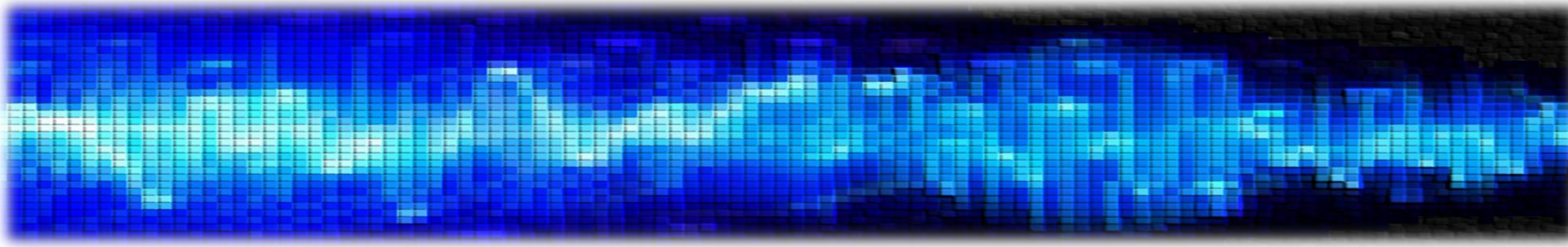
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η

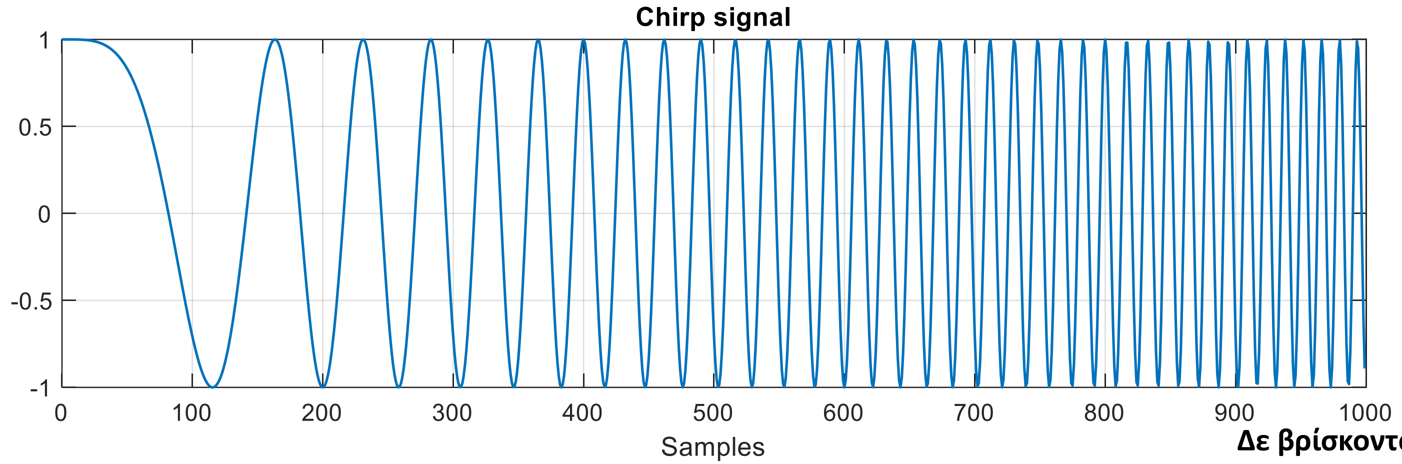


- Φασματική Ανάλυση με τον Short Time Fourier Transform

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Τα παραδείγματα φασματικής ανάλυσης που είδαμε ως τώρα είναι αρκετά περιοριστικά
- Οι παράμετροι των ημιτόνων (συχνότητες, πλάτη, φάσεις) που αναλύσαμε ήταν στάσιμοι
  - Δεν άλλαζαν με το χρόνο, ήταν ίδιοι από την αρχή ως το τέλος του παραθύρου ανάλυσης
- Αυτό στην πράξη δεν ισχύει
  - Radar, sonar, ήχος, φωνή, επικοινωνίες κ.α.
- Αυξάνοντας τη διάρκεια M του παραθύρου έχουμε καλύτερη ανάλυση (διακριτική ικανότητα) του σήματος
  - Αλλά κάνουμε φασματική ανάλυση σε μεγάλα τμήματα του σήματος, που περιλαμβάνουν πολλές μεταβολές στις παραμέτρους…
- Τι θα δούμε στο φάσμα?
  - Ποιες τιμές των παραμέτρων θα εμφανιστούν?
  - Χάνουμε σε χρονική «τοπικότητα»
    - Δεν ξέρουμε σε ποιο τμήμα του σήματος στο χρόνο εμφανίζονται οι παράμετροι που βλέπουμε στο φάσμα
- Ας δούμε ένα παράδειγμα…

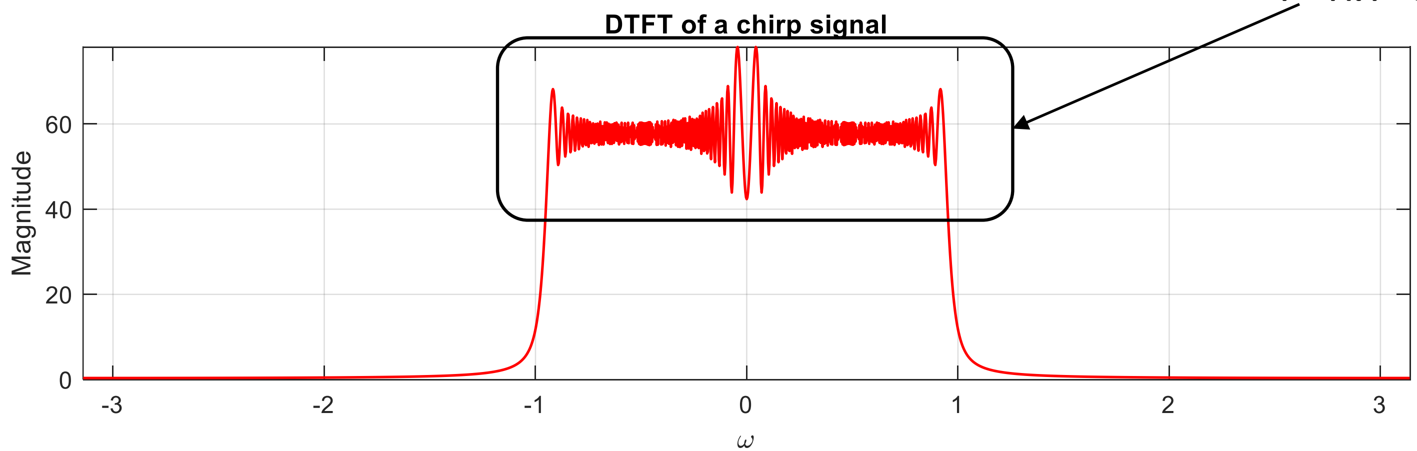
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Έστω ένα σήμα chirp (σήμα που μεταβάλλεται γραμμικά η συχνότητα)

$$x[n] = \cos(a_0 n^2)$$



- Ο DTFT του:

Δε βρίσκονται όλες αυτές οι συχνότητες σε όλο το σήμα από την αρχή ως το τέλος του!



