

# Estimation du flux optique

## basée sur le gradient

Gradient-based optical flow estimation



Georgios TZIRITAS

INRIA, Rocquencourt, B.P. n° 105, 78153 LE CHESNAY CEDEX

Ingénieur, Institut Polytechnique d'Athènes, 1977. DEA Traitement du Signal, ENSIEG, 1978. Thèse Docteur-Ingénieur, INPG, 1981 « Communications dans un canal aléatoire dispersif ». Thèse Docteur ès Sciences, 1985 « Contribution à l'étude des tests d'hypothèses concernant l'opérateur covariance d'un processus gaussien ». Chercheur CNRS depuis 1982; activités de recherche en vision par ordinateur, et plus particulièrement l'analyse du mouvement, avec applications en robotique.

### RÉSUMÉ

L'objet de cet article entre dans le domaine de l'analyse du mouvement en vision par ordinateur. Dans cet article nous présentons une nouvelle méthode d'estimation du champ bidimensionnel des vitesses à partir de la seule composante normale sur un contour. Le champ des vitesses 2-D résulte de la projection orthographique ou perspective d'objets tridimensionnels rigides. Une hypothèse de planarité locale est faite. Sous cette hypothèse la question de l'unicité de la détermination du champ 2-D est étudiée. Il en résulte qu'au moins toutes les courbes du deuxième degré admettent une infinité de solutions. Mais il existe une large classe de courbes admettant une solution unique. Des relations spatiales autorégressives sur les vitesses sont données, fondées sur l'hypothèse de planarité et de rigidité. Ces relations sont utilisées pour estimer à l'aide d'un filtre de Kalman le champ des vitesses 2-D. La composante normale est utilisée comme observation. Une application dans un cas de mouvement simulé d'une courbe plane est donnée.

### MOTS CLÉS

Mouvement, flux optique, filtre de Kalman.

### SUMMARY

*The object of this article falls in the domain of motion analysis in computer vision. In this article we present a new method for estimating the two-dimensional velocity field from the single normal component on a contour. The 2-D velocity field results from the orthographic or perspective projection of three-dimensional rigid objects in motion. A hypothesis of local planarity is made. Under this hypothesis the question of unique determination of the 2-D velocity field is studied. We conclude that at least all the curves of second degree admit an infinity of solutions. But there exist most of curves admitting a unique solution. Autoregressive spatial relations on the velocities are given, founded on the planarity and rigidity hypotheses. The autoregressive relations are employed for estimating the 2-D velocity field using a Kalman filter. As observation the normal component is utilized. An application in the case of a simulated motion of a plane curve is given.*

### KEY WORDS

*Motion, optical flow, Kalman filter.*

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Champ des vitesses bidimensionnel
3. Unicité de la reconstruction du champ des vitesses à partir de la vitesse normale
4. Relations spatiales sur les vitesses
5. Estimation du flux optique
6. Applications et conclusions

Annexes

Bibliographie

### 1. Introduction

Une tâche importante en vision par ordinateur est l'analyse du mouvement et la détermination de la forme tridimensionnelle des objets réels. Pour récupérer l'information 3-D en vision par ordinateur, comme en vision biologique, la stéréoscopie, le mouvement ou le relief des intensités lumineuses sont utilisés; en vision par ordinateur des techniques actives utilisant la lumière monochromatique sont aussi employées.

Le domaine d'applications de l'analyse des scènes dynamiques est très large, incluant la robotique, la biomédecine, la météorologie, etc. Les hypothèses physiques diffèrent d'un domaine à l'autre. Dans cet article nous supposons que le monde est, au moins localement, solide et rigide, ce qui constitue une hypothèse plausible pour des applications en robotique.

Nous nous intéressons à l'analyse du mouvement et à la reconstruction de la structure tridimensionnelle d'un objet. La perception et la mesure du mouvement sont effectuées à partir des variations temporelles des intensités lumineuses dans une séquence d'images. Ces variations constituent le flux optique, c'est-à-dire le champ bidimensionnel des vitesses.

J. Baron [2] fait un tour d'horizon des méthodes existant pour estimer le flux optique et en déduire le mouvement 3-D et la structure 3-D. Pour l'estimation du flux optique, quatre types de techniques existent : (1) techniques de soustraction de deux images, (2) techniques de mise en correspondance des points caractéristiques identifiables dans les deux images, (3) techniques du gradient spatial et temporel, soit sur tout le plan, soit sur les contours, (4) mécanismes sélectifs de la vitesse. L'estimation du flux optique est cruciale pour la reconstruction des objets tridimensionnels et de leur mouvement. La plupart des difficultés proviennent de l'imprécision de l'estimation du

flux optique. D'où l'importance de déterminer des méthodes précises et stables. Dans cet article nous proposons une nouvelle méthode d'estimation du flux optique. En ce qui concerne la reconstruction 3-D nous nous contentons de donner quelques références qui examinent minutieusement cette question (K. Prazdny [9], A. Waxman et S. Ullman [12], A. Bruss et B. Horn [4], G. Adiv [1]). Tous ces auteurs donnent des relations entre le flux optique et le mouvement 3-D et/ou la structure 3-D.

Notre étude fait partie des techniques du gradient. La procédure globale de la perception du mouvement par les techniques du gradient est illustrée dans les figures 1 et 2.

