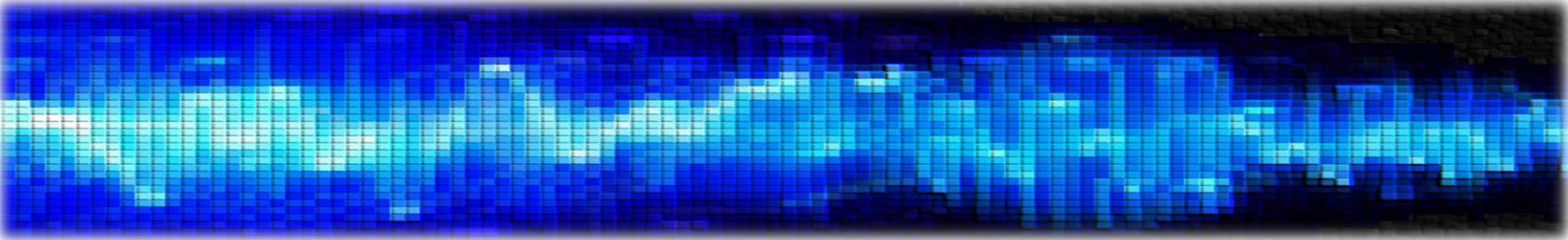


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4^Η

- 
- Συστήματα διακριτού χρόνου
 - Εξισώσεις διαφορών

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- **Zero-input response**: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- **Zero-state response**: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- **Zero-input response**: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ($a_N + a_{N-1}\gamma + \dots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N$)

- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- **Zero-state response**: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)

- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων

- Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω **κρουστικής απόκρισης** $h[n]$

- $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

- Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα

- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ($a_N + a_{N-1}\gamma + \dots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N$)

- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^M b_l h_o[n-l]$$

- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί...

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
- Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Άρα

$$y_{zs}[n] = T\{x[n]\}$$

$$= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\}$$

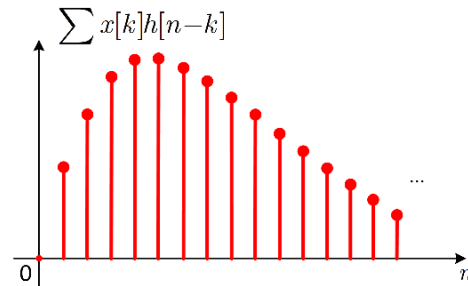
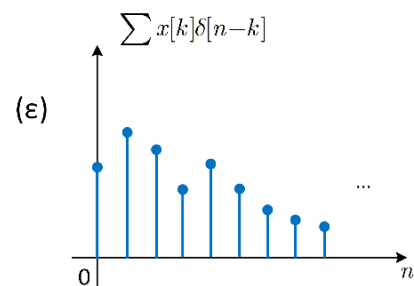
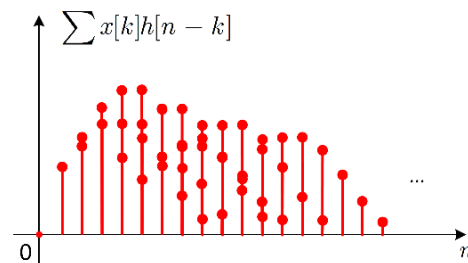
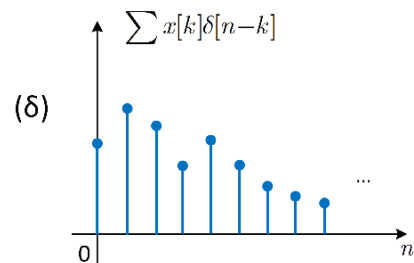
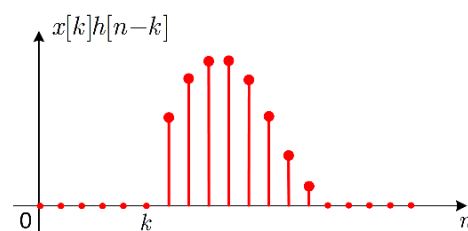
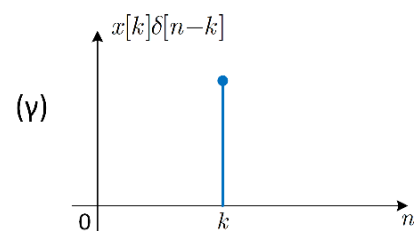
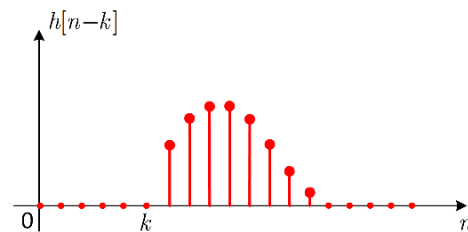
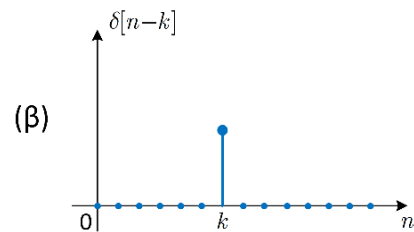
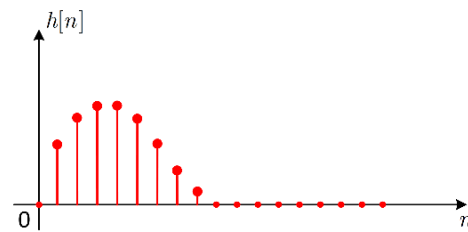
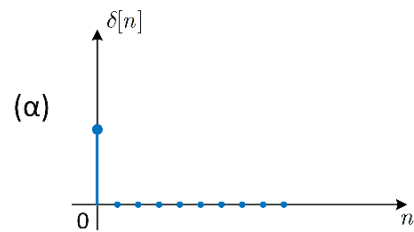
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Γραμμικότητα
(αθροιστικότητα)

