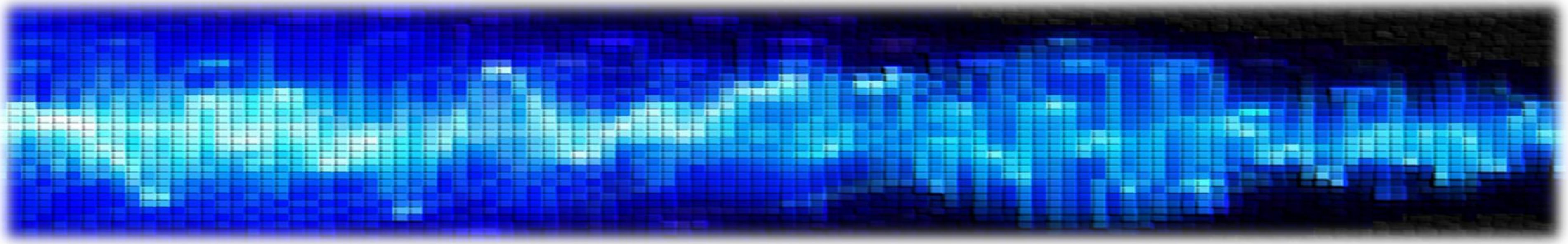
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η

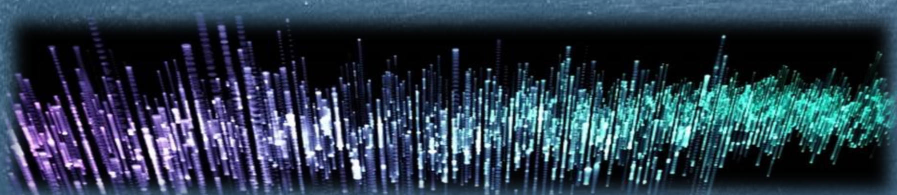


- Μετασχηματισμός Ζ
- Ιδιότητες & Ζεύγη

Τι περιέχει το ΗΥ370?

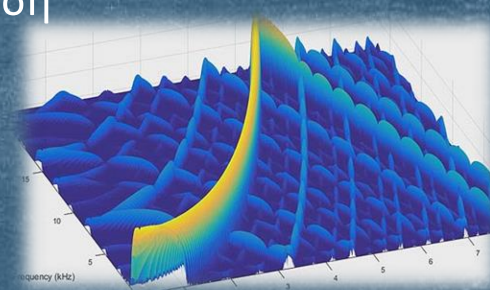
1^{o} Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Ζ
- Συστήματα στο χώρο του Ζ
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Ζεύγη:

Σήμα στο χρόνο	Μετασχηματισμός Z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}, \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\delta[n]$	$1, \forall z$
$\delta[n - n_0], \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert > 0$
$\delta[n - n_0], \quad n_0 < 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert < \infty$

Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Σχέση Μετασχ. Ζ και Μετασχ. Fourier

(α') Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Ζ $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Ζ στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες " των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

