ρεύματος που έχουμε επιλέξει στο σχήμα δεν είναι σωστή - η σωστή φορά είναι η αντίθετη! Βλέπετε πως η επιλογή της φοράς ρεύματος δεν έχει σημασία, καθώς οι κανόνες του Kirchhoff μας “αυτοδιορθώνουν”.

### Παραδείγμα 4.38:

Στο Σχήμα 4.70(b), το κύκλωμα περιέχει τρεις αντιστάτες και δύο πηγές με τις αντίστοιχες τιμές του σχήματος. Βρείτε τα ρεύματα  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  που διαρρέουν το κύκλωμα και υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού και την ισχύ που παραδίδεται στον αντιστάτη αντίστασης  $2 \Omega$ .

Λύση: Έχουμε τρεις αγνώστους, άρα θέλουμε τρεις εξισώσεις. Στον κόμβο c, θα εφαρμόσουμε τον 1ο κανόνα του Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (4.408)$$

Στο βρόχο  $abcd$ , εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\sum_{\text{abcd}} \Delta V = 0 \iff \epsilon_1 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0 \iff 10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \quad (4.409)$$

Στο βρόχο *befcb*, εφαρμόζουμε το 2o κανόνα του Kirchhoff:

$$\sum_{befcb} \Delta V = 0 \iff -I_2 R_1 - \varepsilon_2 + I_1 R_2 - \varepsilon_1 = 0 \iff -4I_2 + 6I_1 - 24 = 0 \quad (4.410)$$

Έχουμε το σύστημα

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (4.411)$$

$$10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \quad (4.412)$$

$$-4I_2 + 6I_1 - 24 = 0 \quad (4.413)$$

το οποίο έχει λύση

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad (4.414)$$

$$I_2 = -3 \text{ A} \quad (4.415)$$

$$I_3 = -1 \text{ A} \quad (4.416)$$

Ξανά, τα πρόσημα δείχνουν αντίθετη φορά από αυτή που έχουμε υποθέσει στο σχήμα. Η διαφορά δυναμικού στον αντιστάτη  $R_3$  είναι

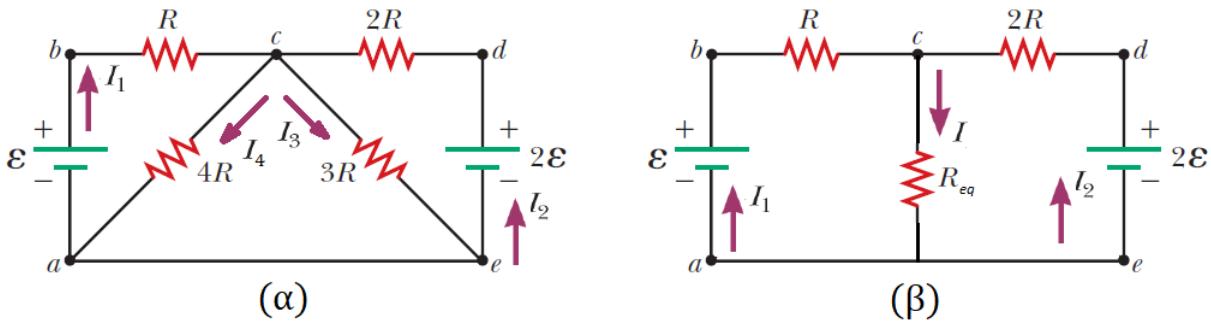
$$\Delta V_{R_3} = I_3 R_3 = 2 \text{ V} \quad (4.417)$$

και η ισχύς

$$P_{R_3} = I_3^2 R_3 = 2 \text{ W} \quad (4.418)$$

#### Παράδειγμα 4.39:

Βρείτε την κατεύθυνση και την ποσότητα του ρεύματος, για  $R = 1.00 \text{ k}\Omega$  και  $\varepsilon = 250 \text{ V}$ , ανάμεσα στο  $a$  και στο  $e$  στο οριζόντιο καλώδιο στο Σχήμα 4.71(α).



Σχήμα 4.71: Κύκλωμα και κανόνες Kirchhoff.

Λύση:

Η φορά των ρευμάτων έχει επιλεγεί τυχαία. Συνδιαζόντας τις δύο παράληλες αντιστάσεις  $3R$ ,  $4R$ , το κύκλωμα μας λαμβάνει την μορφή του Σχήματος 4.71(β). Η ισοδύναμη αντίσταση για τους παραπάνω δύο αντιστάτες είναι

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{4R} \implies R_{eq} = \frac{12}{7}R = 1.714R \quad (4.419)$$

Εφαρμόζοντας το 2o κανόνα του Kirchoff και για τους δύο βρόχους που σχηματίστηκαν (αριστερά-δεξιά) έχουμε

$$I_1 R + R_{eq} I = \varepsilon \quad (4.420)$$

$$R_{eq}I + 2RI_2 = 2\epsilon \quad (4.421)$$

και εφ' όσον στον κόμβο c ισχύει ότι

$$I = I_1 + I_2 \quad (4.422)$$

μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(R + R_{eq}) \cdot I_1 + R_{eq} \cdot I_2 = \epsilon \quad (4.423)$$

$$R_{eq} \cdot I_1 + (2R + R_{eq}) \cdot I_2 = 2\epsilon \quad (4.424)$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$I_1 = 10.0 \text{ mA} \text{ και } I_2 = 130.0 \text{ mA} \quad (4.425)$$

Άρα

$$V_c - V_a = IR_{eq} = (I_1 + I_2)(1.714R) = 240V \quad (4.426)$$

Συνεπώς, επιστρέφοντας στο αρχικό κύκλωμα στο Σχήμα 4.71(a), έχουμε στον αντίστατη αντίστασης  $4R$

$$I_4 = \frac{V_c - V_a}{4R} = \frac{240}{4000} = 60.0 \text{ mA} \quad (4.427)$$

Τέλος, από τον 1ο κανόνα του Kirchoff για τον κόμβο a - ξανά στο αρχικό κύκλωμα - έχουμε

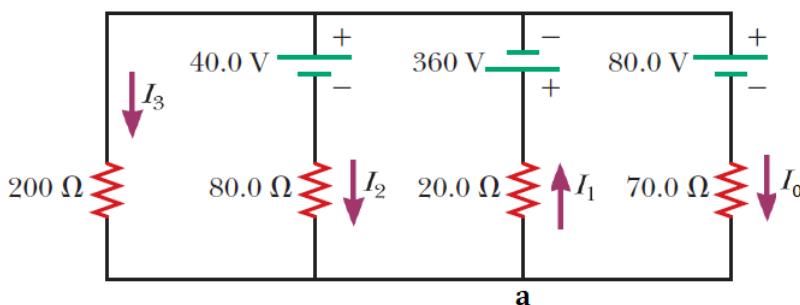
$$I_4 = I_{ae} + I_1 \iff I_{ae} = I_4 - I_1 = 60.0 - 10.0 = 50.0 \text{ mA} \quad (4.428)$$

ή  $I_{ae} = 50 \text{ mA}$  από το σημείο a προς το σημείο e.

#### Παράδειγμα 4.40:

Στο κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 4.72, βρείτε

- (α') Το ρεύμα που διαπερνά την κάθε αντίσταση.
- (β') Την διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης των  $200 \Omega$ .



Σχήμα 4.72: Κύκλωμα και κανόνες Kirchhoff.

Λύση:

(α') Η επιλογή των ρευμάτων είναι τυχαία. Εφαρμόζοντας τον κανόνα κόμβου στόν κόμβο a, θα έχουμε

$$I_1 = I_0 + I_2 + I_3 \quad (4.429)$$

Εφαρμόζοντας δεξιόστροφα τον 2ο κανόνα Kirchhoff (κανόνα βρόχου) στον αριστερό, μεσαίο, και δεξιό βρόχο, θα έχουμε αντίστοιχα

$$-40 - 80I_2 + 200I_3 = 0 \quad (4.430)$$

και

$$360 + 20I_1 + 80I_2 + 40 = 0 \iff 20I_1 + 80I_2 + 400 = 0 \quad (4.431)$$

και

$$-80 - 70I_0 - 20I_1 - 360 = 0 \iff 70I_0 + 20I_1 + 440 = 0 \quad (4.432)$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$I_0 - I_1 + I_2 = 0 \quad (4.433)$$

$$2I_1 + 8I_2 = -40 \quad (4.434)$$

$$-8I_2 + 20I_3 = 4 \quad (4.435)$$

$$7I_0 + 2I_1 = -44 \quad (4.436)$$

Λύνοντας το σύστημα θα έχουμε

$$I_0 = -4 \text{ A} \quad (4.437)$$

$$I_1 = -8 \text{ A} \quad (4.438)$$

$$I_2 = -3 \text{ A} \quad (4.439)$$

$$I_3 = -1 \text{ A} \quad (4.440)$$

με τα πρόσημα να δηλώνουν ότι η φορά όλων (!) των ρευμάτων είναι αντίθετη από αυτή που επιλέξαμε.

(β') Για την αντίσταση των  $200 \Omega$  βρίσκουμε ότι,

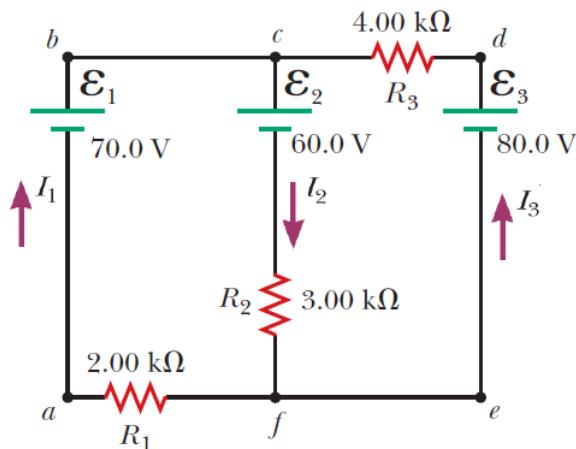
$$\Delta V = I_3 R = 200 \text{ V} \quad (4.441)$$

### Παράδειγμα 4.41:

Στο Σχήμα 4.73, χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff να βρείτε

(α') το ρεύμα σε κάθε αντίστατη

(β') τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων  $c$  και  $f$ .



Σχήμα 4.73: Κύκλωμα και κανόνες Kirchhoff.

Λύση:

(α') Σημειώνουμε τυχαία τα ρεύματα όπως στο σχήμα. Εφαρμόζοντας τον 2o κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο  $abcdea$  έχουμε

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \implies 70V - 60V - 3I_1 - 3I_2 = 0 \implies I_1 = 5 - 1.5I_2 \quad (4.442)$$

Ομοίως για τον βρόχο  $edcfe$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \implies 80V - 60V - 4I_1 - 3I_2 = 0 \implies I_3 = 5 - 0.75I_2 \quad (4.443)$$

Εφαρμόζοντας τον 1o κανόνα του Kirchhoff για τον κόμβο  $c$  παίρνουμε

$$I_2 = I_3 + I_1 \quad (4.444)$$

και λύνοντας το σύστημα έχουμε  $I_2 = 3.08 \text{ mA}$ ,  $I_1 = 0.385 \text{ mA}$  και  $I_3 = 2.69 \text{ mA}$ .

(β') Κατευθυνόμαστε από τον κόμβο  $c$  προς τον κόμβο  $f$ ,

$$V_f - V_c = -\varepsilon_2 - R_2 I_2 = -60V - (3 \times 10^3)(3.08 \times 10^{-3}) = -69.2 \text{ V} \quad (4.445)$$

ή

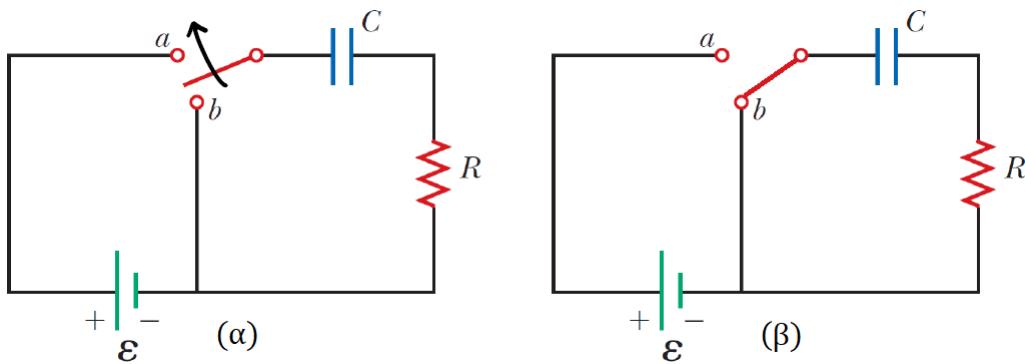
$$|\Delta V|_{cf} = 69.2 \text{ V} \quad (4.446)$$

όπου ο κόμβος  $c$  έχει το υψηλότερο δυναμικό.

#### 4.8.2 Κυκλώματα RC

Σε όλα τα παραδείγματα μας ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό. Αν όμως αρχίσουμε να τοποθετούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα θα εξακολουθήσει να έχει μια συγκεκριμένη κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται **RC**-κύκλωμα.

Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή, όπως στο Σχήμα 4.74(α). Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή  $t = 0$  (θέση α), ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, λόγω παρουσίας της πηγής ΗΕΔ  $\varepsilon$ , και ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει σε προηγούμενες παραγράφους. Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται. Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται. Γιατί; Δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα! Ο πυκνωτής έχει στα άκρα του διαφορά δυναμικού ίση με  $\varepsilon$ ! Έτσι, δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο κύκλωμα και άρα δεν υπάρχει και ρεύμα. Ας αναλύσουμε τη διαδικασία με το 2o κανόνα του Kirchhoff,



Σχήμα 4.74: Κύκλωμα RC.