Γραμμικότητα
(ομογένεια)

Χρον. Αμεταβλητότητα



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

• Συνέλιξη

- Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά σημαντικό

- Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

- Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων
- Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n]$, $y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- Συνέλιξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]), a \in \mathfrak{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \rightarrow \mathfrak{R} \\ y[n] : [n_3, n_4] \rightarrow \mathfrak{R} \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \rightarrow \mathfrak{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

• Συνέλιξη

- Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:

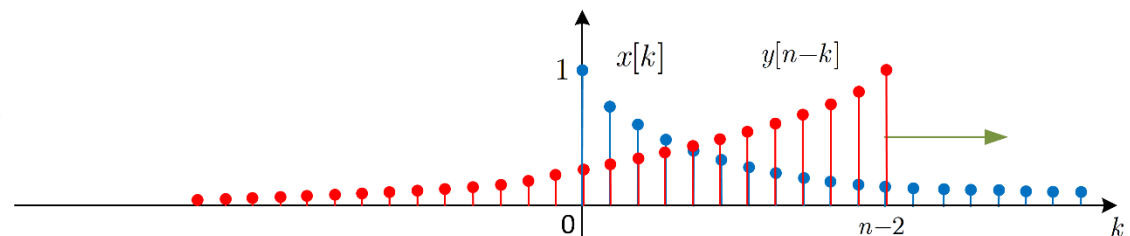
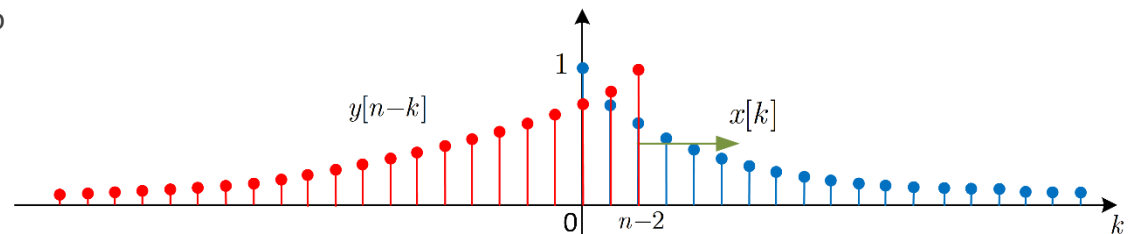
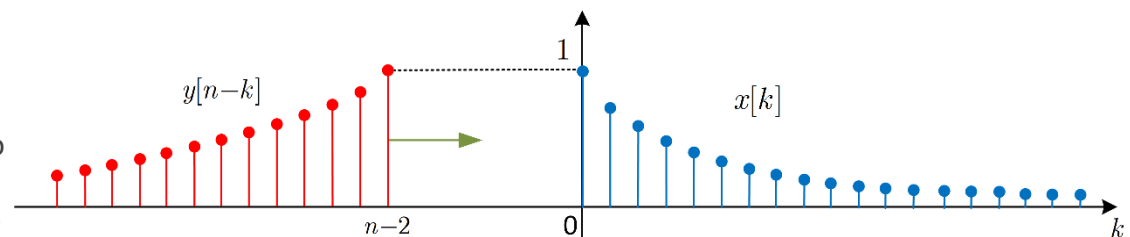
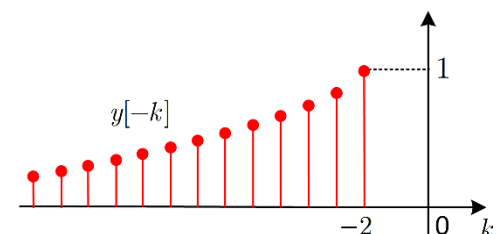
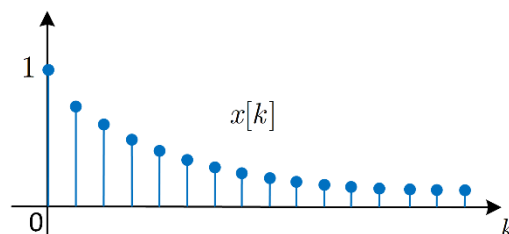
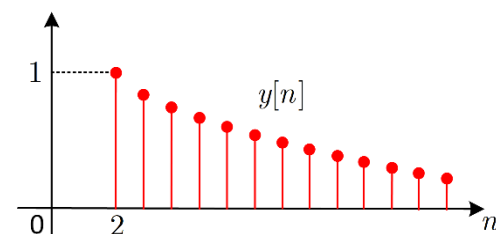
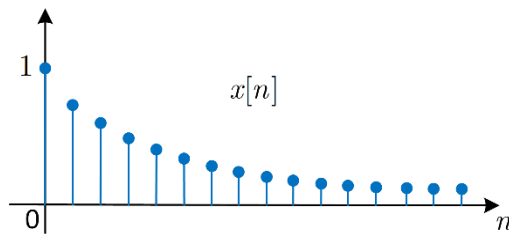
- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε (αφού η πράξη της συνέλιξης είναι αντιμεταθετική) να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.

- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσεις του k και όχι του n , όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης. Επιπλέον, το $y[k]$ έχει υποστεί ανάκλαση και έχουμε πλέον το $y[-k]$.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n - k]$ από το $y[-k]$ μετατοπίζοντάς το κατά n . Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά μέσα στο άθροισμα της συνέλιξης. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[-k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά τη μετατόπιση. Μετά, ξεκινάμε να το "ολισθαίνουμε" πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y[n - k]$ συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντήσει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης, το οποίο θα είναι μη μηδενικό για $0 \leq k \leq n - 2$ (στην προκειμένη περίπτωση).

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n - k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο «μέσα» στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση, καθώς πάλι τα δυο σήματα «αλληλεπιδρούν» από 0 ως $n - 2$. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.



- Συνέλιξη

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

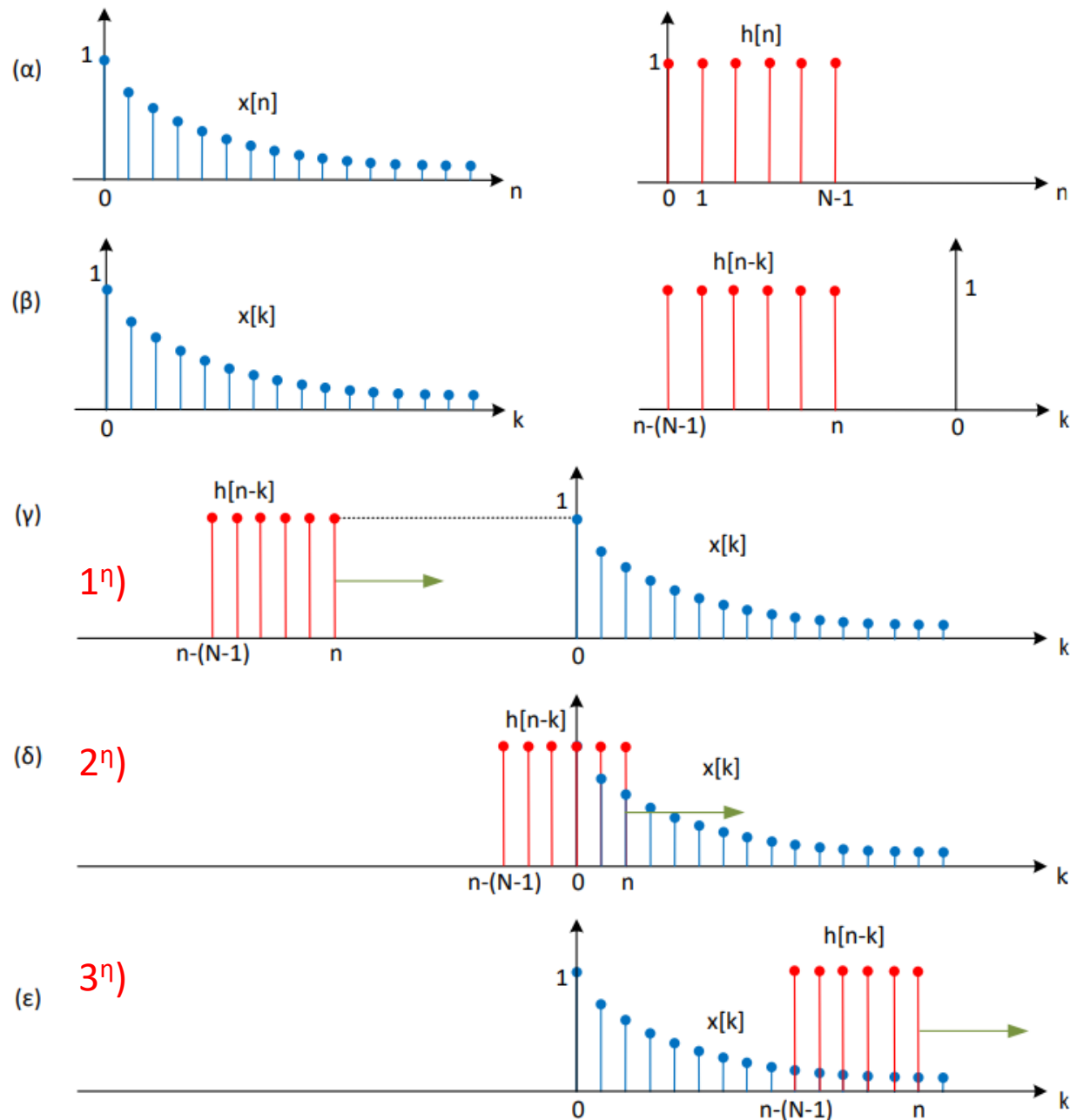
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n - k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k , και “σύρουμε” το $x[n - k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x[n - k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

