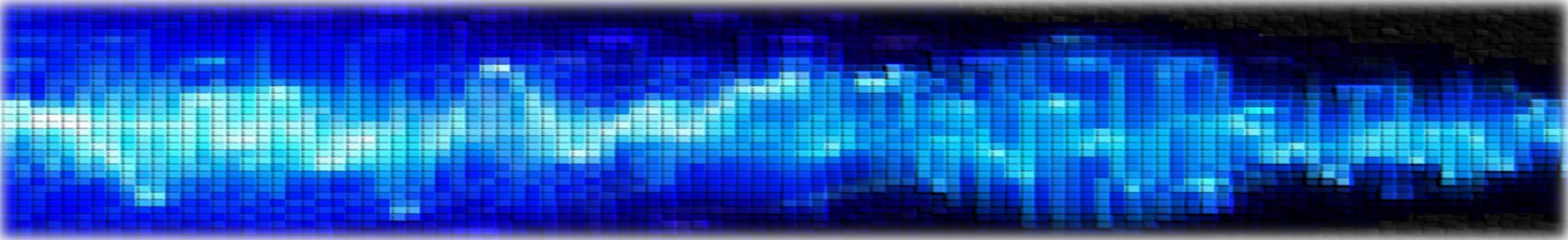


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 1^Η

- 
- Δειγματοληψία (reminder)
 - Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- Ως τώρα... (από ΗΥ215)

- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \quad |f| > f_{max}$$

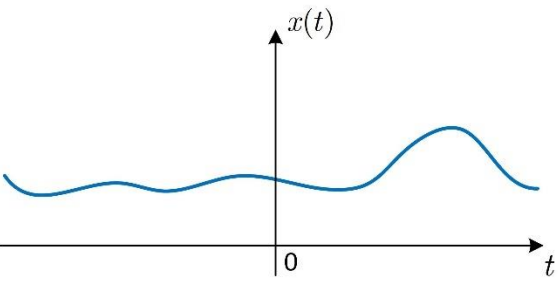
με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα f_{max}

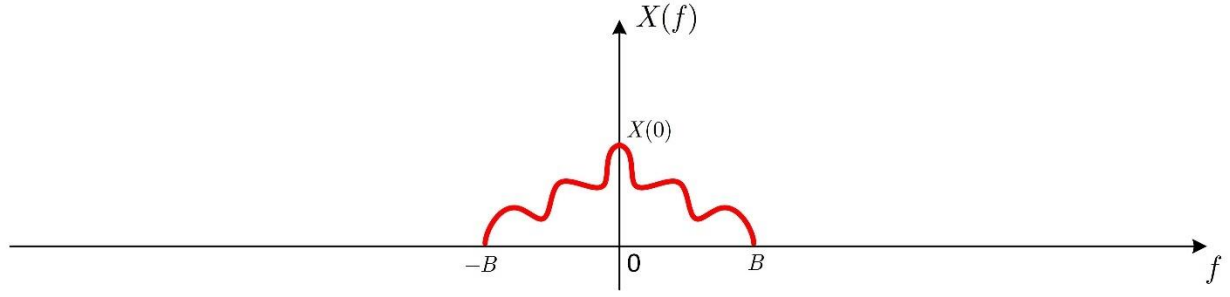
$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**
- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας

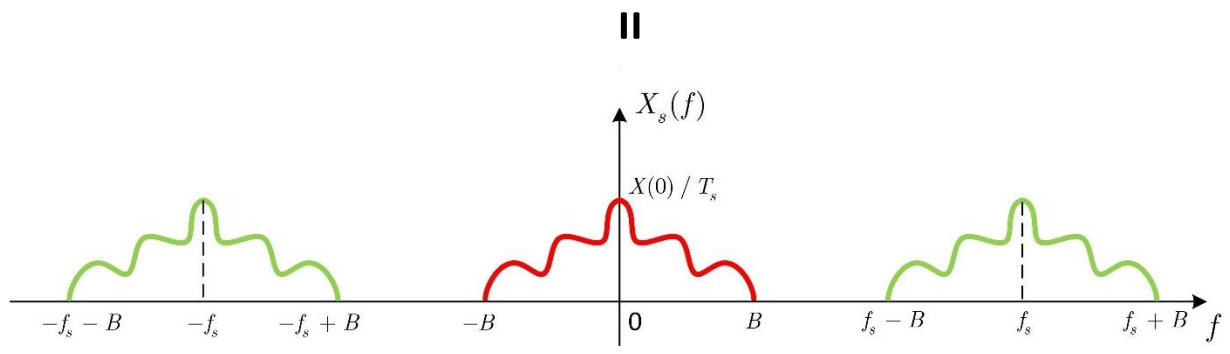
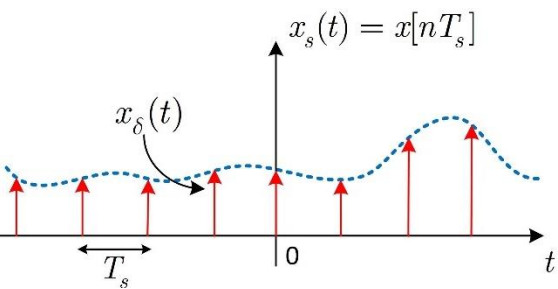
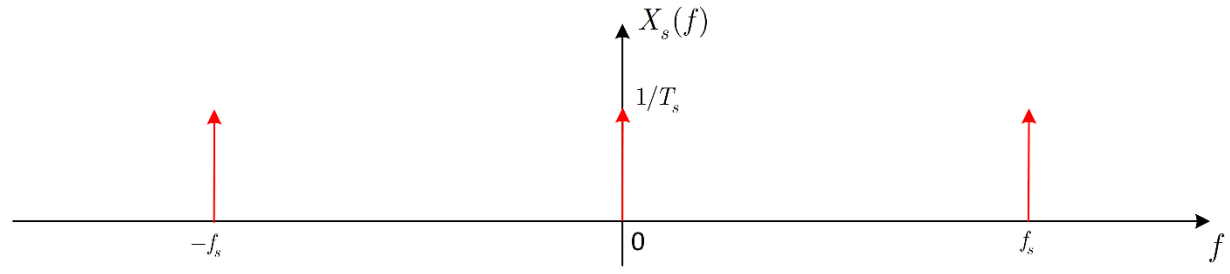
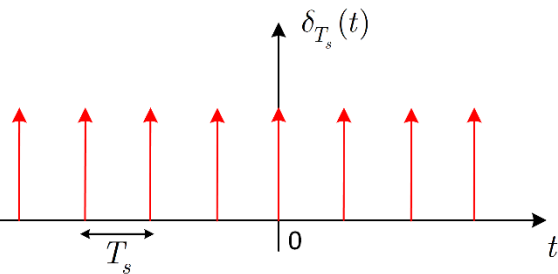
ΧΡΟΝΟΣ



ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

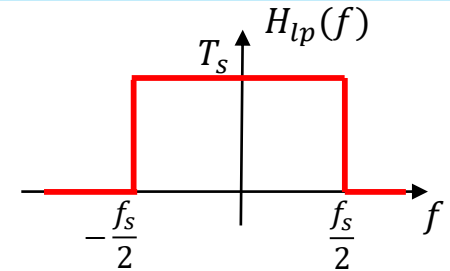


★ (Συνέλιξη)



- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;



1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_s(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_s(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

