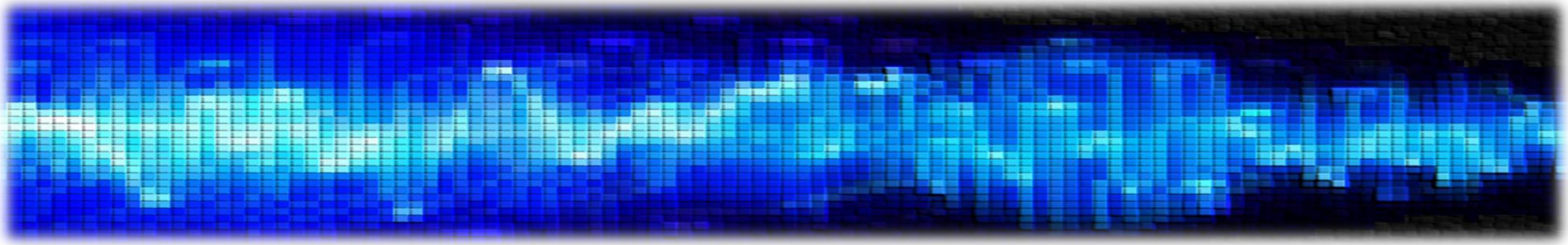
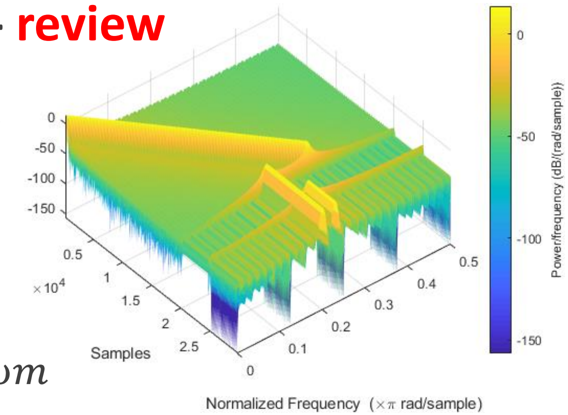
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 28Η



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

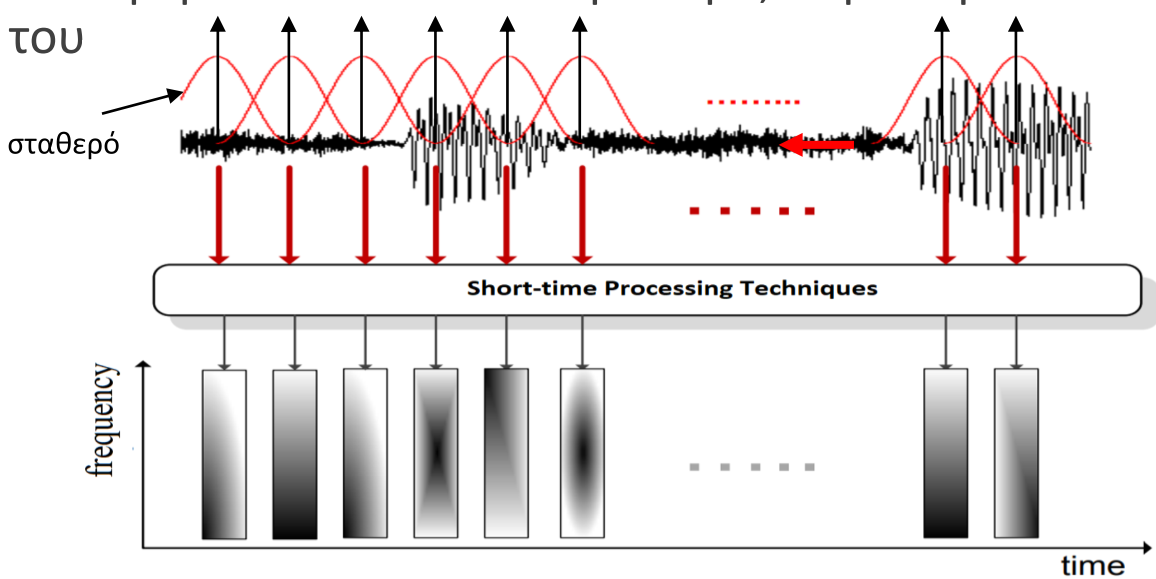
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform - review**



