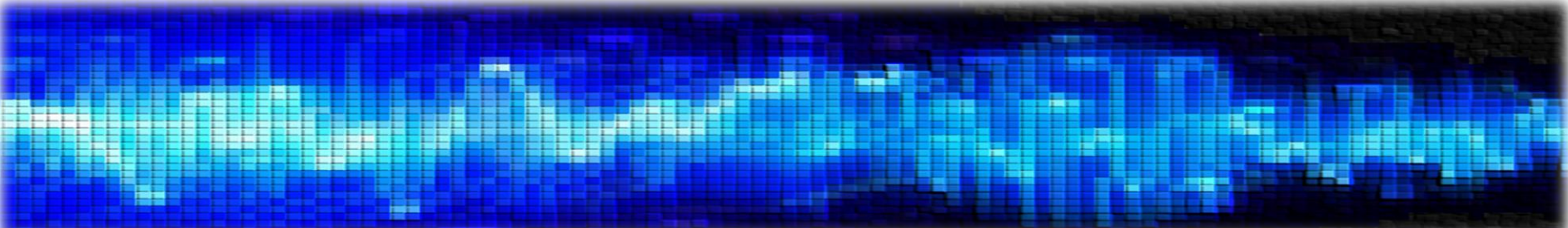


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15<sup>Η</sup>

- 
- Πόλοι & Μηδενικά
  - Συστήματα στο χώρο του Z

# Τι περιέχει το ΗΥ370?



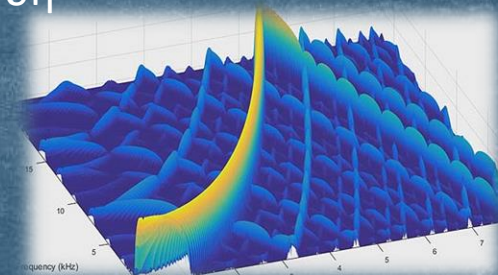
## 1<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



## 2<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- Πεδίο Σύγκλισης: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει
- Σχέση μετασχ. Z με μετασχ. Fourier

#### Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

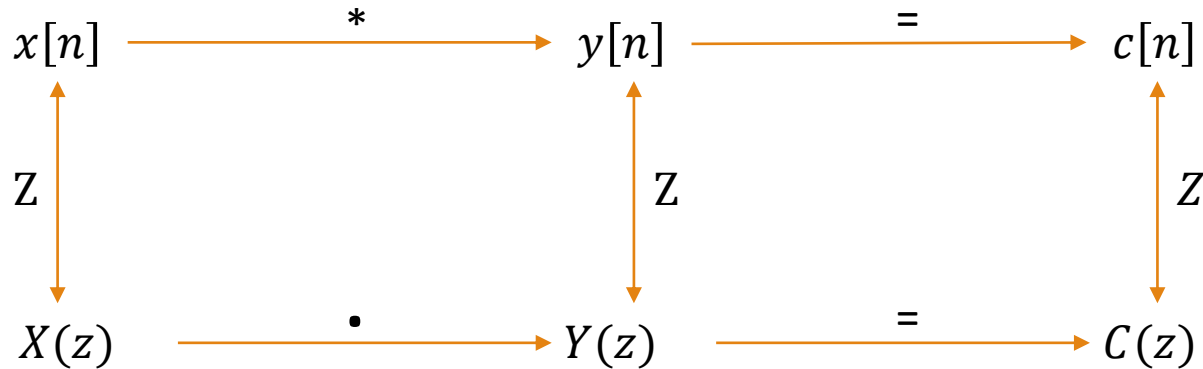
- (α') Ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος  $x[n]$  μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z  $X(z)$  αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας  $|z| = 1$ .
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων  $|X(z)|$  και  $\phi(z)$  επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- Ιδιότητες Μετασχ. Z (επανάληψη)

