

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

- Μετασχηματισμός Z

Τι περιέχει το ΗΥ370?



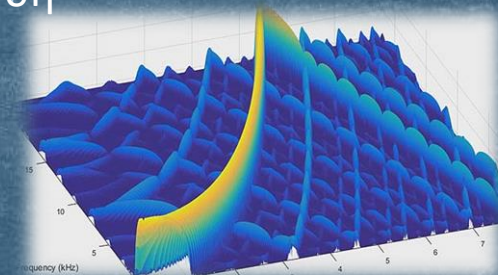
~~1^ο~~ Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



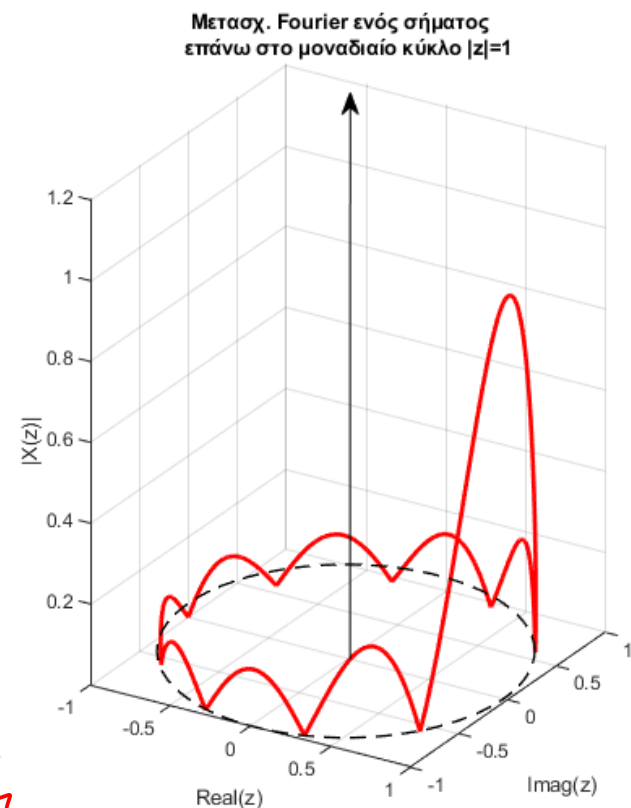
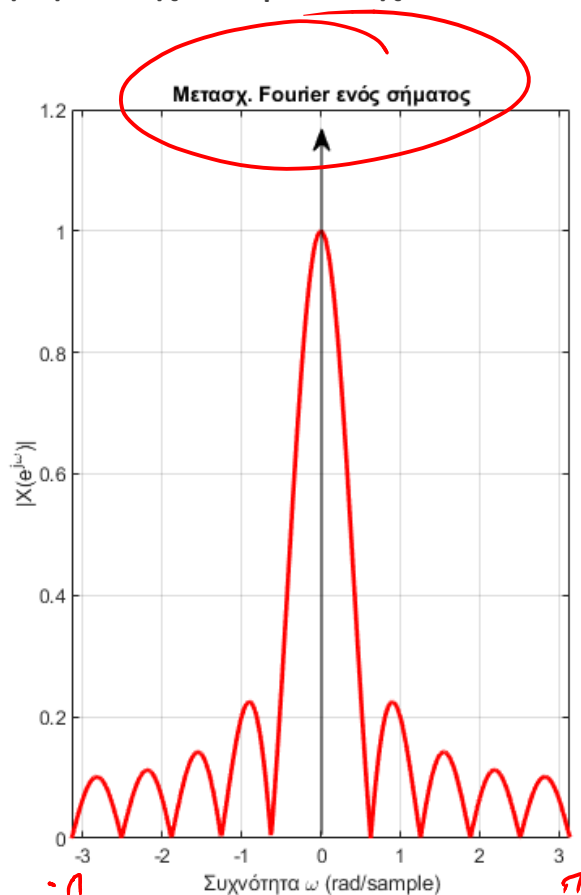
~~2^ο~~ Κομμάτι

- ▶ **Μετασχηματισμός Z**
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας
- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:
 1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!
- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