δεξιόστροφα:

$$\sum \Delta V = 0 \iff \Delta V_{source} + \Delta V_C + \Delta V_R = 0 \iff \varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \quad (4.447)$$

με  $i, q$  το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή σε μια τυχαία χρονική στιγμή  $t > 0$ : αποτελούν στιγμιαίες τιμές. Αρχικά λοιπόν, το ρεύμα που διαφρέει το κύκλωμα είναι

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \quad t = 0 \quad (4.448)$$

γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδενικό. Τότε, η διαφορά δυναμικού της πηγής εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης. Μετά τη φόρτιση του πυκνωτή στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν: η διαφορά δυναμικού της πηγής εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή. Τότε το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q_0 = C\Delta V = C\varepsilon \quad (4.449)$$

Όμως η παραπάνω ανάλυση αφορούσε την αρχική και την τελική κατάσταση του κυκλώματος, και όχι κάθε στιγμή. Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Για να δούμε πως θα το καταφέρουμε.

Ξέρουμε ότι

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (4.450)$$

και άρα

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \iff \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC} \quad (4.451)$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση<sup>6</sup> έχουμε

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt \quad (4.452)$$

Ολοκληρώνοντας κάθε μέλος ως προς το φορτίο και το χρόνο αντίστοιχα θα έχουμε

$$\int_0^{\hat{q}} \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} \int_0^{\tau} dt \iff \ln \left( \frac{\hat{q} - C\varepsilon}{-C\varepsilon} \right) = -\frac{\tau}{RC} \quad (4.453)$$

Οπότε

$$\hat{q}(\tau) = C\varepsilon(1 - e^{-\tau/RC}) = Q_0(1 - e^{-\tau/RC}) \quad (4.454)$$

ή αλλιώς

$$q(t) = Q_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (4.455)$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε το στιγμιαίο ρεύμα  $i(t)$

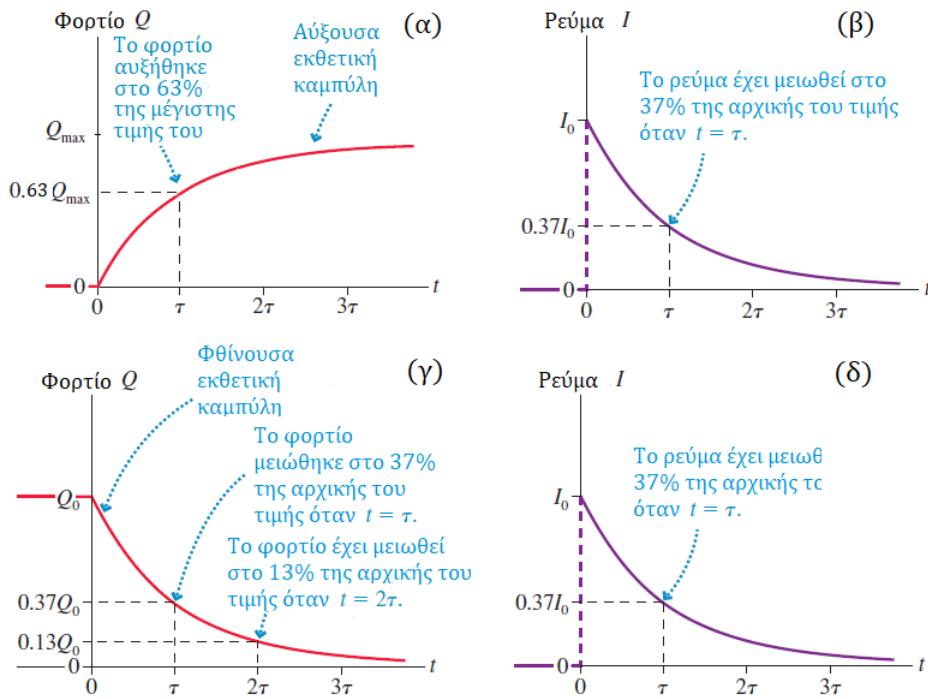
$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = i_0 e^{-t/RC} \quad (4.456)$$

Η ποσότητα  $RC$  ονομάζεται και χωρτητική χρονική σταθερά  $\tau^7$ , η οποία εκφράζει τη χρονική στιγμή που το ρεύμα φθίνει στο  $1/e$  ( $0.368\varepsilon/C$ ) της αρχικής του τιμής, δηλ. όταν φθίνει στο 37% της αρχικής του τιμής. Αντίστοιχα, εκφράζει τη χρονική στιγμή που το φορτίο αυξάνει στην τιμή  $q = 0.632C\varepsilon$ , δηλ. όταν αυξάνει στο 63% της μέγιστης του τιμής. Οι καμπύλες αυτές φαίνονται στα Σχήματα 4.75(α-β). Έστω τώρα ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με κάποιο φορτίο  $Q_0$ . Στα άκρα του θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V_c = \frac{Q_0}{C} \quad (4.457)$$

<sup>6</sup>Να τη πάλι!

<sup>7</sup>Δε σχετίζεται με το  $\tau$  που χρησιμοποιήσαμε στη διαφορική εξίσωση.

Σχήμα 4.75: Ρεύματα και φορτία σε κύκλωμα  $RC$ .

Αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείσουμε το διακόπτη στη θέση **b**, τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη και το ρεύμα θα έχει αρχική τιμή

$$I_0 = \frac{\Delta V_c}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (4.458)$$

Εστω  $t$  μια τυχαία χρονική στιγμή στην εκφόρτιση, όπου ο πυκνωτής φέρει φορτίο  $q$  και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι  $i$ . Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff, δεξιόστροφα, στο κύκλωμα θα έχουμε

$$\Delta V_c + \Delta V_R = 0 \iff -\frac{q}{C} - iR = 0 \quad (4.459)$$

και αφού ξέρουμε ότι  $i = dq/dt$  θα έχουμε

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \iff \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt \quad (4.460)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη ως προς το φορτίο και το χρόνο αντίστοιχα, θα έχουμε

$$\int_{Q_0}^{\hat{q}} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^\tau dt \iff \ln \left( \frac{\hat{q}}{Q_0} \right) = -\frac{\tau}{RC} \quad (4.461)$$

και άρα

$$\hat{q}(\tau) = Q_0 e^{-\tau/RC} \quad (4.462)$$

ή

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad (4.463)$$

Η παραγώγιση θα μας δώσει ξανά το στιγμιαίο ρεύμα, δηλ.

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -I_0 e^{-t/RC} \quad (4.464)$$

με

$$I_0 = \frac{\Delta V_c}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (4.465)$$

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει ξανά ότι η φορά του ρεύματος είναι η αντίθετη από αυτή που έχουμε υποθέσει. Οι καμπύλες φορτίου και ρεύματος κατά τη διάρκεια της εκφόρτισης φαίνονται στα Σχήματα 4.75(γ-δ). Ξανά η ποσότητα  $RC$  συμβολίζεται και με το γράμμα  $\tau$ .

Ας συνοψίσουμε στον Πίνακα 4.2.

Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή		
Κατάσταση	Φορτίο	Ρεύμα
Φόρτιση	$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$	$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$
Εκφόρτιση	$q(t) = Q_0e^{-t/RC}$	$i(t) = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$

Πίνακας 4.2: Πίνακας Σχέσεων Πυκνωτή σε κύκλωμα  $RC$ .

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4.42:

Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως στο Σχήμα 4.74(a), με τιμές  $\varepsilon = 12 \text{ V}$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$ , και  $R = 8 \times 10^5 \Omega$ . Βρείτε

- (α') τη χρονική σταθερά  $\tau$
- (β') το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή
- (γ') το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα
- (δ') τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου

Λύση: Για τα ερώτηματα (α-γ) είναι

$$\tau = RC = 4 \text{ s} \quad (4.466)$$

$$Q_{max} = C\varepsilon = 60 \mu\text{C} \quad (4.467)$$

$$I_{max} = \frac{\varepsilon}{R} = 15 \mu\text{A} \quad (4.468)$$

Για το ερώτημα (δ) έχουμε

$$q(t) = Q_{max}(1 - e^{-t/\tau}) = (60 \times 10^{-6})(1 - e^{-t/4}) \text{ C} \quad (4.469)$$

$$i(t) = I_{max}e^{-t/\tau} = (15 \times 10^{-6})e^{-t/4} \text{ A} \quad (4.470)$$

#### Παράδειγμα 4.43:

Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C$  που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης  $R$ , όπως στο Σχήμα 4.74(β).

- (α') Μετά από πόσες χρονικές σταθερές  $\tau$  γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το  $1/4$  της αρχικής

του τιμής;  
 (β') Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται.  
 Μετά από πόσες χρονικές σταθερές  $\tau$  γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το  $1/4$  της αρχικής της τιμής;

Λύση:  
 (α') Ξέρουμε ότι κατά την εκφόρτιση ισχύει

$$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC \quad (4.471)$$

Ζητάμε το χρόνο  $t$  εκφρασμένο σε μονάδες  $\tau$  για τον οποίο

$$q(t) = \frac{1}{4}Q_0 \quad (4.472)$$

Έτσι

$$Q_0 e^{-t/\tau} = \frac{1}{4}Q_0 \iff e^{-t/\tau} = \frac{1}{4} \quad (4.473)$$

$$\ln e^{-t/\tau} = \ln \frac{1}{4} \iff -\frac{t}{\tau} = -\ln 4 \quad (4.474)$$

$$t = (\ln 4)\tau \iff t \approx 1.38\tau \quad (4.475)$$

(β') Ξέρουμε ότι

$$U_E = \frac{1}{2C} Q^2(t) \quad (4.476)$$

Ζητάμε το χρόνο  $t$  εκφρασμένο σε μονάδες  $\tau$  για τον οποίο

$$U_E(t) = \frac{1}{4}U_{init} = \frac{1}{4} \frac{1}{2C} Q_0^2 \quad (4.477)$$

Άρα

$$U_E(t) = \frac{1}{2C} Q_0^2 e^{-2t/\tau} \iff \frac{1}{2C} Q_0^2 e^{-2t/\tau} = \frac{1}{4} \frac{1}{2C} Q_0^2 \quad (4.478)$$

$$e^{-2t/\tau} = \frac{1}{4} \iff t = \frac{1}{2}(\ln 4)\tau \approx 0.69\tau \quad (4.479)$$

#### Παράδειγμα 4.44:

Έστω ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης που συνδέονται σε σειρά, όπως έχουμε ήδη δει, με  $\epsilon = 30$  V,  $C = 5$  μF, και  $R = 10^6$  Ω, όπως στο Σχήμα 4.75. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

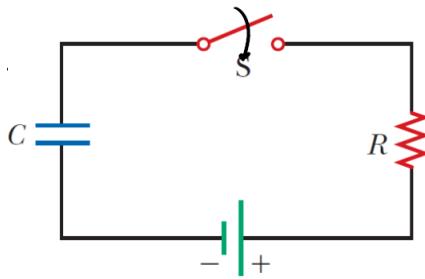
Λύση: Ο πυκνωτής φορτίζεται και το ρεύμα στο κύκλωμα δίνεται ως

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (4.480)$$

Είναι  $RC = 10^6 \times 5 \times 10^{-6} = 5$  s. Επίσης  $\frac{\epsilon}{R} = \frac{30}{10^6} = 30$  μA. Από τις δυο τελευταίες σχέσεις θα έχουμε

$$i(t) = 30 \times 10^{-6} e^{-t/5} \quad (4.481)$$

και για  $t = 10$  s,  $i(10) \approx 4 \times 10^{-6}$  A.

Σχήμα 4.76: Κύκλωμα  $RC$ .Παράδειγμα 4.45:

Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C = 5 \mu\text{F}$  που φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού  $\Delta V = 800 \text{ V}$  και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής;

Λύση: Ξέρουμε ότι

$$P_R = \frac{dE_R}{dt} \implies E_R = \int_0^{+\infty} P_R dt \quad (4.482)$$

Επειδή

$$P_R = I^2(t)R \quad (4.483)$$

θα είναι

$$E_R = \int_0^{+\infty} I^2(t)R dt = \int_0^{+\infty} \frac{Q_0^2}{(RC)^2} e^{-2t/\tau} R dt \quad (4.484)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{Q_0^2}{RC^2} \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt \quad (4.485)$$

$$= \frac{Q_0^2}{RC^2} \left( -\frac{\tau}{2} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t/\tau} - 1 \right) \right) = \frac{Q_0^2}{RC^2} \left( -\frac{\tau}{2} (0 - 1) \right) \quad (4.486)$$

$$= \frac{Q_0^2}{RC^2} \frac{RC}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (4.487)$$

και επειδή  $\varepsilon = Q_0/C$ , τελικά είναι

$$E_R = \frac{1}{2} C \varepsilon^2 \quad (4.488)$$

Παράδειγμα 4.46:

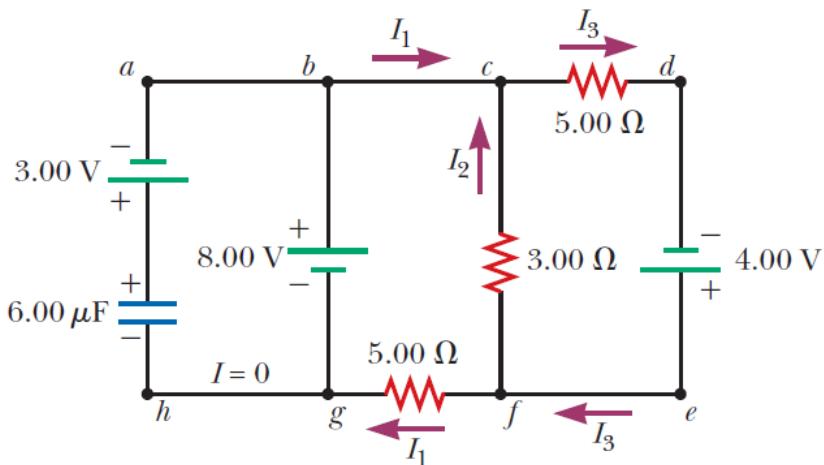
Το κύκλωμα του Σχήματος 4.77 έχει συνδεθεί για πολλή ώρα, τόση ώστε ο πυκνωτής να έχει φορτιστεί.