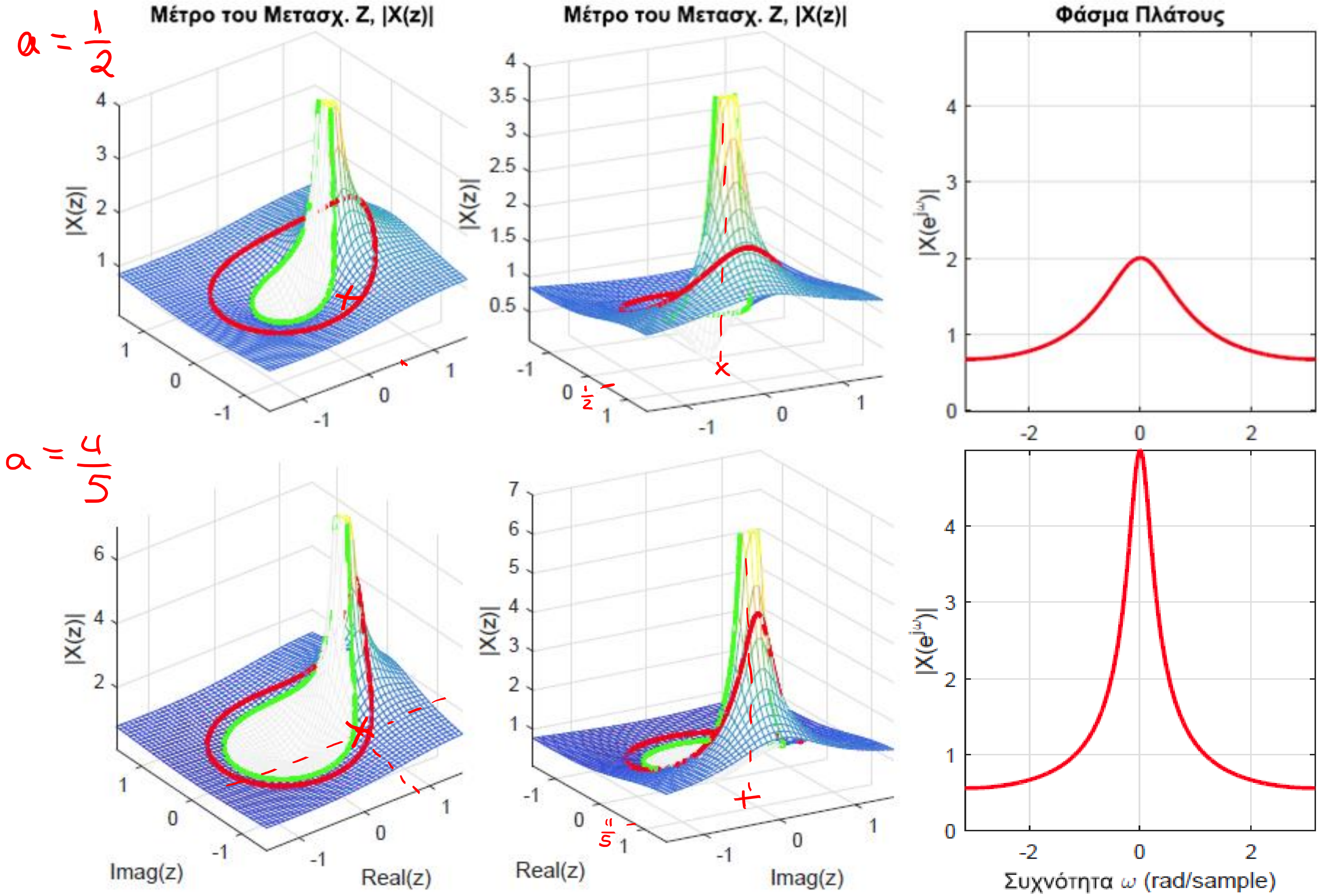
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