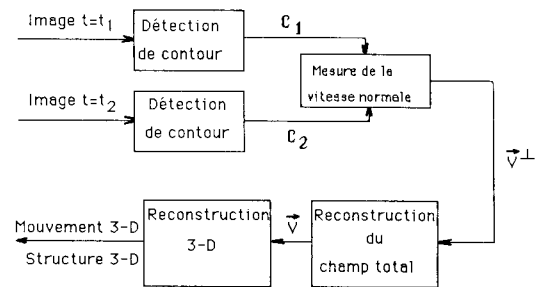


Fig. 1. — Techniques du gradient fondées sur les contours.

Dans cet article nous proposons une méthode de reconstruction du champ total 2-D. Nous nous sommes principalement intéressés au cas des contours. Les contours correspondent à des changements importants de l'intensité lumineuse, comme les frontières de texture dans les surfaces lisses ou les lignes de discontinuité entre différentes surfaces. Il faut être très prudent si le contour correspond à une discontinuité de la profondeur. Les techniques fondées sur les contours admettent qu'il existe un lien direct entre les changements des intensités lumineuses et des courbes géométriques caractéristiques sur la surface d'un objet.

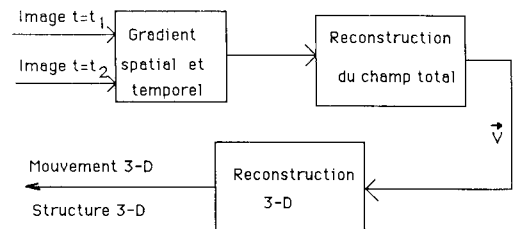


Fig. 2. — Techniques du gradient fondées sur le plan.

Nous considérons que l'étape précédente a été effectuée, c'est-à-dire la mesure de la vitesse suivant la normale du contour, ou la détermination de la contrainte du flux optique dans le cas du plan entier (Annexe A). La projection de la vitesse sur la normale du contour se mesure, soit suivant un déplacement « normal », soit en utilisant les variations des intensités

lumineuses aux points du contour. Dans le premier cas le champ « normal » est inexact en raison de la composante tangentielle. Dans les deux cas la mesure peut être bruitée. Deux méthodes pour mesurer la composante normale de la vitesse sont proposées par P. Bouthemey [3] et V. Rodrigues *et al.* [10].

Dans la partie 2, nous rappelons les équations générales du flux optique et leur forme pour des surfaces planes. Dans la partie 3 nous examinons l'unicité de la reconstruction du champ 2-D à partir de la seule composante normale de la vitesse. Dans la partie 4 nous donnons des relations spatiales autorégressives entre les vitesses, qui nous serviront dans la partie 5 à les estimer en utilisant un filtre de Kalman. Dans la dernière partie nous commentons une application sur un mouvement simulé et nous donnons les premières conclusions de l'étude.

## 2. Champ des vitesses bidimensionnel

### 2.1. PROJECTION PERSPECTIVE

Nous considérons le système des coordonnées (ligne) (X, Y, Z) en 3-D et la formulation donnée par H. Longuet-Higgins et K. Prazdny [7]. Le plan de projection (image) est perpendiculaire à l'axe de Z à la distance focale ( $f=1$ ). Un point P (X, Y, Z) est projeté au point  $p(x, y)$  avec

$$(2.1) \quad x = \frac{X}{Z} \quad \text{et} \quad y = \frac{Y}{Z}$$

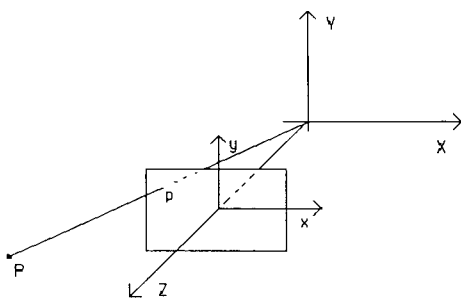


Fig. 3. — Systèmes des coordonnées 3-D et de projection perspective.

Soit  $V_t = (V_x, V_y, V_z)$  la vitesse de translation du point P et  $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  sa vitesse de rotation. La vitesse du point P sera donnée par

$$(2.2) \quad V = V_t + \Omega \times R = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$$

R étant le vecteur désignant le point (X, Y, Z). La vitesse du point  $p(x, y)$  sera (u, v) avec

$$u = \frac{\dot{X}Z - \dot{Z}X}{Z^2}, \quad v = \frac{\dot{Y}Z - \dot{Z}Y}{Z^2}$$

Utilisant les expressions des composantes de la vitesse dans (2.2) on obtient

$$(2.3) \quad \begin{cases} u = \frac{V_x - x V_z}{Z} + (-xy \Omega_x + (1+x^2) \Omega_y - y \Omega_z) \\ v = \frac{V_y - y V_z}{Z} + (-(1+y^2) \Omega_x + xy \Omega_y + x \Omega_z) \end{cases}$$

### 2.2. PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE

Quand la projection est orthographique, on a

$$x = X \quad \text{et} \quad y = Y$$

et le champ des vitesses sur le plan de projection en utilisant (2.2) est donné par

$$(2.4) \quad \begin{cases} u = V_x + Z \Omega_y - y \Omega_z \\ v = V_y - Z \Omega_x + x \Omega_z \end{cases}$$