Βρείτε

- (α') το ρεύμα στην μπαταρία των 4 V
- (β') το ρεύμα στον αντιστάτη των 3 Ω
- (γ') το ρεύμα στην μπαταρία των 8 V
- (δ') το ρεύμα στην μπαταρία των 3 V
- (ε') το φορτίο στον πυκνωτή

Λύση: Το ρεύμα στον κλάδο *ghab* του πυκνωτή είναι μηδέν, αφού ο πυκνωτής είναι φορτισμένος. Για τον κεντρικό βρόχο *bcbgb*, ο 2ος κανόνας του Kirchhoff μας δίνει

$$8 + 3I_2 - 5I_1 = 0 \iff I_1 = 1.6 + 0.6I_2$$



Σχήμα 4.77: Κύκλωμα αντιστάσεων και πυκνωτών.

Για τον δεξιό βρόχο  $cdefc$ , έχουμε από το 2o χανόνα του Kirchhoff ότι

$$4 - 3I_2 - 5I_3 = 0 \iff I_3 = 0.8 - 0.6I_2$$

Στον κόμβο  $c$ , ο 1oς χανόνας του Kirchhoff μας δίνει

$$I_1 + I_2 = I_3$$

- (α') Αντικαθιστώντας, έχουμε  $I_2 = -0.3636$  A, και αρα  $I_3 = 1.02$  A.
- (β') Το ρεύμα στον αντιστάτη των  $3\ \Omega$  είναι  $I_2 = 0.364$  A, με φορά προς τα κάτω (αντίθετα απ' ό,τι φαίνεται στο σχήμα).
- (γ') Έχουμε  $I_1 = 1.38$  A, με φορά προς τα επάνω.
- (δ') Αφού ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, το ρεύμα στον κλάδο αυτόν είναι μηδέν.
- (ε') Για τον αριστερό βρόχο  $abgha$ , ο 2oς χανόνας του Kirchhoff μας δίνει

$$\varepsilon_1 + \Delta V_c + \varepsilon_2 = 0 \iff 3 - \frac{Q}{6 \times 10^{-6}} + 8 = 0 \iff Q = 66 \text{ } \mu\text{C}$$

#### Παράδειγμα 4.47:

Το ζεύγος πυκνωτών του Σχήματος 4.78 φορτίζονται πλήρως από μια μπαταρία  $12\text{ V}$ . Η μπαταρία αποσυνδέεται και ο διακόπτης κλείνει. Μετά από  $1.0\text{ ms}$

- (α') πόσο φορτίο έχει παραμείνει στον πυκνωτή των  $3\text{ } \mu\text{F}$ ;
- (β') πόσο φορτίο έχει παραμείνει στον πυκνωτή των  $2\text{ } \mu\text{F}$ ;
- (γ') πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη εκείνη τη χρονική στιγμή;

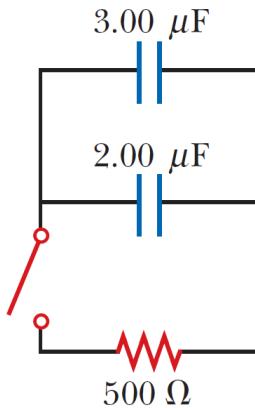
Λύση:

- (α') Η ισοδύναμη χωρητικότητα αυτού του παράλληλου συνδυασμού είναι

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 5\text{ } \mu\text{F} \quad (4.489)$$

Όταν φορτιστεί πλήρως από τη μπαταρία, το συνολικό φορτίο πριν το κλείσιμο του διακόπτη είναι

$$Q_0 = C_{eq} \Delta V = 60\text{ } \mu\text{C} \quad (4.490)$$



Σχήμα 4.78: Παραλληλοί πυκνωτές με αντιστάτη.

Όταν ο διακόπτης κλείσει, η χρονική σταθερά  $\tau$  του κυκλώματος είναι

$$\tau = RC_{eq} = 2.5 \text{ ms} \quad (4.491)$$

Έτσι, στο  $t = 1.0 \text{ ms}$  μετά το κλείσιμο, το φορτίο που απομένει είναι

$$q = Q_0 e^{-t/\tau} = 40.2 \mu\text{C} \quad (4.492)$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του παραλληλού συνδυασμού των πυκνωτών είναι

$$\Delta V = \frac{q}{C_{eq}} = 8.04 \text{ V} \quad (4.493)$$

και το εναπομείναν φορτίο στον πυκνωτή των  $3.0 \mu\text{F}$  είναι

$$q_3 = C_3 \Delta V = 24.1 \mu\text{C} \quad (4.494)$$

(β') Το φορτίο που απομένει στον πυκνωτή των  $2.0 \mu\text{F}$  είναι

$$q_2 = q - q_3 = 16.1 \mu\text{C} \quad (4.495)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε και με τη σχέση

$$q_2 = C_2 \Delta V \quad (4.496)$$

(γ') Αφού ο αντιστάτης είναι σε παραλληλία με τη διάταξη των πυκνωτών, έχει την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα του με τους πυκνωτές. Από το νόμο του Ohm, έχουμε

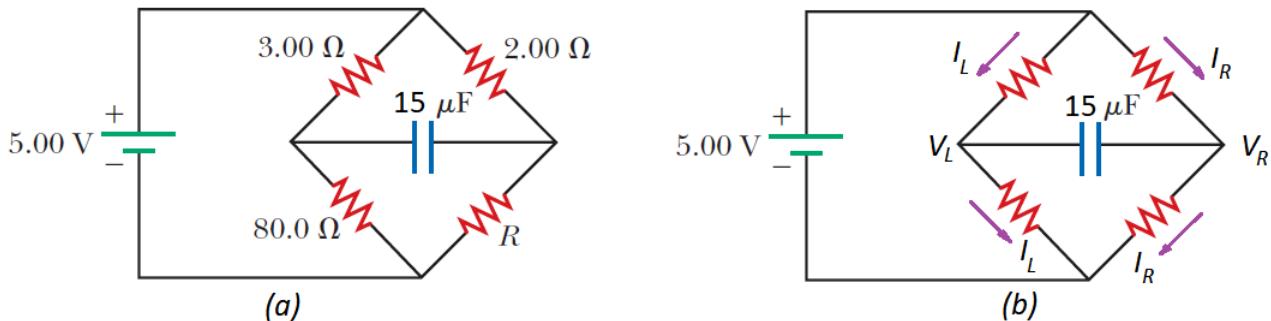
$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{8.04}{5 \times 10^2} = 1.61 \times 10^{-2} \text{ A} \quad (4.497)$$

#### Παράδειγμα 4.48:

Στο κύκλωμα του Σχήματος 4.79(a)

- (α') Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή συναρτήσει του  $R$ .
- (β') Βρείτε το φορτίο όταν  $R = 10 \Omega$ .
- (γ') Μπορεί το φορτίο του πυκνωτή να είναι μηδέν; Αν ναι, για ποιά τιμή του  $R$ ;

- (δ') Ποιό είναι το μέγιστο δυνατό μέτρο φορτίου στον πυκνωτή; Για ποιά τιμή του  $R$  επιτυγχάνεται;
- (ε') Έχει νόημα να θέσουμε  $R = \infty$ ; Εξηγήστε. Αν ναι, ποιό είναι το μέτρο του φορτίου;

Σχήμα 4.79: Διάταξη μεταβλητού  $R$ .Λύση:

(α') Όταν ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, δεν υπάρχει ρεύμα στον καλάδο του. Οι αντιστάτες των 3 Ω και 80 Ω είναι σε σειρά μεταξύ τους και σε παραλληλία με τους αντιστάτες των 2 Ω και  $R$  Ω. Δείτε το Σχήμα 4.79(b).

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε ζεύγους αντιστατών από τα προαναφερθέντα είναι ίδια και ίση με  $\Delta V = 5$  V. Το ρεύμα στους αριστερούς αντιστάτες είναι  $I_L = \frac{\Delta V}{80+3} = \frac{5}{83}$  A. Το ρεύμα στους δεξιούς αντιστάτες είναι  $I_R = \frac{\Delta V}{2+R} = \frac{5}{2+R}$  A. Ακολουθώντας το πάνω τριγωνικό μονοπάτι από την αριστερή πλάκα του πυκνωτή ως τη δεξιά, είναι

$$V_L + 3I_L - 2I_R = V_R \iff V_L - V_R = 2I_R - 3I_L \quad (4.498)$$

Άρα έχουμε ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή θα είναι

$$\Delta V = V_L - V_R = 5 \left( \frac{2}{2+R} - \frac{3}{83} \right) \quad (4.499)$$

Το φορτίο στον πυκνωτή είναι

$$q = C\Delta V = 15 \times 10^{-6} \left( \frac{2}{2+R} - \frac{3}{83} \right) = \frac{30}{2+R} - \frac{30}{83} \mu C \quad (4.500)$$

(β') Για  $R = 10$ , το φορτίο θα είναι

$$q = \frac{30}{12} - \frac{30}{83} = 1.96 \mu C \quad (4.501)$$

(γ') Ναι, μπορεί να είναι μηδέν, και επιτυγχάνεται όταν

$$q = 15 \times 10^{-6} \left( \frac{2}{2+R} - \frac{3}{83} \right) = 0 \iff R = \frac{2 \times 83}{3} - 2 = 53.3 \Omega \quad (4.502)$$

(δ') Από την εξίσωση του φορτίου, το μέγιστο φορτίο επιτυγχάνεται για  $R = 0$  και είναι

$$q = 15 \times 10^{-6} \left( \frac{2}{2+0} - \frac{3}{83} \right) = 14.5 \mu C \quad (4.503)$$

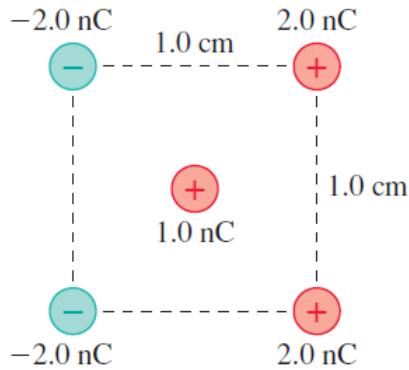
(ε') Ναι, έχει νόημα. Θέτοντας  $R = \infty$  ουσιαστικά αποσυνδέουμε το καλάδιο που φέρει την αντίσταση  $R$ . Τότε το φορτίο θα έχει μέτρο

$$|q| = 15 \times 10^{-6} \left| \frac{2}{2+\infty} - \frac{3}{83} \right| = \frac{45}{83} \times 10^{-6} = 0.542 \mu C \quad (4.504)$$

## 4.9 Ασκήσεις

## Παράδειγμα 4.49:

Πόση είναι η δύναμη  $\vec{F}$  στο  $1 \text{ nC}$  φορτίο, βρίσκεται στο μέσο του παρακάτω Σχήματος 4.80 εξαιτίας των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων; Δώστε την απάντηση σας υπό την μορφή συνιστωσών.



Σχήμα 4.80: Πεντάδα φορτίων.

Λύση: Τοποθετούμε το φορτίο  $q_1$  στην αρχή των αξόνων και τα  $q_2, q_3, q_4, q_5$  στο πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο αντίστοιχα. Η ηλεκτρική ενέργεια στο  $q_1$  είναι το διάνυσμα του αθροίσματων των ηλεκτρικών ενεργειών των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων. Το μέγεθος των περιμετρικών φορτίων είναι το ίδιο και για τα τέσσερα καθώς οι φορτίσεις του είναι ίσες (κατά απόλυτη τιμή) και ισαπέχουν από το  $q_1$ . Επομένως

$$F_{21} = F_{31} = F_{41} = F_{51} = \frac{(9 \times 10^9)(2 \times 10^{-9})(1 \times 10^{-4})}{(0.5 \times 10^{-2})^2 + (0.5 \times 10^{-2})^2} = 3.6 \times 10^{-4} \text{ N} \quad (4.505)$$

Άρα

$$\vec{F}_{\text{on } 1} = (3.6 \times 10^{-4} \text{ N}, \text{απομακρυνόμενη από το } q_2) \quad (4.506)$$

$$+ (3.6 \times 10^{-4} \text{ N}, \text{απομακρυνόμενη από το } q_3) \quad (4.507)$$

$$+ (3.6 \times 10^{-4} \text{ N}, \text{απομακρυνόμενη από το } q_4) \quad (4.508)$$

$$+ (3.6 \times 10^{-4} \text{ N}, \text{απομακρυνόμενη από το } q_5) \quad (4.509)$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$\vec{F}_{\text{on } 1} = F_{\text{on } 1} \left( \left[ -\cos(45^\circ) \vec{i} - \sin(45^\circ) \vec{j} \right] + \right. \quad (4.510)$$

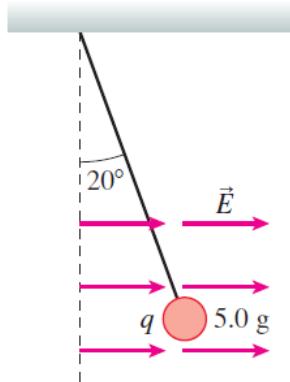
$$\left. + \left[ -\cos(45^\circ) \vec{i} + \sin(45^\circ) \vec{j} \right] + \left[ -\cos(45^\circ) \vec{i} - \sin(45^\circ) \vec{j} \right] + \right. \quad (4.511)$$

$$\left. + \left[ -\cos(45^\circ) \vec{i} + \sin(45^\circ) \vec{j} \right] \right) \quad (4.512)$$

$$= (3.6 \times 10^{-4} \text{ N}) (-4 \cos(45^\circ) \vec{i}) = -1 \times 10^{-3} \vec{i} \text{ N} \quad (4.513)$$

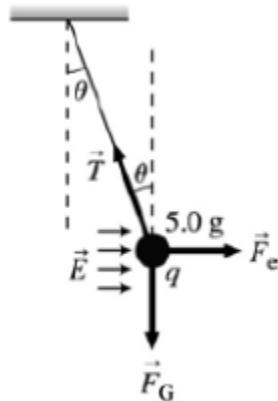
**Παράδειγμα 4.50:**

Ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = 100000 \text{ N/C}$  και ένα σωματίδιο  $5 \text{ g}$  βρίσκονται στον ίδιο χώρο έτσι ώστε το τελευταίο να κρέμεται υπό γωνία  $20^\circ$ , όπως στο Σχήμα 4.81. Πόσο είναι το φορτίο στο σωματίδιο;



Σχήμα 4.81: Πεδίο και κρεμάμενο σωματίδιο.