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	$R_x$
	$y[n]$	$Y(z)$	$R_y$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το $R_x$
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R_x$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το $R_x$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

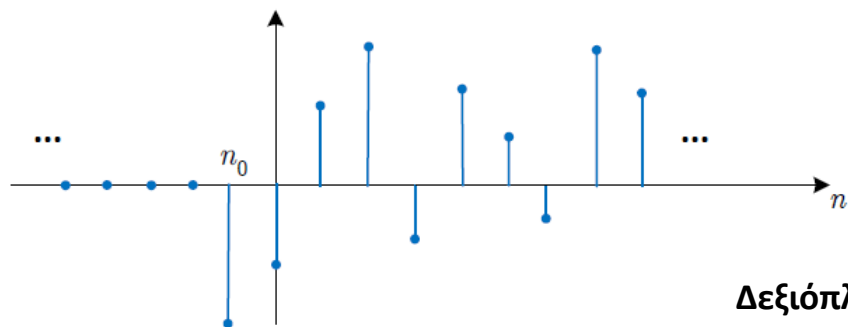
## • Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:



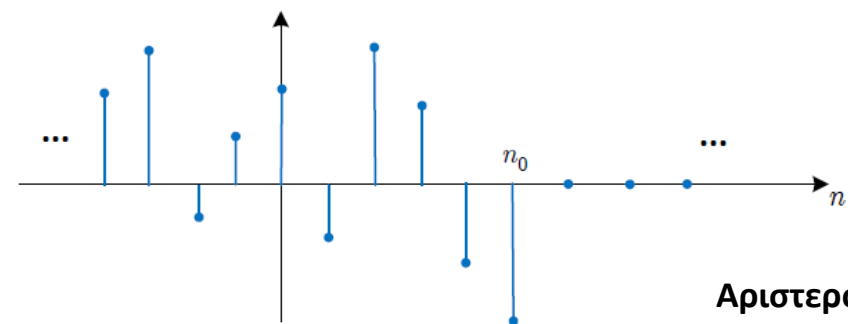
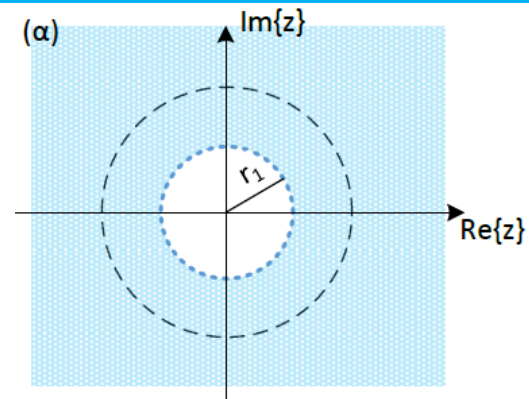
- Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT
  - Μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
  - Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



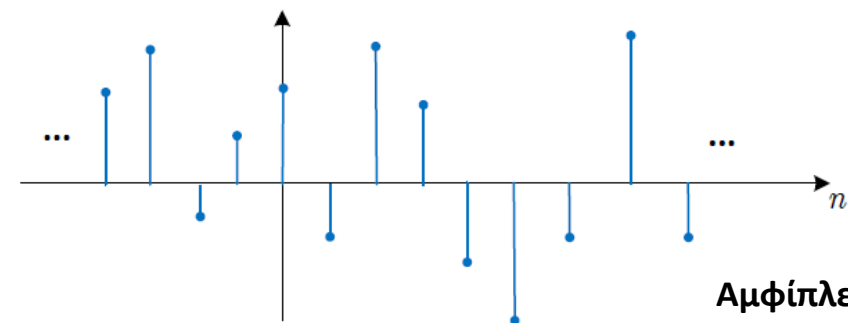
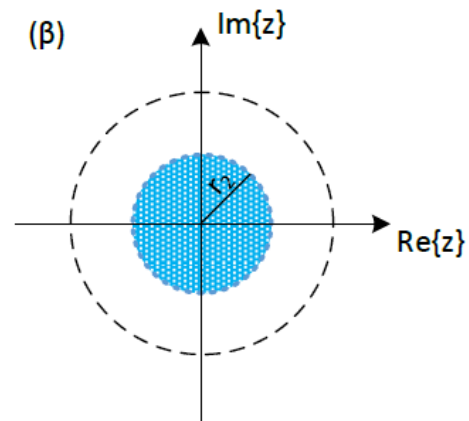
$$x[n] = 0, \\ n < n_0$$

Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

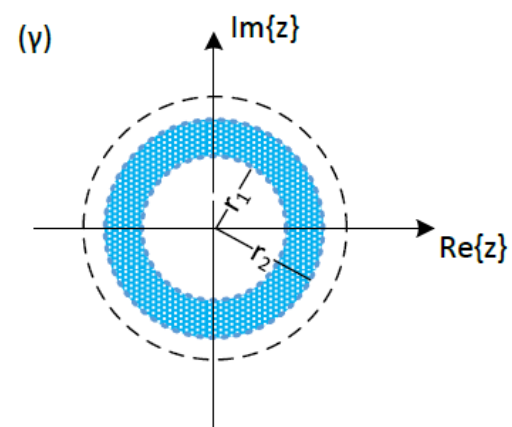


$$x[n] = 0, \\ n > n_0$$

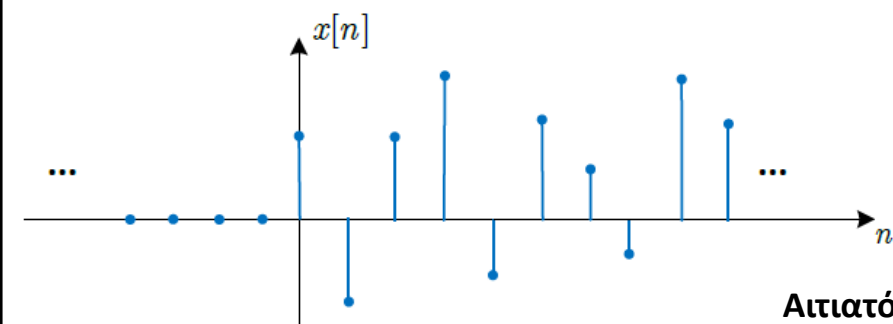
Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC



Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

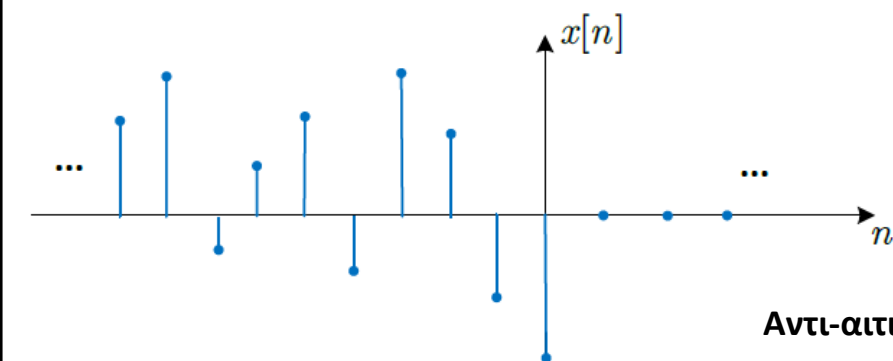
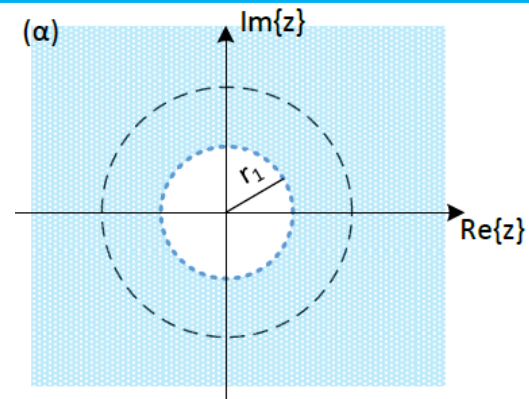


• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



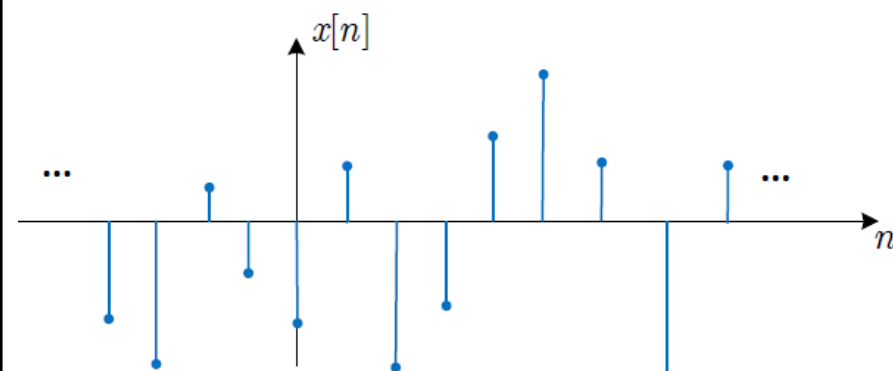
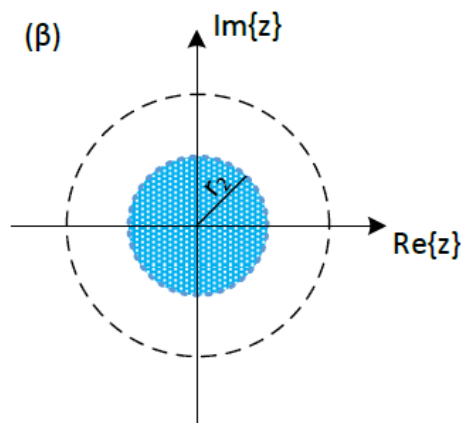
$$x[n] = 0, \\ n < 0$$

Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

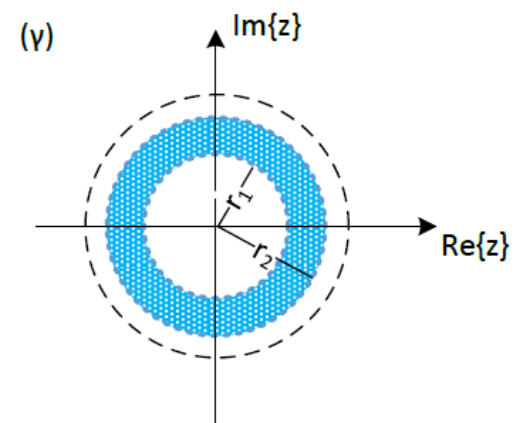


$$x[n] = 0, \\ n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC



Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



## • Ζεύγη Μετασχηματισμών Z

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n - n_0], n_0 > 0$	$z^{-n_0}$	$z \neq 0$	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n + n_0], n_0 > 0$	$z^{n_0}$	$z \neq \infty$	πεπερασμένης διάρκειας
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό



## • Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος, (δ) όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ίσως των  $|z| = 0$  ή  $|z| = \infty$
2. Το ROC **δεν** πρέπει να περιέχει πόλους!
3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.
4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων  $z = 0$  ή  $z = \infty$
5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής  $|z| > \max|p_k|$ , με  $p_k$  τους πόλους του σήματος
  - a) Το  $z = \infty$  δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
  - b) Το  $z = \infty$  περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό
6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής  $|z| < \min|p_k|$ , με  $p_k$  τους πόλους του σήματος
  - a) Το  $z = 0$  δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
  - b) Το  $z = 0$  περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό
7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής  $|p_i| < |z| < |p_j|$ , με  $p_i, p_j$  δυο πόλους του σήματος με  $|p_i| < |p_j|$ 
  - Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