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Αναγκαζόμαστε να πάμε σε μια άλλη προσέγγιση
  - Τον Τμηματικό Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου (**Short Time Discrete Time Fourier Transform – ST-DTFT**)

- Ορισμός:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

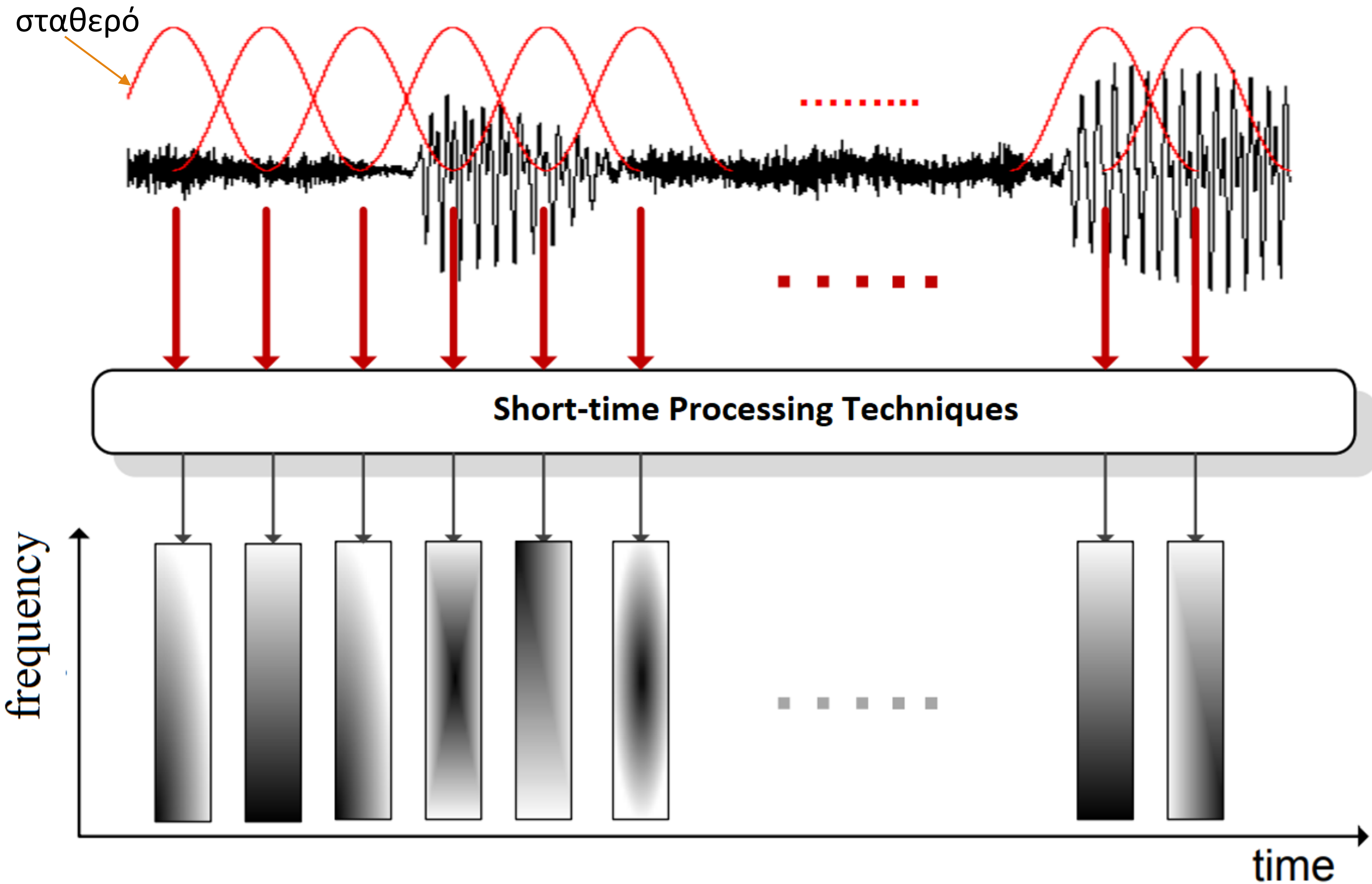
- Πρόκειται ουσιαστικά για μια «συλλογή μετασχηματισμών Fourier» διακριτού χρόνου λαμβανόμενη σε παραθυροποιημένα τμήματα σήματος με αρχή το δείγμα n, με παράθυρο $w[m]$

- Το σήμα ολισθαίνει ένα δείγμα κάθε φορά κάτω από το παράθυρο, παραθυρο-ποιείται, και στη συνέχεια λαμβάνεται ο DTFT του

- Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αυτή είναι διακριτή ως προς n και συνεχής ως προς ω
  - Όταν τη δειγματοληπτήσουμε θα έχουμε διακριτότητα και στους χώρους
  - Προφανώς η μεταβλητή ω εξακολουθεί να αφορά τη γνωστή μας συχνότητα