Λύση: Θεωρούμε ότι η φόρτιση του σωματιδίου περιγράφεται ως σημειακή φόρτιση. Δείτε το Σχήμα 4.82. Το σωματίδιο ισορροπεί στο ηλεκτρικό πεδίο όταν το νήμα σχηματίζει γωνία  $20^\circ$  με τον οριζόντιο άξονα. Οι



Σχήμα 4.82: Δυνάμεις σε φορτίο σε νήμα.

τρείς δυνάμεις που δρούν στο φορτισμένο σωματίδιο είναι η ηλεκτρική δύναμη του πεδίου, η βαρύτητα και η τάση του νήματος. Από τον δεύτερο νόμο του Newton, για το σωματίδιο, έχουμε  $\vec{F} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}$  και αναλύωντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$F_x = T_x + 0 + qE = 0, \quad F_y = T_y - mg + 0 = 0 \quad (4.514)$$

Άρα

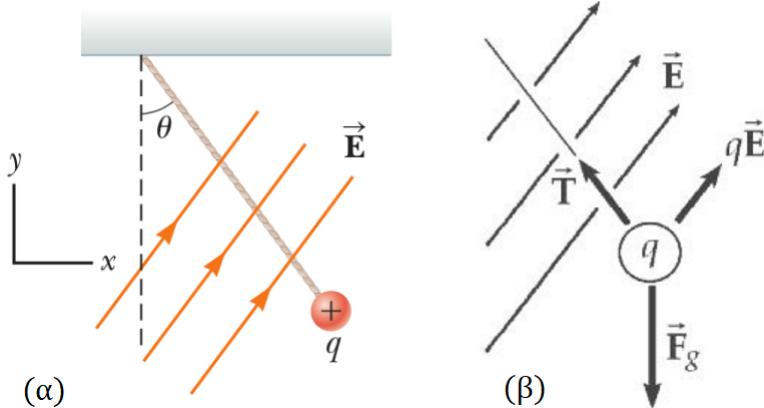
$$T \sin \theta = qE, \quad T \cos \theta = mg \quad (4.515)$$

Διαιρούμε κατά μέλη

$$\tan \theta = \frac{qE}{mg} \Rightarrow q = \frac{mg \tan \theta}{E} = \frac{(5 \times 10^{-3})(9.8) \tan 20^\circ}{100000} = 1.78 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.18 \mu \text{ C} \quad (4.516)$$

Παράδειγμα 4.51:

Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας  $1 \text{ g}$  κρέμεται από σχοινί παρουσία ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E} = (3\vec{i} + 5\vec{j}) \times 10^5 \text{ N/C}$ , όπως στο Σχήμα 4.83(α). Το σωματίδιο ισορροπεί υπό γωνία  $\theta = 37^\circ$ . Βρείτε  
 (α') την τάση του σχοινιού  
 (β') το φορτίο του σωματιδίου



Σχήμα 4.83: Κρεμάμενο φορτίο σε “πλάγιο” ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται φαίνονται στο Σχήμα 4.83(β). Ο 2ος νόμος του Newton μας δίνει ότι

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + q\vec{E} + \vec{F}_g = \vec{0} \quad (4.517)$$

Ξέρουμε ότι για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου θα έχουμε τιμές

$$E_x = 3 \times 10^5 \text{ N/C} \quad (4.518)$$

$$E_y = 5 \times 10^5 \text{ N/C} \quad (4.519)$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες, έχουμε

$$\sum F_x = qE_x - T \sin(37^\circ) = 0 \quad (4.520)$$

$$\sum F_y = qE_y + T \cos(37^\circ) - mg = 0 \quad (4.521)$$

Λύνουμε ως προς  $T$  και έχουμε

$$T = \frac{qE_x}{\sin 37^\circ} \quad (4.522)$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

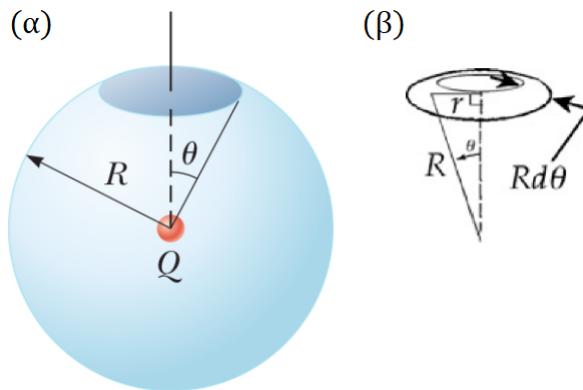
$$q = \frac{mg}{E_y + \frac{E_x}{\tan 37^\circ}} = 1.1 \times 10^{-8} \text{ N/C} \quad (4.523)$$

Με χρήση του παραπάνω αποτελέσματος, έχουμε

$$T = \frac{qE_x}{\sin 37^\circ} = 5.44 \times 10^{-3} \text{ N} \quad (4.524)$$

**Παράδειγμα 4.52:**

Σωματίδιο με φορτίο  $Q$  βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας  $R$ . Βρείτε την ηλεκτρική ροή του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνά ένα κυκλικό καπάκι ημιγωνίας  $\theta$ , όπως στο Σχήμα 4.84(α).



Σχήμα 4.84: Φορτίο σε σφαίρα.

Λύση: Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  εξ' αιτίας του φορτίου είναι ομοιόμορφο και δείχνει ακτινικά προς τα έξω, άρα

$$\Phi_E = EA \quad (4.525)$$

Το μήκος του τόξου ενός μικρού δακτυλιοειδούς στοιχείου όπως στο Σχήμα 4.84(β), είναι  $ds = Rd\theta$ , και η περιφέρειά του είναι  $2\pi r = 2\pi R \sin \theta$ . Το εμβαδό του καπακιού είναι

$$A = \int 2\pi r ds = \int_0^\theta (2\pi R \sin \theta) Rd\theta = 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \quad (4.526)$$

Άρα η ηλεκτρική ροή είναι

$$\Phi_E = EA = k_e \frac{Q}{R^2} 2\pi R^2 (1 - \cos \theta) = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta) \quad (4.527)$$

**Παράδειγμα 4.53:**

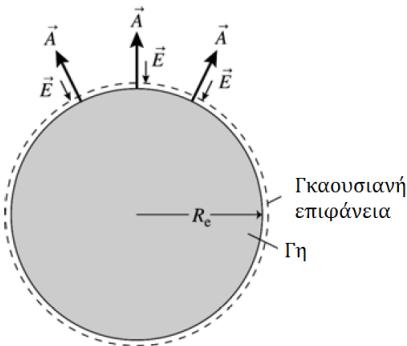
Η Γη διαθέτει ένα κάθετο ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνειά της (με φορά προς το εσωτερικό της), που έχει μέτρο - χατά μέσο όρο -  $E = 100 \text{ N/C}$ . Το πεδίο αυτό διατηρείται από διάφορες ατμοσφαιρικές διεργασίες, συμπεριλαμβανομένων και των κεραυνών. Ποιό είναι το φορτίο στην επιφάνεια της Γης; Θεωρήστε τη Γη ως απόλυτα σφαιρική με ακτίνα  $r = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$  και χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss με  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .

Λύση: Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί όπως στο Σχήμα 4.85. Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το  $\vec{E}$  είναι κάθετο στην επιλεγμένη γκαουσιανή επιφάνεια, και το μέτρο του πεδίου έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας. Από το νόμο του Gauss, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.528)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο “δείχνει” προς τα μέσα, προς το εσωτερικό της Γης, άρα η ροή θα είναι αρνητική, οπότε

$$Q_{in} = -\epsilon_0 E A_{σφαίρας} = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 = -4.51 \times 10^5 \text{ C} \quad (4.529)$$

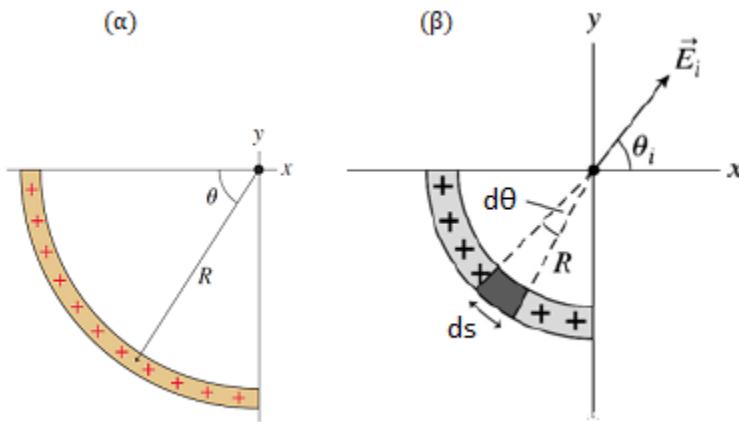


Σχήμα 4.85: Ηλεκτρικό Πεδίο Γης.

## Παράδειγμα 4.54:

Μια πλαστική ράβδος με γραμμική φόρτιση πυκνότητας  $\lambda$  λυγίζεται σε τεταρτοκύλιο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.86(α). Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων.

- (α') Γράψτε παραστάσεις για τις  $x$  και  $y$  συνιστώσες στην αρχή των αξόνων, οι οποίες οφείλονται σε μια μικρή φόρτιση υπό γωνία  $\hat{\theta}$ .
- (β') Γράψτε, χωρίς να τα υπολογίσετε, τα αόριστα ολοκληρώματα των  $x$  και  $y$  συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων.
- (γ') Υπολογίστε τα ολοκληρώματα και βρείτε το  $\vec{E}_{net}$  υπό την μορφή συνιστωσών.



Σχήμα 4.86: Πλαστική λυγισμένη ράβδος.

Λύση: Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. Χωρίζουμε την ράβδο σε αρκετά απειροστά μικρά τμήματα φόρτισης  $dq$  και με μήκος τόξου  $ds$ , όπως στο Σχήμα 4.86(β).

- (α') Το τμήμα  $i$  δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_i$  στην αρχή των αξόνων με δύο συνιστώσες

$$(E_i)_x = E_i \cos \theta_i \quad (E_i)_y = E_i \sin \theta_i \quad (4.530)$$

Παρατηρούμε ότι η γωνία  $\hat{\theta}_i$  εξαρτάται από την θέση του τμήματος  $i$ . Όλα τα τμήματα έχουν απόσταση  $r_i = R$  από την αρχή των αξόνων

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \quad (4.531)$$

Η πυκνότητα της γραμμικής φόρτισης της ράβδου είναι  $\lambda = Q/L$ , όπου  $L$  είναι το μήκος της ράβδου ( $L = \pi R/2$  ως τεταρτοκύλιο). Αυτό μας επιτρέπει να σχετίσουμε την φόρτιση  $dq$  με το μήκος τόξου  $ds$  μέσω της σχέσης

$$dq = \lambda ds = \left( \frac{Q}{L} \right) ds = \left( \frac{2Q}{\pi R} \right) ds \quad (4.532)$$

με  $\Delta s = R\Delta\theta$ . Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων

$$(E_i)_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\theta_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left( \frac{2Q}{\pi R} \right) R d\theta \cos\theta_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2Q}{\pi R^2} \right) d\theta \cos\theta_i \quad (4.533)$$

$$(E_i)_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \sin\theta_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left( \frac{2Q}{\pi R} \right) R d\theta \sin\theta_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2Q}{\pi R^2} \right) d\theta \sin\theta_i \quad (4.534)$$

- (β') Οι  $x$ ,  $y$  συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου για ολόκληρη την ράβδο είναι τα ολοκληρώματα της προηγούμενης ερώτησης από  $\theta = 0$  rad έως  $\theta = \pi/2$  rad. Άρα

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2Q}{\pi R^2} \right) \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \quad (4.535)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2Q}{\pi R^2} \right) \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \quad (4.536)$$

- (γ') Επιλύουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 \quad (4.537)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = -\sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 1 \quad (4.538)$$

Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{\pi R^2} (\vec{i} + \vec{j}) \quad (4.539)$$

#### Παράδειγμα 4.55:

Μια λεπτή ράβδος μήκους  $l$  και ομοιόμορφης κατανομής φορτίου ανά μονάδα μήκους  $\lambda$  βρίσκεται επάνω στο  $x$ -άξονα, όπως στο Σχήμα 4.87.