### 2.3. CAS DES SURFACES PLANES

Les expressions (2.3) et (2.4) de la vitesse s'appliquent à chaque point du plan et dépendent de la troisième dimension Z du point P. Un cas intéressant en pratique et simplifiant l'étude qui suivra est celui des surfaces planes. Nous donnons dans la suite les expressions s'appliquant pour ce cas et valables localement dans le cas général. Soit l'équation du plan

$$n_x X + n_y Y + n_z Z = 1.$$

Pour la projection perspective on obtient

$$1/Z = n_x x + n_y y + n_z$$

En portant Z dans l'expression (2.3), nous obtenons

$$(2.5) \quad \begin{cases} u = (n_z V_x + \Omega_y) + (n_x V_x - n_z V_z) x \\ \quad + (n_y V_x - \Omega_z) y + (\Omega_y - n_x V_z) x^2 \\ \quad - (\Omega_x + n_y V_z) xy \\ v = (n_z V_y - \Omega_x) + (n_x V_y + \Omega_z) x \\ \quad + (n_y V_y - n_z V_z) y + (\Omega_y - n_x V_z) xy \\ \quad - (\Omega_x + n_y V_z) y^2 \end{cases}$$

Pour le cas de la projection orthographique et avec  $n_z \neq 0$ , nous obtenons

$$Z = (1 - n_x x - n_y y) / n_z$$

que nous portons dans (2.4) pour obtenir le champ des vitesses ci-après

$$(2.6) \quad \begin{cases} u = \left( V_x + \frac{\Omega_y}{n_z} \right) - \frac{n_x}{n_z} \Omega_y x - \left( \Omega_z + \frac{n_y}{n_z} \Omega_y \right) y \\ v = \left( V_y - \frac{\Omega_x}{n_z} \right) + \left( \Omega_z + \frac{n_x}{n_z} \Omega_x \right) x + \frac{n_y}{n_z} \Omega_x y \end{cases}$$

Sous l'hypothèse d'un contour appartenant à un plan nous allons dans la suite examiner l'unicité de la

reconstruction du champ total sur le contour à partir de la projection de la vitesse sur la normale du contour.

### 3. Unicité de la reconstruction du champ des vitesses à partir de la vitesse normale

Le champ des vitesses reconstruit à partir de la projection de la vitesse sur la normale du contour ne sera pas unique, si pour une composante normale nulle en tout point, il existe un champ des vitesses non nul. Nous considérons d'abord le cas d'un contour lisse, c'est-à-dire continûment différentiable. Soit  $f(x, y) = 0$  l'équation du contour. Nous supposons que les dérivées partielles  $f_x(x, y)$  et  $f_y(x, y)$  existent et qu'elles sont des fonctions continues. (Nous discuterons plus loin le cas des discontinuités.) La normale du contour (non normalisée) est donnée par le vecteur  $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ . Le problème de l'unicité se pose sous la forme suivante.

Pour une fonction  $f(x, y)$  donnée, existe-t-il un champ des vitesses  $(u(x, y), v(x, y))$  non nul, tel que, quels que soient  $x, y$

$$(3.1) \quad \begin{cases} (1) & f(x, y) = 0 \\ (2) & u(x, y) f_x(x, y) + v(x, y) f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Nous allons d'abord étudier les courbes du deuxième degré, dont l'équation est

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \alpha_{20} x^2 + \alpha_{11} xy + \frac{1}{2} \alpha_{02} y^2 + \alpha_{10} x + \alpha_{01} y + \alpha_{00}$$

Nous considérons séparément le cas de la projection orthographique de celui de la projection perspective, et nous commençons par la projection orthographique utilisant les expressions (2.6). Écrivons l'équation (3.1) pour ce cas

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(\alpha_{20} x + \alpha_{11} y + \alpha_{10}) + (a_2 x + b_2 y + c_2)(\alpha_{11} x + \alpha_{02} y + \alpha_{01}) = 0$$

l'identification de  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  étant évidente dans (2.6). La question est : existe-t-il  $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$  non tous nuls satisfaisant l'équation ci-dessus, pour tout couple  $(x, y)$ ? De l'équation ci-dessus on obtient un système linéaire de six équations à six inconnues.

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_{20} + a_2 \alpha_{11} &= 0 \\ a_1 \alpha_{11} + b_1 \alpha_{20} + a_2 \alpha_{02} + b_2 \alpha_{11} &= 0 \\ b_1 \alpha_{11} + b_2 \alpha_{02} &= 0 \\ a_1 \alpha_{10} + c_1 \alpha_{20} + a_2 \alpha_{01} + c_2 \alpha_{11} &= 0 \\ b_1 \alpha_{10} + c_1 \alpha_{11} + b_2 \alpha_{01} + c_2 \alpha_{02} &= 0 \\ c_1 \alpha_{10} + c_2 \alpha_{01} &= 0 \end{aligned}$$

Si le déterminant du système est nul, alors il existe une solution non nulle. Le déterminant est donné ci-après

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{20} & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{20} & 0 & \alpha_{02} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & \alpha_{20} & \alpha_{01} & 0 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{02} & 0 \\ 0 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ 0 & 0 & \alpha_{10} & 0 & 0 & \alpha_{01} \end{vmatrix}$$

et il est effectivement nul pour toute courbe du deuxième degré.