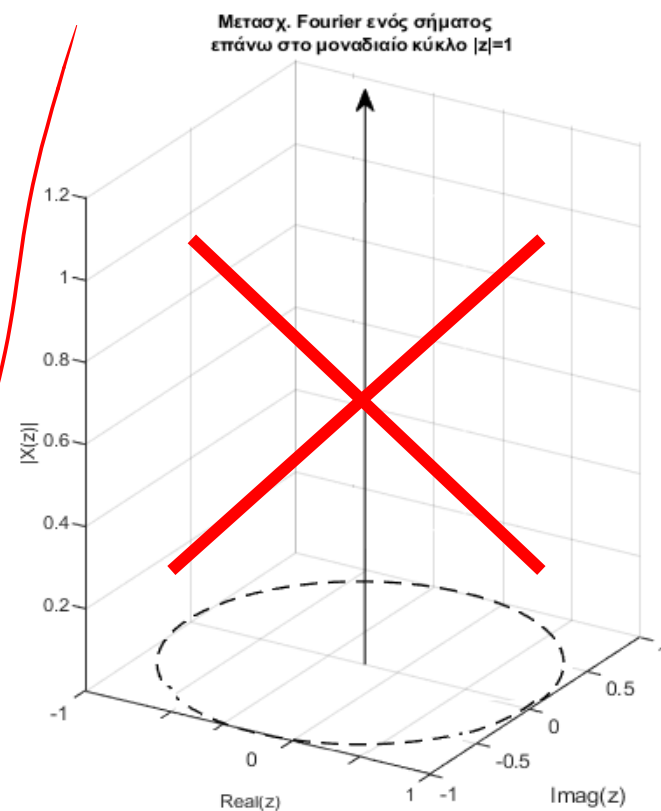
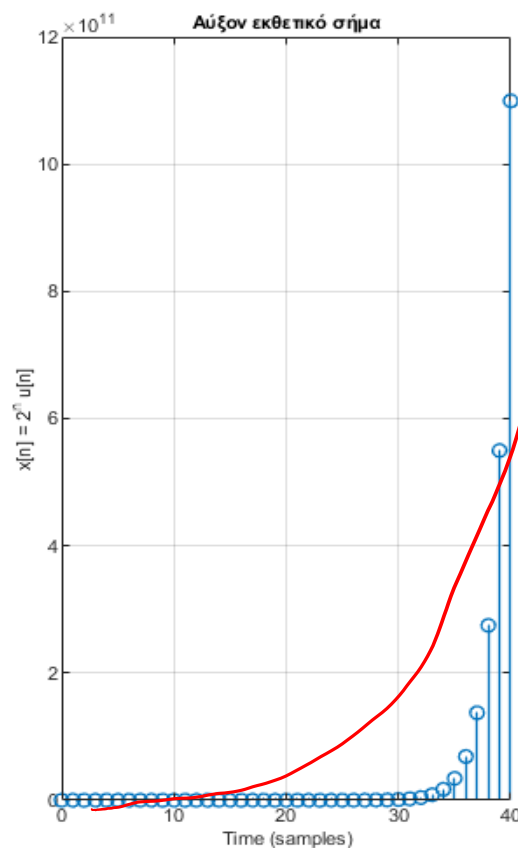
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους $e^{-j\omega n}$
- $$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
 - Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
 - Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
 - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?



- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό **δεν έχει** μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?



- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\underline{(re^{j\omega})^{-n}}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

