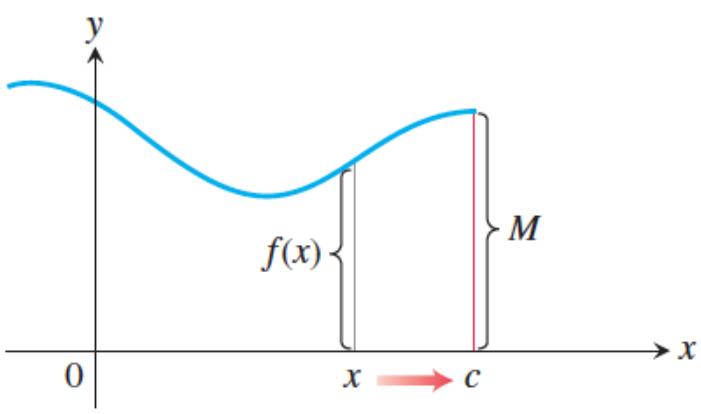
Διάλεξη 5: Συνέχεια συναρτήσεων και όρια στο άπειρο

Ακριβής ορισμός του πλευρικού ορίου

Έστω ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ περιέχει ένα διάστημα (d, c) στα <u>αριστερά</u> του c. Η $f(x)$ έχει <u>αριστερό όριο</u> L στο c

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $c - \delta < x < c$



(β) $\lim_{x \to c^-} f(x) = M$

Ολικό όριο από πλευρικά όρια

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c (εκτός ίσως από το ίδιο το c).

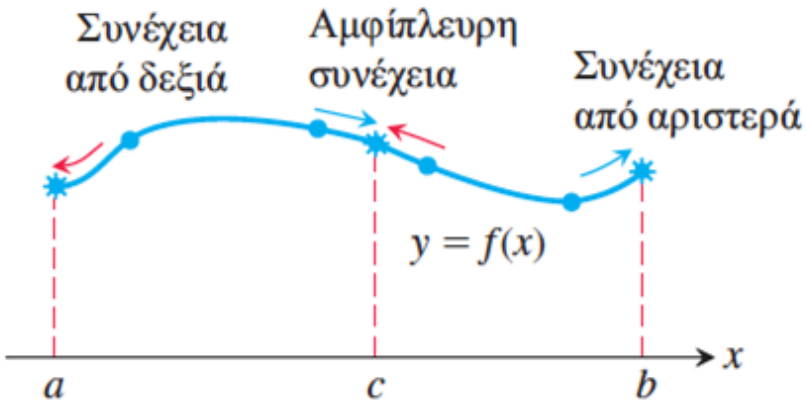
Τότε η $f(x)$ έχει όριο x καθώς το τείνει στο c <u>αν και μόνο αν</u> έχει αριστερό και δεξιό όριο στο c και τα πλευρικά αυτά όρια είναι ίσα:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L} \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L} \text{ και } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Συνέχεια

Έστω $c \in \mathbb{R}$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο c αν $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
- Η $f(x)$ είναι συνεχής από δεξιά στο c αν $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$
- Η $f(x)$ είναι συνεχής από αριστερά στο c αν $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$