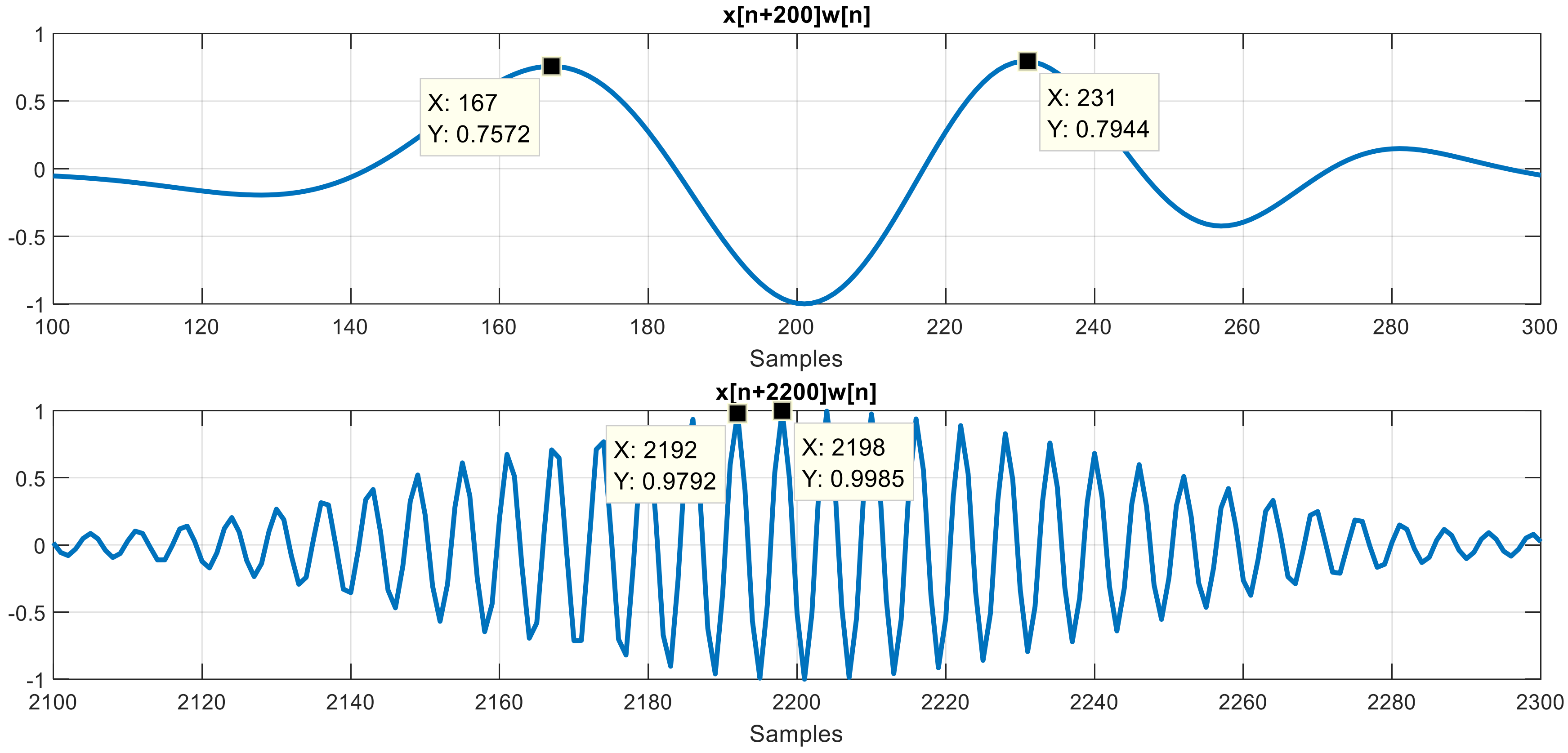
- Μια οπτικοποίηση της διαδικασίας υπολογισμού του ST-DTFT

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Αν εφαρμόσουμε τη νέα προσέγγιση στο σήμα μας, ολισθαίνοντας το σήμα κατά 100 και 2100 δείγματα (κέντρο του παραθύρου Hamming το 201-οστό και το 2201-οστό δείγμα):

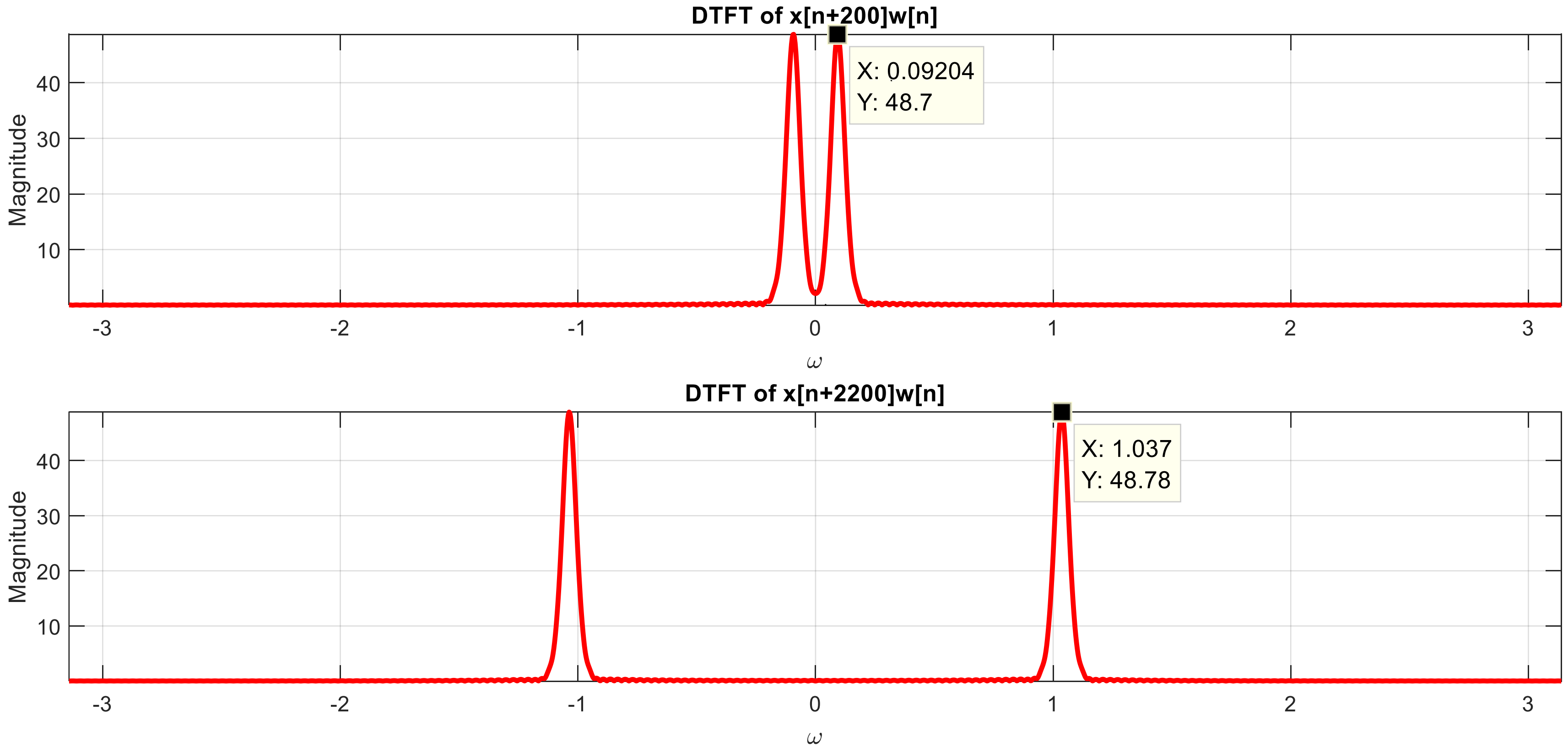


- Οι συχνότητες πρέπει να είναι (χονδρικά) κοντά στις τιμές

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{231-167} = 0.0982, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{2198-2192} = 1.0472$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Παίρνοντας αντίστοιχους 2048-DTFTs, θα δούμε την παρακάτω εικόνα στο $(-\pi, \pi]$:



- Παρατηρούμε ότι πλέον η «τοπικότητα» επανήλθε!

- Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες που προέκυψαν στο φάσμα πλάτους ανταποκρίνονται αρκετά καλά στις πραγματικές

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

```
% Plain DFT
n = 0:20000;
a0 = 75*pi*10^(-6);
% Freq. varying signal
x = cos(a0*n.^2);
NFFT = 2048;
% FFT
X = abs(fft(x, NFFT));
k = -NFFT/2:NFFT/2-1;
% Plotting
figure; plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X))
```

• Ενδεικτικός κώδικας

```
% Parts of signal
% Window
w = hamming(201);
N = 201;
start1 = 100;
fin1 = start1 + N-1;
start2 = 2100;
fin2 = start2 + N-1;
% FFTs of part of signal
X1 = abs(fft(x(start1:fin1).*w', NFFT));
X2 = abs(fft(x(start2:fin2).*w', NFFT));
% Plotting
figure;
subplot(211); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X1), 'r');
subplot(212); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X2), 'r');

% In time
figure; subplot(211); plot(start1:fin1, x(start1:fin1).*w');
subplot(212); plot(start2:fin2, x(start2:fin2).*w');
```

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Ας δούμε το παρακάτω σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \cos(a_0 n^2), & 0 \leq n \leq 20000 \\ \cos(0.2\pi n), & 20001 \leq n \leq 25000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n), & n \geq 25001 \end{cases}$$

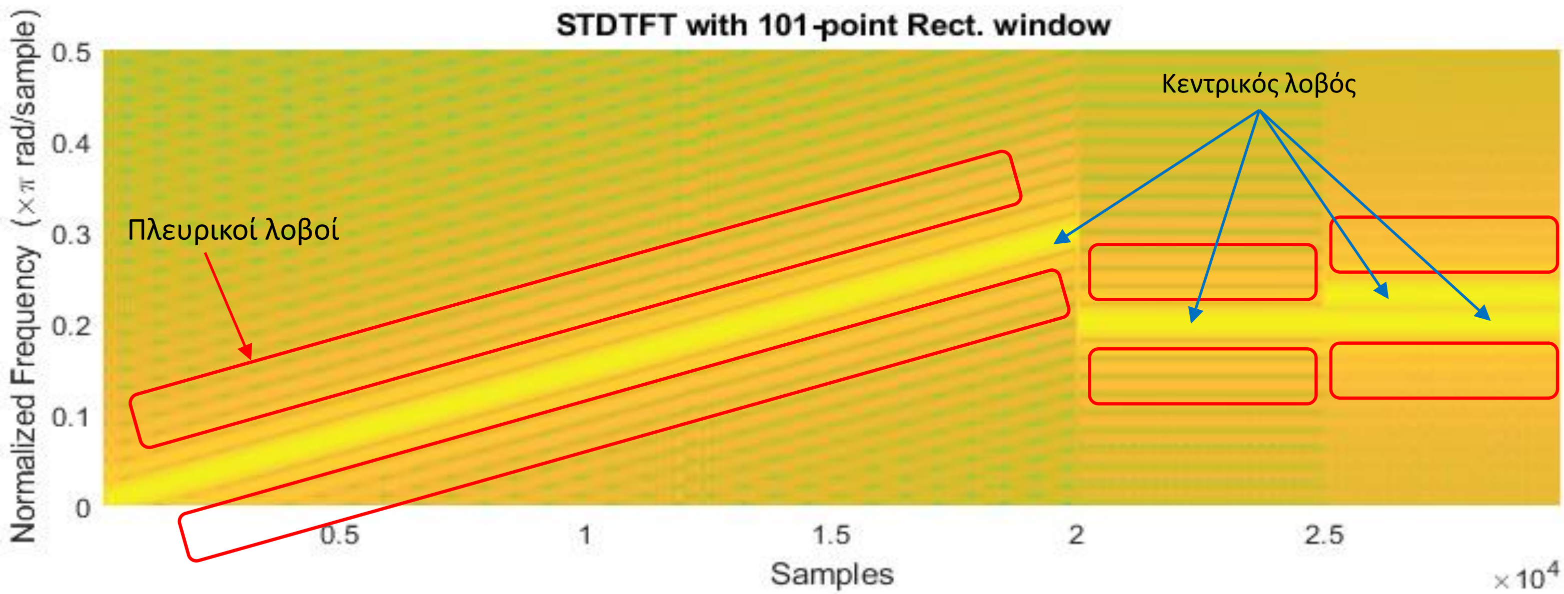
- Θα υπολογίσουμε το ST-DTFT με δυο τρόπους:
  - Με ένα παράθυρο διάρκειας 101 δειγμάτων
  - Με ένα παράθυρο διάρκειας 401 δειγμάτων

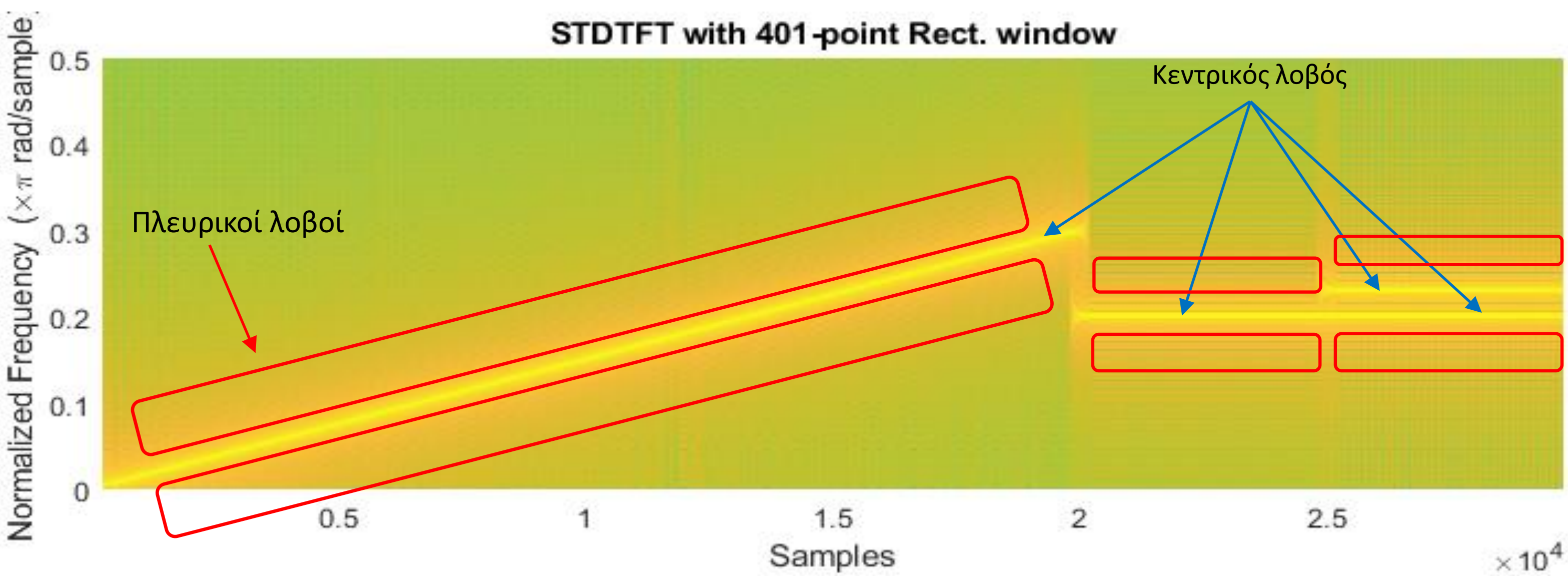
- Θα υπολογίσουμε ξανά το ST-DTFT με δυο τρόπους:
  - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 101 δειγμάτων
  - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 401 δειγμάτων