Considérons maintenant le cas de la projection perspective. L'équation (3.1) utilisant les expressions (2.5) pour le champ des vitesses s'écrit

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 + d_1^{20} x^2 + d_1^{11} xy)(\alpha_{20} x + \alpha_{11} y + \alpha_{10}) + (a_2 x + b_2 y + c_2 + d_2^{11} xy + d_2^{02} y^2) \times (\alpha_{11} x + \alpha_{02} y + \alpha_{01}) = 0$$

Cette fois on obtient un système linéaire de 10 équations à 10 inconnues. Le déterminant est donné ci-après et est nul.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{02} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & \alpha_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{01} & 0 & 0 & \alpha_{02} & 0 \\ 0 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{20} & 0 & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{10} & 0 & \alpha_{20} & 0 & 0 & \alpha_{01} & 0 & \alpha_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{01} \end{vmatrix}$$

Ainsi pour toute courbe du deuxième degré et indépendamment de la projection, orthographique ou perspective, différents champs des vitesses peuvent donner la même projection sur la normale du contour. A. Waxman et K. Wohn [13] ont obtenu le même résultat en utilisant une autre méthode.

Nous démontrons dans la suite qu'une structure minimale donnée ci-dessous assure l'unicité de la reconstruction du champ des vitesses. Voici l'équation générale de la courbe

$$(3.2) \quad \alpha_{m0} x^m + \alpha_{0n} y^n + \alpha_{00} = 0$$

avec  $\alpha_{m0} \neq 0$ ,  $\alpha_{0n} \neq 0$ ,  $\alpha_{00} \neq 0$  et  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$  (ou  $m \geq 1$ ,  $n \geq 3$ ). Effectivement (3.1) donne une projection orthographique

$$(a_1 x + b_1 y + c_1) m \alpha_{m0} x^{m-1} + (a_2 x + b_2 y + c_2) n \alpha_{0n} y^{n-1} = 0$$

Dans l'Annexe B nous démontrons que les coefficients  $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$  sont tous nuls. Dans ce cas on reconstruit un champ des vitesses unique à partir de la vitesse normale. Nous appelons cette structure minimale, parce que tout terme rajouté à celle-ci se traduira par une équation supplémentaire sur  $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$  que satisfera la solution unique. Il est facile de démontrer que la structure de la courbe ci-dessus assure l'unicité de la reconstruction du champ des vitesses également pour le cas de la projection perspective.

Considérons maintenant le cas où la courbe n'est pas continûment différentiable. Il peut donc exister un certain nombre de points de discontinuité. Nous supposons que la courbe est continue. Aux points de discontinuité de la dérivée on connaît les deux composantes de la vitesse comme cela est illustré par le schéma suivant

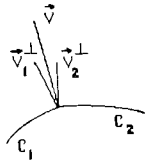


Fig. 4. — Exemple de contour non lisse.

Nous examinons par la suite les structures minimales des courbes, pour que la reconstruction soit unique. Considérons en premier, le cas des segments de droite et une projection orthographique. Chaque segment de droite fournit en appliquant (3.1) deux équations pour les six inconnues. Alors il faut au moins trois segments de droite indépendants pour obtenir une solution unique. Cette proposition est équivalente à la suivante : si on connaît la vitesse en trois points non alignés d'un contour, dans une projection orthographique, on connaît la vitesse en tout point.

Si la projection est perspective chaque segment de droite fournit trois équations pour huit inconnues. Mais une des équations comprend une seule inconnue. Il faudra donc quatre segments de droite indépendants pour obtenir une solution unique. Cette proposition est équivalente à la suivante : si on connaît la vitesse en quatre points non alignés d'un contour, dans une projection perspective, on peut connaître la vitesse en tout point.

Les courbes de degré supérieur à 1 peuvent être traitées à l'aide de (3.2). Effectivement la discontinuité de la dérivée correspond à une courbe résultant du produit des différentes courbes. Il suffira alors d'exprimer ce produit et examiner si la structure minimale est obtenue.

A titre d'exemple nous considérons l'ensemble des courbes

$$(x - \alpha_0)(y - x^2) = 0$$

On peut facilement constater que, si  $\alpha_0 \neq 0$ , alors la structure minimale est assurée. Par contre, si  $\alpha_0 = 0$ , il n'est alors pas possible d'obtenir une solution unique pour le champ total des vitesses.

## 4. Relations spatiales sur les vitesses

Les expressions (2.5) et (2.6) pour les vitesses, suggèrent des relations spatiales sur les vitesses, qui ont une validité locale, dépendant de la validité de l'hypothèse de courbe plane. Nous ne nous attarderons pas sur le cas continu parce que la méthode que nous développons est numérique. Nous donnons néanmoins les relations spatiales sur les vitesses. Dans le cas d'une projection orthographique, toutes les dérivées secondes de  $u(x, y)$  et de  $v(x, y)$  par rapport à  $x$  et à  $y$  sont nulles. Dans le cas d'une projection perspective nous avons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

et toutes les dérivées d'ordre 3 sont nulles.

Le cas numérique est plus intéressant en pratique et nous le développons en détail séparément pour les deux cas de projection.