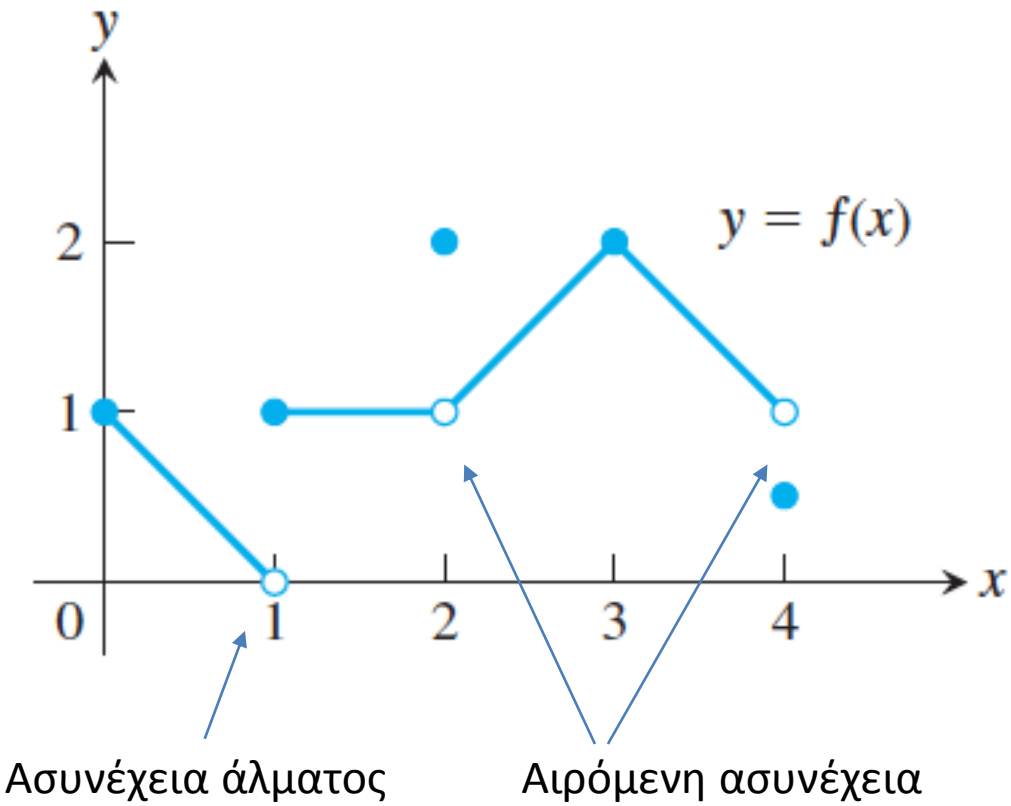
Κριτήρια συνέχειας

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $\mathrm{x} = c$ αν και μόνο αν (iff)

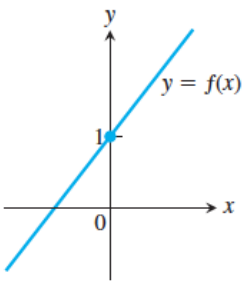
- Υπάρχει το $f(c)$ (το c ανήκει το πεδίο ορισμού)
- Υπάρχει το $\lim_{x \to c} f(x)$ (υπάρχει το όριο στο c)
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (το όριο=με την τιμή της συνάρτησης)

Παράδειγμα

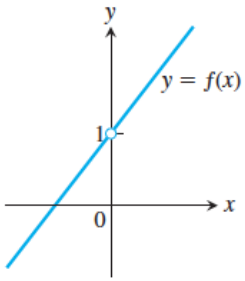
- Για ποιες τιμές του x η f(x) δεν είναι συνεχής



Παράδειγμα



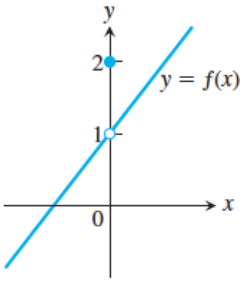
(α)



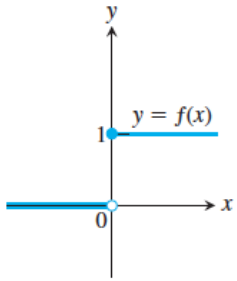
(β)

Αιρόμενη ασυνέχεια

Αιρόμενη ασυνέχεια



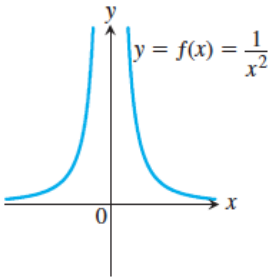
(γ)



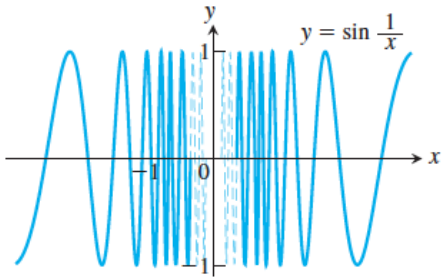
(δ)

Ασυνέχεια άλματος

Άπειρη ασυνέχεια



(ε)