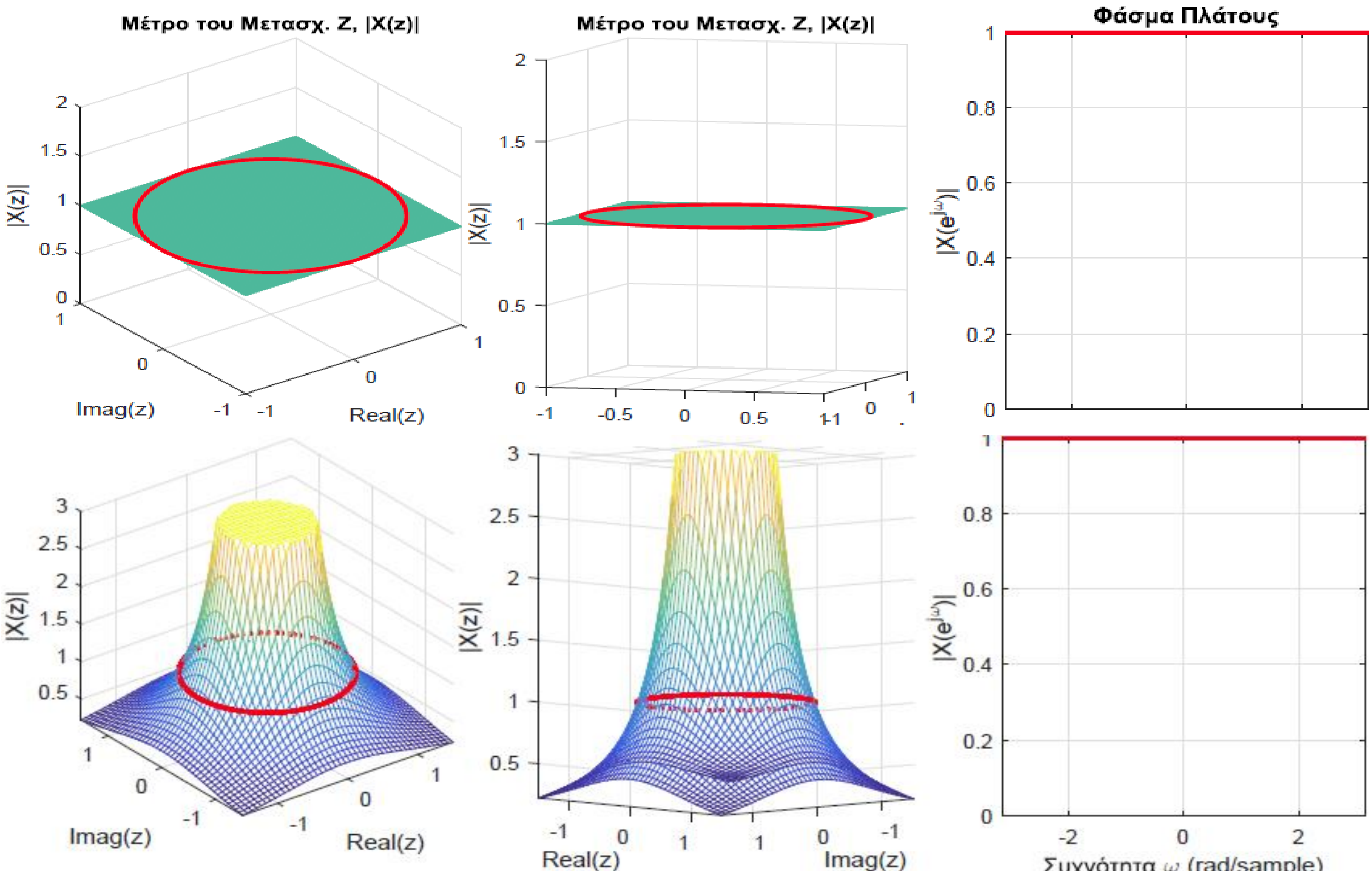
  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

  - Δείτε τι συμβαίνει…

• **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} \quad \Big| = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n}$$

$u[n] = 1,\ n \geq 0$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}},\quad |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow$$

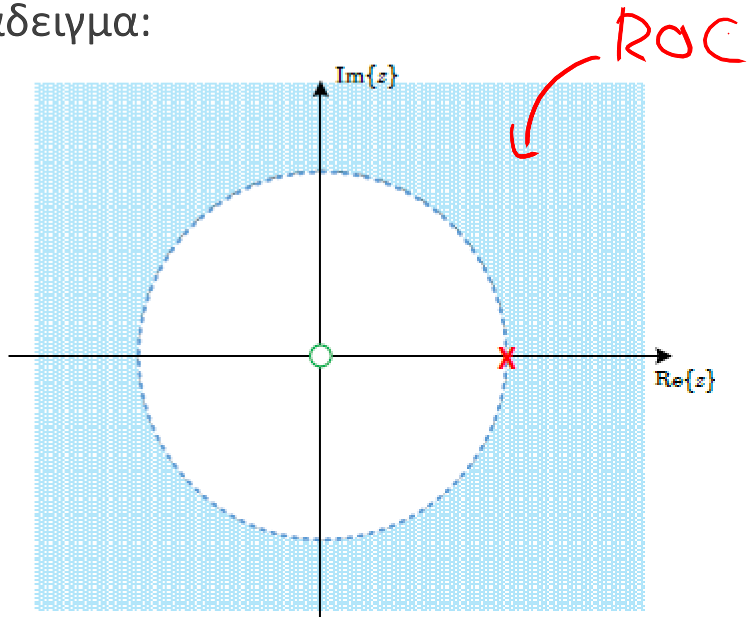
$\Leftrightarrow |z| > 1$: ROC , άρα $u[n] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1 - z^{-1}},\ |z| > 1$