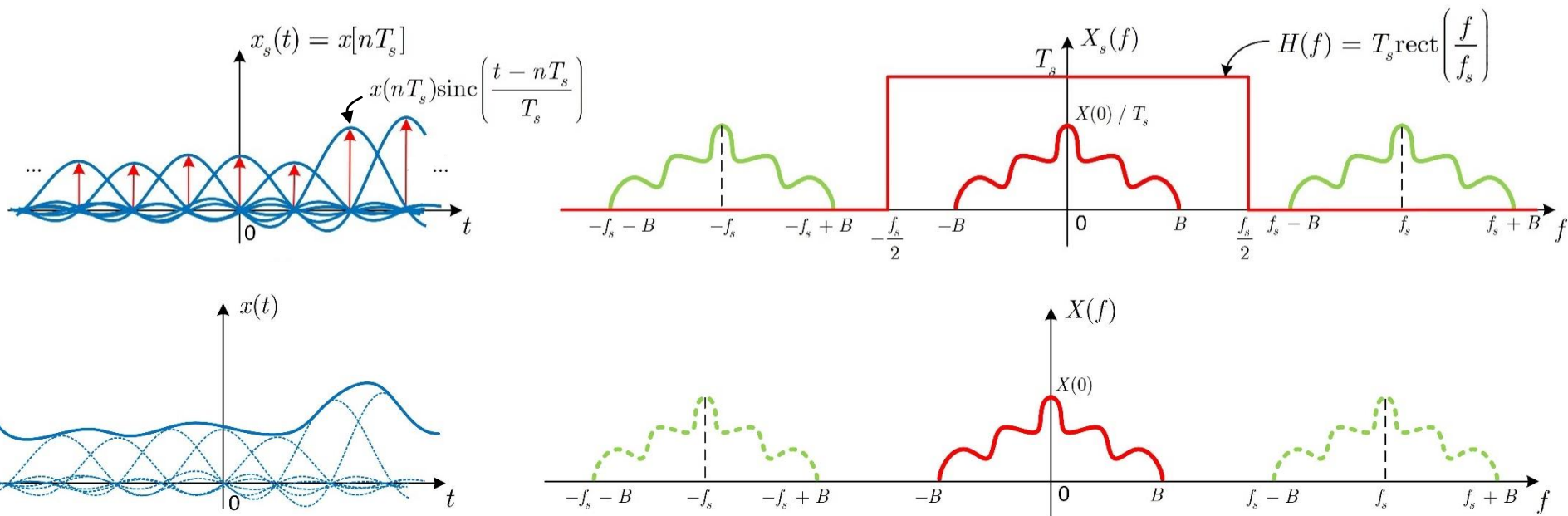
ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφα» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