Πιθανά πεδία σύγκλισης:

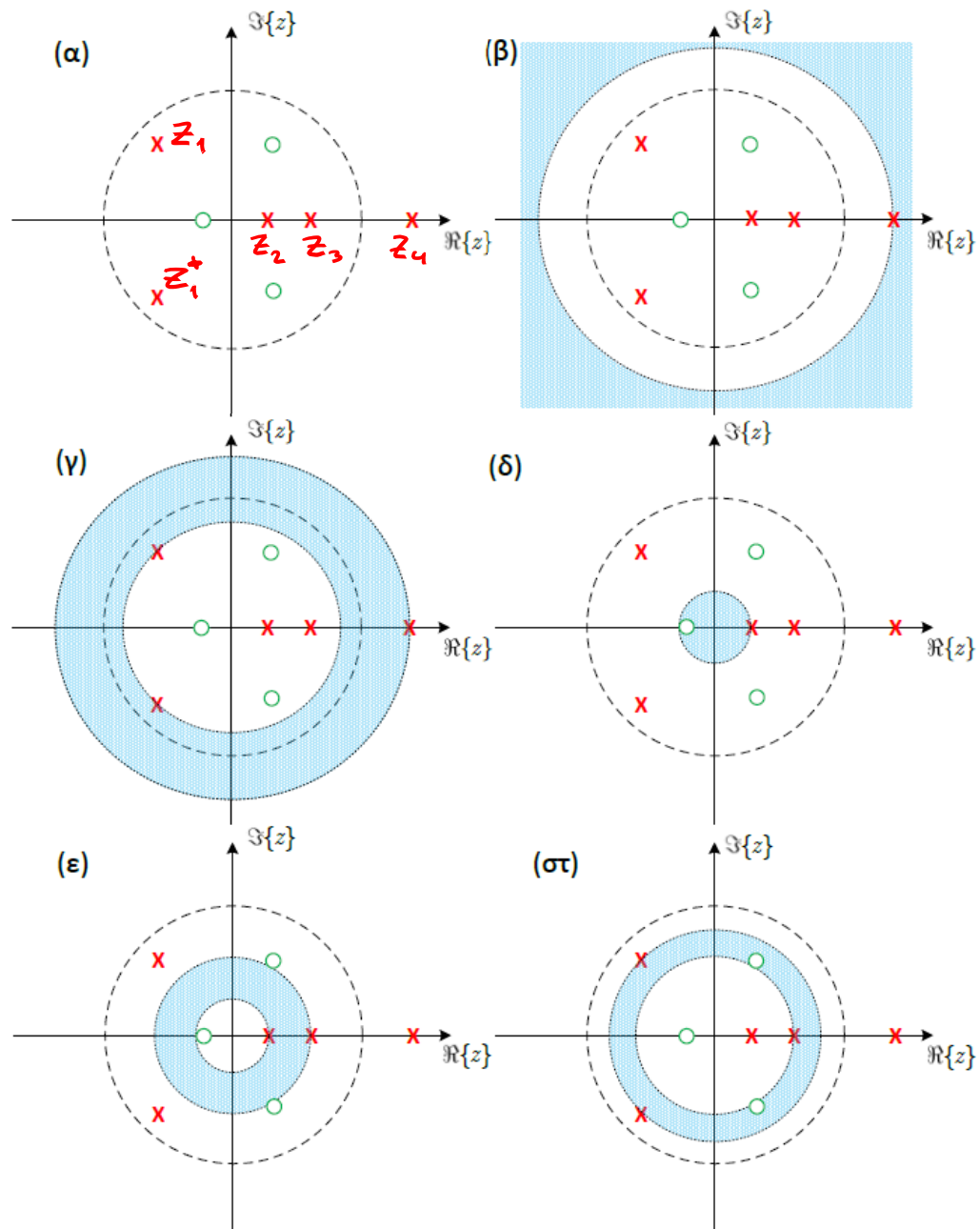
(κ)  $|z| > |z_4|$

(γ)  $|z_1| < |z| < |z_4|$

(δ)  $|z| < |z_2|$

(ε)  $|z_2| < |z| < |z_3|$

(σ)  $|z_1| < |z| < |z_3|$



## • Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

- Γνωρίζουμε ήδη (διαισθητικά) τη σημασία των πόλων και των μηδενικών στο μετασχ. Z
- Η αναπαράσταση των πόλων και μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο συνιστά το **περίφημο διάγραμμα πόλων-μηδενικών**
- Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτό το διάγραμμα

- Έστω ότι έχουμε ένα ρητό μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

- Παραγοντοποιώντας

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Προφανώς, τα  $\xi_k, \psi_l$  είναι τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα
  - Είναι εμφανές ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι
- Όμως υπάρχει και ο όρος  $z^{N-M}$ ! Ας τον δούμε...

- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Αν  $N > M$  τότε υπάρχουν επιπλέον  $N-M$  μηδενικά στο  $z = 0$