### 4.1. PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE

Reprenons les expressions de la vitesse

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1 \quad \text{et} \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2$$

Considérons une suite des points  $(x_k, y_k)$ . Nous pouvons écrire

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_{k+1} - u_k = a_1(x_{k+1} - x_k) + b_1(y_{k+1} - y_k) \\ u_k - u_{k-1} = a_1(x_k - x_{k-1}) + b_1(y_k - y_{k-1}) \\ u_{k-1} - u_{k-2} = a_1(x_{k-1} - x_{k-2}) + b_1(y_{k-1} - y_{k-2}) \end{cases}$$

Nous pouvons évidemment écrire des relations identiques pour la composante  $v$ . Ces relations impliquent que

$$\begin{vmatrix} u_{k+1} - u_k & x_{k+1} - x_k & y_{k+1} - y_k \\ u_k - u_{k-1} & x_k - x_{k-1} & y_k - y_{k-1} \\ u_{k-1} - u_{k-2} & x_{k-1} - x_{k-2} & y_{k-1} - y_{k-2} \end{vmatrix} = 0$$

et de même pour  $v$ . On peut alors écrire

$$D_k^1(u_{k+1} - u_k) - D_{k+1}^2(u_k - u_{k-1}) + D_{k+1}^1(u_{k-1} - u_{k-2}) = 0$$

avec

$$D_k^1 = \begin{vmatrix} x_k - x_{k-1} & y_k - y_{k-1} \\ x_{k-1} - x_{k-2} & y_{k-1} - y_{k-2} \end{vmatrix}$$

et

$$D_{k+1}^2 = \begin{vmatrix} x_{k+1} - x_k & y_{k+1} - y_k \\ x_k - x_{k-1} & y_k - y_{k-1} \end{vmatrix}$$

Si les trois points  $(x_k, y_k)$ ,  $(x_{k-1}, y_{k-1})$  et  $(x_{k-2}, y_{k-2})$  ne sont pas alignés, alors  $D_k^1 \neq 0$  et on peut écrire

$$(4.2) \quad u_{k+1} = \left(1 + \frac{D_{k+1}^2}{D_k^1}\right) u_k - \frac{D_{k+1}^1 + D_{k+1}^2}{D_k^1} u_{k-1} + \frac{D_{k+1}^1}{D_k^1} u_{k-2}$$

ce qui constitue une relation autorégressive sur la vitesse. Il en est de même pour l'autre composante. Si les points sont alignés, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que  $x_k - x_{k-1} \neq 0$ . A partir des relations (4.1), on obtient

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{u_{k-1} - u_{k-2}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

$$(4.5) \quad \begin{vmatrix} u_{k+1} - u_k & x_{k+1} - x_k & y_{k+1} - y_k & (x_{k+1})^2 - (x_k)^2 & x_{k+1}y_{k+1} - x_k y_k \\ u_k - u_{k-1} & x_k - x_{k-1} & y_k - y_{k-1} & (x_k)^2 - (x_{k-1})^2 & x_k y_k - y_{k-1} y_{k-1} \\ u_{k-1} - u_{k-2} & x_{k-1} - x_{k-2} & y_{k-1} - y_{k-2} & (x_{k-1})^2 - (x_{k-2})^2 & x_{k-1} y_{k-1} - x_{k-2} y_{k-2} \\ u_{k-2} - u_{k-3} & x_{k-2} - x_{k-3} & y_{k-2} - y_{k-3} & (x_{k-2})^2 - (x_{k-3})^2 & x_{k-2} y_{k-2} - x_{k-3} y_{k-3} \\ u_{k-3} - u_{k-4} & x_{k-3} - x_{k-4} & y_{k-3} - y_{k-4} & (x_{k-3})^2 - (x_{k-4})^2 & x_{k-3} y_{k-3} - x_{k-4} y_{k-4} \end{vmatrix} = 0$$

En mettant  $v$  à la place de  $u$  et  $x$  (resp.  $y$ ) à la place de  $y$  (resp.  $x$ ), on obtient la relation concernant la composante  $v$ . Nous remarquons que cette relation n'est pas symétrique en  $x$  et en  $y$ . Pour le cas plus général des courbes qui ne se trouvent pas sur un plan, il sera intéressant de symétriser la relation en augmentant l'ordre et en rajoutant une colonne en  $y^2$  (resp.  $x^2$ ).

Alors l'ordre de la recursion est 6, et 12 pour les deux composantes, tandis que d'après la relation ci-dessus il est 5 pour chacune des composantes et 10 pour les deux. Mais il existe une autre relation couplant les deux composantes, dont l'ordre est 8 et que nous présentons dans la suite.

$$\begin{vmatrix} u_{k+1} - u_k & x_{k+1} - x_k & y_{k+1} - y_k & 0 & 0 & x_{k+1}^2 - x_k^2 & x_{k+1}y_{k+1} - x_k y_k & y_{k+1}^2 - y_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{k+1} - v_k & 0 & 0 & x_{k+1} - x_k & y_{k+1} - y_k & x_{k+1}y_{k+1} - x_k y_k & y_{k+1}^2 - y_k^2 & x_{k+1}^2 - x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant donne une relation récursive d'ordre 8 qui comprend toutes les deux composantes de la vitesse.

