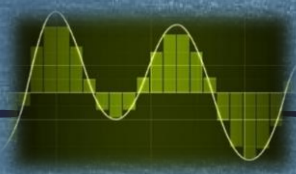
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

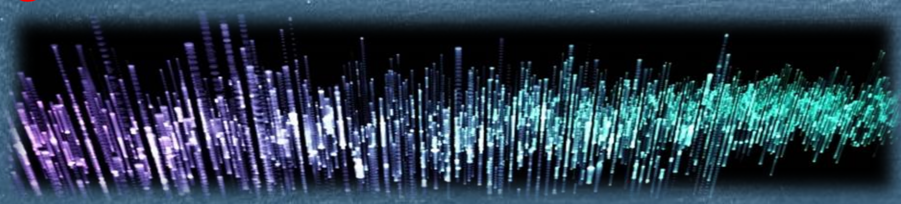
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

Τι περιέχει το HY370?



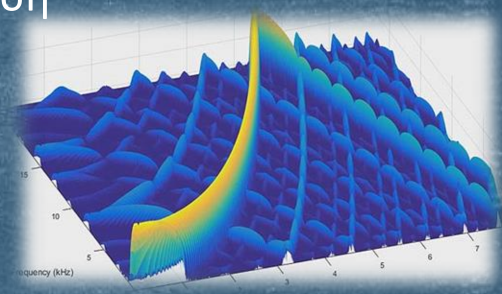
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\Big\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

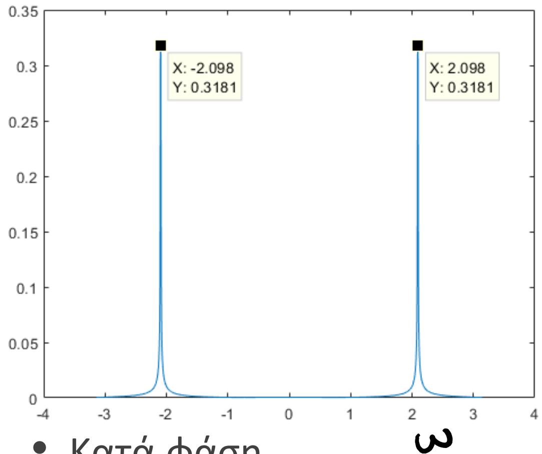
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

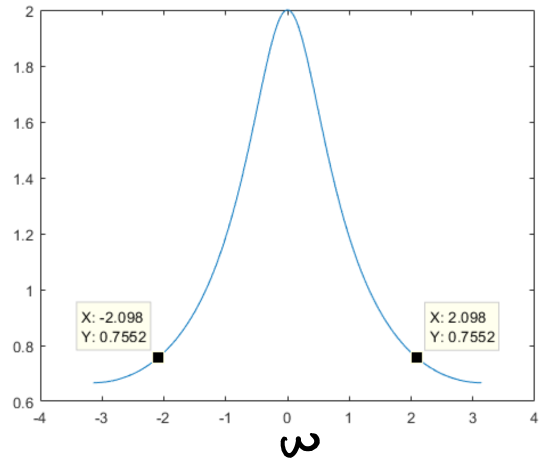
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος



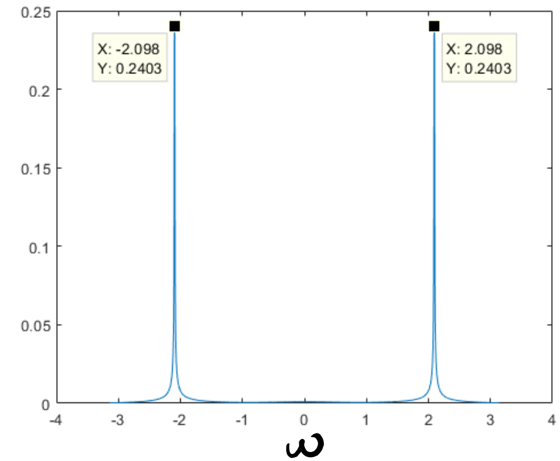
•

Σύστημα



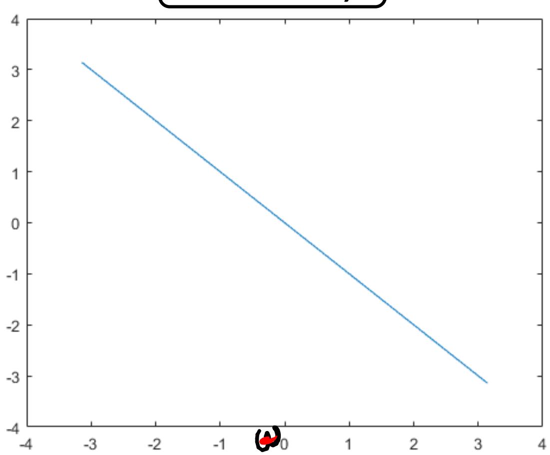
=

Έξοδος



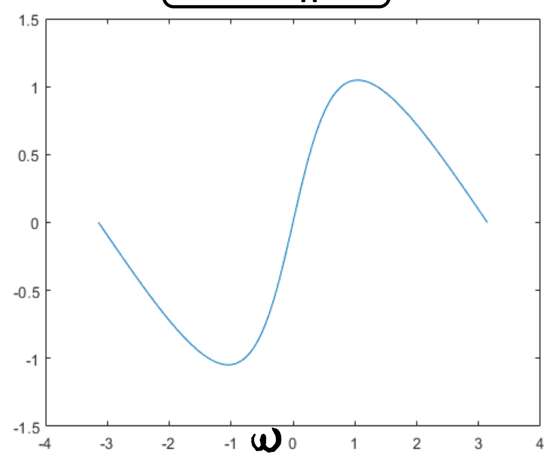
    - Κατά φάση

Είσοδος



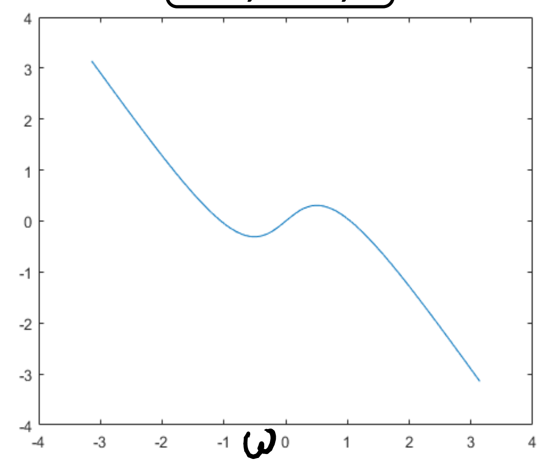
+

Σύστημα



=

Έξοδος



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

  - Η σχέση

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Πώς? Λύνοντας ως προς $H\left(e^{j\omega}\right)$, δηλ.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ Βρείτε την κρουστική απόκριση.

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = F\{y[n]\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

εξ. διαφορών: $\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

$x[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

$$\xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega 1}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j\omega 1}X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega})\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