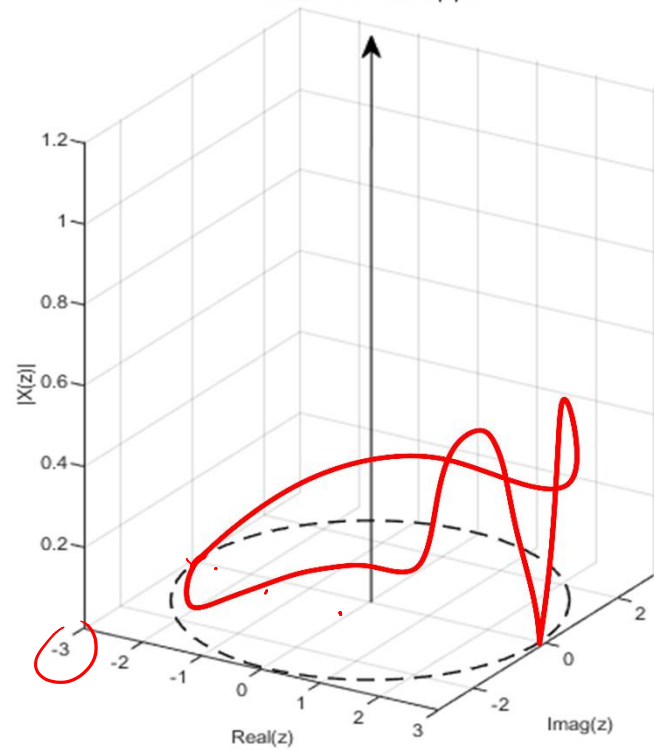
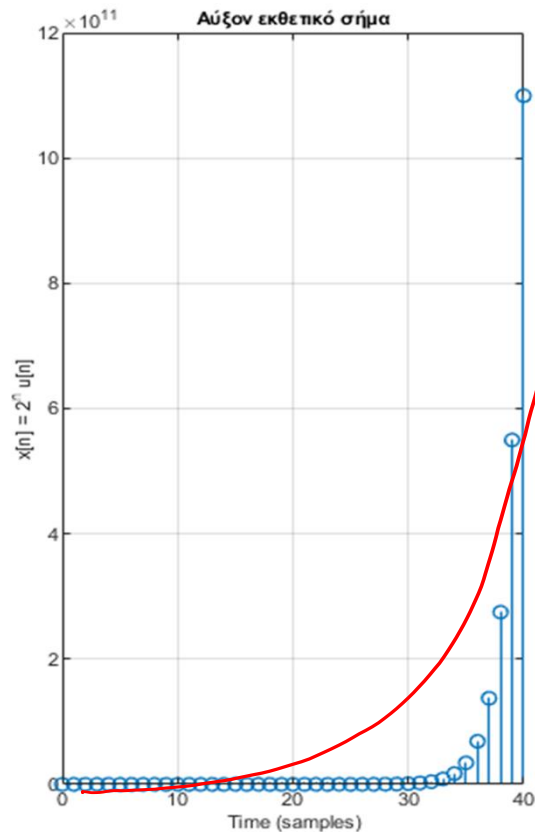
- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \underbrace{(re^{j\omega})^{-n}}_z$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r

$2^n u[n] \cdot r^{-n} e^{-j\omega n} =$
 $= \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n}$
 $r > 2$

"Μετασχ. Fourier" ενός σήματος
 επάνω στον κύκλο $|z|=3$



- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathfrak{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προφανώς όταν

$$|X(re^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| < +\infty \quad \leftarrow$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση

- Στα πλαίσια του μαθήματος, ~~δε θα~~ μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2^n}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2}{r} \right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2 \quad \text{ROC}$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

$$|z| = r$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο ~~γέρας~~ αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

- Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

ROC

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

$$\sum_n 2^n u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n =$$

$$|2z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|2|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 2$$

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \quad \Rightarrow$$

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

$$\Rightarrow Z \{ a^n u[n] \} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, (|z| > |a|) = \frac{z}{z - a}$$

