Διάλεξη 10: Εφαρμογές των παραγώγων: ακρότατα

Γενικά

Φροντιστήριο Παρασκευή 26/10. Έναρξη μετά την λήξη της εκδήλωσης ($\sim$ 4:30)

Βιβλίο: '*Thomas* Απειροστικός λογισμός' των *Joel Hass*, *Chrisopher Heil* & *Maurice D. Weir*. 14 έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018

Ολικά ακρότατα

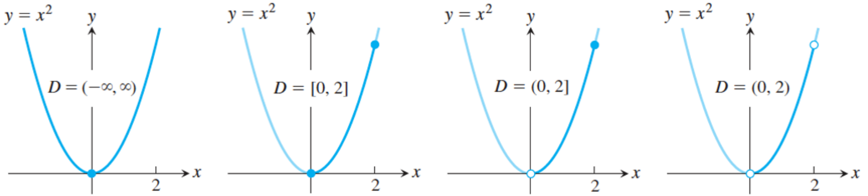
Έστω $f(x)$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού D. Η $f(x)$ αποκτά την απόλυτα μεγαλύτερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο μέγιστο) στο σημείο c του Π.Ο, αν

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D$$

και την απόλυτα μικρότερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο ελάχιστο) αν

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in D$$

Παράδειγμα

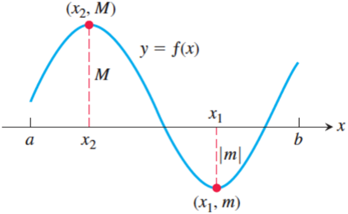


(α) Ολικό ελάχιστο μόνο (β) Ολικό μέγιστο και ελάχιστο (γ) Ολικό μέγιστο μόνο (δ) Ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

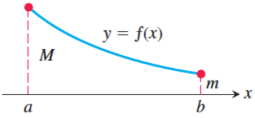
Θεώρημα ακροτάτων

Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[a, b\right]$, τότε έχει οικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο $\left[a, b\right]$.
Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m, \; f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε άλλο $x \in [a, b]$

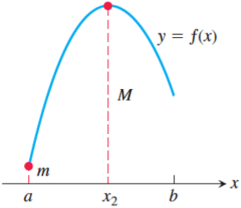
Παράδειγμα



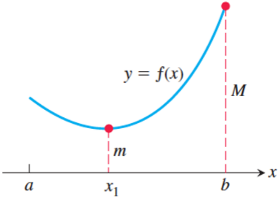
Μέγιστο και ελάχιστο
σε εσωτερικά σημεία



Μέγιστο και ελάχιστο
σε άκρα



Μέγιστο σε εσωτερικό σημείο,
ελάχιστο σε άκρο

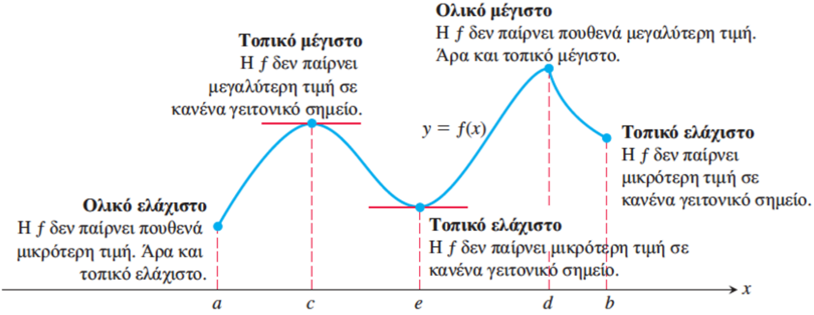


Ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο,
μέγιστο σε άκρο

Τοπικά ακρότατα

- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.
- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.

Παράδειγμα

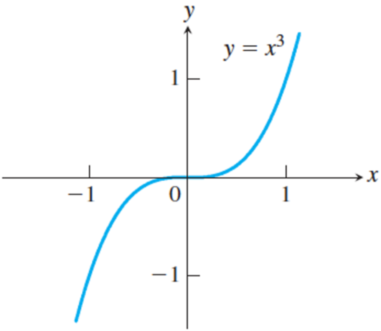

Ολικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά μεγαλύτερη τιμή.
Άρα και τοπικό μέγιστο.
Τοπικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει
μεγαλύτερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
y = f(x)
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει
μικρότερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
Ολικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά
μικρότερη τιμή. Άρα και
τοπικό ελάχιστο.
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει μικρότερη τιμή σε
κανένα γειτονικό σημείο.
x
a
c
e
d
b