- Τμηματικός Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου (**Short Time Discrete Time Fourier Transform – ST-DTFT**)
- Ορισμός:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Μια «συλλογή μετασχηματισμών Fourier» διακριτού χρόνου σε παραθυροποιημένα τμήματα σήματος που ξεκινούν από το δείγμα n, με παράθυρο $w[m]$
- Το σήμα ολισθαίνει ένα δείγμα κάθε φορά κάτω από το παράθυρο, παραθυροποιείται, και λαμβάνεται ο DTFT του



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform - review**

- STDTFT:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο DTFT του σήματος $x[n+m]w[m]$:

- Αντίστροφος:

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]} \int_0^{2\pi} X[n,\omega) e^{j\omega m} d\omega$$

αν $w[m] \neq 0$

- Ο STDTFT $X[n,\omega)$ διαβάζεται ως «*ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ενός παραθυ-ροποιημένου τμήματος ενός σήματος με αρχή το δείγμα* n»
    - Θεωρητικά, ένα σήμα έχει άπειρα δείγματα ($-\infty < n < +\infty$) οπότε ο STDTFT αποτελεί μια «άπειρη» συλλογή από DTFTs, έναν για κάθε δείγμα του σήματος

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Ο STDTFT δεν μπορεί να υλοποιηθεί απευθείας σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον καθώς η μεταβλητή ω είναι συνεχής

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον DFT αντί του DTFT
  - Ο μετασχηματισμός ονομάζεται **Short Time Fourier Transform - STFT**

- Τότε για ένα παράθυρο $w[n]$ διάρκειας L

$$X[n,k] = X\left[n, \frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}, \qquad 0 \le k \le N-1, N \ge L$$

- Το σήμα $X[n,k]$ αποτελεί τον DFT του σήματος $x[n+m]w[m]$

- Μπορούμε – όπως και πριν – να ανακτήσουμε το σήμα στο χρόνο, υπό την προϋπόθεση ότι $w[n] \neq 0,\ 0 \le m \le L-1$, ως

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n,k] e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

με $0 \le m \le L-1$

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Θα δείξουμε ότι ο STFT είναι ένας μετασχηματισμός πλεονασματικός
- Θεωρήστε τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας L
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[n_0+m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n_0,k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα n_0

  - Δηλ. στο διάστημα $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$

- Αντίστοιχα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[(n_0+1)+m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[(n_0+1),k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα (n_0+1)

  - Δηλ. στο διάστημα $n_0 + 1 \leq n \leq n_0 + L$

- Βλέπετε ότι τα δυο σήματα στο χρόνου που ανακατασκευάζονται από διαδοχικούς STFTs διαφέρουν μόλις κατά ένα δείγμα!

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Με την ίδια λογική, μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικά παράθυρα σήματος στο χρόνο (κι έτσι, όλο το σήμα) με βάση το ακόλουθο μοτίβο:

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[n_0 + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n_0, k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

  υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα n_0

  - Δηλ. στο διάστημα $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$

- Αντίστοιχα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[(n_0 + L) + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[(n_0 + L), k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

  υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα $(n_0 + L)$

  - Δηλ. στο διάστημα $n_0 + L \leq n \leq n_0 + 2L - 1$

- Βλέπετε ότι τα δυο σήματα στο χρόνου που ανακατασκευάζονται είναι ακριβώς διαδοχικά

  - Χρησιμοποιήσαμε μόνο τους μετασχηματισμούς $X[n_0, k]$, $X[n_0 + L, k]$!!

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Για ποιο λόγο θα θέλαμε να κάνουμε μια ανακατασκευή στο χρόνο?
- Στην περίπτωση φυσικά που «πειράξουμε» το σήμα μας φασματικά σε κάθε τμήμα του, και θέλουμε να επανασυνθέσουμε το αποτέλεσμα μας στο χρόνο!!
- Άρα, από την προηγούμενη συζήτηση, επιτρέπουμε στο σήμα μας να ολισθαίνει κάτω από το παράθυρο ανάλυσης περισσότερο από ένα δείγμα κάθε φορά
  - Στην περίπτωση της φασματικής ανάλυσης, η ολίσθηση μπορεί να είναι οσοδήποτε θέλουμε για να παρατηρήσουμε φασματικά το σήμα μας (ακόμα και ολίσθηση ενός δείγματος)
  - Στην περίπτωση της φασματικής ανάλυσης και σύνθεσης, μπορούμε να επιτρέψουμε στην ολίσθηση να είναι μεγαλύτερη – όχι όμως όσο θέλουμε (θα μιλήσουμε για αυτό σε λίγο)
- Αυτή η «μεγαλύτερη ολίσθηση» μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν **δειγματοληψία** στο διακριτό χρόνο ☺
  - Με άλλα λόγια, επιλέγουμε τα αρχικά δείγματα n του σήματος $x[n+m]$ στα οποία θα εφαρμόσουμε παράθυρο και DFT
- Αυτός ο STFT μπορεί να γραφεί ως

$$X[rR,k] = X\left[rR, \frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

$$X[rR,k] = X\left[rR, \frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}$$