- Ας απεικονίσουμε το μέτρο του – ονομάζεται **φασματογράφημα (spectrogram)**
  - Η απεικόνιση γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα πλάτους (decibel - $20\log_{10}|X(e^{j\omega})|$)

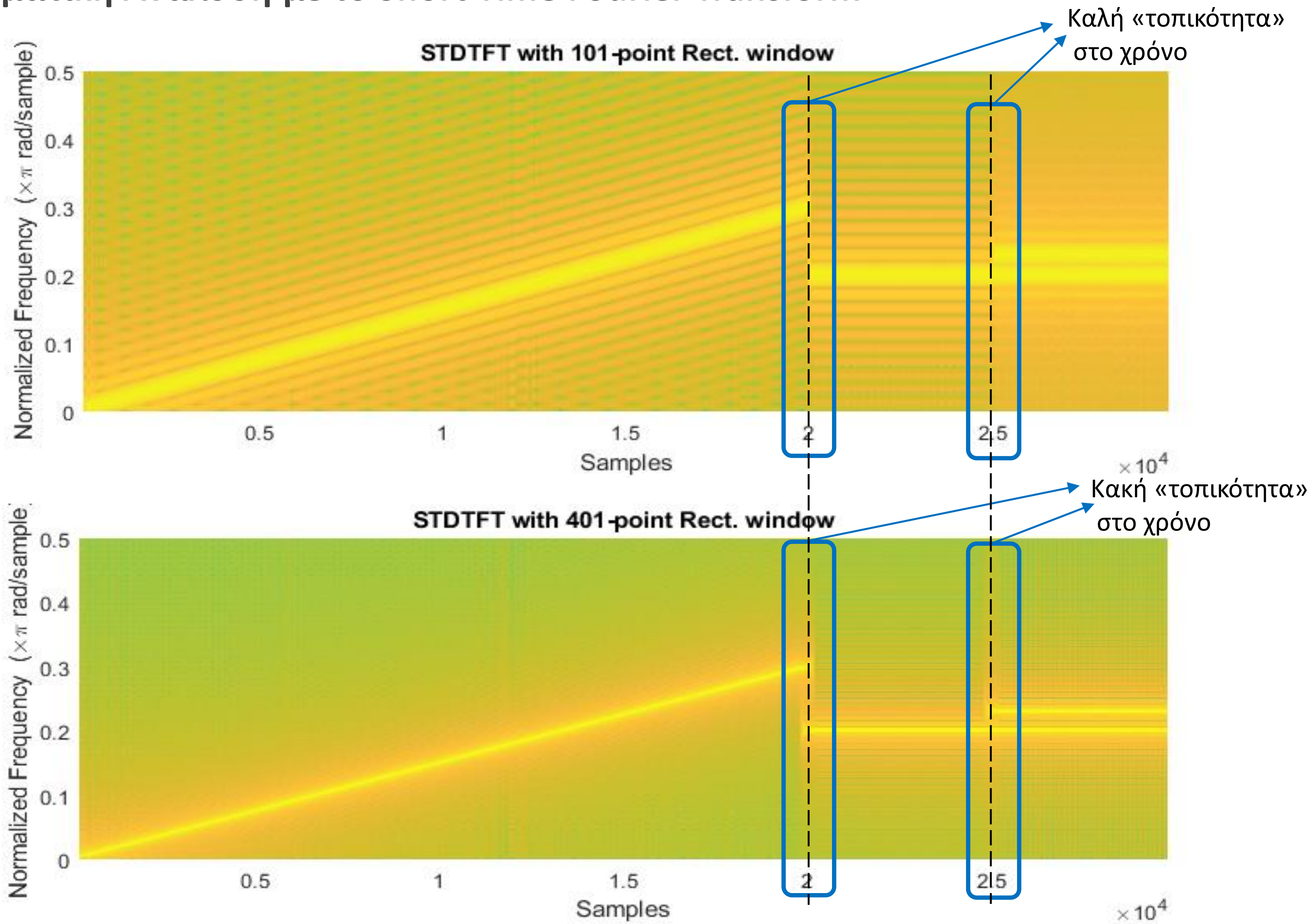
- Θα παρατηρήσουμε πολύ ενδιαφέροντα πράγματα! ☺