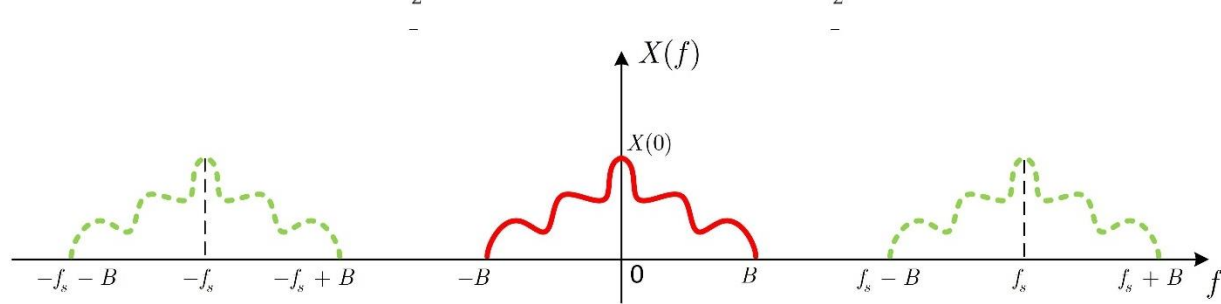
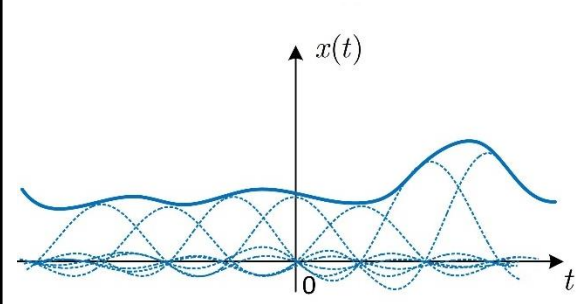
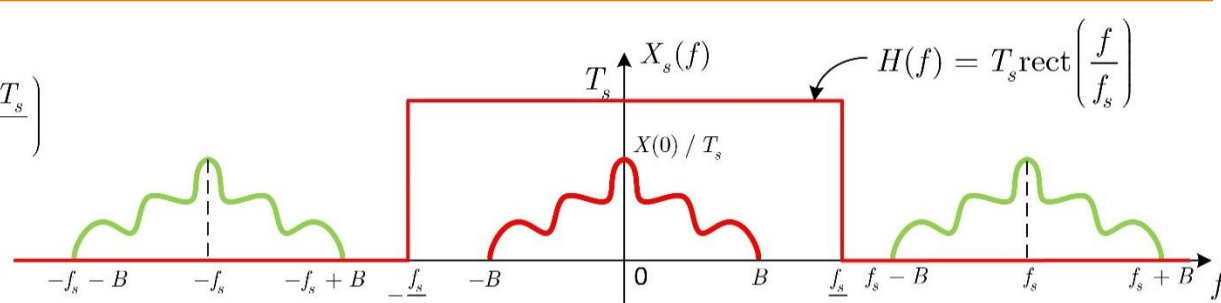
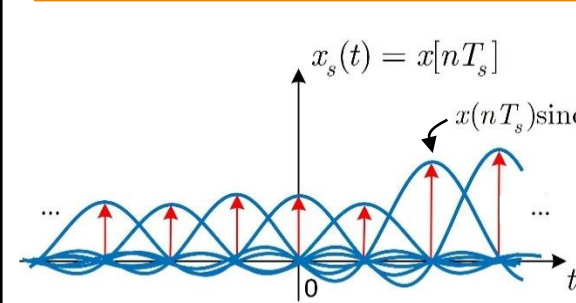
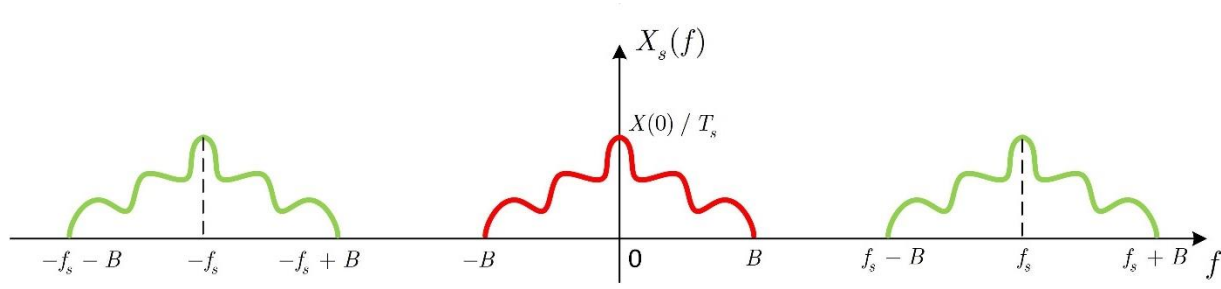
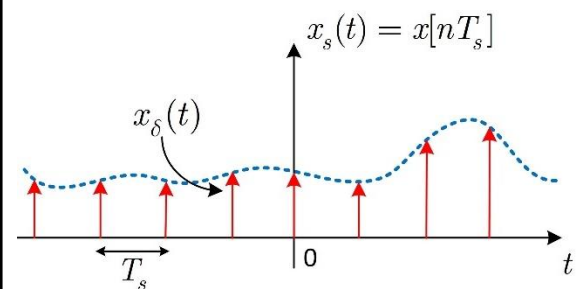
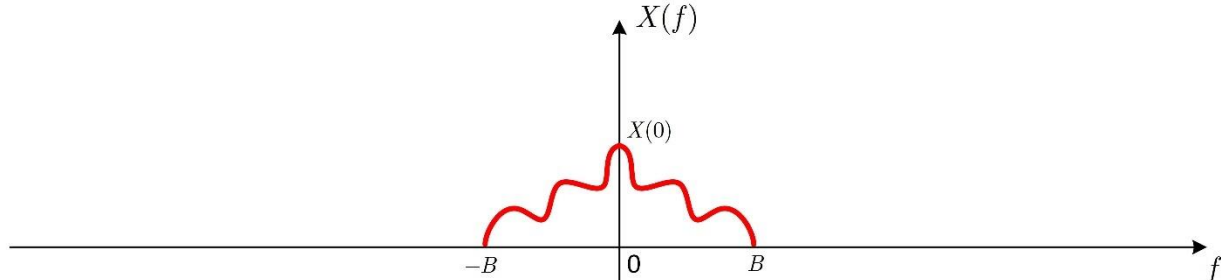
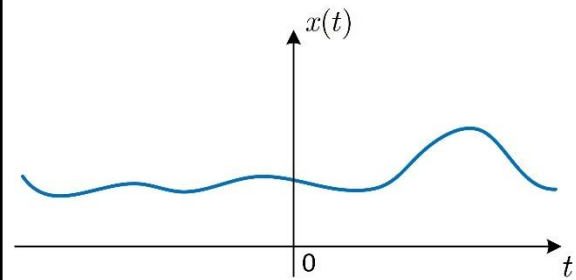
- Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 x_{rec}(t) &= x_s(t) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$



ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



• Παράδειγμα:

- Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

Θέτουμε $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$, αφού $T_s = \frac{1}{f_s}$, $n \in \mathbb{Z}$

Άρα

$$x[n] = A \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_s}\right) = A \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi f_0}{f_s}}_{\omega_0} n\right) = A \cos(\omega_0 n),$$

$n \in \mathbb{Z}$. Π.χ. $f_0 = 440 \text{ Hz}$, $f_s = 1000 \text{ Hz}$, ω_0 τότε

$$x[n] = A \cos\left(\frac{2\pi \cdot 440}{1000} n\right) = A \cos\left(\frac{22\pi}{25} n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

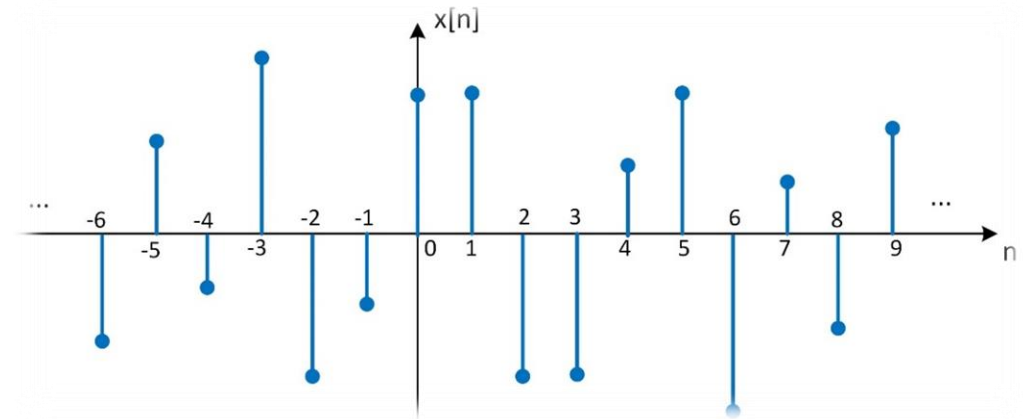
Βλέπουμε επίσης ότι

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}$$

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$$



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \operatorname{Re}\{x[n]\} + j\operatorname{Im}\{x[n]\}$$