με $-\infty < r < +\infty$ και $0 \leq k \leq N-1$

- Η μεταβλητή R αποτελεί το «άλμα» δειγμάτων μεταξύ δυο δειγμάτων $n_0, n_0 + R$ που με αρχή αυτά εφαρμόζουμε παράθυρα και υπολογίζουμε DFTs
- Πιο τεχνικά, θα λέγαμε ότι είναι η **περίοδος δειγματοληψίας** στο διακριτό χρόνο, ή όπως έχει επικρατήσει να λέγεται, το **hop size** (πόσα δείγματα «πηδάμε» στο χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών DFTs)
- Για απλοποίηση, ας συμβολίσουμε $X_r[k] = X[rR,k] = X[rR,\omega_k)$ τον παραπάνω μετασχηματισμό
  - Έτσι βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός δεν είναι άλλος από τον N-point DFT του $x_r[m] = x[rR+m]w[m]$, με το σήμα να «πηδά» R δείγματα τη φορά
- Συνολικά, έχουμε τρεις παραμέτρους να λάβουμε υπόψη μας
  - Ας τις δούμε…

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Τρεις παραμέτρους:
  - Διάρκεια παραθύρου ανάλυσης στο χρόνο, L
  - Πλήθος δειγμάτων του DFT στη συχνότητα, N
  - Hop size στο χρόνο, R

- **Ποιος συνδυασμός των παραπάνω μας επιτρέπει να ανασυνθέσουμε το σήμα στο χρόνο από τον STFT του?**

- Έστω τετραγωνικό παράθυρο

- Αν επιλέξουμε $N \geq L$, σίγουρα μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τα τμηματικά, παραθυροποιημένα σήματα $x[m + rR]w[m]$
  - Από τη συζήτηση μας για τον DFT

- Αν επιλέξουμε $R < L$, τα γειτονικά τμήματα σήματος επικαλύπτονται

- Για $R > L$, σημαίνει ότι τα «άλματα» (η δειγματοληψία μας στο χρόνο) δειγμάτων είναι μεγαλύτερα από ένα παράθυρο, οπότε κάποια από τα δείγματα του σήματος «μένουν απ’έξω», δηλ. δεν καλύπτονται από κάποιο τμήμα σήματος
  - Σίγουρα η ανακατασκευή δεν είναι εφικτή έτσι
    - Κάποια δείγματα δεν μετασχηματίζονται καν!

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Τρεις παραμέτρους:
  - Διάρκεια παραθύρου ανάλυσης στο χρόνο, L
  - Πλήθος δειγμάτων του DFT στη συχνότητα, N
  - Hop size στο χρόνο, R

- Οπότε ένας συνδυασμός είναι ο $R \leq L \leq N$

- Έστω $R = L = N$

- Με αυτόν τον τρόπο, ανακτούμε το σήμα $x_r[m] = x[rR + m]w[m]$, για $0 \leq m \leq N - 1$ μέσω του IDFT του $X_r[k]$
  - Πώς?

- Θα είναι:

$$x[n] = \frac{x_r[n - rR]}{w[n - rR]}, \qquad rR \leq n \leq (r + 1)R - 1$$

- Με άλλα λόγια, ανακτούμε τα παραθυροποιημένα σήματα στο χρόνο, διαιρούμε με το παράθυρο ανάλυσης, και βάζουμε το αποτέλεσμα σε σειρά, διαδοχικά

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Στις περιπτώσεις όμως – τις ενδιαφέρουσες ☺ – που θέλουμε να επεξεργαστούμε φασματικά το σήμα μας σε τμήματα, η προηγούμενη μεθοδολογία δε βοηθά
  - Η διαίρεση με ένα μη-τετραγωνικό παράθυρο $w[n]$ μπορεί να μας δημιουργήσει μεγάλα σφάλματα στις άκρες του, όπου οι τιμές του παραθύρου είναι μικρές
  - Τα τμήματα μπορεί να μην «ταιριάζουν» καλά μεταξύ τους

- Μπορούμε να αποφύγουμε τη διαίρεση με παράθυρο?
  - Ναι! Αν επιτρέψουμε στα παραθυροποιημένα τμήματα μας να επικαλύπτονται!! ʘʘ

- Τα παραθυροποιημένα τμήματα μας έχουν ως σημείο αναφοράς την αρχή του παραθύρου

- Μια πιο εύρωστη – στις μεταβολές του φάσματος – διαδικασία σύνθεσης είναι να μετατοπίσουμε το παραθυροποιημένο σήμα μας στο δείγμα $n_c = rR$ και να τα προσθέσουμε μεταξύ τους:

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_r[n - rR]$$

- Ισχύει ότι $\hat{x}[n] = x[n]$???