## 5. Estimation du flux optique

Nous nous proposons d'exploiter les relations récursives données dans la partie 4 pour estimer le champ total des vitesses. Nous concentrons notre intérêt sur la méthode des contours. Nous disposons donc de la mesure de la projection de la vitesse sur la normale du contour et de l'autorégression sur les deux compo-

santes de la vitesse. Nous avons le choix entre deux stratégies pour la résolution du problème : une globale, s'appliquant sur l'ensemble du contour, et une locale et récursive. Nous présentons les deux par la suite, mais nous préférons la méthode récursive pour les raisons suivantes : (1) l'hypothèse de courbe plane peut être vérifiée localement et complètement fautive globalement et (2) la dimension du système est nettement inférieure.

$$(4.3) \quad u_k = \left(1 + \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}\right) u_{k-1} - \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} u_{k-2}$$

Si l'échantillonnage est à pas constant, alors

$$(4.4) \quad u_k = 2u_{k-1} - u_{k-2}$$

### 4.2. PROJECTION PERSPECTIVE

Nous utilisons la même méthode pour déterminer une relation sur le champ des vitesses dans le cas de la projection perspective. Cette fois on obtient des relations qui ne sont pas symétriques en  $x$  et en  $y$ . Ci-dessous nous donnons ces relations

A partir des expressions (2.5) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= a_1 (x_{k+1} - x_k) + b_1 (y_{k+1} - y_k) + d (x_{k+1}^2 - x_k^2) + e (x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k) + f (y_{k+1}^2 - y_k^2) \\ v_{k+1} - v_k &= a_2 (x_{k+1} - x_k) + b_2 (y_{k+1} - y_k) + d (x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k) + e (y_{k+1}^2 - y_k^2) + f (x_{k+1}^2 - x_k^2) \end{aligned}$$

où  $f=0$  et rajouté pour la symétrisation de la relation résultant. Nous obtenons la relation ci-après

santes de la vitesse. Nous avons le choix entre deux stratégies pour la résolution du problème : une globale, s'appliquant sur l'ensemble du contour, et une locale et récursive. Nous présentons les deux par la suite, mais nous préférons la méthode récursive pour les raisons suivantes : (1) l'hypothèse de courbe plane peut être vérifiée localement et complètement fautive globalement et (2) la dimension du système est nettement inférieure.

### 5.1. RÉSOLUTION GLOBALE

Nous disposons, pour un nombre  $n$  de points sur le contour, de  $n$  équations de mesure et de  $2(n-1)$

équations indépendantes de régression, pour 2n inconnues, qui sont les deux composantes de la vitesse. Le système est surdéterminé; nous allons donc chercher une solution au sens des moindres carrés. Nous écrivons la fonctionnelle quadratique à minimiser pour le cas de la régression (4.2).

$$\Psi(\dots, u_k, \dots; \dots, v_k, \dots) = \sum (u_k f_x(x_k, y_k) + v_k f_y(x_k, y_k) - v_k \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k)})^2 + \lambda^2 \sum [(u_{k+1} - \beta_k u_k - \beta_{k-1} u_{k-1} - \beta_{k-2} u_{k-2})^2 + (v_{k+1} - \beta_k v_k - \beta_{k-1} v_{k-1} - \beta_{k-2} v_{k-2})^2]$$

où l'identification de  $\beta_k$  est évidente. Le facteur  $\lambda^2$  sert à pondérer le degré de confiance des mesures par rapport à l'autorégression, ou, autrement dit, le rapport du bruit de mesure sur le bruit du système autorégressif. Cette méthode est à rapprocher des méthodes de régularisation [8, 11]. La minimisation conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires. Différentes méthodes de résolution peuvent être utilisées; néanmoins la méthode du gradient s'avère efficace et rapide [5].

## 5.2. RÉOLUTION RÉCURSIVE

Le même problème peut être résolu récursivement; il s'agit de la méthode des moindres carrés récursifs. Nous allons préférer la formulation de Kalman pour la résolution récursive. Considérons le cas de l'équation (4.2) et écrivons l'autorégression sur les deux composantes de la vitesse.

$$u_{k+1} = \beta_k u_k + \beta_{k-1} u_{k-1} + \beta_{k-2} u_{k-2}$$

$$v_{k+1} = \beta_k v_k + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_{k-2} v_{k-2}$$

Nous désignerons par  $\xi_k$  le vecteur d'état. Il est donné par

$$\xi_k = [u_k \quad u_{k-1} \quad u_{k-2} \quad v_k \quad v_{k-1} \quad v_{k-2}]^T$$

L'équation du système d'état est donnée ci-après

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xi_k + \omega_k$$

$\omega_k$  étant un vecteur de bruit centré et de covariance  $Q_k$ . L'équation de mesure sera

$$y_k = [c_{1k} \quad 0 \quad 0 \quad c_{2k} \quad 0 \quad 0] \xi_k + z_k$$

où  $y_k$  est la projection mesurée de la vitesse sur la normale du contour,

$$(c_{1k}, c_{2k}) = (f_x(x_k, y_k), f_y(x_k, y_k)) / \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k)}$$

et  $z_k$  est un bruit de mesure centré et de variance  $R_k$ . Les bruits de système et de mesure sont supposés indépendants entre eux et d'un point à l'autre. Sous cette formulation nous sommes devant un problème classique d'estimation linéaire, le bien connu filtre de Kalman pour le cas numérique [6]. Nous donnons en Annexe C les équations de l'estimation. Nous discutons ici l'application du filtre sur une courbe. Si la courbe est fermée, on peut choisir un point quelconque comme initial et faire évoluer le filtre autour de la courbe. Il est évident que la vitesse aux premiers points sera moins bien estimée que celle des derniers points. En tout cas une deuxième application du filtre autour de la courbe sera nécessaire. Si la courbe n'est pas fermée la même technique pourra être appliquée en inversant le sens de la direction du filtre en arrivant au point final.