(α') Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , που βρίσκεται σε απόσταση  $d$  από τη ράβδο κατά μήκος της κάθετης ευθείας που διχοτομεί τη ράβδο δεν έχει  $x$ -συνιστώσα.

(β') Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$E = 2k_e \lambda \frac{\sin(\theta_0)}{d} \quad (4.540)$$

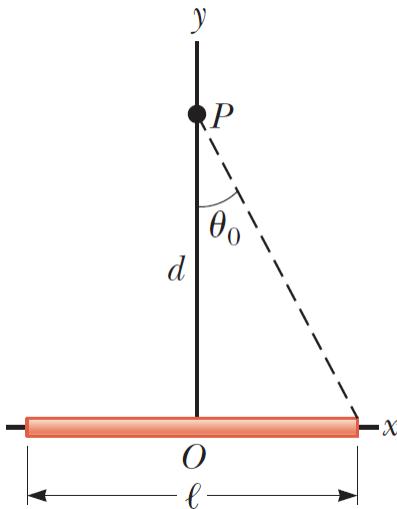
(γ') Δείξτε ότι το πεδίο μιας ράβδου απείρου μήκους ισούται με

$$E = \frac{2k_e \lambda}{d} \quad (4.541)$$

Λύση:

(α') Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , λόγω της συνεισφοράς ενός στοιχείου της ράβδου μήκους  $dx$  από το δεξιό τμήμα της, είναι

$$dE = \frac{k_e dq}{x^2 + d^2}$$



Σχήμα 4.87: Σχήμα Άσκησης 4.55.

με διεύθυνση κατά μήκος της γραμμής που ενώνει το σημείο  $dx$  με το σημείο  $P$ . Το πεδίο μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στον  $\hat{y}'y$  και μια κάθετη στον  $\hat{y}'y$ . Η κάθετη συνιστώσα έχει φορά προς τα αριστερά. Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , λόγω της συνεισφοράς του συμμετρικού του προηγούμενου στοιχείου της ράβδου μήκους  $dx$  από το αριστερό τμήμα της, είναι

$$dE = \frac{k_e dq}{x^2 + d^2}$$

με διεύθυνση κατά μήκος της γραμμής που ενώνει το συμμετρικό στοιχείο  $dx$  με το σημείο  $P$ . Το πεδίο μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στον  $\hat{y}'y$  και μια κάθετη στον  $\hat{y}'y$ . Η κάθετη συνιστώσα έχει φορά προς τα δεξιά.

Οι δύο κάθετες συνιστώσες έχουν αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο, άρα αλληλοακυρώνονται. Οπότε

$$E_x^P = \int dE_x^P = 0$$

(β') Λόγω της παραπάνω παρατήρησης, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE \cos(\theta)$$

όπου

$$\cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Επίσης, η γραμμική πυκνότητα φορτίου μας δίνει ότι

$$dq = \lambda dx$$

οπότε

$$E = 2k_e \lambda d \int_0^{l/2} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{2k_e \lambda \sin(\theta_0)}{d}$$

με

$$\sin(\theta_0) = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + d^2}}$$

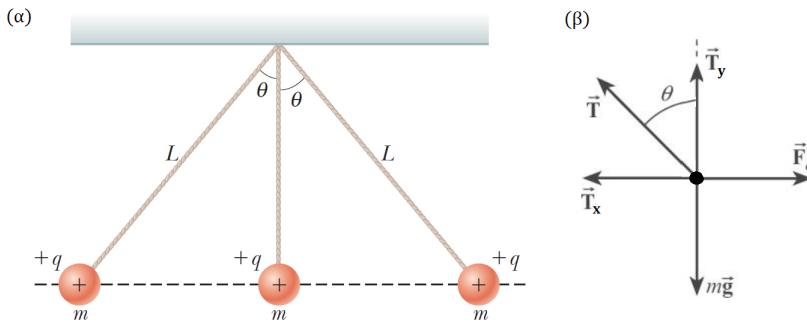
(γ') Αν η ράβδος έχει άπειρο μήκος, τότε η γωνία  $\theta_0$  πλησιάζει τις  $90^\circ$ , και άρα

$$E = \frac{2k_e \lambda}{d}$$

Παράδειγμα 4.56:

Τρια όμοια σημειακά φορτία, καθένα μάζας  $m$  κρέμονται από τρια νήματα όπως στο Σχήμα 4.88(α). Αν τα μήκη των νημάτων αριστερά και δεξιά είναι  $L$ , τότε δείξτε ότι το φορτίο  $q$  ισούται με

$$q = \sqrt{\frac{4L^2mg \sin^2(\theta) \tan(\theta)}{5k_e}}$$



Σχήμα 4.88: Σχήμα Άσκησης 4.56.

Λύση: Δείτε το Σχήμα 4.88(β). Από τον 1ο νόμο του Newton, έχουμε ότι

$$\sum F_y = \vec{0} \Rightarrow T \cos(\theta) = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

και

$$\sum F_x = \vec{0} \Rightarrow F_e = T \sin(\theta) = \frac{mg}{\cos(\theta)} \sin(\theta) = mg \tan(\theta)$$

Όμως

$$F_e = k_e \frac{q^2}{r_1^2} + k_e \frac{q^2}{r_2^2} = \frac{k_e q^2}{(L \sin(\theta))^2} + \frac{k_e q^2}{(2L \sin(\theta))^2} = \frac{5k_e q^2}{4L^2 \sin^2(\theta)}$$

Οπότε

$$\frac{5k_e q^2}{4L^2 \sin^2(\theta)} = mg \tan(\theta) \iff q = \sqrt{\frac{4L^2 mg \sin^2(\theta) \tan(\theta)}{5k_e}}$$

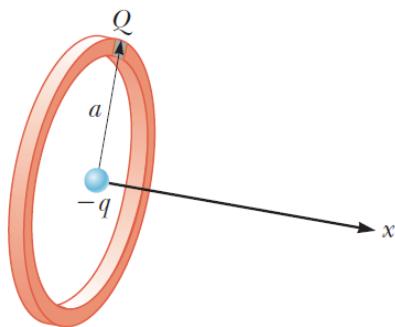
Παράδειγμα 4.57:

Ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο  $-q$  τοποθετείται στο κέντρο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτύλιου, όπου ο δακτύλιος έχει συνολικό θετικό φορτίο  $Q$ , όπως στο Σχήμα 4.89. Το σωματίδιο μπορεί να κινηθεί μόνο επάνω στον άξονα των  $x$ . Μετακινούμε το σωματίδιο μια απόσταση  $x$  επάνω στον άξονα (με  $x \ll a$ ), και το αφήνουμε ελεύθερο. Δείξτε ότι το σωματίδιο ταλαντώνεται με απλή αρμονική κίνηση της οποίας η συχνότητα δίνεται ως

$$f = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k_e Q q}{m a^3} \right)^{1/2}$$

Λύση: Γνωρίζουμε από τις διαλέξεις ότι το πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του  $x$ -άξονα δίνεται από τη σχέση

$$E = E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.542)$$



Σχήμα 4.89: Σχήμα Άσκησης 4.57.

Η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο  $-q$  που βρίσκεται στον άξονα είναι

$$F_e = -k_e Q q \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.543)$$

και όταν  $x \ll a$ , η παραπάνω σχέση γράφεται

$$F_e = -\left(\frac{k_e Q q}{a^2}\right)x \quad (4.544)$$

Αυτή η έκφραση είναι στη μορφή του νόμου του Hooke, με σταθερά

$$k = \frac{k_e Q q}{a^3} \quad (4.545)$$

Άρα επειδή η δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι αντίθετη της μετατόπισής του και προσπαθεί να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας του, η κίνηση του φορτίου είναι απλή αρμονική. Γνωρίζουμε ότι για έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή ισχύει

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.546)$$

και άρα

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e Q q}{ma^3}} \quad (4.547)$$

#### Παράδειγμα 4.58:

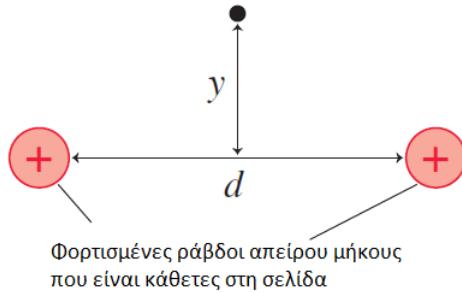
Στο Σχήμα 4.90 βλέπετε μια διατομή δυο φορτισμένων ράβδων απείρου μήκους που βρίσκονται κάθετα στο χαρτί σας και απέχουν απόσταση  $d$  μεταξύ τους. Καθεμιά διαθέτει γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ . Χρησιμοποιήστε γνωστά αποτελέσματα και βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  σε ύψος  $y$  που βρίσκεται στη μεσοκάθετο της γραμμής που ενώνει τις δύο ράβδους.

Λύση: Από τα παραδείγματα, έχουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας μιας άπειρου μήκους ράβδου σε απόσταση  $a$  από αυτή δίνεται ως

$$E = k_e \frac{2\lambda}{a} \quad (4.548)$$

Για κάθε ράβδο,

$$E_{\text{αριστερά}} = E_{\text{δεξιά}} = k_e \frac{2\lambda}{\sqrt{y^2 + (d/2)^2}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \quad (4.549)$$



Σχήμα 4.90: Σχήμα Άσκησης 4.58.

Έστω ότι το διάνυσμα  $E_{\text{αφιστερά}}$  σχηματίζει γωνία  $\phi$  με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα, ενώ το  $E_{\text{δεξιά}}$  σχηματίζει γωνία  $\phi$  με τον οριζόντιο αρνητικό ημιάξονα. Από τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

$$\cos(\phi) = \frac{d/2}{\sqrt{y^2 + d^2/4}} = \frac{d}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \quad (4.550)$$

$$\sin(\phi) = \frac{2y}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \quad (4.551)$$

και άρα

$$\vec{E}_{\text{αφιστερά}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \left( \frac{d}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \vec{j} \right) \quad (4.552)$$

$$\vec{E}_{\text{δεξιά}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \left( -\frac{d}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{4y^2 + d^2}} \vec{j} \right) \quad (4.553)$$

Προσθέτοντας τα δύο διανύσματα έχουμε άλληλο ακύρωση των  $x$ -συνιστωσών τους. Άρα

$$\vec{E} = k_e \frac{16\lambda y}{(4y^2 + d^2)} \vec{j} \quad (4.554)$$

### Παράδειγμα 4.59:

Το Σχήμα 4.91(α) δείχνει μια λεπτή ράβδο μήκους  $L$  με συνολικό φορτίο  $Q$ . Η ράβδος έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ .

- i. Δείξτε ότι ένα τμήμα  $dy$  με φορτίο  $dq$  της ράβδου που βρίσκεται στο σημείο  $(0, \hat{y})$ , συνεισφέρει στο σημείο  $P$  ηλεκτρικό πεδίο

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2 + \hat{y}^2)} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \vec{i} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \vec{j} \right) \quad (4.555)$$

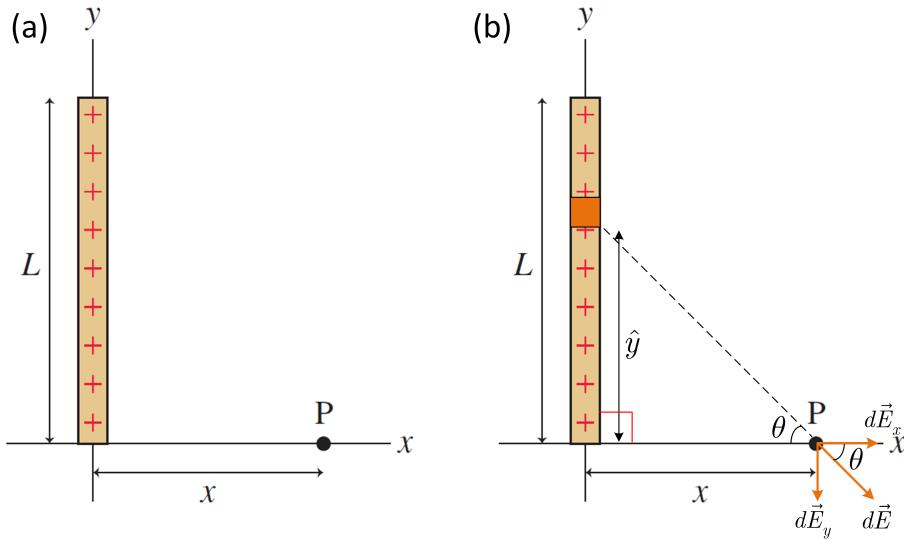
- ii. Δείξτε ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  στο σημείο  $P$  είναι

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + L^2}} \vec{i} - k_e \frac{Q}{Lx} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right) \vec{j} \quad (4.556)$$

- iii. Εξηγήστε τι συμβαίνει αν  $x \gg L$ . Ως τι συμπεριφέρεται σε αυτήν την περίπτωση η ράβδος;

Λύση:

- i. Χωρίζουμε τη ράβδο σε πολλά απειροστά μικρά τμήμα φορτίου  $dq$  και μήκους  $dy$ . Έστω ένα τμήμα  $dy$  με φορτίο  $dq$  της ράβδου που βρίσκεται στο σημείο  $(0, \hat{y})$ , όπως στο Σχήμα 4.91(β). Η απόσταση από



Σχήμα 4.91: Φορτισμένη ράβδος Άσκησης 4.59.