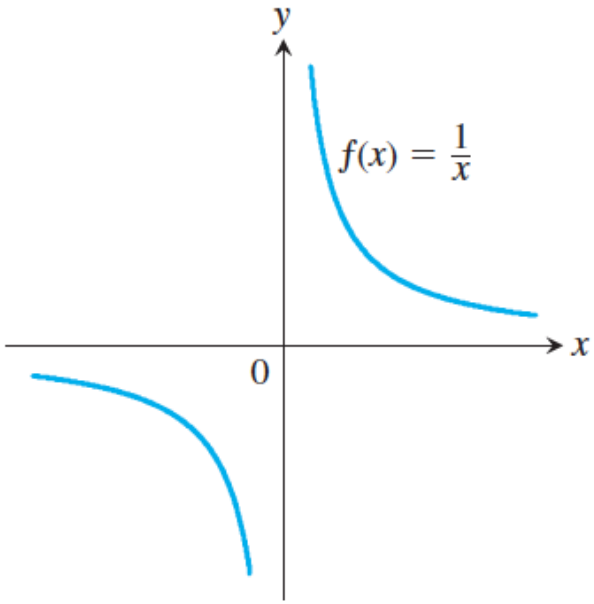


(στ)

Ασυνέχεια ταλάντωσης

Συνέχεια και πεδίο ορισμού

Η συνέχεια είναι ιδιότητα της συνάρτησης και πρέπει να ισχύει σε όλο το πεδίο ορισμού της.



Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$, τότε και οι ακόλουθοι συνδυασμοί είναι συνεχείς στο c

- Άθροισμα $f(x) + g(x)$
- Διαφορές $f(x) - g(x)$
- Πολλαπλασιασμοί με σταθερές $kf(x)$ όπου k σταθερά
- Γινόμενα $f(x) \cdot g(x)$
- Πηλίκα $f(x)/g(x)$
- Δυνάμεις $f^n(x)$ όπου n θετικός ακέραιος ($\mathbb{Z}^+$)
- Ρίζες $\sqrt[n]{f(x)}$ για $n \in \mathbb{Z}^+$ και να ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το c

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

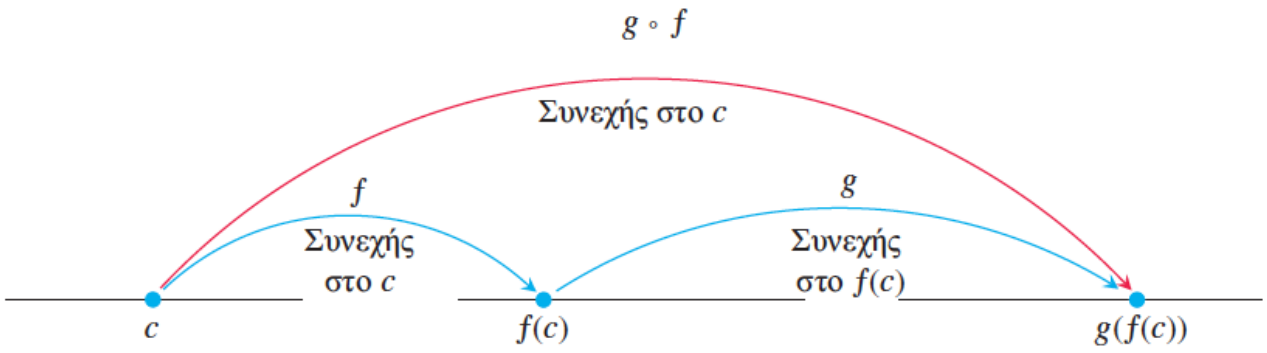
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
είναι συνεχής διότι $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε η $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής διότι $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ για $Q(c) \neq 0$

Η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = k$ είναι παντού συνεχής

Συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων

Αν η f είναι συνεχής στο c και η g είναι συνεχής στο $f(c)$ τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο c



