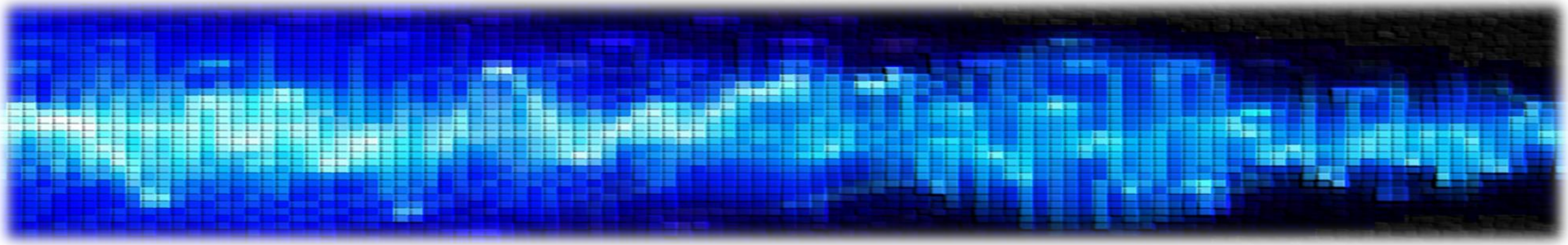
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

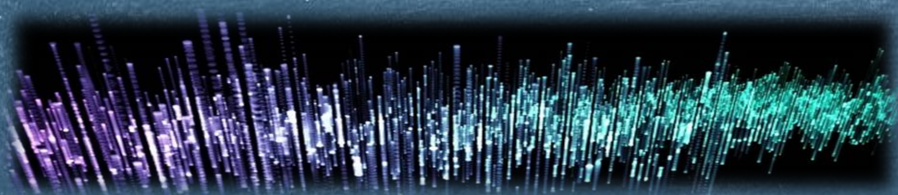


- Συστήματα στο χώρο του Ζ

Τι περιέχει το ΗΥ370?

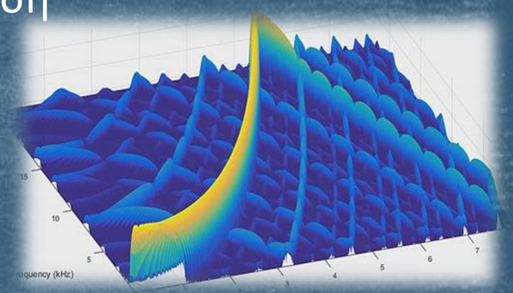
$1^{ο}$ Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