• **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

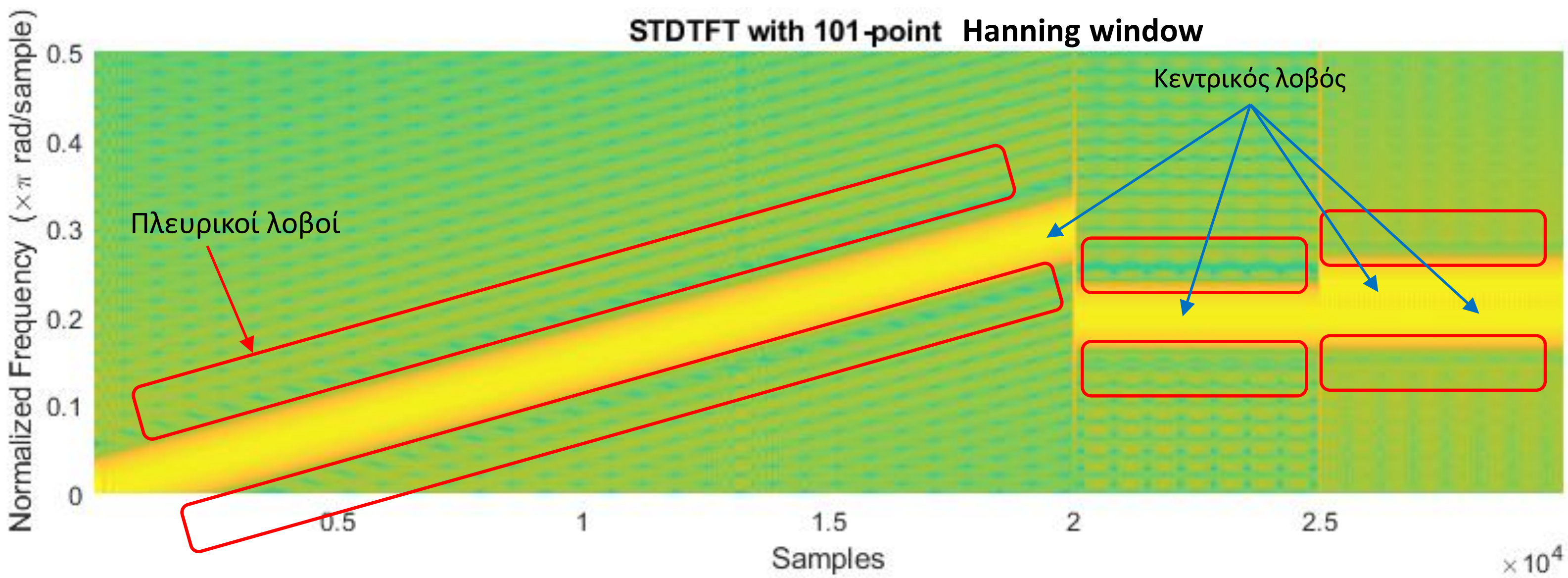


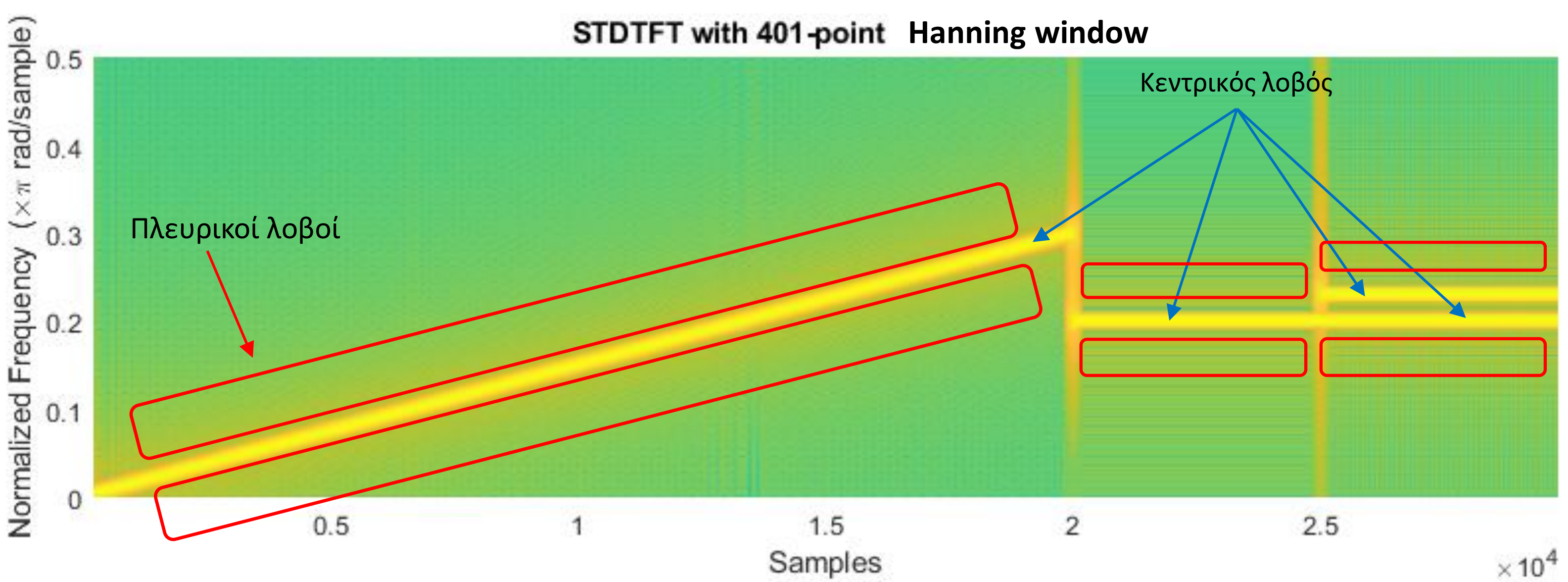


- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

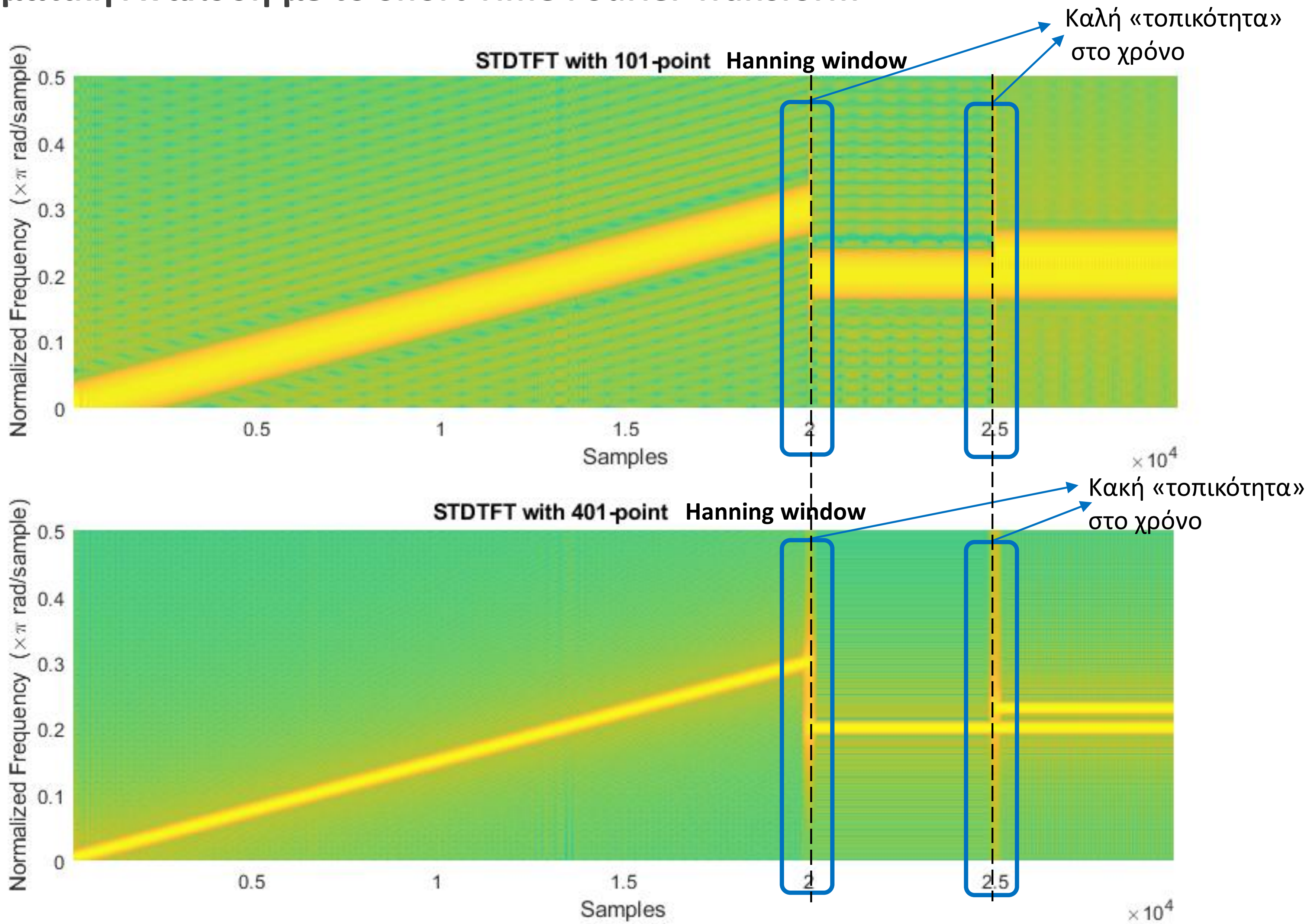


- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**





• **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**



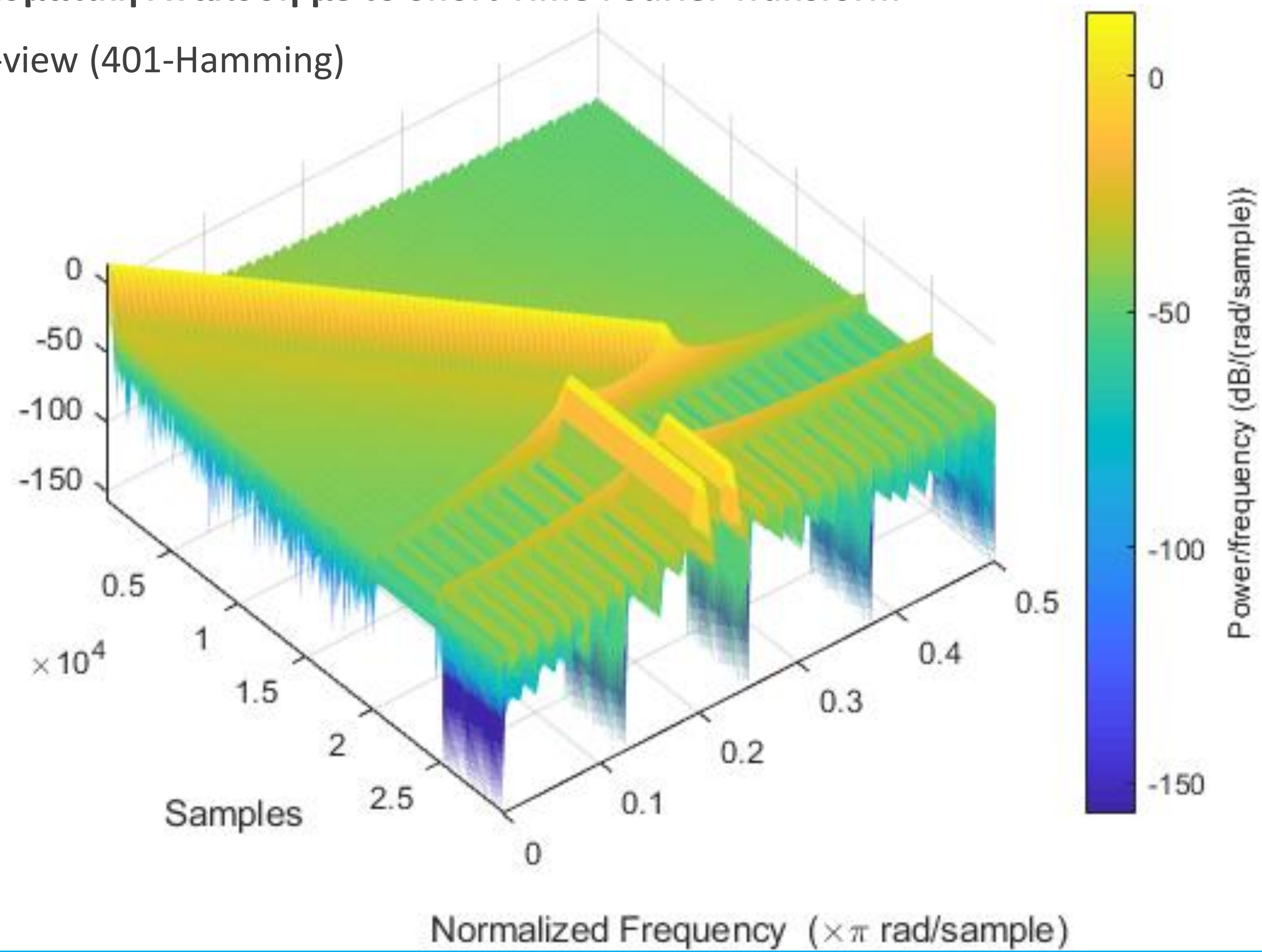
• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

```
% Signal creation
a0 = 7.5*pi*10^(-6);
x1 = cos(a0*(0:20000).^2);
x2 = cos(0.2*pi*(20001:25000));
x3 = cos(0.2*pi*(25001:30000)) + cos(0.23*pi*(25001:30000));
x = [x1 x2 x3];
```

• Ενδεικτικός κώδικας

```
% STDTFTs - actually it's a simulated STDTFT
% by ST Discrete Fourier Transform
NFFT = 512;
% Rectangular window
L = 101;
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 101-point Rect. Window');
L = 401;
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 401-point Rect. Window');
% Hamming window (default)
L = 101;
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 101-point Hamming Window');
L = 401;
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 401-point Hamming Window');
```

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- 3D-view (401-Hamming)



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- STDTFT:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο DTFT του σήματος $x[n+m]w[m]$: ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος αν το παράθυρο ανάλυσης έχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο

- Οπότε

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X[n,\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

δηλ.

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]}\int_0^{2\pi} X[n,\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

αν $w[m] \neq 0$

- Άρα αν επιλέξουμε ένα $m : w[m] \neq 0$ μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα $x[n]$ για κάθε n

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Παράδειγμα:

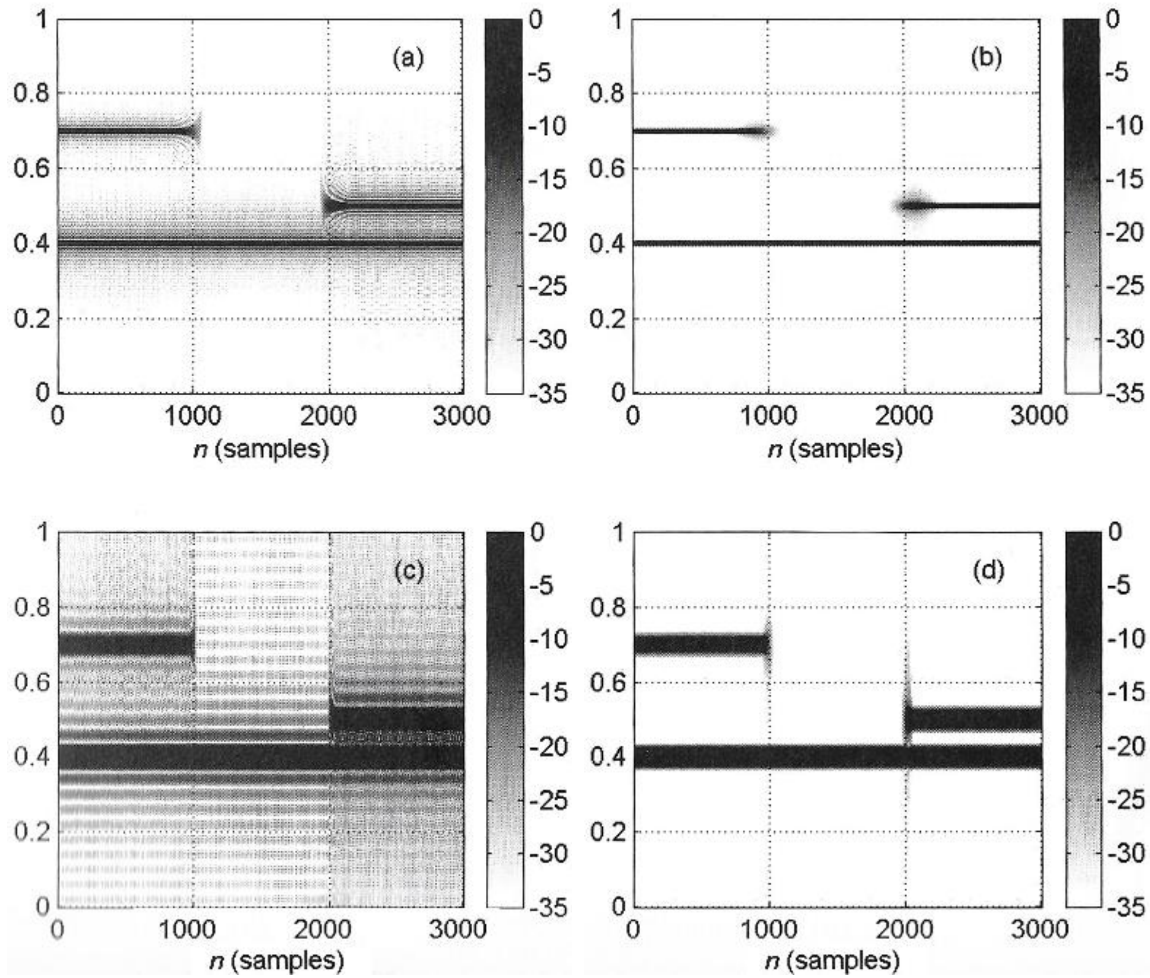
❑ Ένα αναλογικό σήμα που αποτελείται από ένα άθροισμα ημιτόνων δειγματοληπτήθηκε με $f_s = 10$ kHz. Για τα STDTFT δίπλα χρησιμοποιήθηκαν παράθυρα Hamming ή τετραγωνικά. Απαντήστε στις ερωτήσεις:

i. Σε ποιες εικόνες χρησιμοποιήθηκε τετραγωνικό παράθυρο?

ii. Ποιο/α ζεύγος/η έχουν περίπου την ίδια ανάλυση στη συχνότητα?

iii. Ποιος STDTFT έχει το μικρότερο παράθυρο ανάλυσης στο χρόνο?

iv. Γράψτε μια εξίσωση για το σήμα που δειγματοληπτήθηκε, η οποία παρήγαγε τα διπλανά STDTFT.



• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

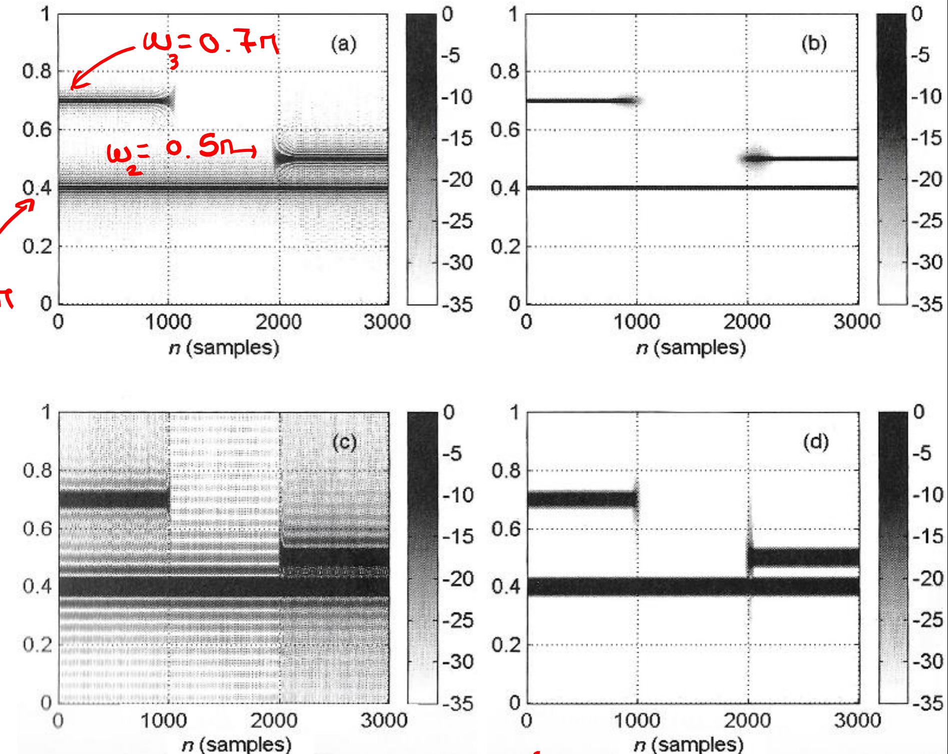
i. Στις περιπτώσεις (a), (c) γιατί οι πλευρικοί λοβοί είναι ισχυροί.

ii. a + b, c + d

μεγάλο παράθυρο — μικρό παράθυρο

iii. Τα (c), (d) έχουν μικρό παράθυρο στο χρόνο, ίδιας περίπου διάρκειας.

$\omega_1 = 0.4\pi$



iv.

$\omega_1 = 0.4\pi \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi f_1}{f_s} \Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1 f_s}{2\pi} = \frac{4000\pi}{2\pi} = 2\,\text{kHz}$

$$x_c(t) = \begin{cases} A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + A_2 \cos\left(0.7\pi \times 10^4 t + \phi_2\right), & 0 \le t \le 1000 \times 10^{-4} \\ A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + 0, & 0.1 \le t < 0.2 \\ A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + A_3 \cos\left(0.5\pi \times 10^4 t + \phi_3\right), & 0.2 \le t. \end{cases}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