Είναι $X(z) = \dfrac{z}{z - 1}$

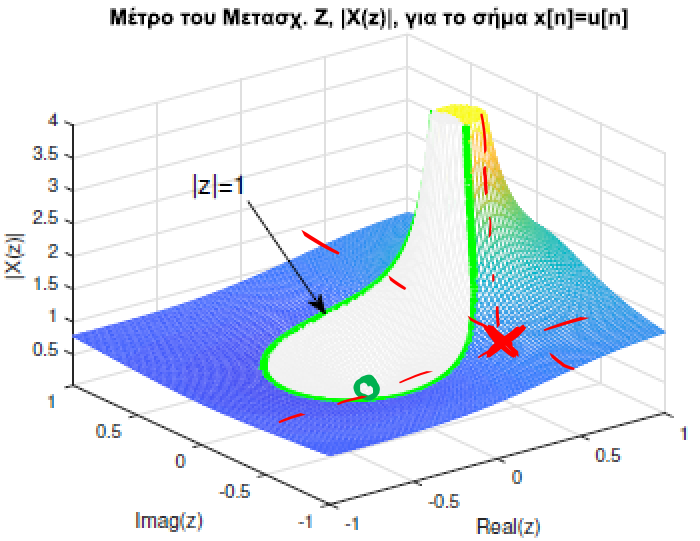
Μηδενικά: $z = 0$, ένα μηδενικό στη θέση $z = 0$

Πόλοι: $z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$, ένας πόλος στη θέση $z = 1$.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

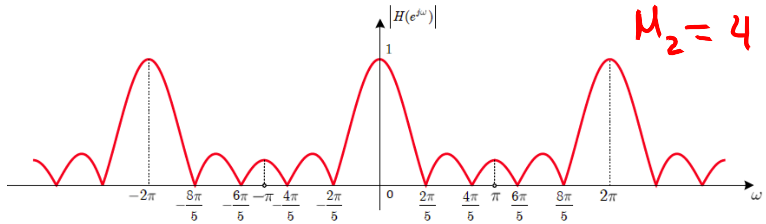


(α′) *Περιοχή σύγκλισης.*



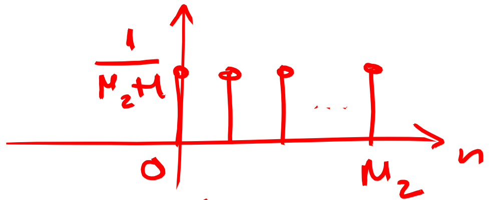
(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = u[n]$.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$M_2 = 4$

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$

$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-z^{-(M_2+1)}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{-(M_2+1)}}{z^{-1}} \cdot \frac{z^{M_2+1}-1}{z-1}$

$= \frac{1}{M_2+1} \frac{z}{z^{(M_2+1)}} \frac{z^{M_2+1}-1}{z-1}, \quad |z| > 0 \leftarrow \underline{\text{ROC}}$

Πόλοι: $z^{(M_2+1)} = 0 \Rightarrow M_2+1$ πόλοι στη θέση $z=0$

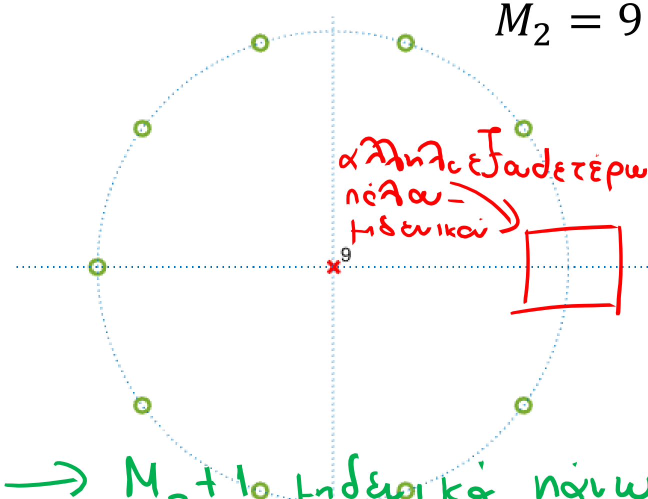
$z-1=0 \Rightarrow z=1$, ένας πόλος στη θέση $z=1$