• Συνέλιξη

- Παράδειγμα:

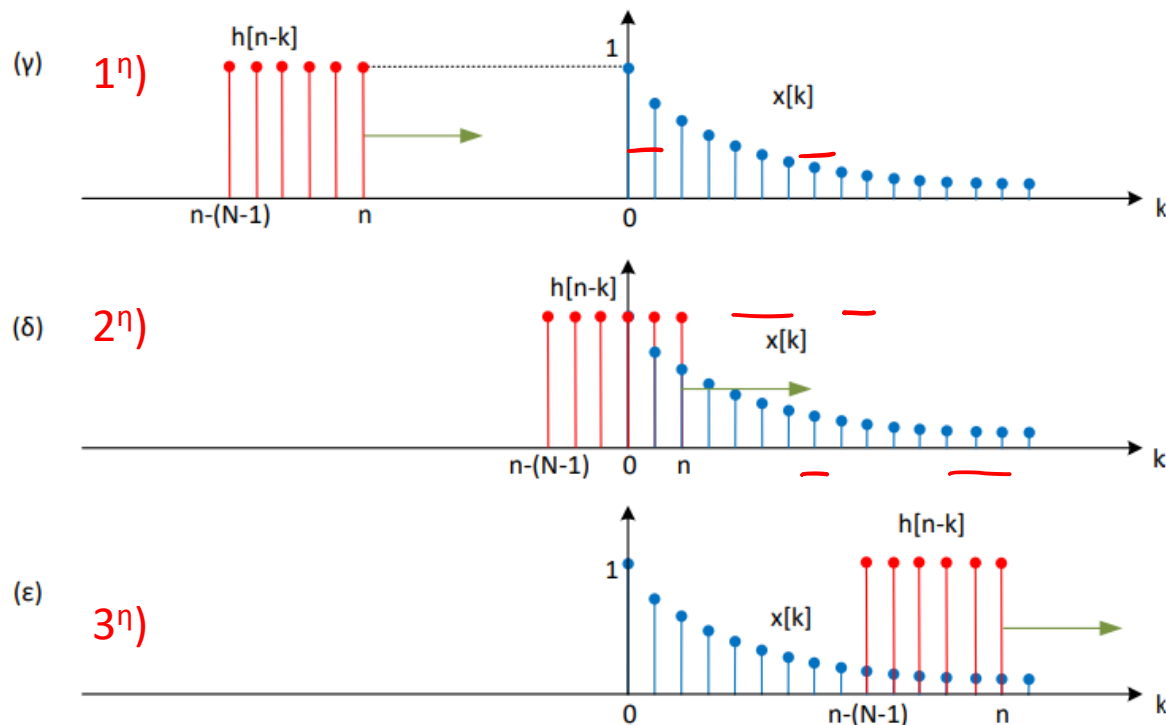
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n - N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1.$$



- Συνέλιξη

- Παράδειγμα:



$$1) \quad n < 0 \quad c_{xh}(n) = 0$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^n a^k u[k] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$3) \quad \sum_{k=n-(N-1)}^n a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1 - a}$$

• Συνέλιξη

• Παράδειγμα:

```
% Ορισμός διάρκειας
```

```
Nx = 7;
```

```
% Σήματα
```

```
x = ones(1, Nx);
```

```
alpha = 0.8;
```

```
Nh = 100;
```

```
n = 0:Nh;
```

```
h = alpha.^n;
```

```
% Convolution by hand
```

```
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
```

```
c2 = (alpha.^( [Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...  
      | alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);
```

```
% Convolution by conv function
```

```
c = conv(h, x);
```

```
% Σχήματα
```

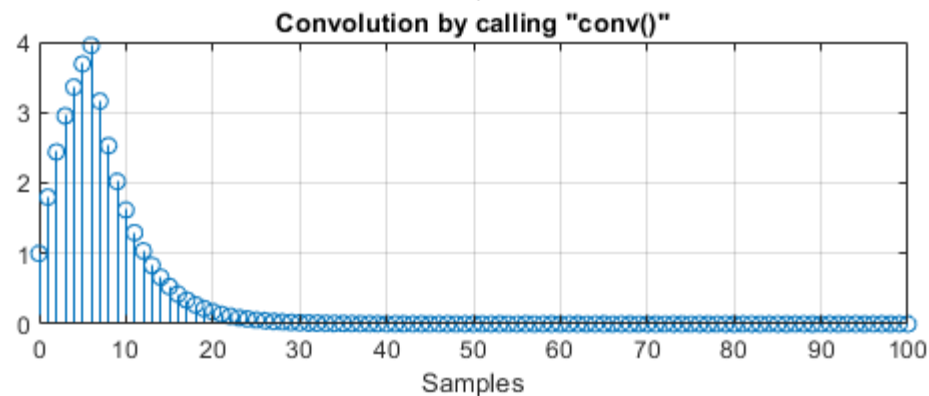
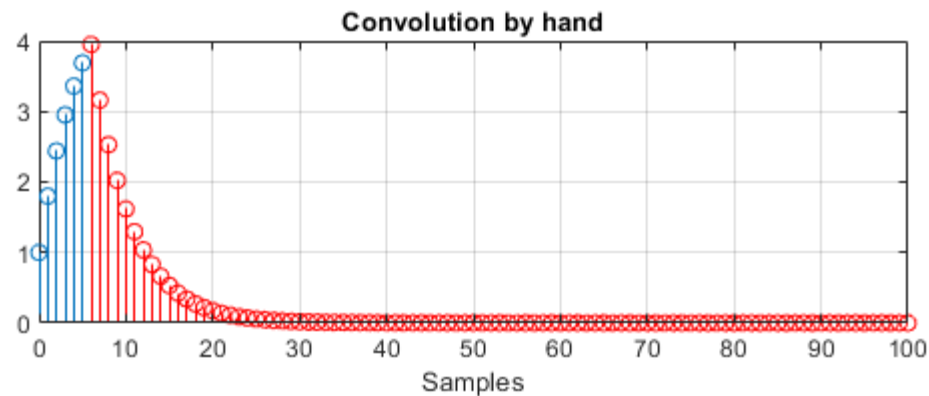
```
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
```

```
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
```

```
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
```

```
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
```