La méthode d'estimation récursive peut être aussi appliquée pour l'estimation du flux optique sur tout le plan. Nous illustrons cela par la relation autorégressive (4.4). Cette relation correspond à un balayage horizontal d'une image et par conséquent l'estimation peut se faire parallèlement pour toute les lignes. Nous avons

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \\ v_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ v_k \\ v_{k-1} + \omega_k \end{bmatrix}$$

et l'équation de mesure est donnée par la contrainte du flux optique.

## 6. Applications et conclusions

Nous avons appliqué la méthode présentée dans cet article sur le mouvement simulé d'une courbe quartique dont l'équation sur le plan de projection est

$$x^4 + y^4 = 1$$

D'après la démonstration faite dans la partie 3, on peut reconstruire à partir de la vitesse normale le champ total bidimensionnel, car il s'agit d'un cas particulier de l'équation (3.2). Nous avons supposé que la projection est orthographique et nous avons implanté l'algorithme correspondant (partie 4.1). En deux itérations autour du contour, l'algorithme estime exactement la vitesse dans toutes les configurations examinées, rotation et/ou translation, quand le bruit de mesure est nul. Dans la figure 5 nous donnons les résultats pour

$$u = 0,05x - 0,05y + 0,02$$

$$v = 0,05x + 0,05y + 0,01$$

Nous donnons la composante normale, ainsi que le vecteur 2-D estimé.

Dans la suite nous envisageons l'application de l'algorithme à des images réelles et étudierons la robustesse

par rapport aux erreurs de mesure. Nous insistons sur le fait que, quand les mesures ne sont pas bruitées, l'algorithme donne le champ des vitesses exact, s'il existe une solution unique. Ainsi par rapport aux méthodes heuristiques utilisant des contraintes de lissage [5], la méthode proposée donne des meilleurs résultats. Une autre méthode qui donne le champ des vitesses exact est « Velocity Functional Method » proposée par A. Waxman et K. Wohn [13]. Il serait intéressant de comparer les deux méthodes de point de vue rapidité et robustesse.

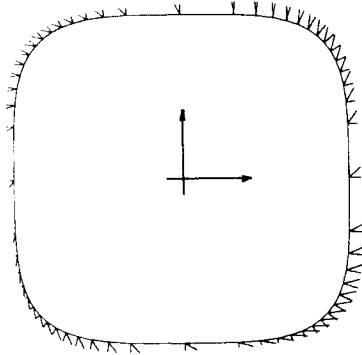


Fig. 5. — Application de l'algorithme sur une courbe quartique.

Un autre résultat important de notre étude est la démonstration concernant l'unicité de la reconstruction de la vitesse à partir de la vitesse normale. Nous savons qu'une méthode exacte basée sur la vitesse normale ne peut pas reconstruire le champ total pour au moins toutes les courbes du deuxième degré. Dans ce cas on peut obtenir une seule solution, si on impose une contrainte.

Manuscrit reçu le 26 novembre 1985.

## Annexe A

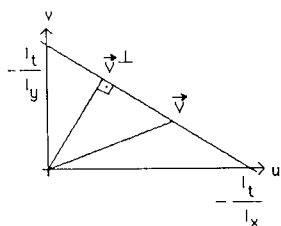
### CONTRAINTES DU FLUX OPTIQUE

Nous rappelons la contrainte fondamentale du flux optique. Soit  $I(x, y; t)$  la fonction de l'intensité lumineuse. Sous certaines hypothèses la variation temporelle  $I_t$  est égale à un signe près au produit scalaire de la variation spatiale ( $I_x, I_y$ ) par la vitesse ( $u, v$ )

$$I_t + I_x u + I_y v = 0$$

Cette relation donne la ligne de contrainte (droite) de la vitesse et la valeur de la vitesse dans la direction du gradient ( $I_x, I_y$ )

$$|\mathbf{V}^\perp| = -\frac{I_t}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$



## Annexe B

### SUR L'UNICITÉ DE LA RECONSTRUCTION DU CHAMP DES VITESSES

Considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R} : \Pi_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_2(x, y) = 0\}$$

où

$$\Pi_1(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j \quad \Pi_2(x, y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$$

Les coefficients  $\{a_{ij}\}$  sont supposés non liés algébriquement entre eux, ainsi que les  $\{b_{ij}\}$ . Nous allons déterminer des relations entre les  $\{a_{ij}\}$  et  $\{b_{ij}\}$ .

Nous pouvons écrire

$$[\dots x^i y^j \dots] \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \end{bmatrix} = a_{00}, \quad i+j > 0$$

ou  $\mathbf{f}^T \mathbf{a} = a_{00}$ , où l'identification des vecteurs  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{a}$  est évidente. Si  $N$  est la dimension de ces vecteurs, nous considérons  $N$  points de l'ensemble  $\Gamma$ , qui correspondent à  $N$  vecteurs  $\{\mathbf{f}_k\}$  et qui forment une matrice  $\mathbf{F}$ , en général, inversible.