- Αν  $N < M$  τότε υπάρχουν επιπλέον  $M-N$  πόλοι στο  $z = 0$
- Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ.  $Z$  έχει τον **ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών!**

- Αν τώρα

$$X(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{b_0 \prod_{l=1}^N (z - \psi_l)} = \frac{a_0}{b_0} z^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\xi_k}{z}\right)}{\prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{\psi_l}{z}\right)}$$

τότε

- Αν  $N > M$ , τότε  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$ , οπότε υπάρχουν επιπλέον  $N-M$  μηδενικά στο  $z = \infty$
- Αν  $N < M$ , τότε  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$ , οπότε υπάρχουν επιπλέον  $M-N$  πόλοι στο  $z = \infty$

- **Ξανά, όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά!**

## • Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

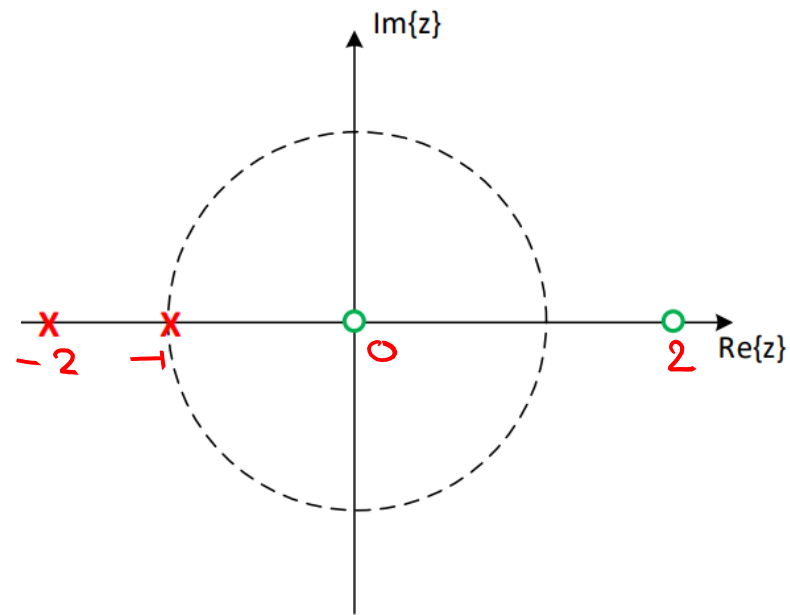
$$\text{Είναι } X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{z^{-2}} \cdot \frac{z - 2}{z^2 + 3z + 2}$$