$$X(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

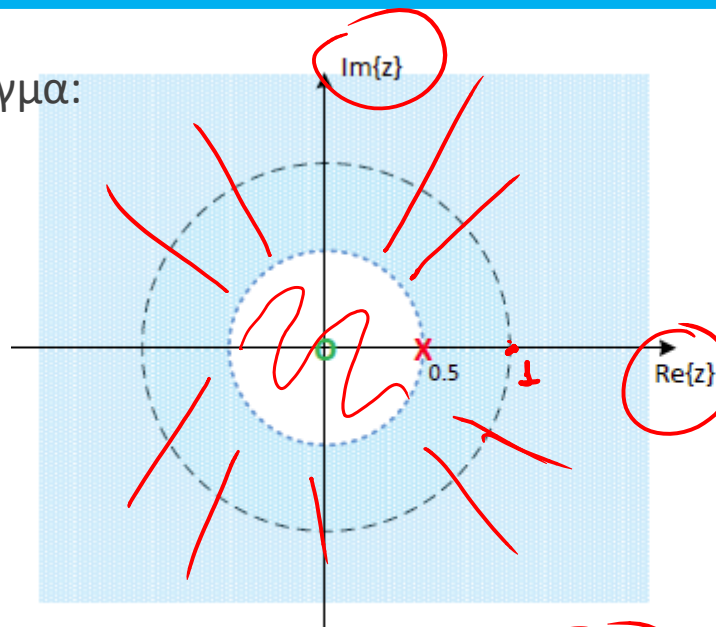
$$Q(z) = z$$

$$P(z) = z - a$$

┆ μηδενικό στο $z_0 = 0$

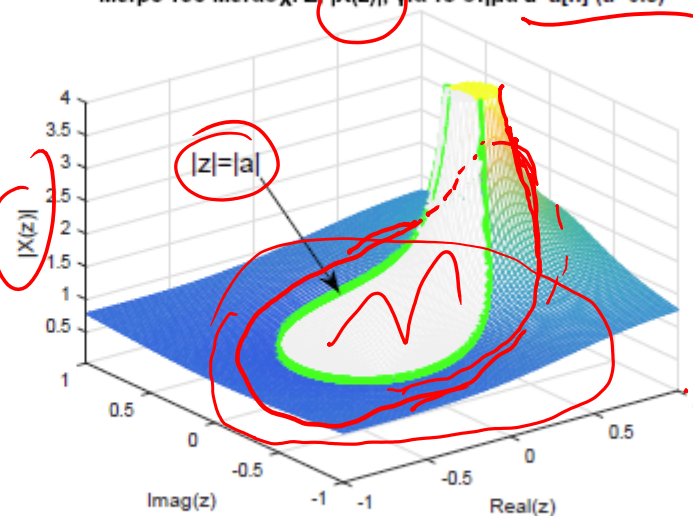
┆ πόλο στο $z_1 = a$

• Παράδειγμα:



(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$

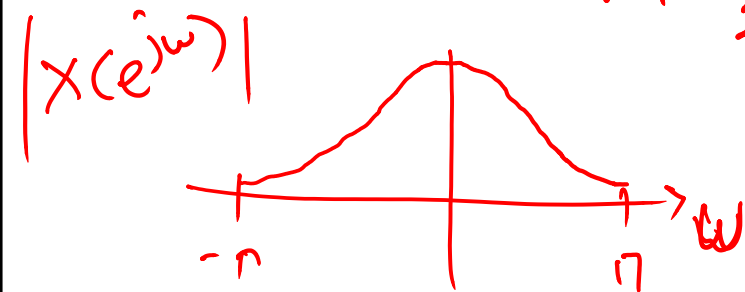
Μέτρο του Μετασχ. Z $|X(z)|$, για το σήμα $a^n u[n]$ ($a=0.5$)



(β) Μέτρο μετασχ. Z.

$Z_0 = 0$ μηδ.
 $Z_1 = a = \frac{1}{2}$ πόλος

$$|z| > |a| \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\}$$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n - 1]$

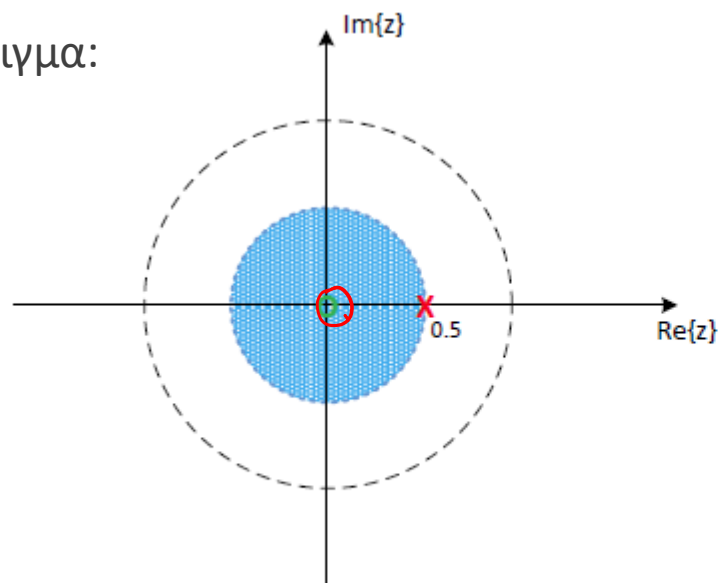
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_n x[n] z^{-n} = - \sum_n a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n + 1 = - \frac{1}{1 - a^{-1} z} + 1 = \frac{-1 + 1 - a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \end{aligned}$$

$$|a^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|a|} < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

$$= \frac{-a^{-1} z}{-a^{-1} z (az^{-1} + 1)} \Rightarrow$$

- Παράδειγμα:

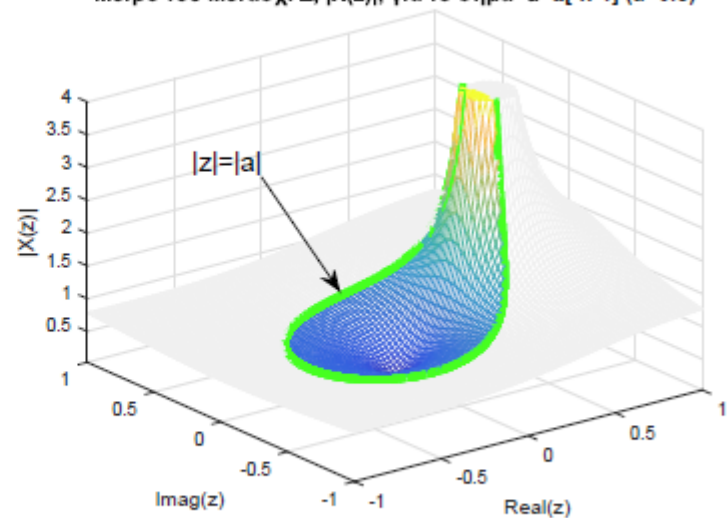


(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < a$$

$$= \frac{z}{z - a}$$

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $-a^n u[-n-1]$ ($a=0.5$)



(β) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

- Παράδειγμα:

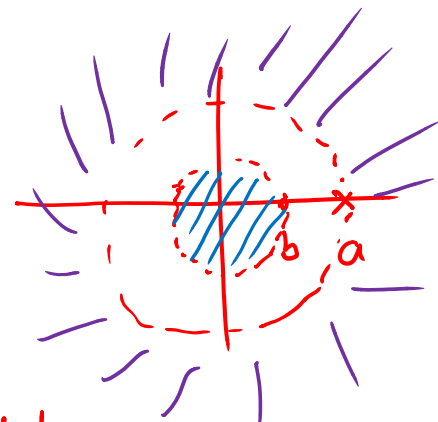
○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$x_1[n] = a^n u[n] \rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

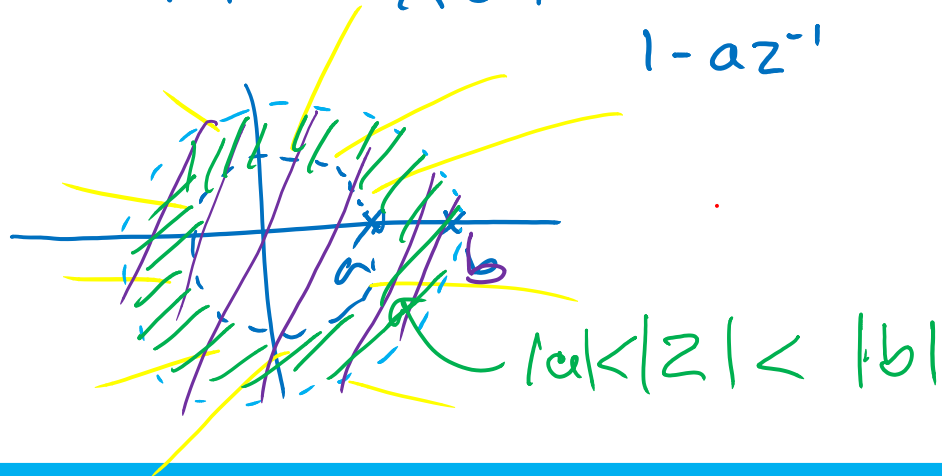
$$x_2[n] = -b^n u[-n-1] \rightarrow X_2(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| < |b|$$