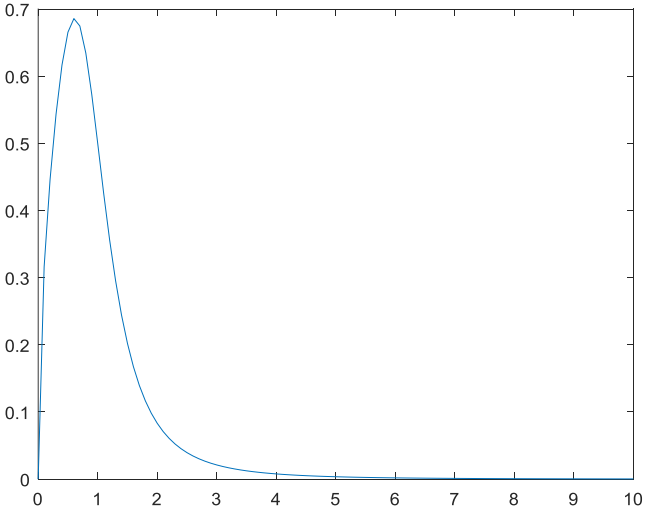
Αν $\lim_{x \to c} f(x) = b$ και η g είναι συνεχής στο b τότε

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b)$$

Παραδείγματα

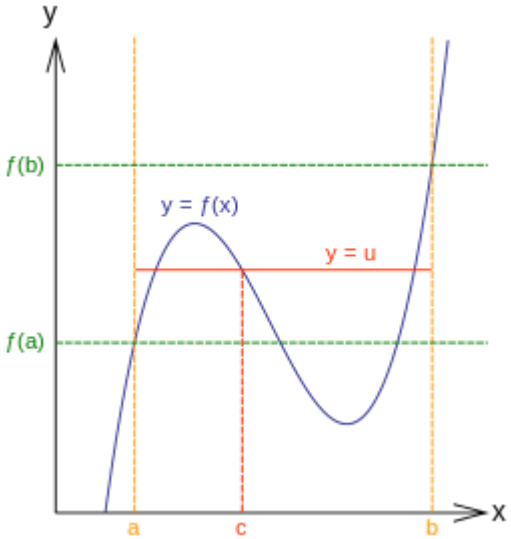
Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχής

- $y_1 = |x|$
- $y_2 = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$
- $y_3 = \frac{x^2/4}{1+x^4}$



Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και αν $f(a) < u < f(b)$ τότε υπάρχει c $\in [a, b]$ για το οποίο $f(c) = u$



Αν $u = 0$ γνωστό ως θεώρημα Bolzano

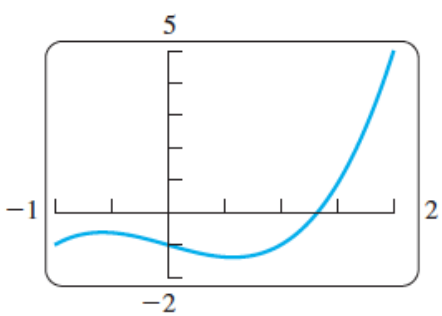
Ρίζες εξίσωσης

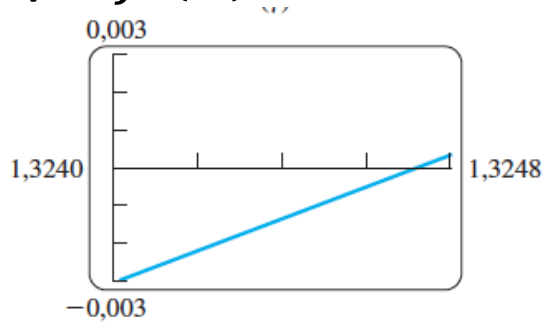
Κάθε λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ ονομάζεται ρίζα της εξίσωσης.

Αν η f είναι συνεχής, από το Θ.Ε.Τ. , κάθε διάστημα όπου η f αλλάζει πρόσημο, περιέχει (τουλάχιστον) μια ρίζα

Π.χ. Η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει μια ρίζα στο [1,2]