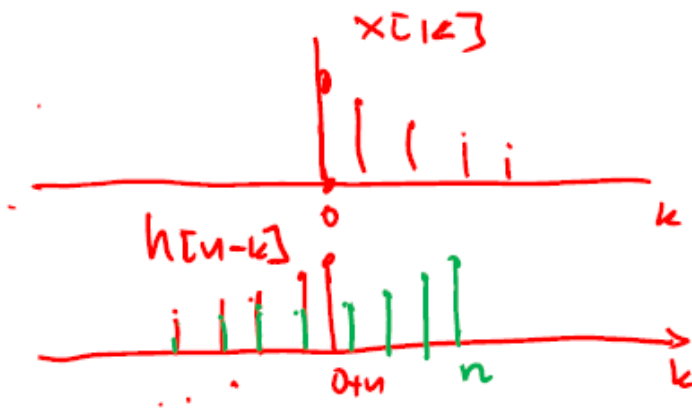
```
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```



• Συνέλιξη

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.



$$\begin{aligned}
 c_{xh}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k]
 \end{aligned}$$

1) $n < 0$: $c_{xh}[n] = 0$

2) $n \geq 0$: $c_{xh}[n] = \sum_{k=0}^n a^k a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n 1 = (n+1) a^n, n \geq 0$
 $= (n+1) a^n u[n]$

• Συνέλιξη

- Παράδειγμα:

```
% Σήματα
```

```
alpha = 0.8;
```

```
Nh = 100;
```

```
n = 0:Nh;
```

```
h = alpha.^n;
```

```
x = h;
```

```
% Convolution by hand
```

```
chx = alpha.^n .* (n+1);
```

```
% Convolution by conv function
```

```
c = conv(h, x);
```

```
% Σχήματα
```

```
figure; subplot(211); stem(n, chx);
```

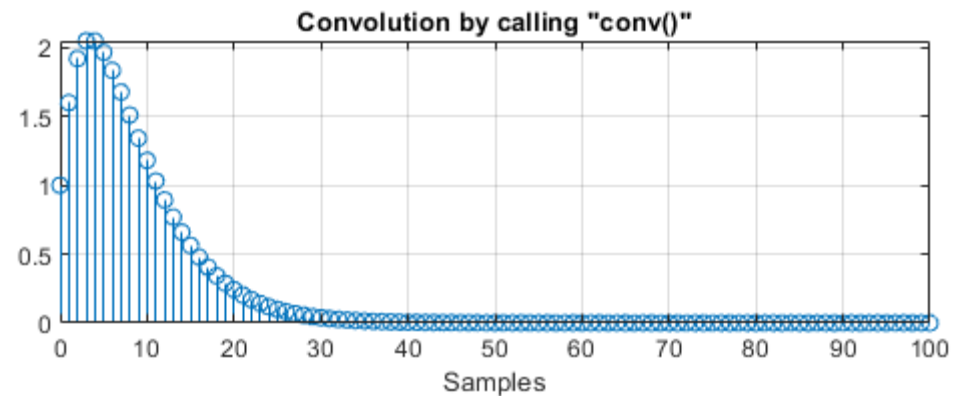
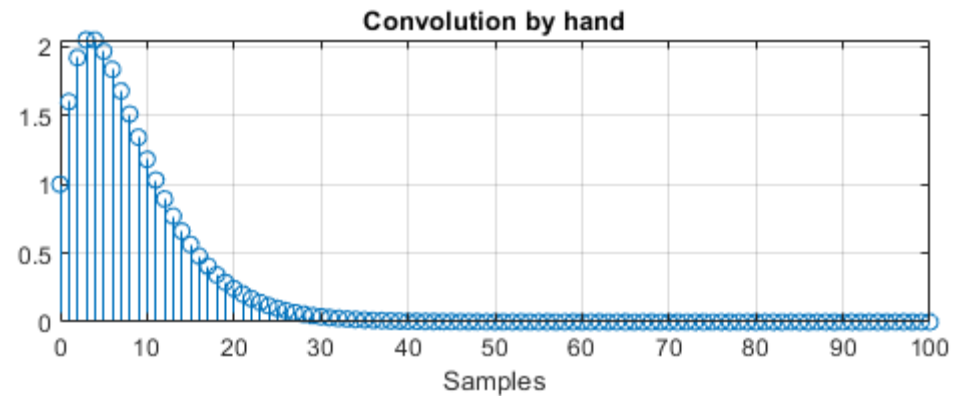
```
title('Convolution by hand'); grid;
```