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$



↑ $|a| \geq |b|$
 ΔΕΝ υπάρχει
 ο $X(z)$

$$\text{Αν } |b| > |a| \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} =$$

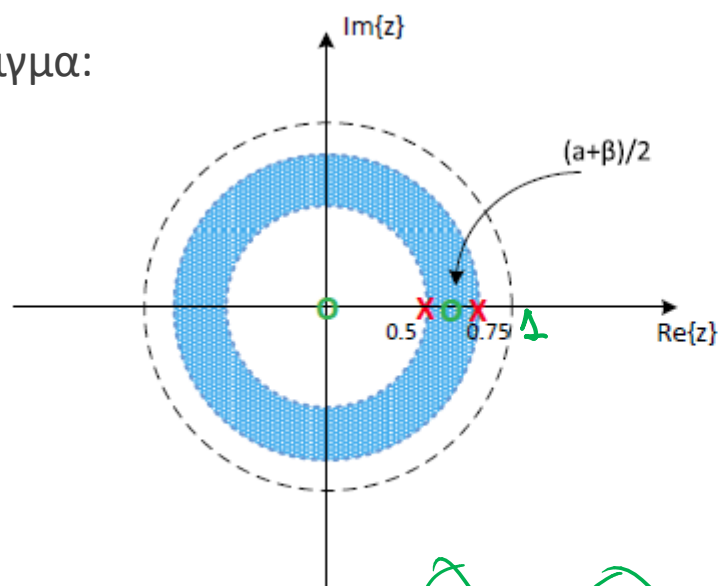


$$|a| < |z| < |b|$$

$$|a| < |z| < |b|$$

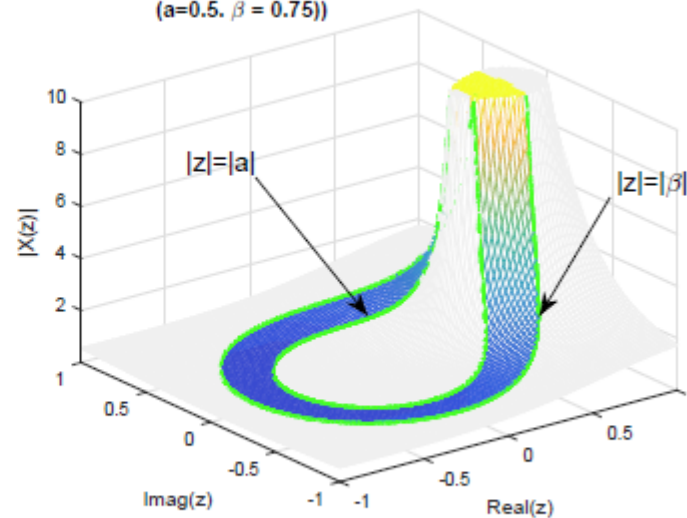
$$= \frac{z^{-1} (2z - (a+b))}{z^{-2} (z-a)(z-b)} = \frac{z (2z - (a+b))}{(z-a)(z-b)}$$

- Παράδειγμα:



(α) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $a^n u[n] - \beta^n u[-n-1]$
($a=0.5, \beta = 0.75$)



(β) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

- Παράδειγμα:

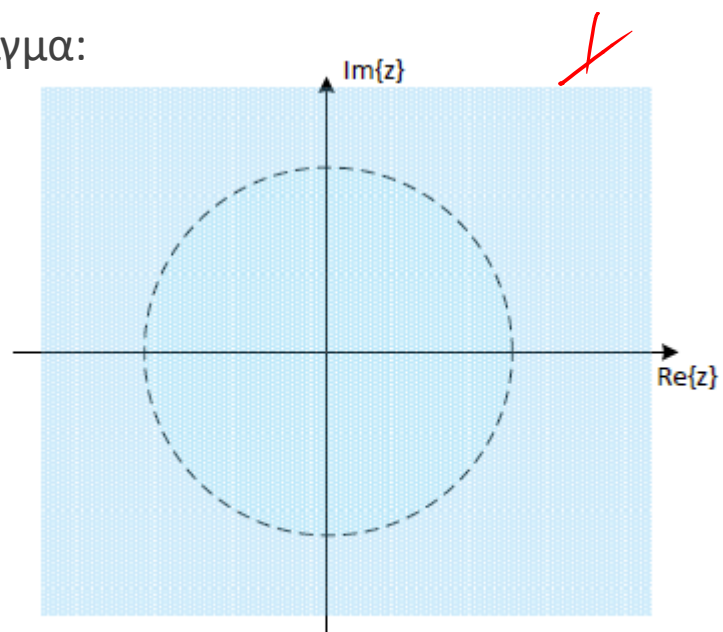
- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n \delta[n] z^{-n} = 1 \quad \forall z$$