Μηδενικά: $z=0$, ένα μηδενικό στη θέση $z=0$

$z^{M_2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow z^{M_2+1} = 1$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

$M_2 = 9$



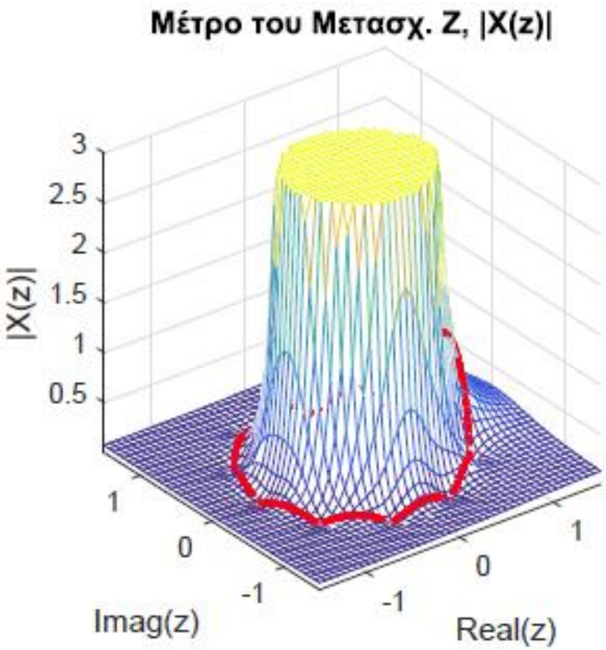
$$z^{M_2+1} = 1 = 1\cdot e^{j2\pi k}, \quad k=0,1,\ldots,M_2.$$

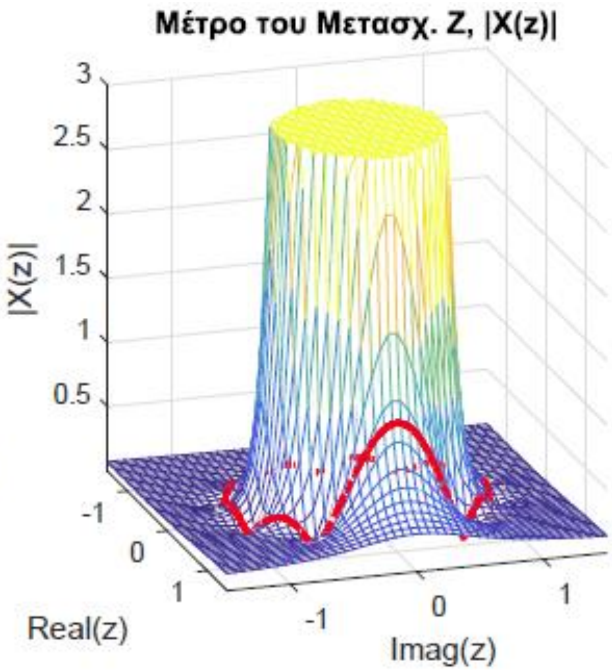
$$(|z|\cdot e^{j\theta_k})^{M_2+1} = 1\cdot e^{j2\pi k}, \quad k=0,\ldots,M_2.$$