```
xlabel('Samples');
```

```
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
```

```
title('Convolution by calling "conv()"');
```

```
xlabel('Samples');
```



• Συνέλιξη

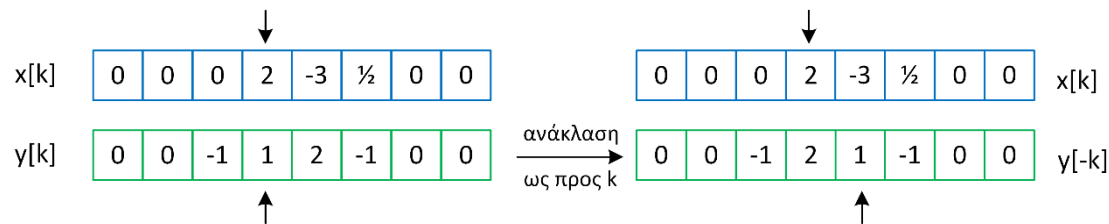
- Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας
- Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?
- Τότε μια εναλλακτική γραφική μέθοδος είναι αυτή της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**
 - ... όμως και οι ιδιότητες της συναρτησης Δέλτα βοηθούν σημαντικά
- Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n - 1] + \frac{1}{2}\delta[n - 2]$$

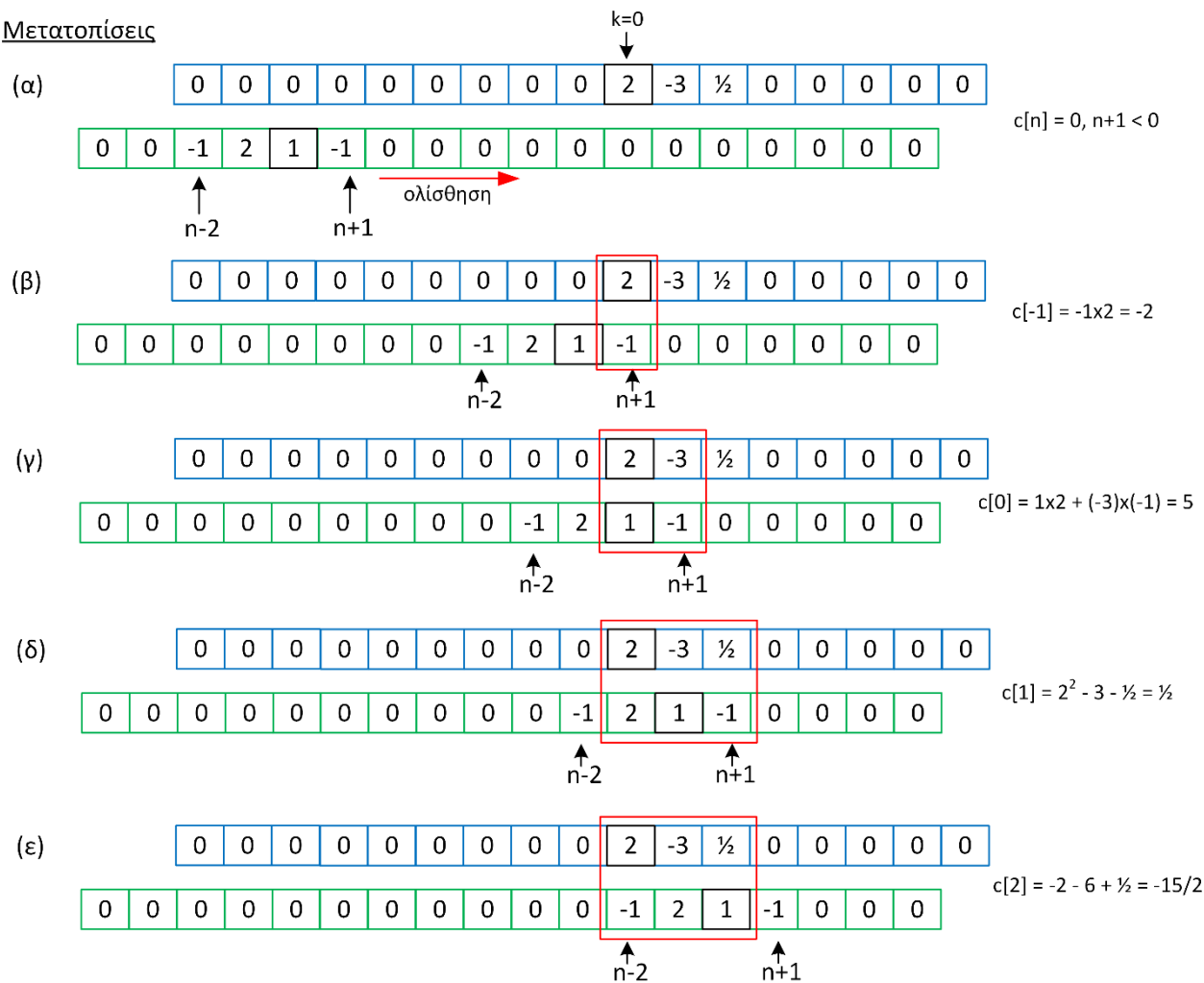