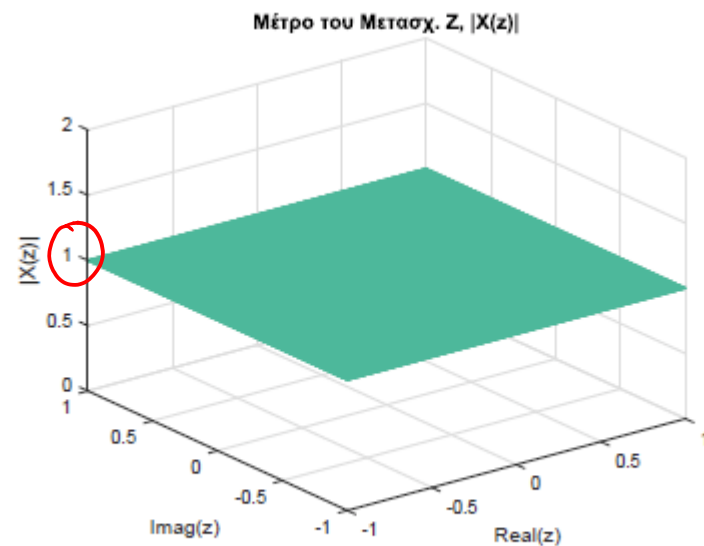
Δεν έχει πόλους κ' μηδ.

$$\text{Αρα } \mathcal{R}_oC \equiv \mathcal{C}$$

- Παράδειγμα:



(α') Πεδίο σύγκλισης.



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n \delta[n - n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$$

a) $n_0 > 0$ $X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \infty$$

b) $n_0 < 0$ $X(z) = z^{n_0}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} X(z) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

- $\delta[n - 2]$

$$X(z) = \sum_n \delta[n-2] z^{-n} = z^{-2} = \frac{1}{z^2}$$

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = \infty$ Άρα δύο πόλους στο μηδέν