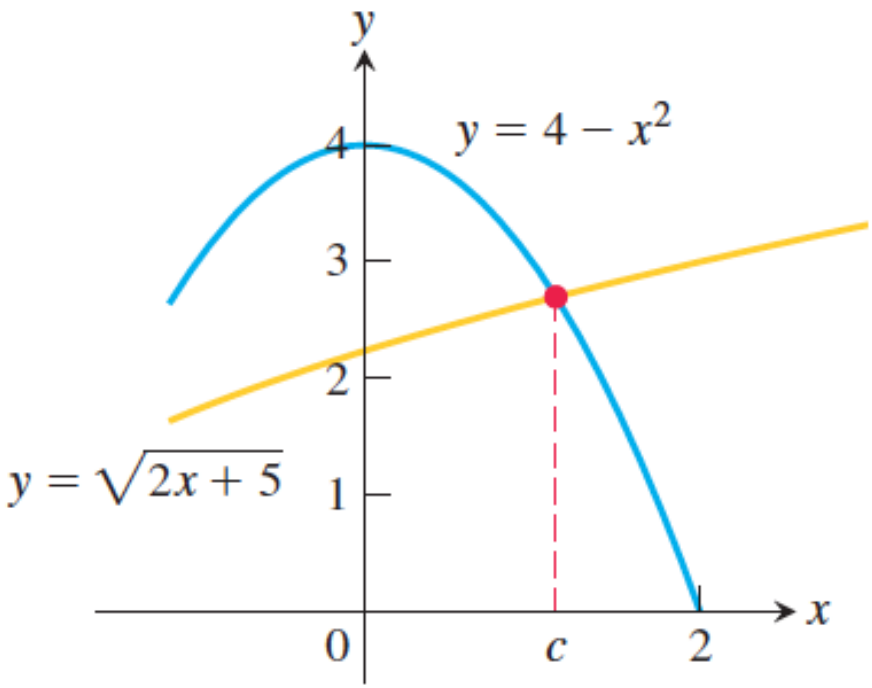
- Έστω $f(x) = x^3 - x - 1$ με $f(1) = -1$ και $f(2) = 5$





Παράδειγμα

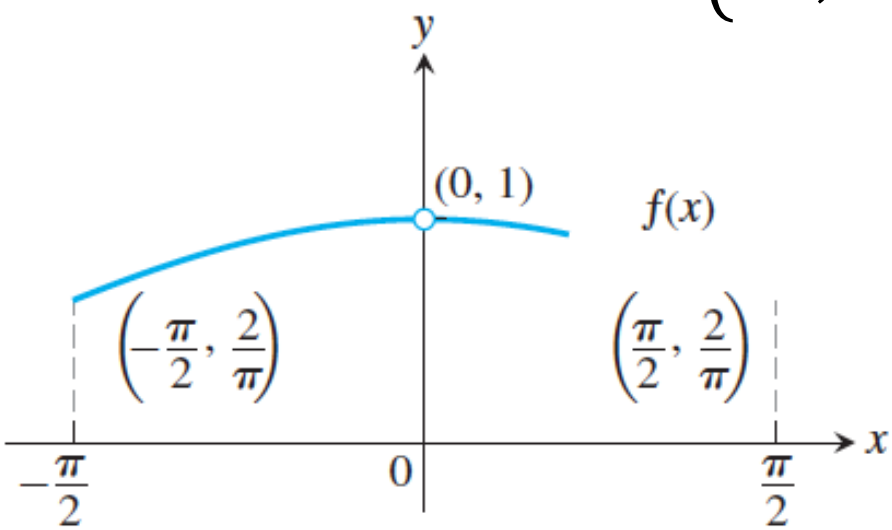
Χρησιμοποιώντας το Θ.Ε.Τ να δειχθεί ότι η $\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$ έχει ρίζα

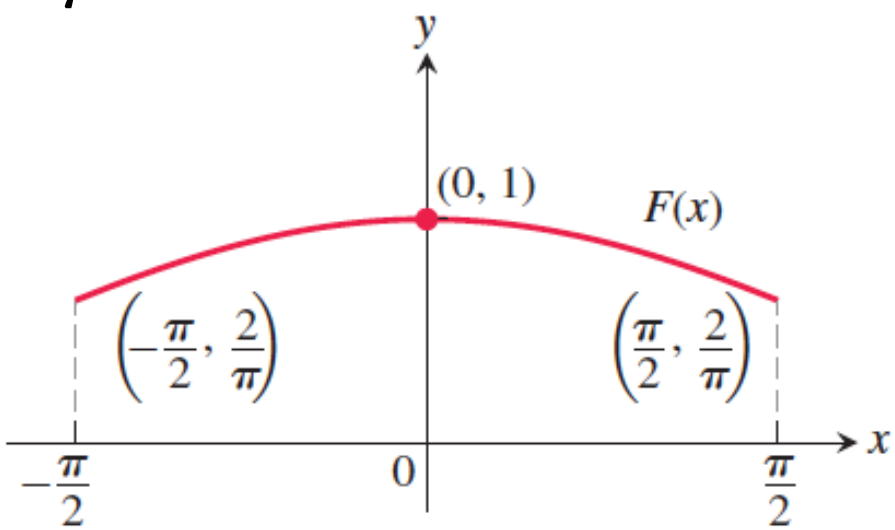


Συνεχής επέκταση συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο c αλλά υπάρχει το όριο σε αυτό το σημείο, μπορούμε να ορίσουμε μια «επέκταση»