$$y[n] = -\delta[n + 1] + \delta[n] + 2\delta[n - 1] - \delta[n - 2]$$

- Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

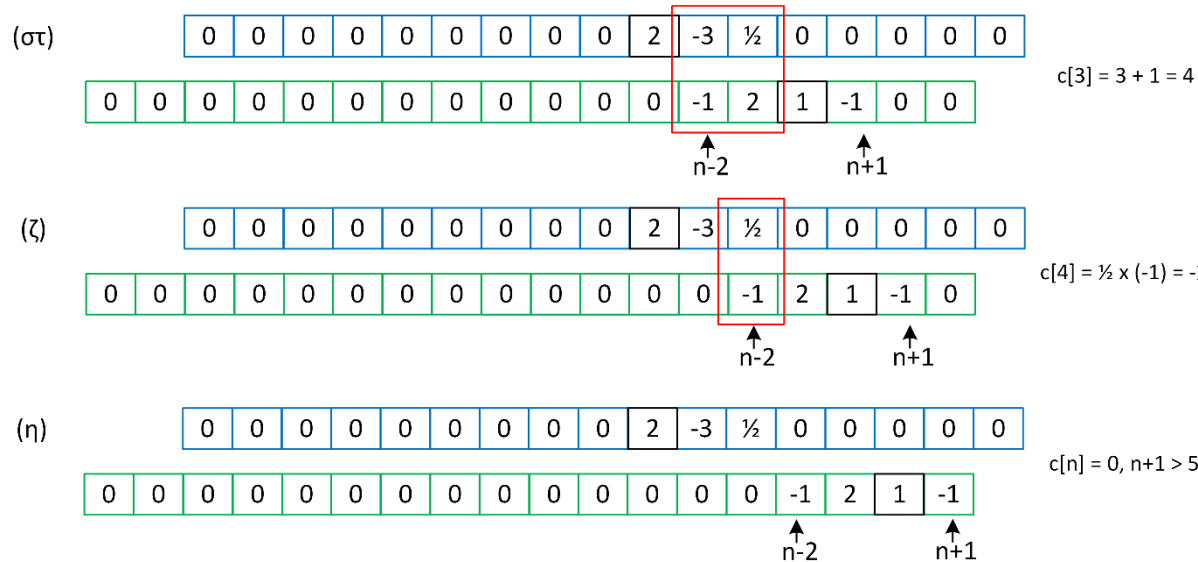
• Συνέλιξη



Μετατοπίσεις



• Συνέλιξη



- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n + 1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1] - \frac{15}{2}\delta[n - 2] + 4\delta[n - 3] - \frac{1}{2}\delta[n - 4]$$

- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?
- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

Homework: Επιβεβαιώστε το $c[n] = x[n] * y[n]$ αναλυτικά με χρήση της $\delta[n - k] * \delta[n - l] = \delta[n - k - l]$

• Συνέλιξη