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_r[n - rR]$$

- Ισχύει ότι $\hat{x}[n] = x[n]$???
- Αντικαθιστώντας:

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[rR + n - rR]w[n - rR] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n]\, w[n - rR]$$

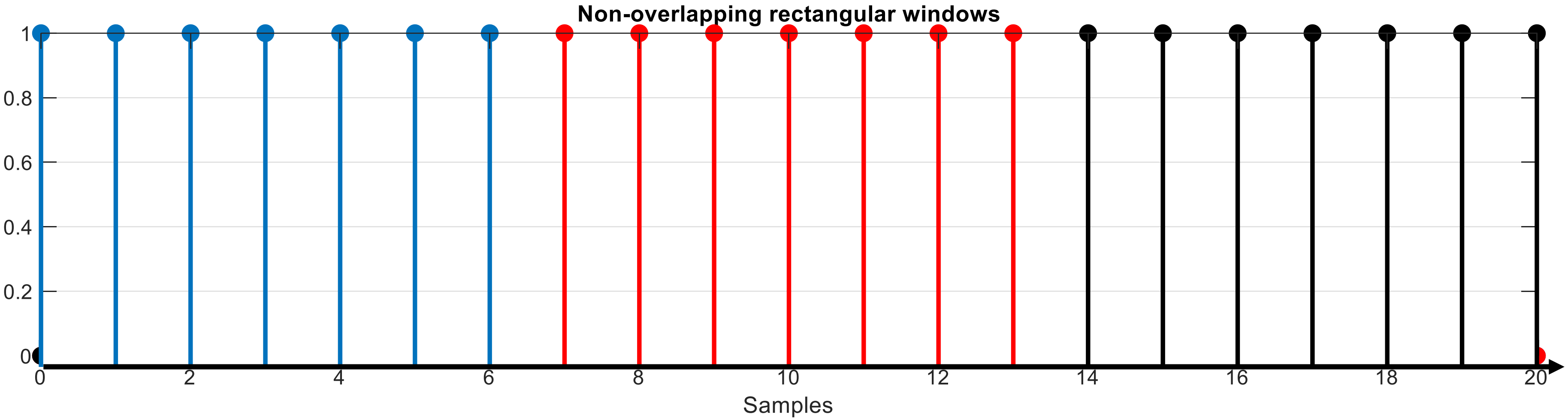
$$= x[n] \sum_{r=-\infty}^{+\infty} w[n - rR]$$

- Προφανώς πρέπει

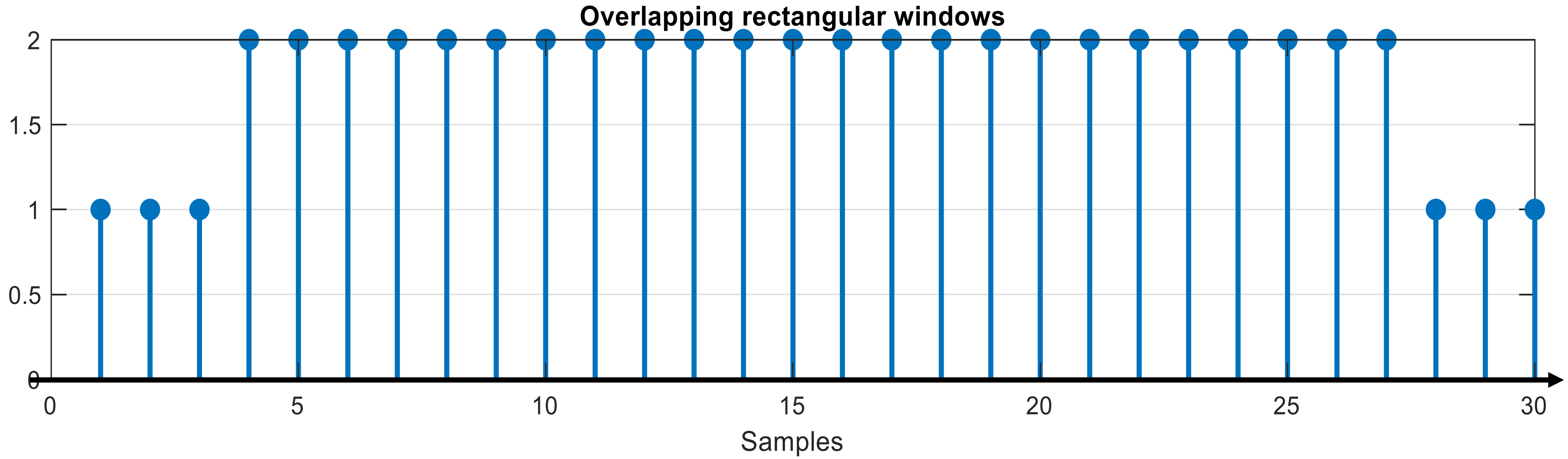
$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} w[n - rR] = \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \forall\ n$$