το σημείο  $P$  είναι  $(x^2 + \hat{y}^2)^{1/2}$ . Το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει στο σημείο  $P$  το παραπάνω φορτίο δημιουργεί γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο άξονα και είναι

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} = k_e \frac{dq}{(x^2 + \hat{y}^2)} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \quad (4.557)$$

Αφού

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \text{ και } \sin \theta = \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \quad (4.558)$$

η παραπάνω σχέση δίνει

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2 + \hat{y}^2)} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \vec{i} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \vec{j} \right) \quad (4.559)$$

ii. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  στο σημείο  $P$  αποτελείται από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών των μικρών τμημάτων φορτίου  $dq$ . Δεδομένου ότι η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι  $\lambda = Q/L$ , τότε  $dq = \lambda d\hat{y}$ . Ολοκληρώνοντας από  $\hat{y} = 0$  ως  $\hat{y} = L$ , θα είναι

$$\vec{E} = k_e \lambda \left( \int_0^L \frac{xd\hat{y}}{(x^2 + \hat{y}^2)^{3/2}} \vec{i} - \int_0^L \frac{\hat{y}d\hat{y}}{(x^2 + \hat{y}^2)^{3/2}} \vec{j} \right) \quad (4.560)$$

$$= k_e \frac{Q}{L} \left( x \frac{\hat{y}}{x^2 \sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \Big|_0^L \vec{i} - \frac{-1}{\sqrt{x^2 + \hat{y}^2}} \Big|_0^L \vec{j} \right) \quad (4.561)$$

$$= k_e Q \frac{1}{x \sqrt{x^2 + L^2}} \vec{i} - k_e \frac{Q}{Lx} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right) \vec{j} \quad (4.562)$$

iii. Αν  $x \gg L$ , τότε  $x^2 + L^2 \approx x^2$ , οπότε

$$\vec{E} = k_e Q \frac{1}{x \sqrt{x^2}} \vec{i} - k_e \frac{Q}{Lx} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right) \vec{j} = k_e \frac{Q}{x^2} \vec{i} \quad (4.563)$$

Η ράβδος τότε συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων!

Παράδειγμα 4.60:

Ράβδος ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $Q$  και μήκους  $L$  με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$  κάμπτεται σε μορφή ημικυλίου όπως στο Σχήμα 4.92. Χρησιμοποιήστε ότι ένα μικρό τόξο μήκους  $ds$  δημιουργεί γωνία  $d\theta = ds/R$ , με  $R$  την ακτίνα του ημικυλίου.

- Δείξτε ότι λόγω του σχήματος της ράβδου, στο κέντρο του ημικυλίου υπάρχει μόνο η  $x$ -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου.
- Δείξτε ότι ένα τμήμα  $ds$  με φορτίο  $dq$  της ράβδου συνεισφέρει στο κέντρο του ημικυλίου ηλεκτρικό πεδίο μέτρου

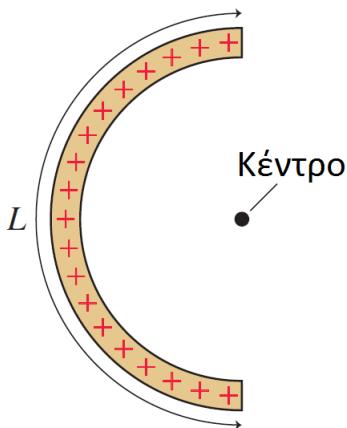
$$dE_x = k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_e) d\theta \quad (4.564)$$

με  $\theta_e$  τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $d\vec{E}_x$  με τον άξονα  $x'x$ .

- Δείξτε ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_x$  στο κέντρο του ημικυλίου δίνεται ως

$$\vec{E}_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \vec{i} \quad (4.565)$$

- Εκτιμήστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου αν  $L = 0.1$  m και  $Q = 30 \times 10^{-9}$  C.



Σχήμα 4.92: Φορτισμένη ράβδος Άσκησης 4.60.

Λύση:

- Επειδή κάθε τμήμα  $i$  της ράβδου υπό γωνία  $\theta$  επάνω από τον οριζόντιο άξονα “ταιριάζει” με ένα άλλο τμήμα υπό γωνία  $\theta$  κάτω από τον οριζόντιο άξονα, οι  $y$ -συνιστώσες των ηλεκτρικών τους πεδίων αλληλοαναρριπίζονται. Αυτό συμβαίνει για όλα τα ζεύγη τμημάτων που βρίσκονται υπό την ίδια γωνία επάνω και κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Άρα

$$E_y = 0 \quad (4.566)$$

- Παρατηρήστε ότι όλα τα τμήματα ράβδου απέχουν απόσταση  $R$  από το κέντρο. Η συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου για ένα τμήμα  $i$  φορτίου  $dq$  είναι

$$dE_i = k_e \frac{dq}{R^2} \quad (4.567)$$

Η πυκνότητα φορτίου είναι γραμμική, δηλ  $\lambda = Q/L$ , οπότε για ένα τμήμα ράβδου απειροστά μικρού μήκους  $ds$  και απειροστά μικρού φορτίου  $dq$ , είναι  $dq = \lambda ds = \frac{Q}{L} ds$ . Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για το τμήμα  $i$  σχηματίζει γωνία  $\theta_i$  με τον οριζόντιο άξονα. Αντικαθιστώντας, έχουμε για τη  $x$ -συνιστώσα ότι

$$dE_x = dE_i \cos(\theta_i) = k_e \frac{Q}{LR^2} \cos(\theta_i) ds \quad (4.568)$$

Όμως το τμήμα  $i$  ράβδου μήκους  $ds$  μπορεί να γραφεί ως  $ds = Rd\theta_i$ , και έτσι η  $x$ -συνιστώσα γράφεται ως

$$dE_x = k_e \frac{Q}{LR^2} \cos(\theta_i) Rd\theta_i = k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i \quad (4.569)$$

iii. Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές  $dE_x$  από κάθε τμήμα ράβδου  $ds$  υπό γωνία  $d\theta_i$ , έχουμε ότι

$$E_x = \int dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i = k_e \frac{Q}{LR} \sin(\theta_i) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = k_e \frac{2Q}{LR} \quad (4.570)$$

Γνωρίζουμε ότι  $R = L/\pi$ , οπότε

$$E_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \quad (4.571)$$

και το διάνυσμα αυτού γράφεται ως

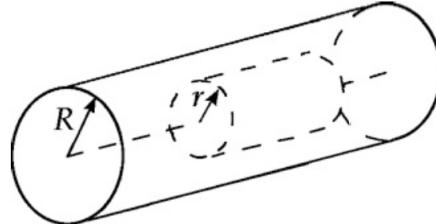
$$\vec{E} = \vec{E}_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \hat{i} \quad (4.572)$$

iv. Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$E = 1.7 \times 10^5 \text{ N/C} \quad (4.573)$$

#### Παράδειγμα 4.61:

Θεωρήστε έναν μακρύ, ομοιόμορφα φορτισμένο κύλινδρο ακτίνας  $R$  με χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho$ . Εφαρμόστε το νόμο του Gauss - επιλέξτε κατάλληλη γκαουσιανή επιφάνεια και ελέγξτε ποιές από τις τέσσερις συνθήκες εφαρμογής του νόμου ισχύουν - και βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $r$  από τον άξονα του, με  $r < R$ , όπως στο Σχήμα 4.93.



Σχήμα 4.93: Σχήμα Άσκησης 4.61.

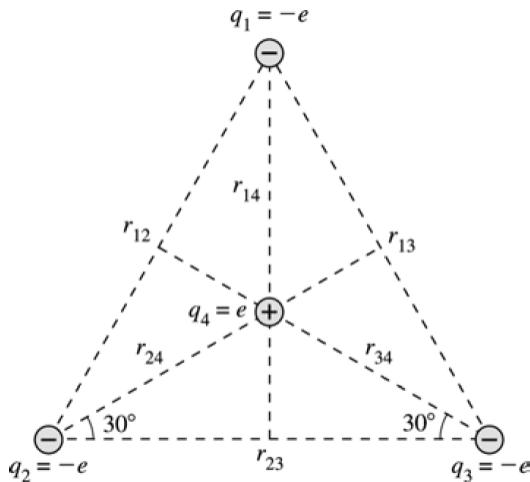
Λύση: Αν  $\rho > 0$ , το πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω. Επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια όπως στο σχήμα, με μήκος  $L$  και ακτίνα  $r$ , που περιέχεται μέσα στο φορτισμένο κύλινδρο. Ο όγκος της είναι  $V_{in} = \pi r^2 L$  και περικλείει φορτίο  $q_{in} = \rho \pi r^2 L$ . Δεν υπάρχει ηλεκτρική ροή στα κυλινδρικά "καπάκια" της γκαουσιανής επιφάνειας, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (3) για το νόμο του Gauss. Η πλευρική επιφάνεια του κυλινδρου έχει το ηλεκτρικό πεδίο κάθετο σε κάθε τμήμα της επιφάνειάς της και παρόλληλο με το διάνυσμα  $d\vec{A}$  ενός απειροστά μικρού τμήματος της πλευρικής επιφάνειας, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (2) για το νόμο του Gauss. Το ηλεκτρικό πεδίο σε σταθερή απόσταση από τον κύλινδρο είναι σταθερό, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (1) του νόμου του Gauss. Η πλευρική επιφάνεια έχει ηλεκτρική ροή

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int dA = \frac{q}{\epsilon_0} \iff E(2\pi r)L = \frac{\rho r^2 \pi L}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad (4.574)$$

Παράδειγμα 4.62:

Τρία ηλεκτρόνια  $e$  βρίσκονται στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, σε απόσταση  $1 \times 10^{-9}$  m το καθένα από τα άλλα. Ένα πρωτόνιο  $p$  βρίσκεται στο κέντρο του τριγώνου. Θεωρήστε  $k_e = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$  και  $|e| = |p| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Ποιά είναι η δυναμική ενέργεια αυτής της ομάδας φορτίων;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 4.94. Από τη γεωμετρία του Σχήματος, έχουμε



Σχήμα 4.94: Λύση Άσκησης 4.62.

$$\frac{\frac{1}{2}r_{23}}{r_{24}} = \cos(30^\circ) \implies r_{24} = \frac{r_{23}}{2\cos(30^\circ)} = 0.5774 \times 10^{-9} = r_{14} = r_{34} \quad (4.575)$$

Οι συνεισφορές στη συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$U_{12} = U_{13} = U_{23} = \frac{9 \times 10^9 \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times (-1.6 \times 10^{-19})}{10^{-9}} = 2.304 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (4.576)$$

$$U_{14} = U_{24} = U_{34} = \frac{9 \times 10^9 \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times (1.6 \times 10^{-19})}{0.5774 \times 10^{-9}} = -3.99 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (4.577)$$

Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές, έχουμε

$$U_E = U_{12} + U_{13} + U_{23} + U_{14} + U_{24} + U_{34} = -5.1 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (4.578)$$

Παράδειγμα 4.63:

Ένας δίσκος έχει μια τρύπα στη μέση του, όπως κάποια παλιά νομίσματα. Έστω ότι η ακτίνα της τρύπας είναι  $R_{in}$  και η ακτίνα του δίσκου είναι  $R_{out}$ . Ο δίσκος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο  $Q$ , με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ . Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του δίσκου, με το σημείο  $x$  να βρίσκεται πάνω σε άξονα που διαπερνά κάθετα το δίσκο στο νοητό του κέντρο - όπως ακριβώς στα παραδείγματα στις διαλέξεις. Χωρίστε το δίσκο σε διακτυλίους πάχους  $dr$  και θεωρήστε ότι καθένας έχει ακτίνα  $r_i$  και φορτίο  $dq$ . Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμά σας “δουλεύει” σωστά, ύστοντας  $R_{in} \rightarrow 0$ . Ποιό γνωστό σας αποτέλεσμα παίρνετε με αυτό

το όριο;

Λύση: Ο δίσκος έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στην επιφάνειά του, άρα

$$\sigma = Q/A = \frac{Q}{\pi(R_{out}^2 - R_{in}^2)} \quad (4.579)$$

Αν φανταστούμε το δίσκο να βρίσκεται στο επίπεδο για τότε το σημείο  $P$  βρίσκεται στον αξόνα  $x$ , έστω σε απόσταση  $x$  από το σημείο αναφοράς. Το δυναμικό ενός διακτυλίου φορτίου  $dq$ , ακτίνας  $r_i$ , και πάχους  $dr$  θα είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{\sqrt{r_i^2 + x^2}} \quad (4.580)$$

Όμως  $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r_i dr$ , οπότε

$$V = \int dV = 2\pi\sigma k_e \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (4.581)$$

$$= 2\pi k_e \sigma \left[ \sqrt{r^2 + x^2} \right]_{R_{in}}^{R_{out}} \quad (4.582)$$

$$= 2\pi k_e \sigma \left[ \sqrt{R_{out}^2 + x^2} - \sqrt{R_{in}^2 + x^2} \right] \quad (4.583)$$

$$= 2k_e \frac{Q}{R_{out}^2 - R_{in}^2} \left[ \sqrt{R_{out}^2 + x^2} - \sqrt{R_{in}^2 + x^2} \right] \quad (4.584)$$

Αν  $R_{in} \rightarrow 0$ , τότε

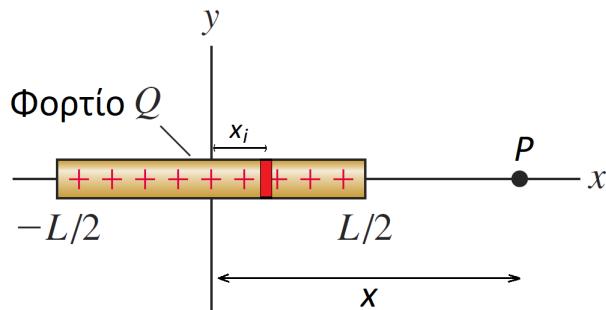
$$V = \frac{2k_e Q}{R_{out}^2} \left[ \sqrt{R_{out}^2 + x^2} - x \right] \quad (4.585)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου που έχουμε βρει στο παράδειγμα της θεωρίας.