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \gamma\iota\alpha\ x\ \sigma\tau o\ \Pi.O \\ L, \qquad \gamma\iota\alpha\ \ x = c \end{cases}$$





Παράδειγμα

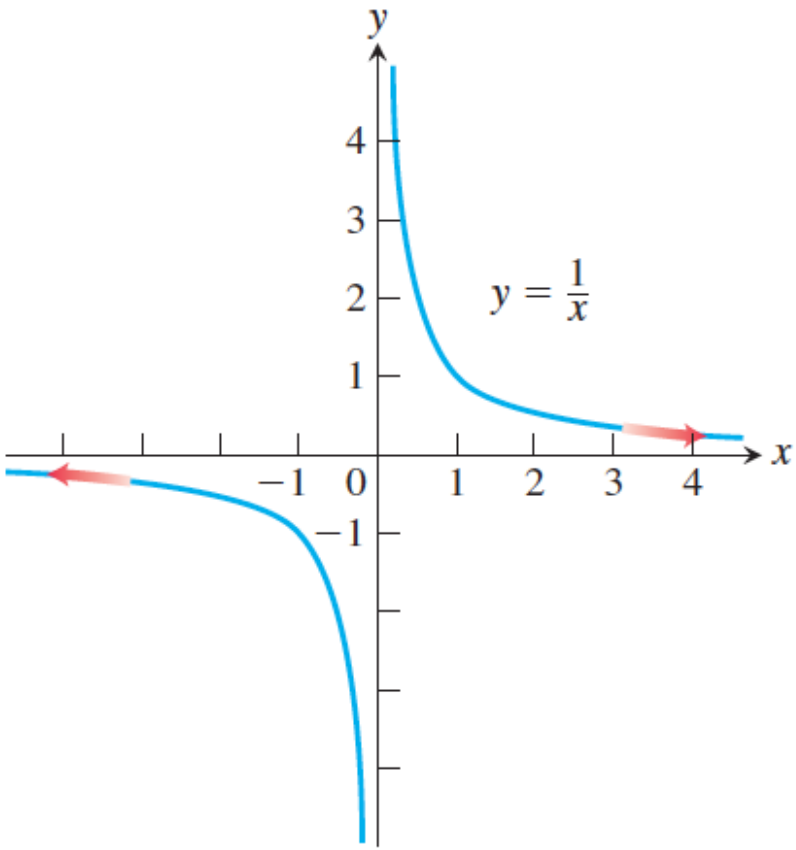
Για ποια τιμή $g(4)$ η επέκταση της $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ είναι συνεχής στο x =4

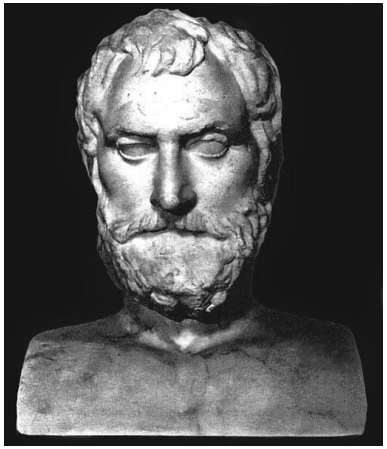
Για ποιες τιμές των a και b η

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b \quad , & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b \quad , & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 \quad , & x > 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε x

Άπειρο





Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος
611 π.Χ. - 547 π.Χ.