- Δηλ. τα μετατοπισμένα παράθυρα πρέπει να αθροίζουν σε σταθερό αριθμό!

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- $R = L = 7 \Rightarrow C = 1$



- L άρτιος, $R = L/2 \ (L = 6) \Rightarrow C = 2$



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Φαίνεται λοιπόν ότι για κάποια R, L, το τετραγωνικό παράθυρο μπορεί να δώσει πλήρη και ακριβή ανακατασκευή του σήματος

- Σπάνια όμως χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό παράθυρο για φασματική ανάλυση

- Ευτυχώς κι άλλα παράθυρα έχουν τιμές των R, L που ικανοποιούν την πλήρη (ή σχεδόν πλήρη) ανακατασκευή

- Δυο από αυτά:

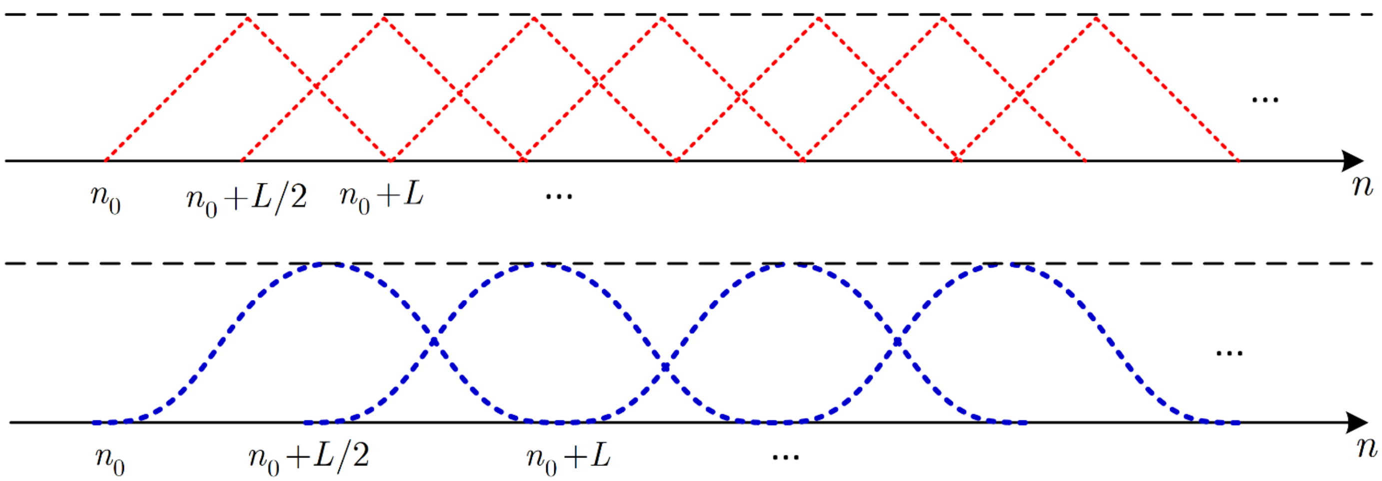
$$w_{Bartlett}[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq \dfrac{M}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{M}, & \dfrac{M}{2} \leq n \leq M \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

$$w_{hann}[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Για M άρτιο, $L = M + 1$, και $R = M/2$, το παράθυρο Bartlett ικανοποιεί την πλήρη ανακατασκευή με $C = 1$

- Για $L = M + 1$ και $R = M/2$, το ίδιο κάνει και το παράθυρο Hann



- Παρόμοιες μεταβλητές ικανοποιούν την πλήρη (ή σχεδόν πλήρη) ανακατασκευή και για το παράθυρο Hamming και για άλλα παράθυρο

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