#### Παράδειγμα 4.64:

Έστω η ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος του Σχήματος 4.95.

- (α') Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$ , σε απόσταση  $x$  από τη συμβολή των αξόνων.
- (β') Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα από το προηγούμενο ερώτημα για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.



Σχήμα 4.95: Σχήμα Άσκησης 4.64.

Λύση:

(α') “Κόβουμε” τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα μήκους  $dx$  με φορτίο  $dq$ . Το τμήμα  $dx_i$  σε τυχαία απόσταση  $x_i$  από το σημείο αναφοράς  $(0,0)$  συνεισφέρει δυναμικό  $dV$  ως

$$dV = k_e \frac{dq}{x - x_i} = k_e \frac{\lambda dx_i}{x - x_i} \quad (4.586)$$

Συνολικά,

$$V = \int dV = k_e \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx_i}{x - x_i} = -k_e \frac{Q}{L} \ln(x - x_i) \Big|_{-L/2}^{L/2} = k_e \frac{Q}{L} \ln \frac{x + L/2}{x - L/2} \quad (4.587)$$

(β') Επειδή

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e \frac{Q}{L} \frac{d}{dx} (\ln(x + L/2) - \ln(x - L/2)) \quad (4.588)$$

$$= -k_e \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{x + L/2} - \frac{1}{x - L/2} \right) \quad (4.589)$$

$$= -k_e \frac{Q}{L} \frac{-L}{x^2 - (L/2)^2} \quad (4.590)$$

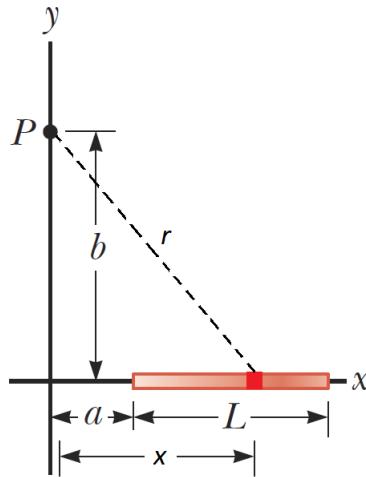
$$= k_e \frac{Q}{x^2 - (L/2)^2} \quad (4.591)$$

Τηποθέτοντας ότι  $Q > 0$ , είναι

$$\vec{E}_x = k_e \frac{Q}{x^2 - (L/2)^2} \vec{i} \quad (4.592)$$

### Παράδειγμα 4.65:

Μια ράβδος με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου  $\lambda$  φαίνεται στο Σχήμα 4.96. Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$ . Δίνεται ότι  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ .



Σχήμα 4.96: Σχήμα Ασκησης 4.65.

Λύση: Ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου μήκους  $dx$  και φορτίου  $dq$  συνεισφέρει δυναμικό

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} \quad (4.593)$$

Συνολικά,

$$V = \int dV = k_e \lambda \int_a^{L+a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} \quad (4.594)$$

$$= k_e \lambda \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + b^2}}{b^2} \right) \Big|_a^{L+a} \quad (4.595)$$

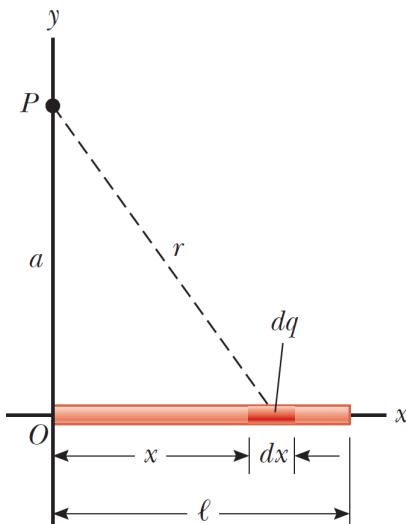
$$= k_e \lambda \ln \left[ \frac{a + L + \sqrt{(a+L)^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right] \quad (4.596)$$

αφού

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \quad (4.597)$$

### Παράδειγμα 4.66:

Μια λίγο διαφορετική κατάσταση από την προηγούμενη φαίνεται στο Σχήμα 4.97. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος μήκους  $l$  κείται επάνω στον  $x$ -άξονα. Το συνολικό της φορτίο είναι  $Q$ , και η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι  $\lambda$ . Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $P$ . Δίνεται ότι  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ .



Σχήμα 4.97: Σχήμα Άσκησης 4.66.

Λύση: Το δυναμικό στο σημείο  $P$  είναι ψητικό, λόγω του ότι κάθε μικρό τμήμα ράβδου φέρει ψητικό φορτίο. Προσέξτε ότι εδώ δεν υπάρχει κάποιου είδους συμμετρία, αλλά η απλή γεωμετρία του προβλήματος θα μας βοηθήσει. Έστω ένα τυχαίο, απειροστά μικρό τμήμα  $dx$ . Το δυναμικό στο σημείο  $P$  εξ αιτίας αυτού του τμήματος είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (4.598)$$

Το συνολικό δυναμικό δίνεται αν αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) το δυναμικό όλων των μικρών τμημάτων  $dx$ , από 0 ως  $l$ . Ρα

$$V = \int dV = \int_0^l k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{l} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \Big|_0^l \quad (4.599)$$

το οποίο δίνει τελικά

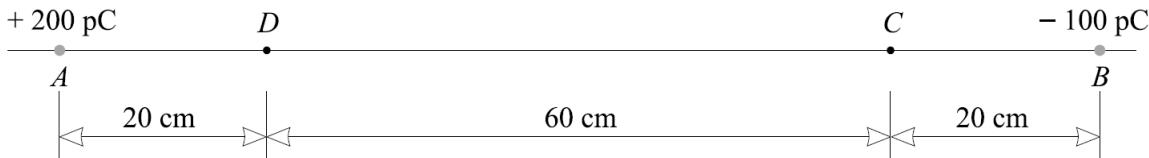
$$V = k_e \frac{Q}{l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right) \quad (4.600)$$

### Παράδειγμα 4.67:

Στο Σχήμα 4.98, ένα φορτίο  $200 \text{ pC}$  βρίσκεται στο σημείο A, ενώ ένα άλλο φορτίο  $-100 \text{ pC}$  βρίσκεται στο σημείο B.

(α') Βρείτε το δυναμικό στα σημεία C και D.

(β') Πόσο έργο πρέπει να παραχθεί ώστε να μεταφερθεί ένα φορτίο  $500 \mu\text{C}$  από το σημείο C στο σημείο D;



Σχήμα 4.98: Σχήμα Άσκησης 4.67.

Λύση:  
(α') Θα είναι

$$V_C = k \sum \frac{q_i}{r_i} = (9 \times 10^9) \left( \frac{2 \times 10^{-10}}{0.8} - \frac{1 \times 10^{-10}}{0.2} \right) = -2.25 \text{ V} \quad (4.601)$$

Επίσης

$$V_D = k \sum \frac{q_i}{r_i} = (9 \times 10^9) \left( \frac{2 \times 10^{-10}}{0.2} - \frac{1 \times 10^{-10}}{0.8} \right) = +7.88 \text{ V} \quad (4.602)$$

(β') Βρίσκουμε ότι υπάρχει άνοδος δυναμικού από το C στο D που είναι

$$V_D - V_C = 7.88 - (-2.25) \text{ V} = 10.13 \text{ V} \quad (4.603)$$

Έτσι το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά του φορτίου είναι

$$W = \Delta V q = 10.13 \times 5 \times 10^{-4} = 5.1 \text{ mJ} \quad (4.604)$$

### Παράδειγμα 4.68:

Η φιλοσοφία “πρώτα το μικρό και ύστερο το όλον” που εφαρμόσαμε στη θεωρία ισχύει γενικότερα: δύο ομοιόμορφα φορτισμένες ράβδοι με φορτίο  $Q$  και μήκος  $2a$  η καθεμιά βρίσκονται στον ίδιον αξό πάνω στο Σχήμα 4.99. Η απόσταση  $b$  μεταξύ των κέντρων τους είναι μεγαλύτερη του μήκους τους, δηλ.  $b > 2a$ .

i. Δείξτε ότι η αριστερή ράβδος δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $d$  από το δεξί της άκρο με μέτρο

$$E = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \quad (4.605)$$

Χρησιμοποιήστε έτοιμα αποτελέσματα από τη θεωρία σας.

ii. Δείξτε ότι για ένα τμήμα μήκους  $dx$  της δεξιάς ράβδου, το φορτίο του δίνεται ως

$$dq = \frac{Q}{2a} dx \quad (4.606)$$

iii. Δείξτε ότι η ηλεκτρική δύναμη  $dF$  που ασκείται στο τμήμα μήκους  $dx$  της δεξιάς ράβδου λόγω του ηλεκτρικού πεδίου της αριστερής ράβδου έχει μέτρο ως

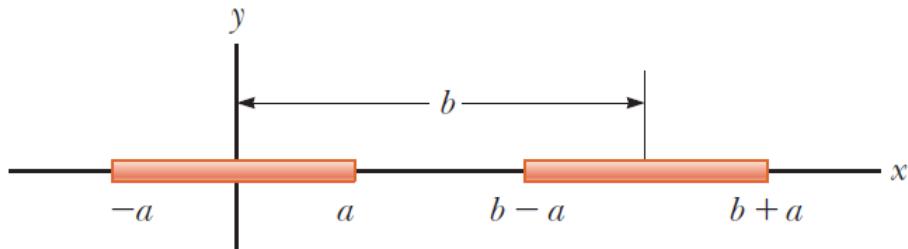
$$dF = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \frac{Q}{2a} dx \quad (4.607)$$

iv. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$F = \int dF \quad (4.608)$$

το οποίο ουσιαστικά αθροίζει όλες τις ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται στα απειροστά μικρά τμήματα της δεξιάς ράβδου εξ' αιτίας της αριστερής ράβδου. Χρησιμοποιήστε το

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x(x+c)} = -\frac{1}{c} \ln \left( \frac{c+x}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (4.609)$$



Σχήμα 4.99: Φορτισμένες ράβδοι Άσκησης 4.68.

Λύση:

i. Από το πρώτο παράδειγμα της διάλεξης περί ηλεκτρικών πεδίων κατανομής φορτίου έχουμε ότι

$$E = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \quad (4.610)$$

ii. Έστω τμήμα  $dx$  της δεξιάς ράβδου με φορτίο  $dq$ . Η ράβδος είναι ομοιόμορφα φορτισμένη, οπότε  $\lambda = \frac{Q}{2a} = \frac{dq}{dx}$ . Λύνοντας ως προς  $dq$ :

$$dq = \frac{Q}{2a} dx \quad (4.611)$$

iii. Η ηλεκτρική δύναμη  $dF$  που ασκείται στο τμήμα μήκους  $dx$  της δεξιάς ράβδου λόγω του ηλεκτρικού πεδίου της αριστερής ράβδου έχει μέτρο ως

$$dF = dqE = k_e \frac{Qdq}{d(2a+d)} = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \frac{Q}{2a} dx \quad (4.612)$$

iv. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$F = \int dF \quad (4.613)$$

ως

$$F = \int k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \frac{Q}{2a} dx = \frac{k_e Q^2}{2a} \int_{b-2a}^b \frac{dx}{x(x+2a)} \quad (4.614)$$

$$= \frac{k_e Q^2}{4a^2} \ln \frac{b^2}{(b-2a)(b+2a)} = \frac{k_e Q^2}{4a^2} \ln \left( \frac{b^2}{b^2 - 4a^2} \right) \quad (4.615)$$

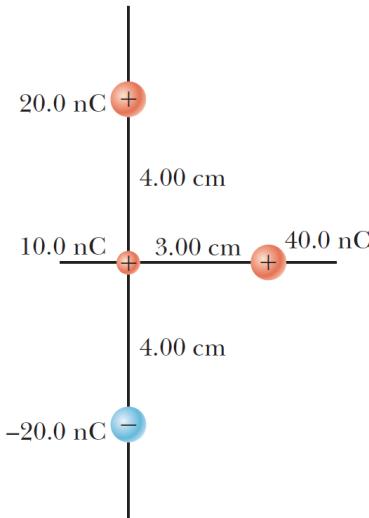
με χρήση του ολοκληρώματος

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x(x+c)} = -\frac{1}{c} \ln \left( \frac{c+x}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (4.616)$$

#### Παράδειγμα 4.69:

Δυο σωματίδια, με φορτία  $20 \text{ nC}$  και  $-20 \text{ nC}$  βρίσκονται σταθερά τοποθετημένα σε σημεία με συντεταγμένες  $(0, 4)$  cm και  $(0, -4)$  cm, όπως στο Σχήμα 4.100. Ένα σωματίδιο με φορτίο  $10 \text{ nC}$  βρίσκεται σταθερά τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων.

- (α') Βρείτε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια της διάταξης του συστήματος των τριών φορτίων.
- (β') Ένα τέταρτο σωματίδιο με μάζα  $2 \times 10^{-13} \text{ kg}$  και φορτίο  $40 \text{ nC}$ , αφήνεται από ύψηση ηερμίας στο σημείο  $(3, 0)$  cm. Βρείτε την ταχύτητά του αφού έχει μετακινηθεί ελεύθερα σε πάρα πολύ μεγάλη απόσταση από το σύστημα των τριών φορτίων.