On pourra alors écrire  $\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{c}_1$  et pour les coefficients  $\{b_{ij}\}$ ,  $\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{c}_2$ , avec

$$\mathbf{c}_1 = a_{00} [1 \dots 1]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_2 = b_{00} [1 \dots 1]^T$$

Il y a donc deux possibilités :

- soit  $b_{00} = 0$  et par conséquent  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ;
- soit  $b_{00} \neq 0$  et alors  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Nous considérons comme exemple la courbe de la formule (3.2). Le vecteur  $\mathbf{f}$  est donné ci-dessous

$$\mathbf{f} = [x^m \quad x^{m-1}y \quad x^{m-1} \quad xy^{n-1} \quad y^n \quad y^{n-1}]^T$$

les termes étant différents à cause des relations  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$  (ou  $m \geq 1$ ,  $n \geq 3$ ). Puisque le terme constant est nul, alors le vecteur des coefficients sera nul.

## Annexe C

### FILTRE DE KALMAN

Dans cet annexe nous rappelons les équations du filtre de Kalman [6].

Équation de l'état du système

$$\xi_{k+1} = \Phi_{k+1, k} \xi_k + \omega_k$$

Équation de mesure

$$y_k = C_k \xi_k + z_k$$



$$\begin{aligned} E\{\omega_k\} &= 0, & E\{\omega_k \omega_l^T\} &= \mathbf{Q}_k \delta_{kl} \\ E\{z_k\} &= 0, & E\{z_k z_l^T\} &= \mathbf{R}_k \delta_{kl} \\ E\{\omega_k z_l^T\} &= 0, & & \forall k, l \end{aligned}$$

Estimateur de l'état du système

$$\xi(k+1 | k+1) = E\{\xi_{k+1} | \mathbf{y}_{k+1}\}$$

Matrice de covariance de l'erreur de prédiction :  $\mathbf{P}(k+1 | k)$

$$(B1) \quad \mathbf{P}(k+1 | k) = \Phi_{k+1, k} \mathbf{P}(k | k) \Phi_{k+1, k}^T + \mathbf{Q}_{k+1}$$

Gain du filtre

$$(B2) \quad \mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{C}_{k+1}^T \times [\mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{C}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}$$

Récurrance de l'estimateur

$$(B3) \quad \xi(k+1 | k+1) = \Phi_{k+1, k} \xi(k | k) + \mathbf{G}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \Phi_{k+1, k} \xi(k | k))$$

Matrice de covariance de l'erreur d'estimation :  $\mathbf{P}(k | k)$

$$(B4) \quad \mathbf{P}(k+1 | k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}] \mathbf{P}(k+1 | k)$$

L'algorithme est explicité dans la suite.

$$k=0 \quad \text{Initialisation : } \xi(0 | 0), \mathbf{P}(0 | 0)$$

Tant qu'il existe un point du contour pour lequel

$$\|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \Phi_{k+1, k} \xi(k | k)\| > \varepsilon$$

faire

Pas 1. Calculer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction (B1).

Pas 2. Calculer le gain du filtre (B2).

Pas 3. Calculer l'estimation de l'état (B3).

Pas 4. Calculer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (B4).

$$k = k + 1.$$

Fin tant que.

- [1] G. ADIV, Determining Three-Dimensional Motion and Structure from Optical Flow Generated by Several Moving Objects, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7, n° 4, July 1985, p. 384-401.
- [2] J. BARON, *A Survey of Approaches for Determining Optical Flow, Environmental Layout and Egomotion*, University of Toronto, RBCV-TR-84-5, novembre 1984.
- [3] P. BOUTHEMY, Estimation of edge motion based on local modeling, *SPIE Conference on Robot Vision*, Cannes, décembre 1985.
- [4] A. BRUSS et B. HORN, Passive Navigation, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 21, 1983, p. 3-20.
- [5] E. HILDRETH, *The Measurement of Visual Motion*, MIT Press, Massachusetts, 1983.
- [6] A. JAZWINSKI, *Stochastic processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [7] H. LONGUET-HIGGINS et K. PRAZDNY, The interpretation of a moving retinal image, *Proc. R. Soc. London*, B 208, 1980, p. 285-397.
- [8] T. POGGIO, Early Vision: from computational structure to algorithms and parallel hardware, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 31, n° 2, August 1985, p. 139-155.
- [9] K. PRAZDNY, On the information in optical Flow, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 21, 1983, p. 239-259.
- [10] V. RODRIGUES, L. MASSIP-PAIHES et S. CASTAN, La détermination du vecteur déplacement et le modèle de la covariance temporelle, *AFCEP 5<sup>e</sup> Congrès Reconnaissance des formes et Intelligence Artificielle*, Grenoble, novembre 1985, p. 1195-1202.
- [11] A. TIKHONOV et V. ARSENEINE, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Editions MIR, 1974.
- [12] A. WAXMAN et S. ULLMAN, *Surface structure and 3-D motion from image flow: a kinematic analysis*, University of Maryland, CAR-TR-24, October 1983.
- [13] A. WAXMAN et K. WOHN, *Contour evolution, neighborhood deformation and global image flow: planar surfaces in motion*, University of Maryland, CAR-TR-58, April 1984.