$$= \frac{z(z-2)}{(z^2 + 3z + 2)}$$

$$= \frac{z(z-2)}{(z+1)(z+2)}$$

Μηδενικά:  $z=0, z=2$

Πόλοι:  $z=-1, z=-2$



## • Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

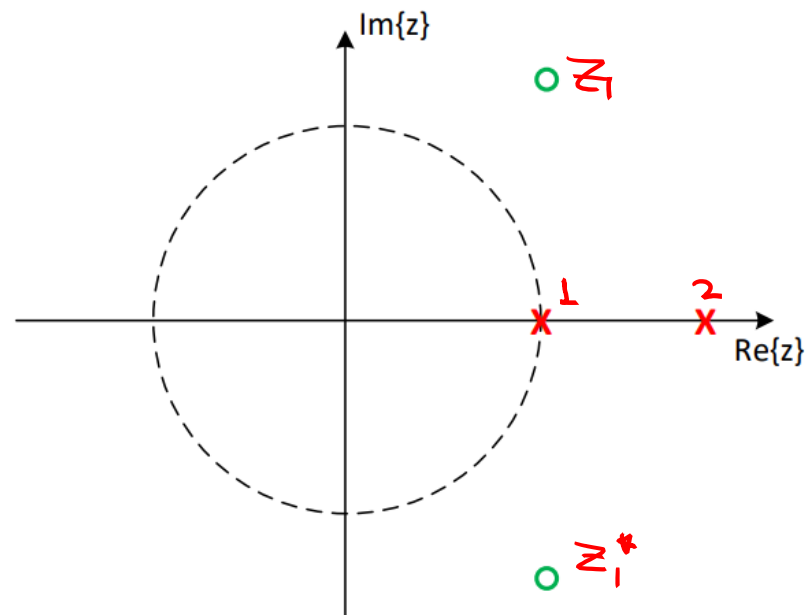
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Είναι 
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{\cancel{z^{-2}}}{\cancel{z^{-2}}} \cdot \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

$$= \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - 1)(z - 2)}, \quad z_1 = 1 + \sqrt{2}j$$

Πόλοι:  $z = 1, z = 2$

Μηδενικά:  $z = 1 \pm j\sqrt{2}$



## • Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1}$$

Είναι  $X(z) = \frac{z(z-3)}{z+1}$

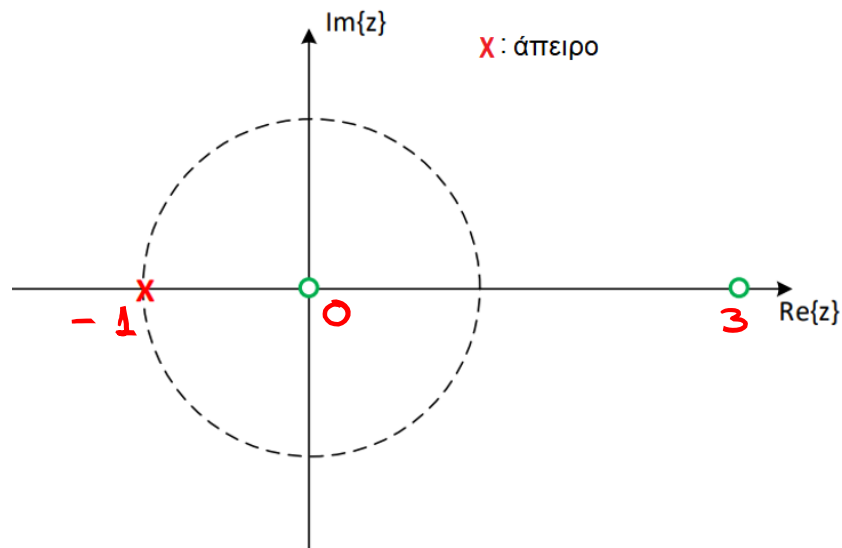
$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-3)}{z+1}$$

Πόλοι:  $z = -1$  + είναι στο  $+\infty$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-3)}{z(1+\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z-3}{1+z^{-1}}$$