```
% Σήματα
```

```
x = [2 -3 1/2];
```

```
nx = [0 1 2];
```

```
y = [-1 1 2 -1];
```

```
ny = [-1 0 1 2];
```

```
% Συνέλιξη
```

```
cxy = conv(x, y);
```

```
n_c = [-1 0 1 2 3 4];
```

```
% Σχήματα
```

```
figure; subplot(311); stem(nx, x);
```

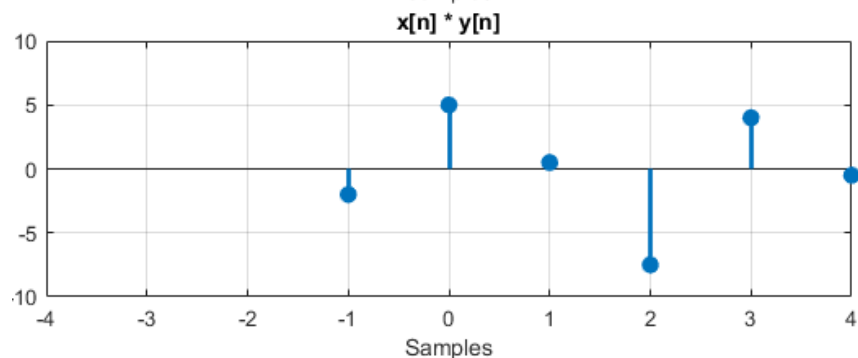
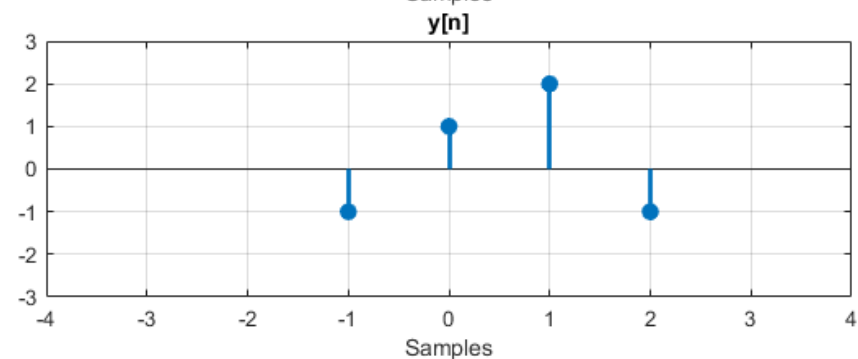
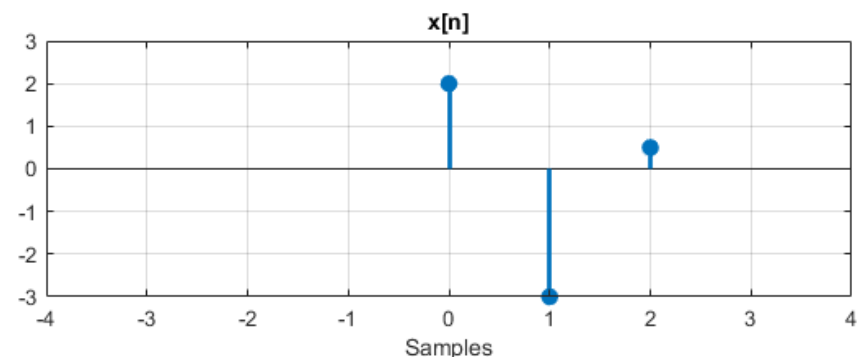
```
xlabel('Samples'); title('x[n]');
```

```
subplot(312); stem(ny, y);
```

```
xlabel('Samples'); title('y[n]');
```

```
subplot(313); stem(n_c, cxy);
```

```
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

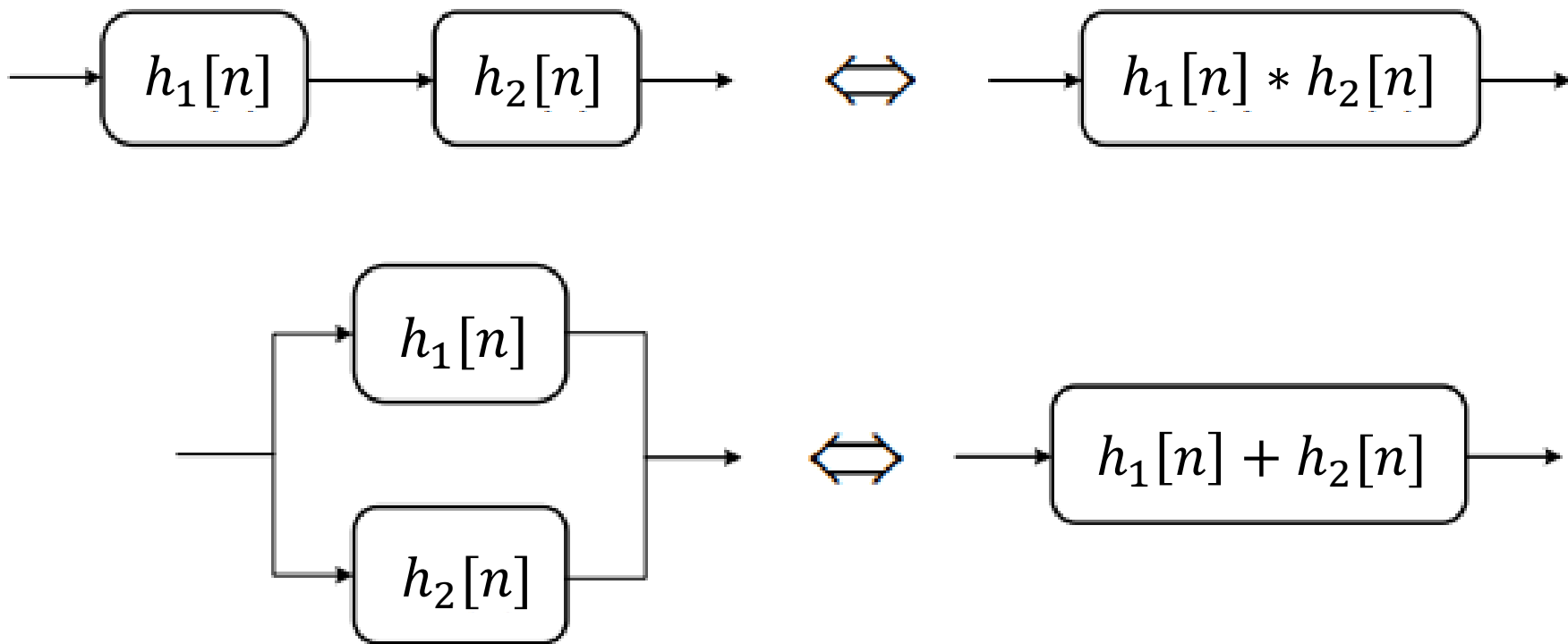
- Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

- Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων



Συνεχίζεται... 😊