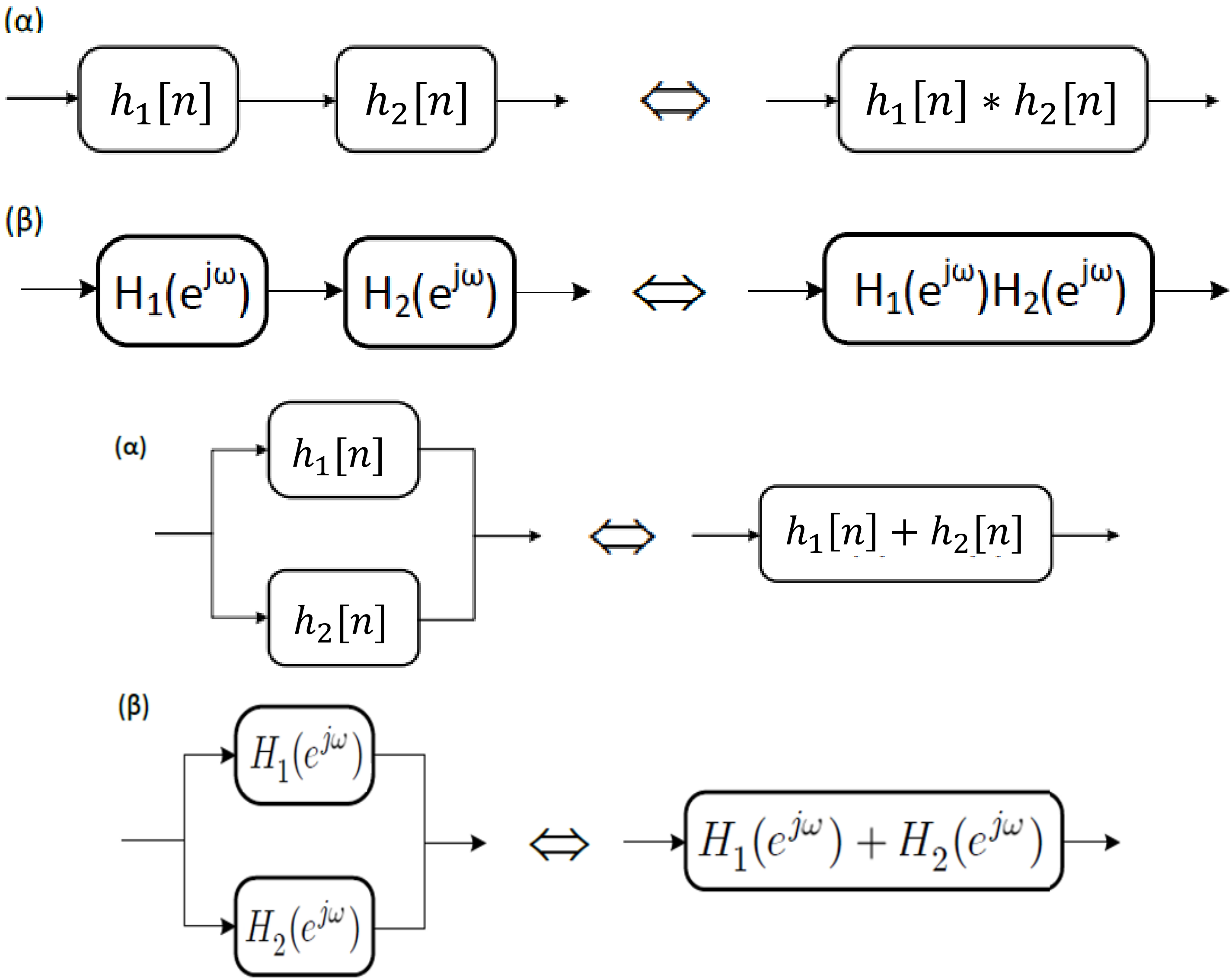
$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

S_0: $h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n] \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow h_0[0] = 1 \\ \text{Χαρ. πολ.}: \lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ h_0[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right\} \Rightarrow c=1 \Rightarrow h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4}h_0[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**

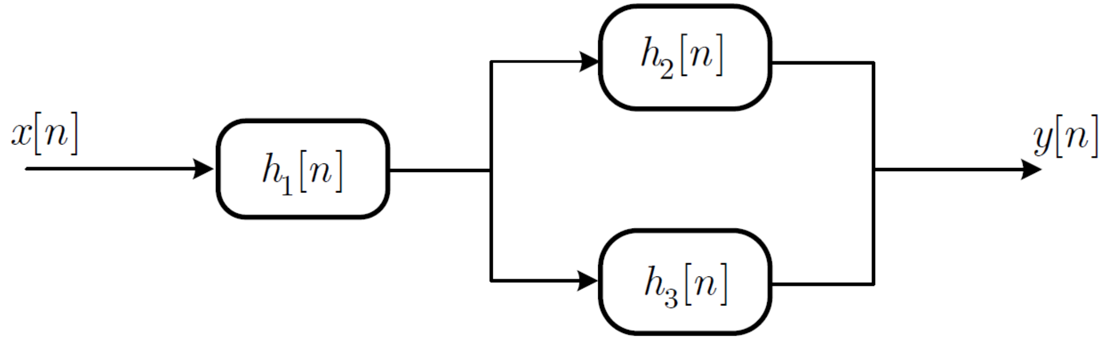


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = \delta[n-2],$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

$$x[n] * \left[\underbrace{h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])} \right] = y[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$$