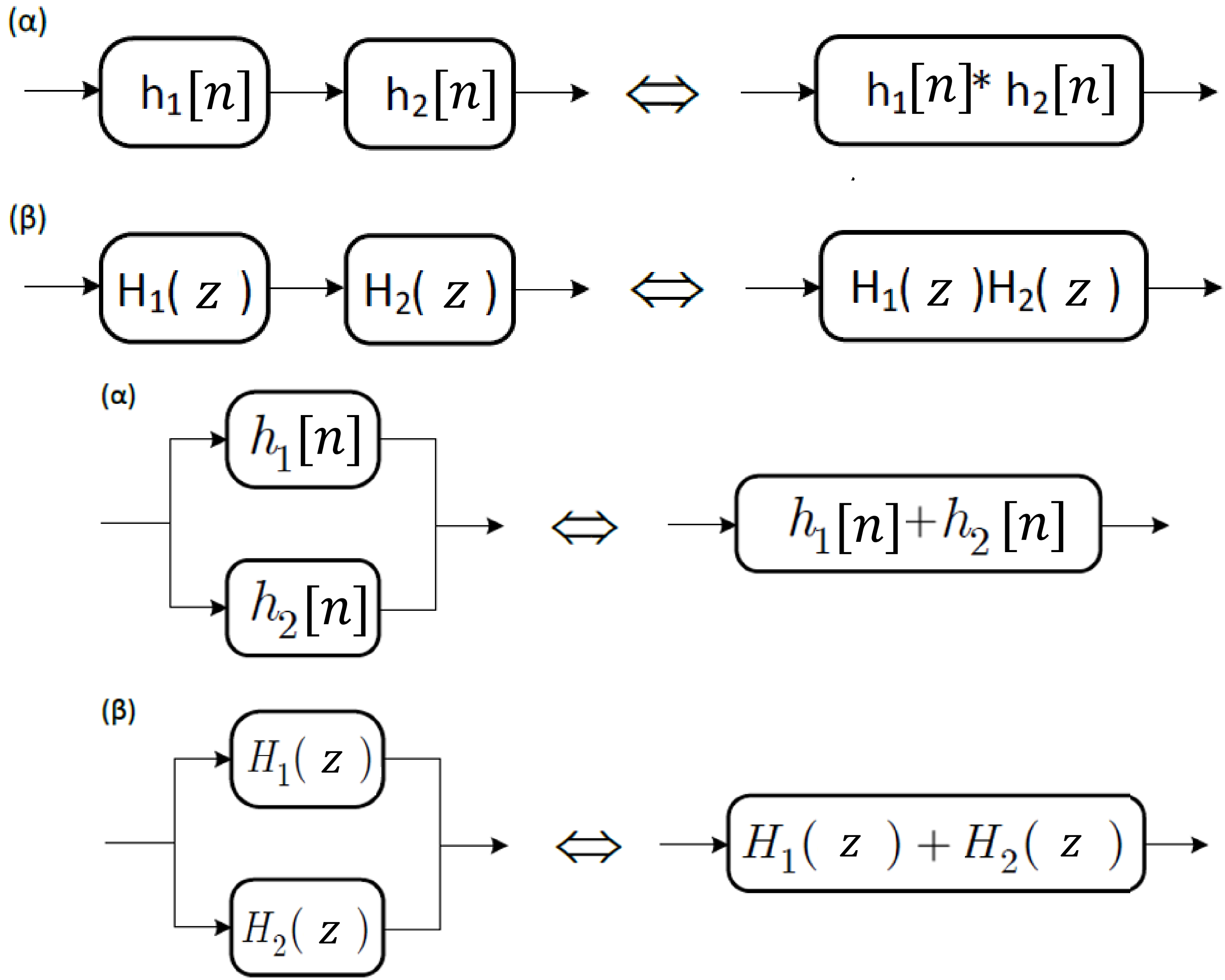


$2^{ο}$ Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Ζ
- Συστήματα στο χώρο του Ζ
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Διατάξεις Συστημάτων**



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**
- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν $|\gamma_i| < 1,\ \forall\ i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall\ \omega$

$\Updownarrow$

- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \to 1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

$z_1 = 2$

$z_2 = -\frac{1}{2}$

a) $|z| < \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < |z| < 2$

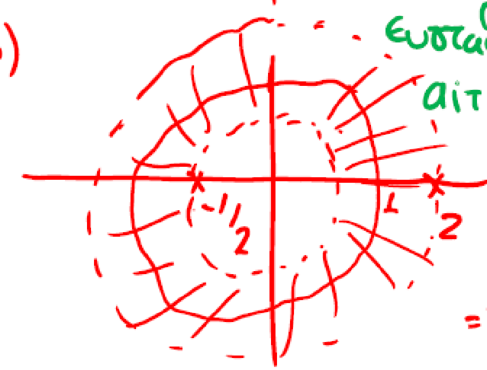
c) $|z| > 2$

a)

Ευσταθές ×

Αιτιατό ×

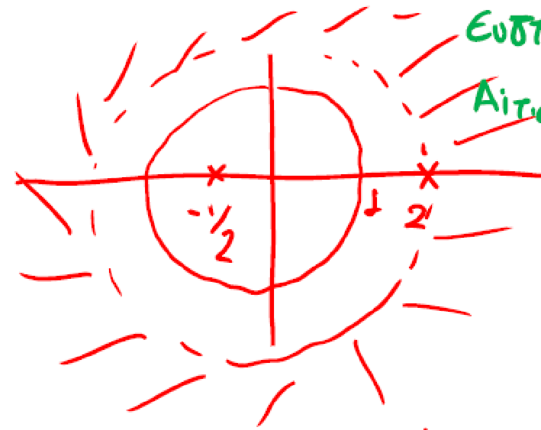
b)



Ευσταθές ✓

Αιτιατό ×

c)



Ευσταθές ×

Αιτιατό ✓

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

α) Ευσταθές $\quad \frac{1}{2} < |z| < 2$

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

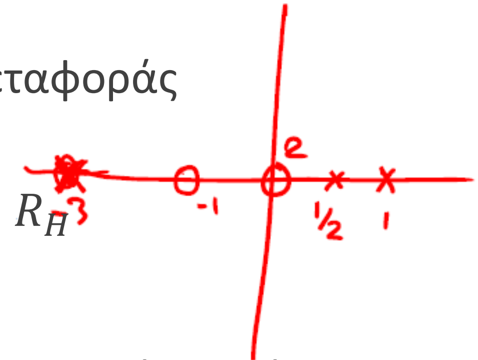
β) αιτιατό $\quad |z| > 2$

$$h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$



Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

$z_1 = 1$

$z_2 = \frac{1}{2}$

$z_3 = -3$

	Ευστάθεια	Αιτιατότητα	Μον. απόκριση
a) $\lvert z \rvert < \frac{1}{2}$	×	×	$h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$
b) $\frac{1}{2} < \lvert z \rvert < 1$	×	×	$h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$
c) $1 < \lvert z \rvert < 3$	×	×	$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$
d) $\lvert z \rvert > 3$	×	✓	$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7}(-3)^n u[n]$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{7}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7}\,\frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

- **Αντίστροφα Συστήματα**

- Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο
  - Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη
    - Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου
  - Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε

$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$

    δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

  - Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$
  - Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Ζ προκύπτει ότι

$$H_i(z)H(z) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$

  - Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$
  - Στο χώρο του Ζ, αν

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

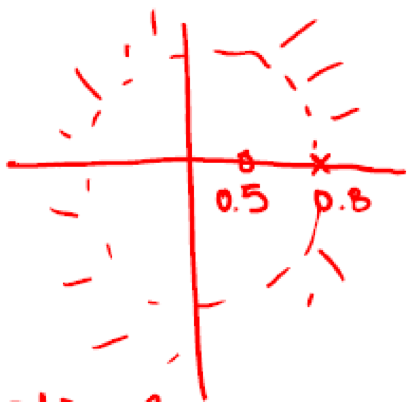
τότε

$$H_i(z) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

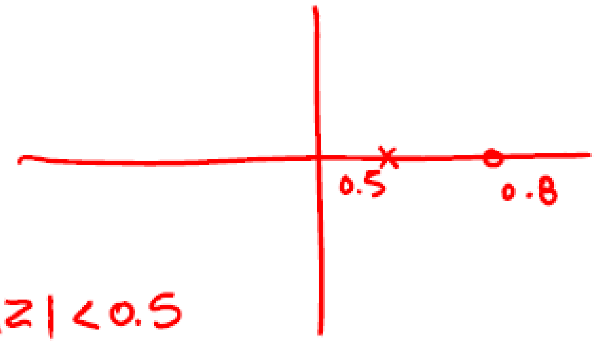
$H(z)$



$R_H: |z|>0.8$

Ευσταθές και αιτιατό

$H_i(z)$



1) $|z|<0.5$

2) $|z|>0.5 \rightarrow R_H$: γιατί $R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$

Ευσταθές και αιτιατό

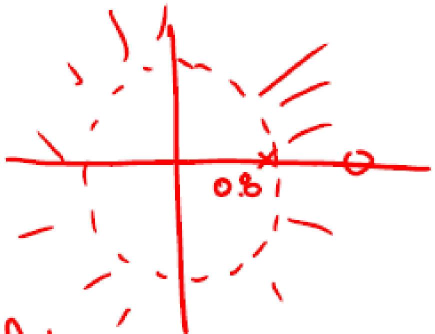
$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - 0.8\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.8\,(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$, $|z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$0.5 - z^{-1} = 0 \Rightarrow 0.5 = z^{-1} \Rightarrow \boxed{z = 2}$

$H(z)$

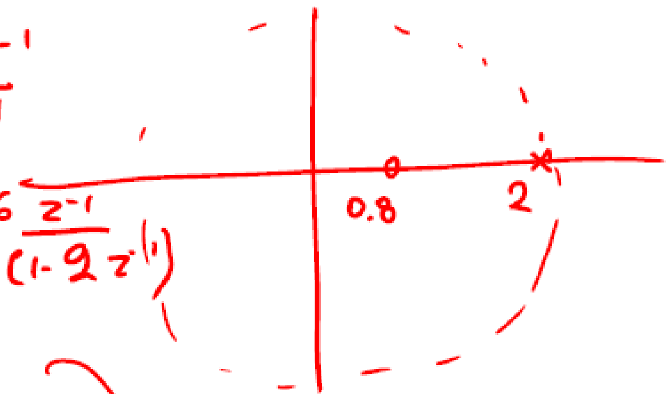


ευσταθές και αιτιατό

$R_H: |z| > 0.8$

$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}}$

$= 2\frac{1}{(1 - 2z^{-1})} - 1.6\frac{z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})}$



1) $|z| < 2$

2) $|z| > 2$

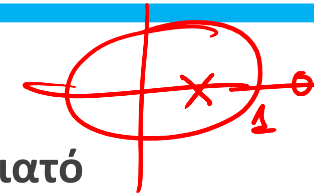
$R_{H_i}^{1}: 0.8 < |z| < 2$ - ευσταθές - μη αιτιατό

$R_{H_i}^{2}: |z| > 2$ - μη ευσταθές - αιτιατό

$R_{H_i}^{1}: h_i[n] = -2\,2^{n} u[-n-1] + 1.6\,2^{n-1} u[-n]$

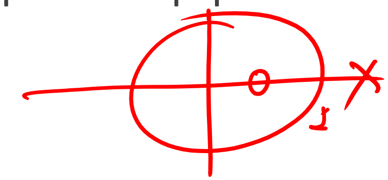
$R_{H_i}^{2}: h_i[n] = 2 \cdot 2^{n} u[n] - 1.6 \cdot 2^{n-1} u[n-1]$

- **Αντίστροφα Συστήματα**



  - Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα

  - Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό



  - Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
    - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του **<u>εντός</u>** του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
    - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε

  - Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?

  - Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
    - **Άρα <u>όλα</u> τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται ΚΑΙ ΑΥΤΑ εντός του μοναδιαίου κύκλου**

  - Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
    - θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα…

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Z ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Z «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «διαισθητική»
- θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε *ακριβώς* πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά

Συνεχίζεται…