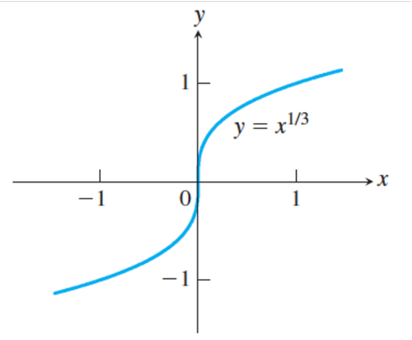
Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελλάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του Π.Ο της και αν η $f'(x)$ ορίζεται στο c τότε $f'(c) = 0$

- ¨Ενα εσωτερικό σημείο του Π.Ο μιας συνάρτησης f όπου η $f'(x) = 0$ ή δεν ορίζεται λέγεται κρίσιμο σημείο της f

Παράδειγμα





Εύρεση ολικών ακροτάτων

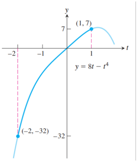
Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα μια συνεχούς συνάρτησης f σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα

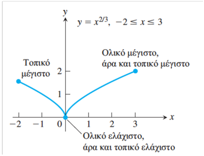
1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο διάστημα
2. Υπολογίζουμε τις τιμές στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα
3. Πέρνουμε την μέγιστη/ελάχιστη τιμή

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα των

- $f(x) = x^2$ στο $[-2, 1]$
- $f(x) = 8t - t^4$ στο $[-2, 1]$
- $f(x) = x^{2/3}$ στο $[-2, 3]$





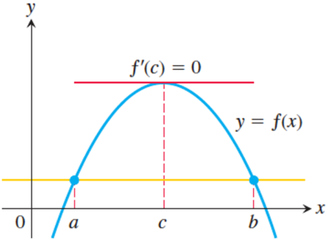
Παράδειγμα

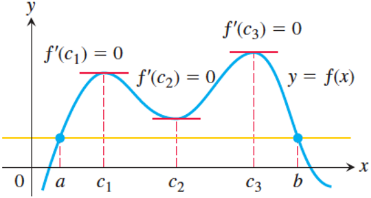
- Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
- Να a, b, c, d ώστε η $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ να έχει τοπικό μέγιστο στο (0,0) και τοπικό ελάχιστο στο (1,-1).

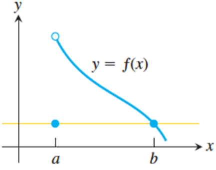
Θεώρημα του *Rolle*

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα αριθμός c στο (a, b) όπου $f'(c) = 0$

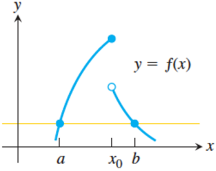
Θεώρημα του *Rolle*



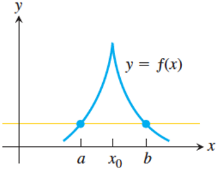




(α) Ασυνεχής σε άκρο του $[a, b]$



(β) Ασυνεχής σε εσωτερικό σημείο του $[a, b]$



(γ) Συνεχής στο $[a, b]$ αλλά μη διαφορίσιμη σε εσωτερικό σημείο

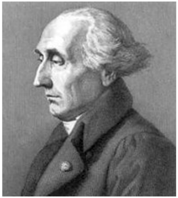
Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Μέση Τιμής

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο c στο (a, b) στο οποίο

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Joseph-Louis Lagrange
1736 –1813

Φυσική ερμηνεία

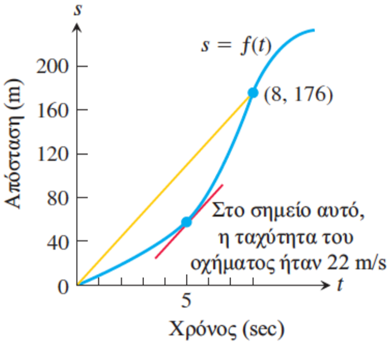
Ο μέσος ρυμθός μεταβολής της $y = f(x)$ ως προς x στο $[a, b]$ ισούται με

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Η $f'(x)$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής. Θ.Μ.Τ λέει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής σε κάποιο εσωτερικό σημείο ισούται με τον μέσο ρυμθός μεταβολής.

Φυσική ερμηνεία

Ένα όχημα επιταχύνει από ηρεμία και χρειάζεται 8 *sec* για να καλύψει 176*m*. Η μέση ταχύτητα του είναι 22*m*/*s*. Άρα κάποια στιγμή πήγαινε με 22*m*/*s*



Πορίσματα

Αν η $f'(x) = 0$ σε κάθε σημείο x εντός του διαστήματος (a, b), τότε $f(x) = C$ για καθε $x \in (a, b)$ όπου C σταθερά.
Αν $f'(x) = g'(x)$ σε κάθε σημείο του x εντός του διαστήματος (a, b), τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + C$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δηλαδη η $f(x) - g(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο (a, b).

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα c που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ για $f(x) = x^2 + 2x - 1$ στο $[0, 1]$
Για ποιές τιμές των a, m, b η

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ στο $[0, 2]$