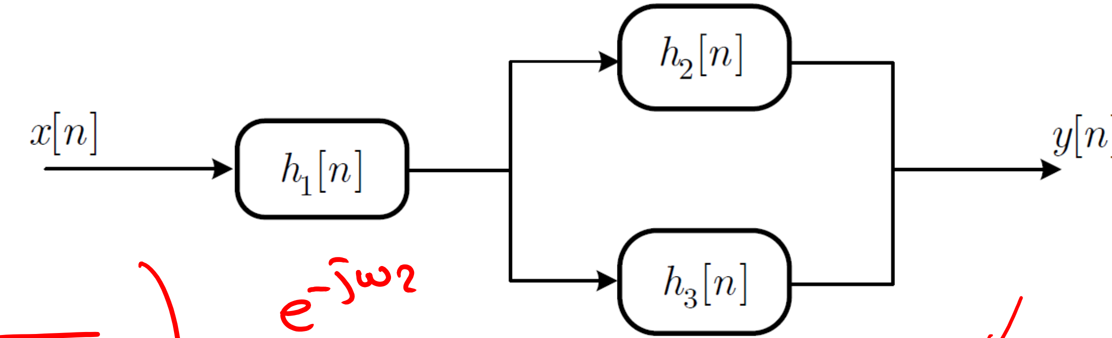
$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}) \right]$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 2}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



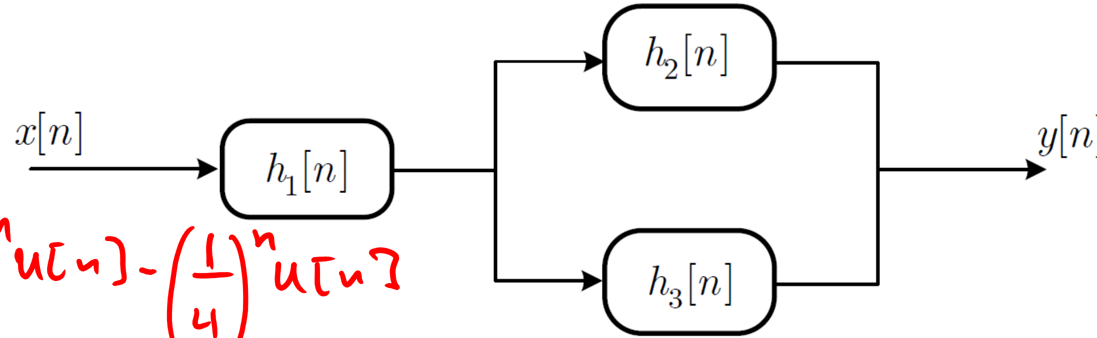
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j\omega 2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = \dots$$

$$A = \left.\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{2}{4}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$B = \left.\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1-2} = -1$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j2\omega}\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \Rightarrow$$