$$= |x[n]| e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

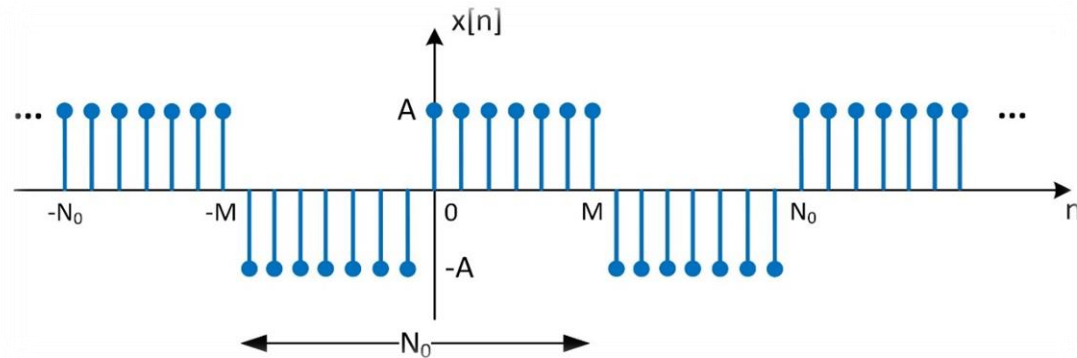
$$|x[n]| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{x[n]\} + \operatorname{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{x[n]\}}{\operatorname{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα

$$x(t) = x(t + T_0)$$

περίοδος



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n + N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται **περίοδος** του σήματος.
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2 , τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

• Ημίτονα

- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N , τότε θα ικανοποιεί τη σχέση

$$x[n] = x[n + N]$$

- Άρα

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 (n + N))$$

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N)$$

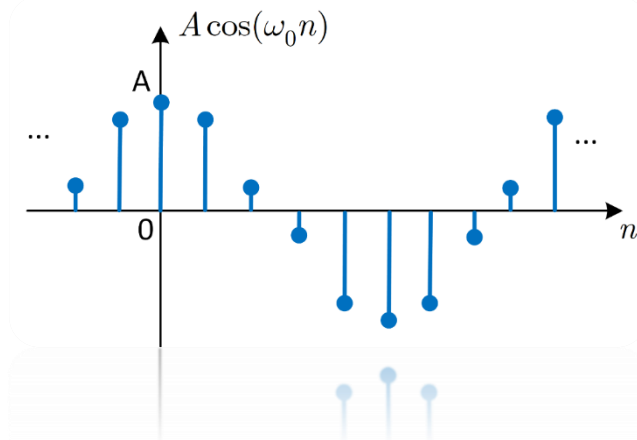
- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \quad N, k \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N !



• Ημίτονα

• Παραδείγματα:

$$\circ x[n] = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} N &= \frac{2\pi k}{\omega_0} \\ \omega_0 &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8nk}{3} \\ = \frac{8k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

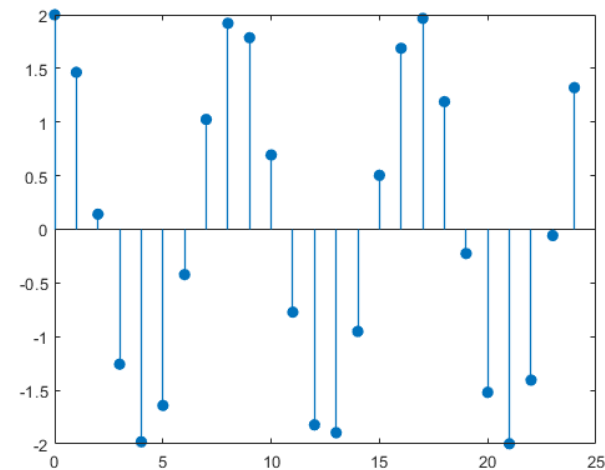
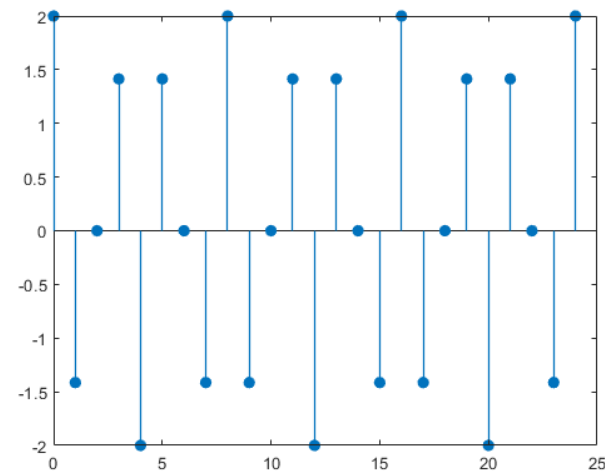
Για $k=3$, $N=8$ δείγματα