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} = 0$ Άρα δύο μηδ στο ∞

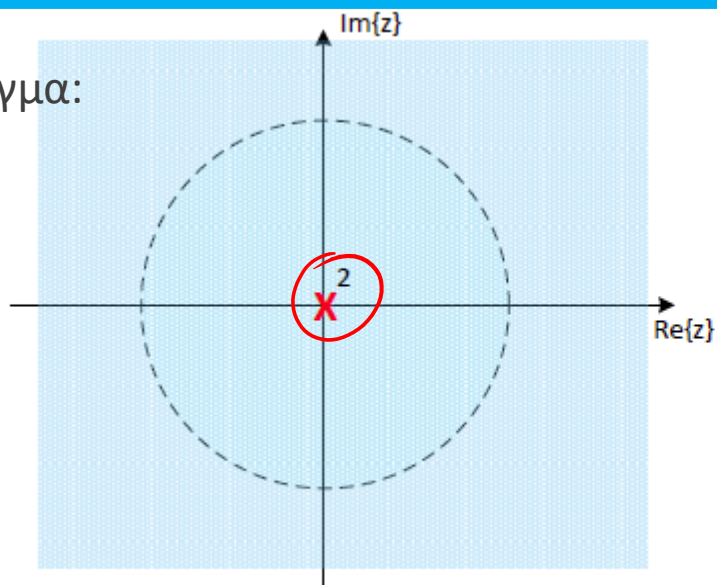
Roc: $|z| > 0$

- $\delta[n+2]$: $X(z) = \sum_n \delta[n+2] z^{-n} = z^2$

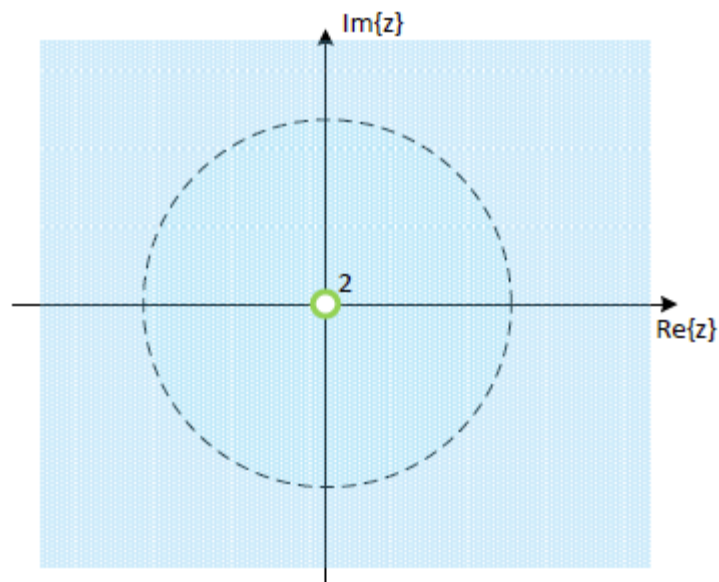
Δύο μηδ. στο μηδέν
και Δύο πόλους στο άπειρο

Roc: $|z| < \infty$

- Παράδειγμα:

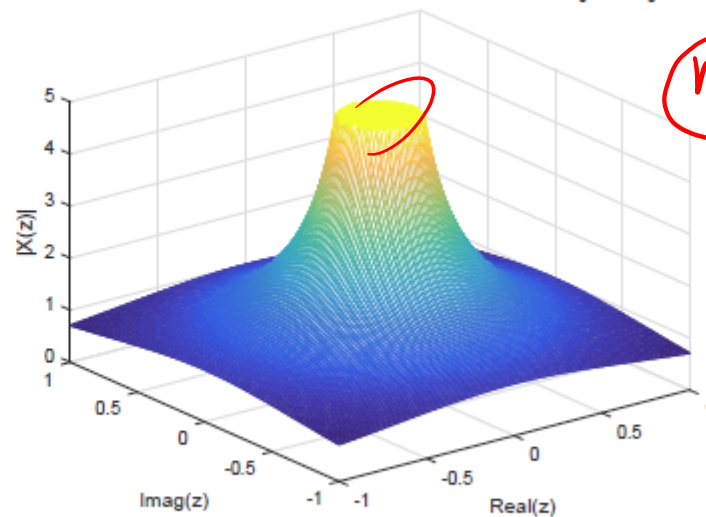


(α) Πεδίο σύγκλισης.



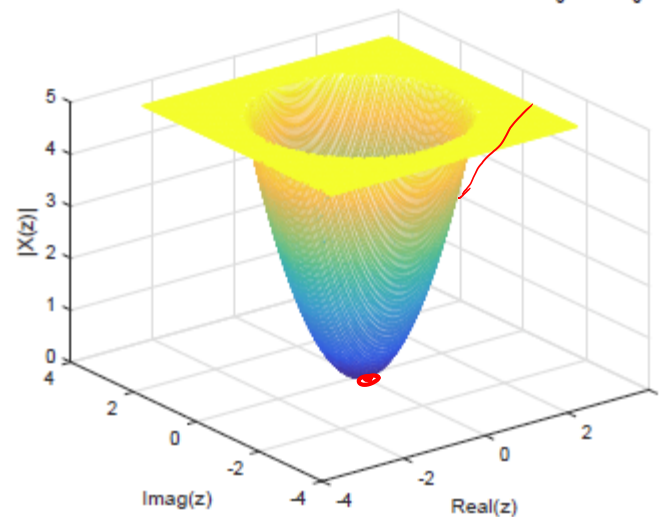
(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $x[n] = \delta[n-n_0]$, με $n_0 = 2$



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = 2$.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, του σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$.

Συνεχίζεται... 😊