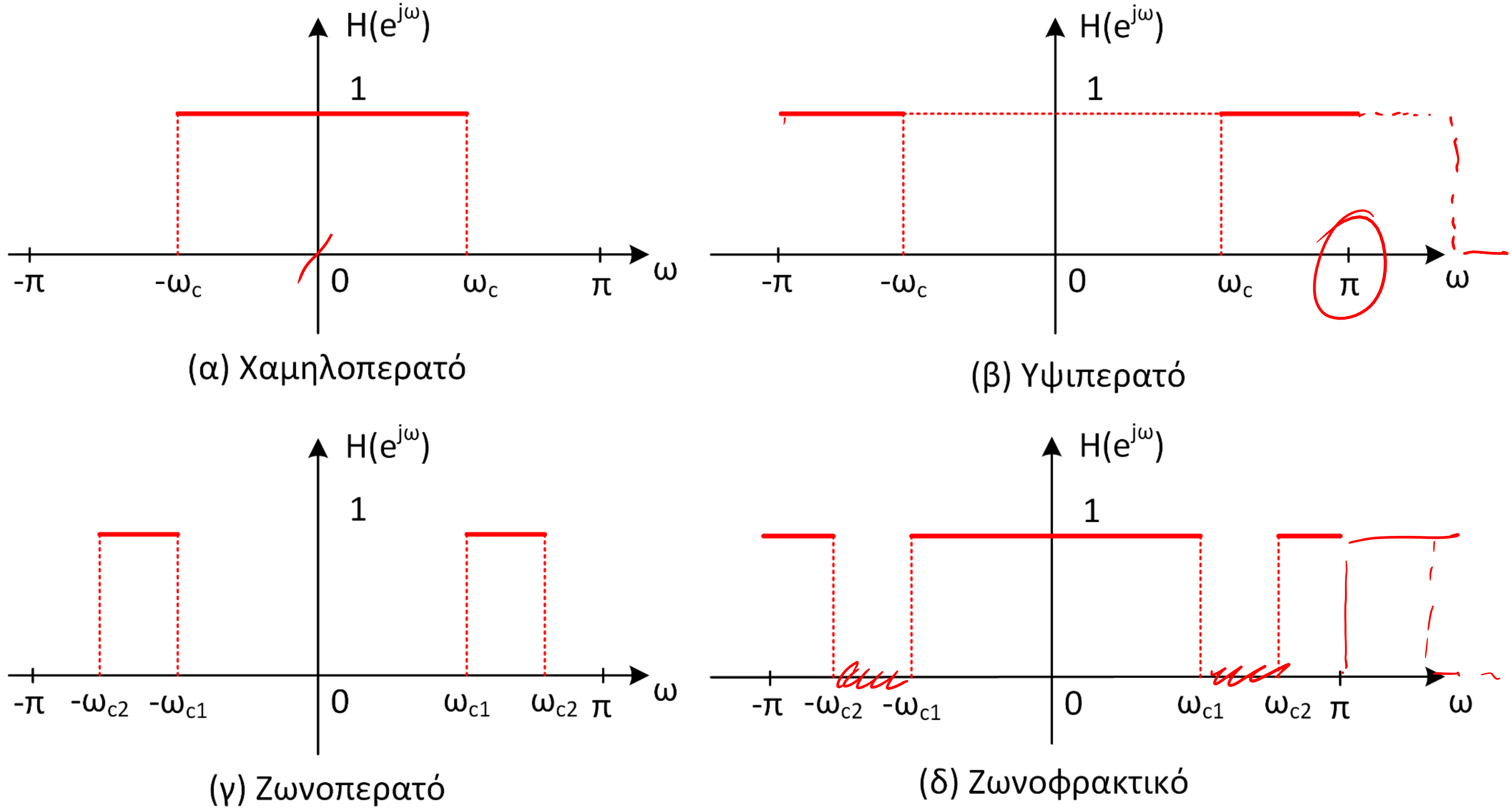
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) =$$

$$X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\overset{F^{-1}}{\Rightarrow} y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3]$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

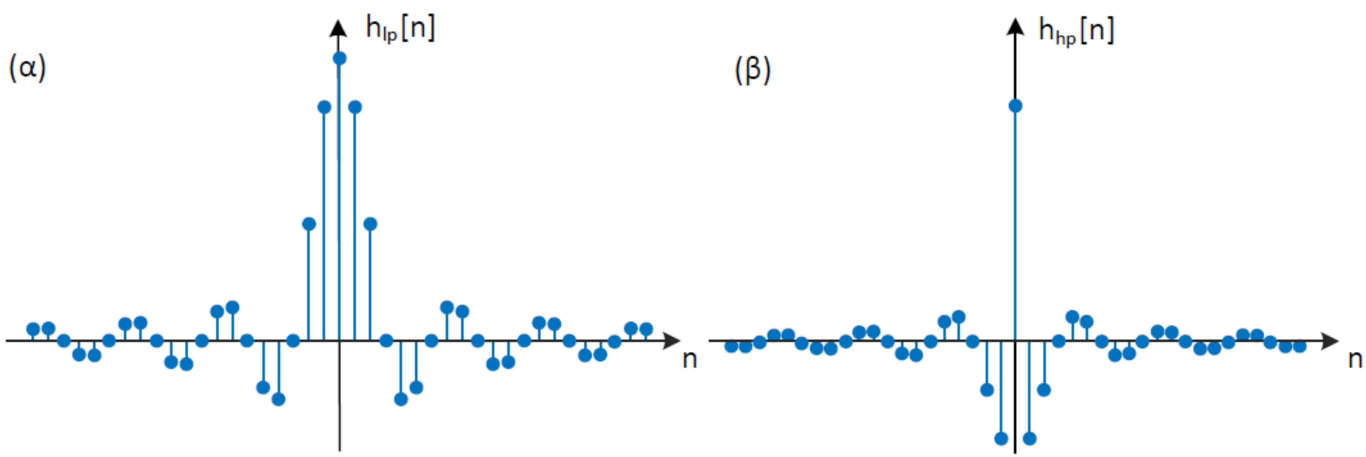
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \leftrightarrow \quad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

  - Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

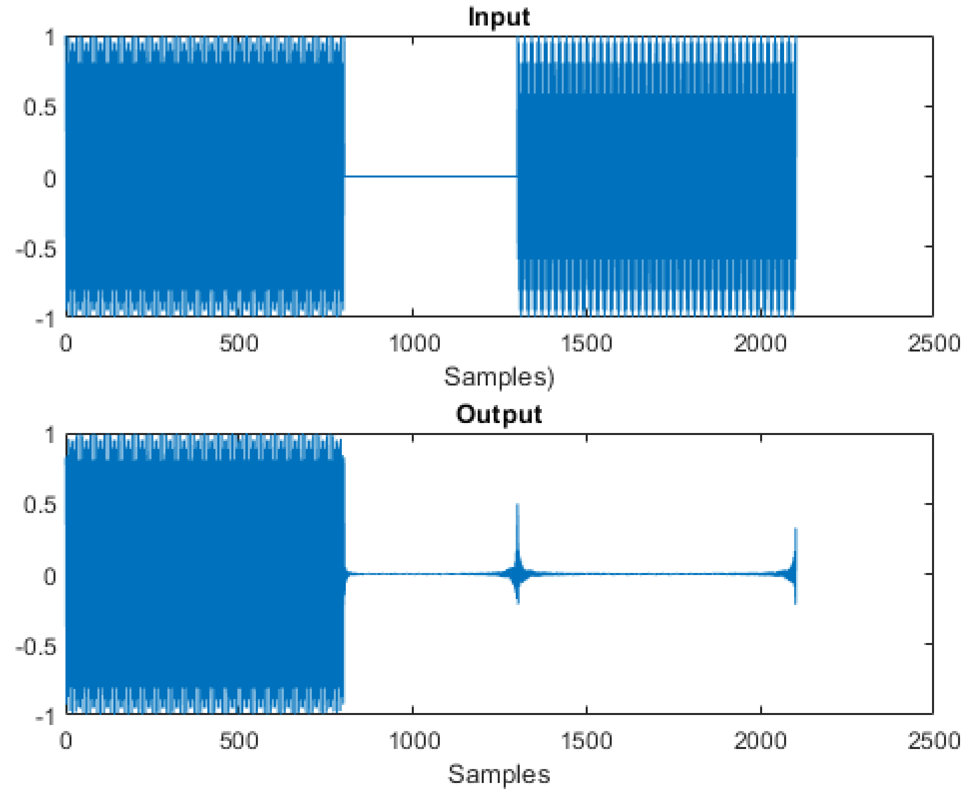
  - Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

```
% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples)'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');
```



$\delta[n] \longleftrightarrow 1$

$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

$x_1[n] \to y_1[n]$ $\quad x_2[n] \to y_2[n]$

○ Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{4\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)\pi}$$

$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$, $\omega_c \to \frac{\pi}{2}$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$h[n] = 4\cdot h_{lp}[n-1] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4\cdot e^{-j\omega}, & |\omega|\le\omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

αφού $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $y_2[n] = 0$

① $Y_1(e^{j\omega}) = 4\cdot e^{-j\omega}\left(2\pi\,\delta(\omega-\frac{\pi}{4}) + 2\pi\,\delta(\omega+\frac{\pi}{4})\right) = 8\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-\frac{\pi}{4}) +$

$+ 8\pi e^{j\pi/4}\cdot\delta(\omega+\frac{\pi}{4}) \xrightarrow{F^{-1}} 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)$

② $y_1[n] = 2\cdot|H(e^{j\pi/4})|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \varphi_H(e^{j\pi/4})\right) = 2\cdot 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right) =$

$\boxed{\cos(\frac{\pi}{4}n) \xleftrightarrow{F} \pi\,\delta(\omega-\frac{\pi}{4}) + \pi\,\delta(\omega+\frac{\pi}{4})}$ $= 8\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