$$\circ x[n] = 2 \cos\left(\frac{3}{4}n\right)$$

$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} N &= \frac{2\pi k}{\omega_0} \\ \omega_0 &= \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\frac{3}{4}} = \frac{8nk}{3}$$

Δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z} : N \in \mathbb{Z}$.

Άρα δεν είναι περιοδικό σήμα.



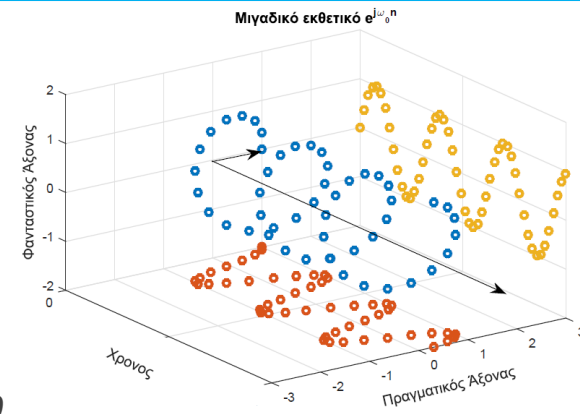
- Ημίτονα

- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \operatorname{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Στο διακριτό χρόνο

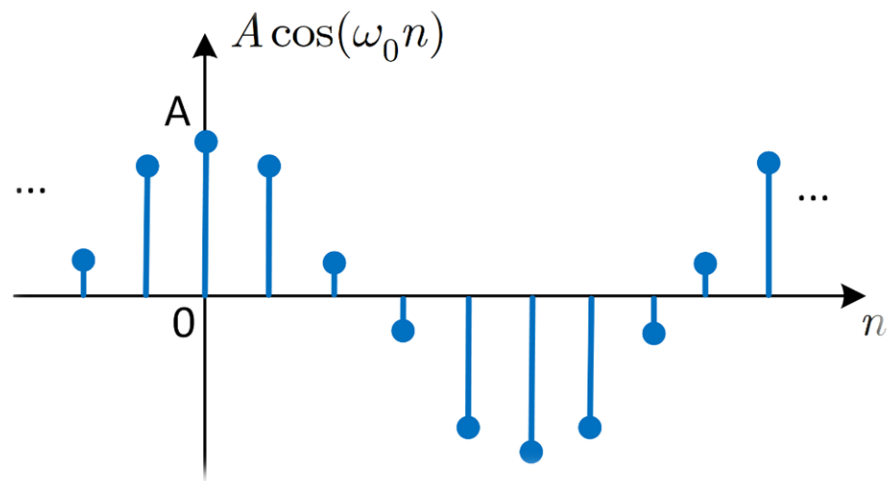
$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n}$$

- Αν $\varphi = 2\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (!!!!!!!!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π !!
 - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

- Ημίτονα
- Σύνοψη:



Περιοδικό?

Εξαρτάται από το ω_0 !

Περιοδικό?

Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

- Ημίτονα

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις
- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
 - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

- Όμως...

$$x_1[n] = 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} x_2[n] &= 4 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4 \cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!) \end{aligned}$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
 - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

• Ημίτονα

$$A \cos(0n)$$

"

A

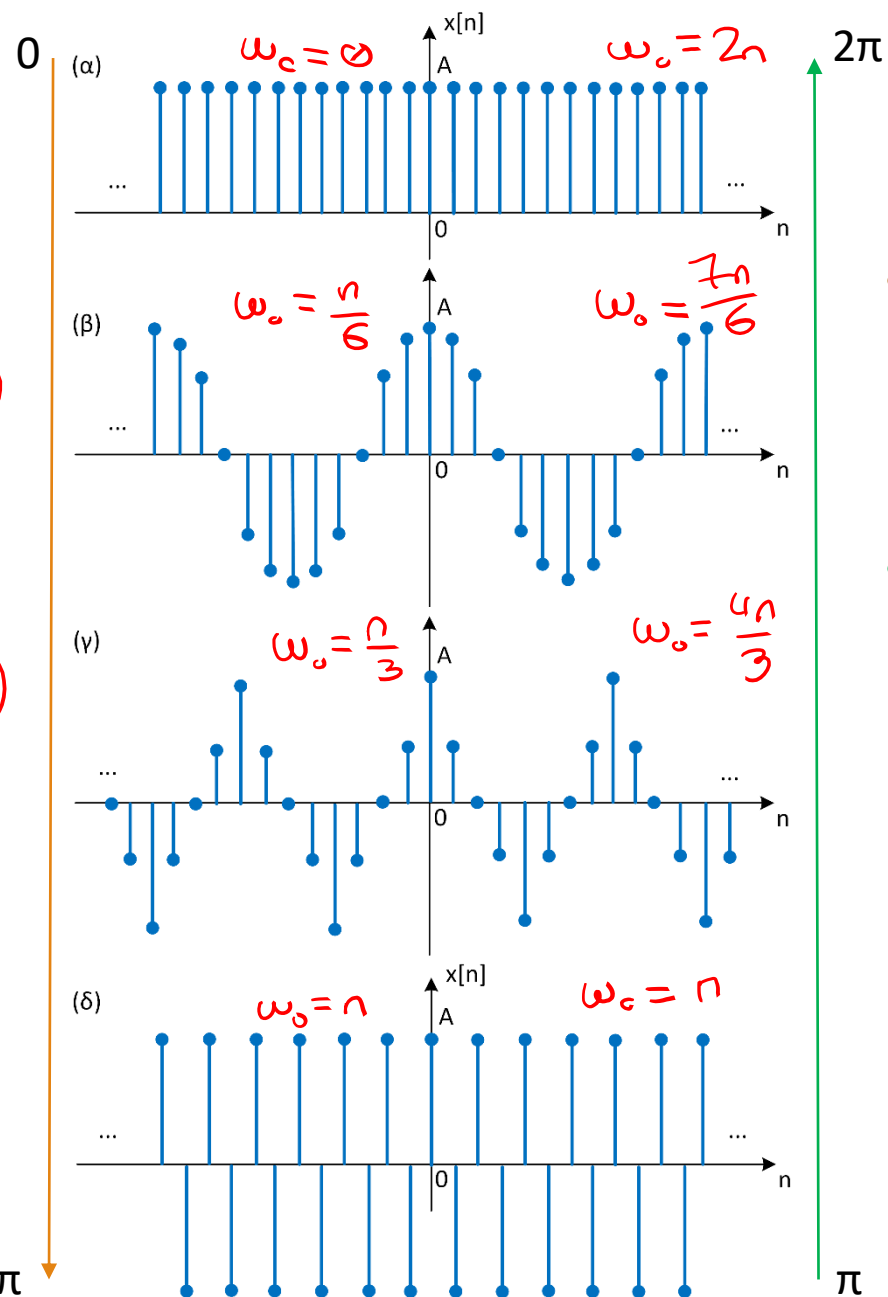
$$A \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$A \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

$$A(-1)^n$$

"

A \cos(\pi n)



- Στο $[0, \pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0
- Στο $(\pi, 2\pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0 !!
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