Μηδενικά:  $z = 0, z = 3$

$$= \frac{+\infty - 3}{1 + 0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty \quad \checkmark$$



## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Ορισμός:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

- Στα πλαίσια των σημάτων και συστημάτων χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τρεις τρόποι υπολογισμού του αντιστρόφου

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Θα επικεντρωθούμε μόνο στην τελευταία, καθώς σχετίζεται στενά με τα ΓΧΑ συστήματα και την ιδιότητα της συνέλιξης

- Για κάθε μέθοδο μπορείτε να δείτε τις σημειώσεις σας



## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z των σημάτων που είδαμε είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

- Μπορούμε να διασπάσουμε το παραπάνω κλάσμα ως

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^L \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(L - m)! (-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i}$$

## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι το  $X(z)$  έχει 2<sup>ο</sup> βαθμό αριθμητή και 2<sup>ο</sup> βαθμό παρονομαστή. Άρα πρέπει να διαφύξω τα πολυώνυμα πριν εφαρμόσω Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα!

$$\begin{array}{l|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ - (z^{-2} - 3z^{-1} + 2) & \hline \hline 0 + 5z^{-1} - 1 & 2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad X(z) = 2 + \frac{\overbrace{-1 + 5z^{-1}}^{G(z)}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

Οότε

$$X(z) = 2 + G(z) = 2 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{f.e. } A &= G(z) \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) (1 - z^{-1})} \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} \\ &= \frac{-1+5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1+10}{1-2} = \frac{9}{-1} = -9 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} B &= G(z) (1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) (1 - z^{-1})} (1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} \\ &= \frac{-1+5z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{-1+5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

Άρα

$$X(z) = 2 - 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + 8 \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

- $|z| > \frac{1}{2}$
- $|z| < 1/2$

$R_1$

- $|z| > 1$
- $|z| < 1$

$R_2$

Επιλέγω αυτά έτσι  
ώστε:  $R_1 \cap R_2 \subseteq |z| < \frac{1}{2}$

## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

Αρα τελικά, αφού ξέρουμε ότι

$$-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$$

} Πινακες  
Ζευγών

θα είναι

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n] - 9\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\right) + 8\left(-u[-n-1]\right) \\ &= 2\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8u[-n-1] \end{aligned}$$

## • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

Είναι

$$X(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

†ε

$$A = X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

$$B_2 = X(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$B_1 = \frac{1}{(2-1)! \left(-\frac{1}{2}\right)^{(2-1)}} \left( \frac{d}{dz^{-1}} \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z) \right) \Big|_{z^{-1}=2} = -2 \frac{d}{dz^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2}$$

# • Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

$$= -2 \left( \frac{-(-1)}{(1-z^{-1})^2} \right) \Big|_{z^{-1}=2} = -2 \left( \frac{1}{1} \right) = -2$$

Άρα τελικά

$$X(z) = \frac{4}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \quad |z| > 1$$

$$\begin{aligned} & \bullet |z| > 1 \\ & \bullet |z| < 1 \end{aligned} \quad R_1$$

$$\begin{aligned} & \bullet |z| > \frac{1}{2} \\ & \bullet |z| < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad R_2$$

$$\begin{aligned} & \bullet |z| > \frac{1}{2} \\ & \bullet |z| < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad R_3$$

Επιλέγω αυτά έτσι  
ώστε:  $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \subseteq |z| > 1$

και από πίνακες

$$x[n] = 4u[n] - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2(n+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} u[n+1]. \quad (*)$$

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i}$$

$$\begin{aligned} n a^n u[n] &\stackrel{Z}{\leftrightarrow} \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2} \\ \frac{2z \frac{1}{2} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})^2} &\stackrel{Z}{\leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] \\ &\stackrel{Z}{\leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1) \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} u[n+1] \end{aligned} \quad (*)$$

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