Σχήμα 4.100: Σχήμα Άσκησης 4.69.

Λύση:

- (α') Σε απόσταση 4 cm, το φορτίο των  $20 \text{ nC}$  δημιουργεί δυναμικό

$$V_1 = k_e \frac{q_1}{r} = 4.5 \text{ kV} \quad (4.617)$$

Για να τοποθετήσουμε το φορτίο των  $10 \text{ nC}$ , πρέπει να εισάγουμε ενέργεια στο σύστημα ίση με

$$U_{12} = q_2 V_1 = 4.5 \times 10^{-5} \text{ J} \quad (4.618)$$

Έπειτα, για να φέρουμε το φορτίο των  $-20 \text{ nC}$ , απαιτείται ενέργεια ίση με

$$U_{23} + U_{13} = q_3 V_2 + q_3 V_1 = q_3 (V_2 + V_1) = -9 \times 10^{-5} \text{ J} \quad (4.619)$$

Η συνολική ενέργεια των τριών φορτίων είναι

$$U_{12} + U_{23} + U_{13} = -4.5 \times 10^{-5} \text{ J} \quad (4.620)$$

(β') Τα τρια σταθερά φορτία δημιουργούν δυναμικό στο σημείο που αφήνεται το τέταρτο φορτίο, ίσο με

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = k_e \left( \frac{20 \times 10^{-9}}{\sqrt{0.04^2 + 0.03^2}} + \frac{10 \times 10^{-9}}{0.03} - \frac{20 \times 10^{-9}}{\sqrt{0.04^2 + 0.03^2}} \right) = 3 \times 10^3 \text{ V} \quad (4.621)$$

Η συνολική ενέργεια του συστήματος των τεσσάρων φορτίων διατηρείται όσο το τέταρτο φορτίο φεύγει μακριά. Έτσι

$$E_i^{mech} = E_f^{mech} \quad (4.622)$$

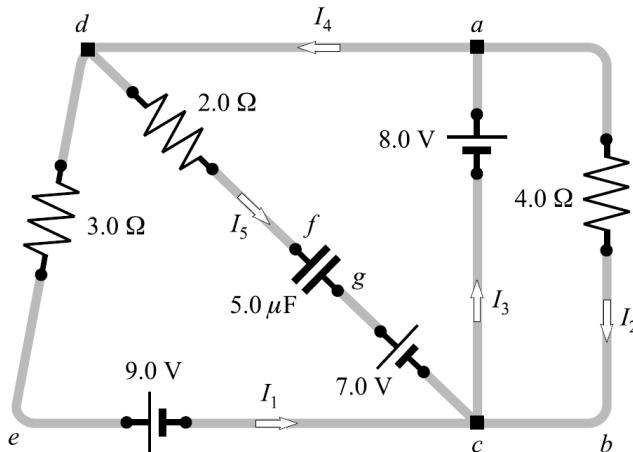
$$\frac{1}{2}mu_i^2 + qV_i = \frac{1}{2}mu_f^2 + qV_f \quad (4.623)$$

$$0 + (40 \times 10^{-9})(3 \times 10^3) = \frac{1}{2}2 \times 10^{-13}u_f^2 + 0 \quad (4.624)$$

$$u_f = 3.46 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (4.625)$$

#### Παράδειγμα 4.70:

Το κύκλωμα του Σχήματος 4.101 έχει σταθερά ρεύματα. Βρείτε τα  $I_x$ , με  $x = 1, 2, 3, 4, 5$ , καθώς και το φορτίο του πυκνωτή.



Σχήμα 4.101: Σχήμα Ασκησης 4.70.

Λύση: Ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, άρα  $I_5 = 0$ . Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff για το βρόχο *acba* δίνει

$$-8 + 4I_2 = 0 \iff I_2 = 2 \text{ A} \quad (4.626)$$

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff για το βρόχο *adeca* δίνει

$$-3I_1 - 9 + 8 = 0 \iff I_1 = -0.33 \text{ A} \quad (4.627)$$

Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff στον κόμβο *c* μας δίνει

$$I_1 + I_5 + I_2 = I_3 \iff I_3 = 1.67 \text{ A} \quad (4.628)$$

και ο ίδιος κανόνας στον κόμβο *a* δίνει

$$I_3 = I_4 + I_2 \iff I_4 = -0.33 \text{ A} \quad (4.629)$$

Για να βρούμε το φορτίο του πυκνωτή, χρειαζόμαστε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του. Εφαρμόζοντας το 2o κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο  $dfgcd$  έχουμε

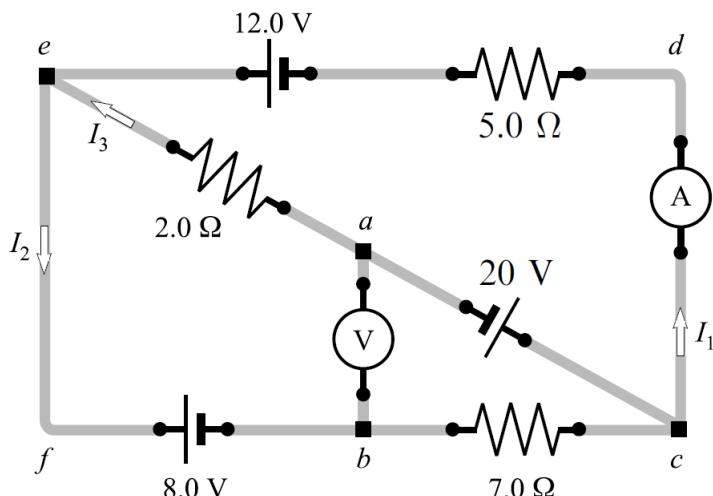
$$-2I_5 + \Delta V_{fg} - 7 + 9 + 3I_1 = 0 \iff \Delta V_{fg} = -1 \text{ V} \quad (4.630)$$

Όταν το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = C|\Delta V_{fg}| = 5 \mu\text{C} \quad (4.631)$$

### Παράδειγμα 4.71:

Ένα αμπερόμετρο (ammeter) μετρά την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαπερνά, ενώ ένα βολτόμετρο (voltmeter) μετρά την τάση (διαφορά δυναμικού) που υπάρχει στα άκρα του. Για το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 4.102, βρείτε τις ενδείξεις του αμπερόμετρου και του βολτόμετρου. Υποθέστε ότι οι συσκευές αυτές είναι ιδανικές (το βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση, άρα είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα, ενώ το αμπερόμετρο μηδενική αντίσταση, άρα αφήνει το ρεύμα του κλάδου του να το διαπεράσει).



Σχήμα 4.102: Ηλεκτρικό κύκλωμα Άσκησης 4.71.

Λύση: Εφαρμόζουμε το 2o κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο  $cdefc$ :

$$-5I_1 + 12 - 8 - 7I_2 = 0 \iff 5I_1 + 7I_2 = 4 \quad (4.632)$$

Όμοια για το βρόχο  $cdeac$ :

$$-5I_1 + 12 + 2I_3 + 20 = 0 \iff 5I_1 - 2I_3 = 32 \quad (4.633)$$

Στον κόμβο  $e$  ισχύει ο 1oς κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (4.634)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (4.632) έχουμε

$$5I_1 + 7I_1 + 7I_3 = 4 \implies I_3 = \frac{4 - 12I_1}{7} \quad (4.635)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (4.633), παίρνουμε

$$5I_1 - 2 \frac{4 - 12I_1}{7} = 32 \implies I_1 = 3.9 \text{ A} \quad (4.636)$$

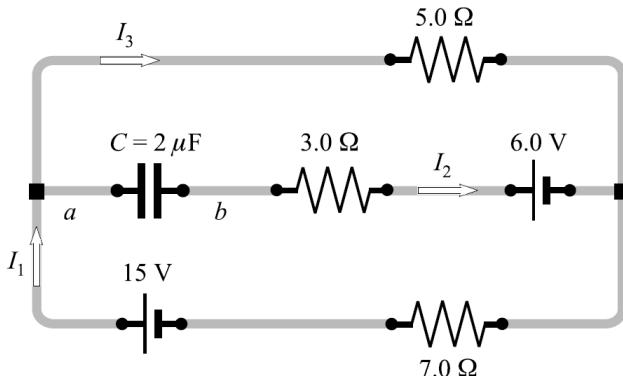
που είναι και η ένδειξη του αμπερόμετρου. Κατά συνέπεια,  $I_2 = -2.2 \text{ A}$ . Για να βρούμε την ένδειξη του βολτόμετρου, δηλ. το  $V_{ab}$ , γράφουμε το 2o κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο *abca*:

$$V_{ab} - 7I_2 - 20 = 0 \implies V_{ab} = 4.3 \text{ V} \quad (4.637)$$

### Παράδειγμα 4.72:

Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 4.103. Το κύκλωμα βρίσκεται σε λειτουργία για πολλή ώρα και τα ρεύματα είναι σταθερά.

- (α') Βρείτε τα ρεύματα  $I_1, I_2, I_3$ .
- (β') Δείξτε ότι το φορτίο του πυκνωτή είναι  $Q = 0.5 \mu\text{C}$ .



Σχήμα 4.103: Κύκλωμα Άσκησης 4.72.

Λύση:

(α') Αφού το κύκλωμα λειτουργεί για πολλή ώρα, ο πυκνωτής έχει φορτιστεί και άρα το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο του είναι μηδέν. Οπότε  $I_2 = 0$  και άρα  $I_1 = I_3$ . Στο υπόλοιπο κύκλωμα, εφαρμόζοντας το 2o κανόνα του Kirchhoff, έχουμε

$$-I_1 \times 5 - I_1 \times 7 + 15 = 0 \iff 12I_1 = 15 \iff I_1 = I_3 = \frac{15}{12} = 1.25 \text{ A} \quad (4.638)$$

Οπότε τελικά

- $I_1 = 1.25 \text{ A}$
- $I_2 = 0.0 \text{ A}$
- $I_3 = 1.25 \text{ A}$

(β') Ξεκινώντας από το σημείο *b* και επιστρέφοντας σε αυτό από το επάνω τμήμα του κυκλώματος, έχουμε

$$-5 \times I_3 + 6 + 3I_2 + \Delta V_{ba} = 0 \iff \Delta V_{ba} = 0.25 \text{ V} \quad (4.639)$$

οπότε

$$Q = CV_{ba} = 2 \times 10^{-6} \times 0.25 = 0.5 \times 10^{-6} \text{ C} = 0.5 \mu\text{C} \quad (4.640)$$

**Παράδειγμα 4.73:**

Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $-e$  βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα  $u$  μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο μέτρου  $E$  με διεύθυνση προς τα κάτω, όπως στο Σχήμα 4.104. Αγνοήστε όποιες βαρυτικές δυνάμεις. Βρείτε:

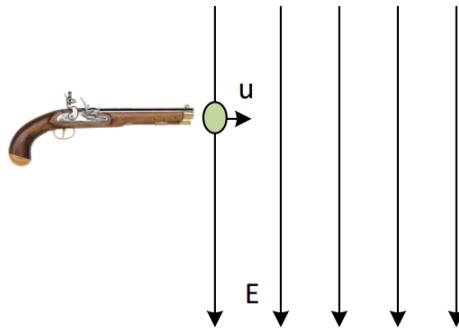
- (α') την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσής του,  $a_x$  και  $a_y$ .
- (β') ότι η οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπισή του,  $x$  και  $y$ , μετά από χρόνο  $t$  είναι

$$x(t) = ut, \quad y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Ee}{m}\right)t^2 \quad (4.641)$$

- (γ') ότι η εξίσωση της τροχιάς του  $y$ , συναρτήσει του  $x$  είναι

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{Ee}{mu^2}\right)x^2 \quad (4.642)$$

Τι είδους καμπύλη είναι η παραπάνω;



Σχήμα 4.104: Φορτίο σε ηλεκτρικό πεδίο Άσκησης 4.73.

Λύση:

Αν αφήναμε το φορτίο ακίνητο στο ηλεκτρικό πεδίο, τότε αυτό θα κινούνταν προς τα πάνω, αντίθετα της φοράς των δυναμικών γραμμών του πεδίου. Λόγω της αρχικής ταχύτητας, η κίνηση του θα είναι παραβολική. Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω και προς τα δεξιά και ως σημείο αναφοράς το σημείο που το φορτίο μπαίνει στο πεδίο (σημείο  $(0,0)$ ).

- (α') Η αρχική ταχύτητα είναι οριζόντια, ενώ δεν υπάρχει επιτάχυνση λόγω του πεδίου στην οριζόντια συνιστώσα (απουσία δύναμης). Έτσι  $a_x = 0$ . Αντίθετα, στην κατακόρυφη συνιστώσα ασκείται στο φορτίο η ηλεκτρική δύναμη  $F_e$  λόγω του πεδίου. Από το δεύτερο νόμο του Newton

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \implies a_y = \frac{F_e}{m} = \frac{Ee}{m} \quad (4.643)$$

- (β') Δεδομένου ότι στον οριζόντιο άξονα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα ίση με την αρχική ταχύτητα, έχουμε

$$x(t) = ut \quad (4.644)$$

ενώ στον κατακόρυφο άξονα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε

$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\frac{Ee}{m}t^2 \quad (4.645)$$

- (γ') Έχουμε ότι

$$x(t) = ut \implies t = \frac{x(t)}{u} \quad (4.646)$$

και αντικαθιστώντας

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{Ee}{m} t^2 \Big|_{t=x/u} = \frac{1}{2} \frac{Ee}{m} \left(\frac{x}{u}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Ee}{mu^2}\right) x^2 \quad (4.647)$$

Η τροχιά είναι της μορφής  $y = ax^2$ , δηλ. παραβολική.