Georg Cantor
1845 – 1918

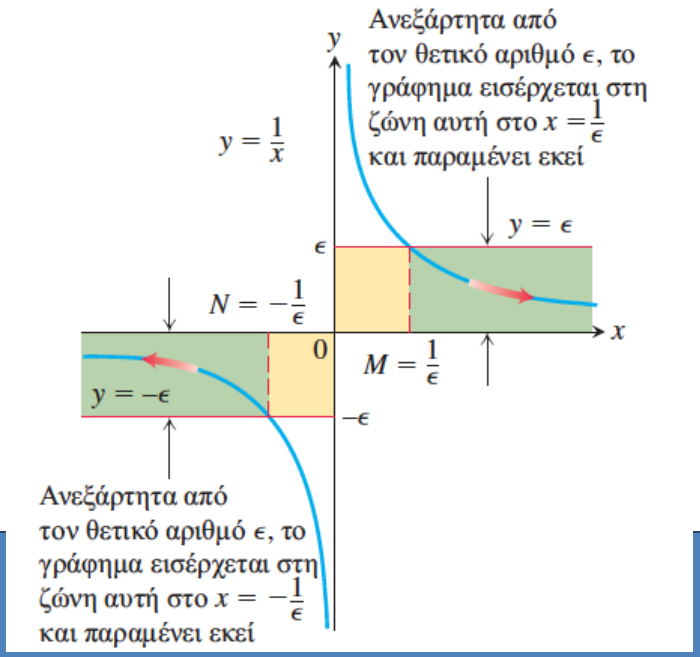
Πεπερασμένα όρια καθώς το $x \to \infty$

Η $f(x)$ έχει όριο το L καθώς το x τείνει στο άπειρο

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει αντίστοιχος M τέτοιος ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ οποτεδήποτε } \quad x > \mathrm{M}$$



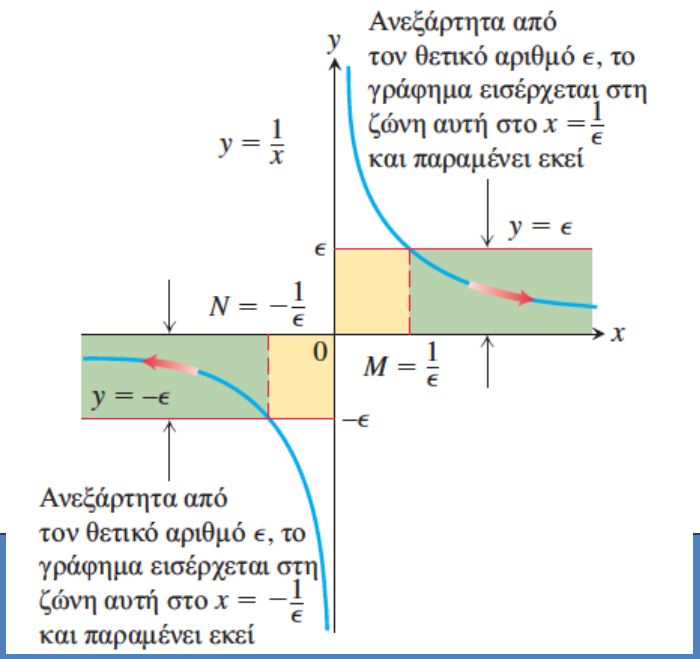
Πεπερασμένα όρια καθώς το $x \to -\infty$

Η $f(x)$ έχει όριο το L καθώς το x τείνει στο μείον άπειρο

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει αντίστοιχος N τέτοιος ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ οποτεδήποτε } \quad x < \mathrm{N}$$



Παραδείγματα

Να δειχθεί ότι

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Να βρεθούν τα

- $\lim_{x\to\infty} (5 + \frac{1}{x})$ και $\lim_{x\to-\infty} (\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2})$

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$

Ακριβής ορισμοί άπειρων ορίων

Η $f(x)$ τείνει στο άπειρο καθώς το x τείνει στο c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό B υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) > \mathrm{B} \quad \text{οποτεδήποτε } 0 < |x - c| < \delta$$

Η $f(x)$ τείνει στο μείον άπειρο καθώς το x τείνει στο c

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

αν για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό B υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) < \mathrm{B} \quad \text{οποτεδήποτε } 0 < |x - c| < \delta$$

Παραδείγματα

- Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
- Να υπολογιστούν τα όρια της $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ για $x \to 2^+$, $x \to 2^-$, $x \to -2^+$ και $x \to -2^-$