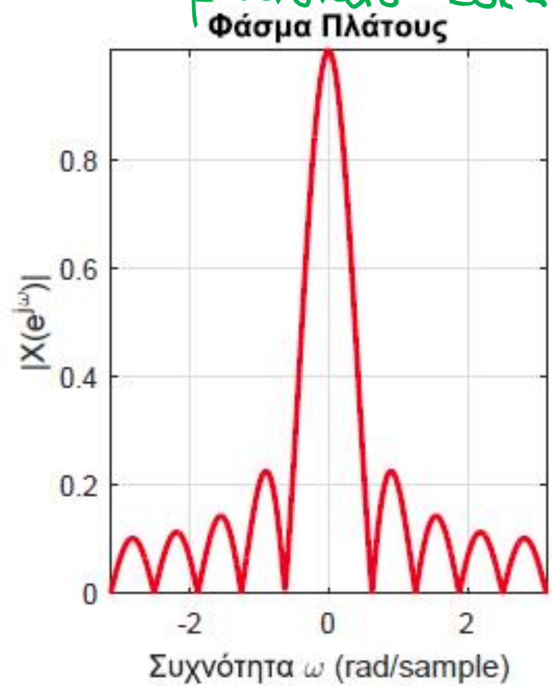
$$|z|^{M_2+1}\cdot e^{j\theta_k(M_2+1)} = 1\cdot e^{j2\pi k}, \quad —||—$$

Άρα

$$|z|=1, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{M_2+1}, \quad k=0,\ldots,M_2. \longrightarrow$$ M_2+1 μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο







• **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Ζ	Πεδίο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$	$\mathbf{X(z)}$	$\mathbf{R_x}$
	$\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Ζ	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Z του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

$R_w \supseteq R_x \cap R_y$!

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > 1/2$$

Είναι

$$W(z) = X(z) + Y(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\cancel{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\left.\begin{aligned} &|z| > \tfrac{1}{2} \cap |z| > \tfrac{1}{2} \rightarrow |z| > \tfrac{1}{2} \\ &|z| > \tfrac{1}{3} \text{ ή } |z| < \tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow |z| > \frac{1}{3} : ROC_{x+y}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Ζ του.

Ξέρω ότι $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$, R_x.

Έχουμε

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]} = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = x[n]$$

Άρα

$$x[n] = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] \xleftrightarrow{Z} 9 z^2 Z\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} =$$

$$= 9 z^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{9 z^2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \Re$ με ρητό μετασχ. Ζ που έχει
    - Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
    - Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

  Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

Αφού $x[n] \in \mathbb{R}$, τότε $x[n] = x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = X^*(z^*)$, άρα κάθε πόλος/μηδενικό του $X(z)$ θα είναι πόλος/μηδενικό και του $X^*(z^*)$! Αν z_0 είναι πόλος/μηδενικό του $X(z)$ τότε <u>υποχρεωτικά</u> ο z_0^* είναι επίσης πόλος/μηδενικό του $X(z)$!

Οπότε μηδενικά: $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ <u>και</u> $z_1^* = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

πόλοι: $z_2 = e^{-j\frac{\pi}{8}}$ <u>και</u> $z_2^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$

Άρα

$$X(z) = A\frac{\left(z-\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(z-e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)\left(z-e^{j\pi/8}\right)}, \quad A \text{ σταθερά}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$x[n] * y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z), \quad R \supseteq R_x \cap R_y$$

- $2^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z|>2$
- $\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{4}$

γνωστά ζεύγη Μ. Ζ. (slide 3)

Άρα $X(z)Y(z) = \dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \dfrac{A}{1-2z^{-1}} + \dfrac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$

Είναι

$$A = \frac{1}{\cancel{(1-2z^{-1})}(1+\frac{1}{4}z^{-1})} \cdot \cancel{(1-2z^{-1})}\Bigg|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}$$

$$B = \frac{1}{9} = \frac{1}{(1-2z^{-1})\cancel{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}} \cancel{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}\Bigg|_{z^{-1}=-4}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

Άρα

$$W(z) = X(z)Y(z) = \frac{\frac{8}{9}}{1-2z^{-1}} + \frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad R_w = \{|z|>2\}$$

$$|z|>2 \qquad\qquad |z|>\frac{1}{4}$$

Από γνωστά ζεύγη έχουμε: (slide 3)

$$w[n] = \frac{8}{9}(2)^n u[n] + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Επιβεβαιώστε με συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου ότι τα αποτελέσματα είναι όντως τα παραπάνω.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