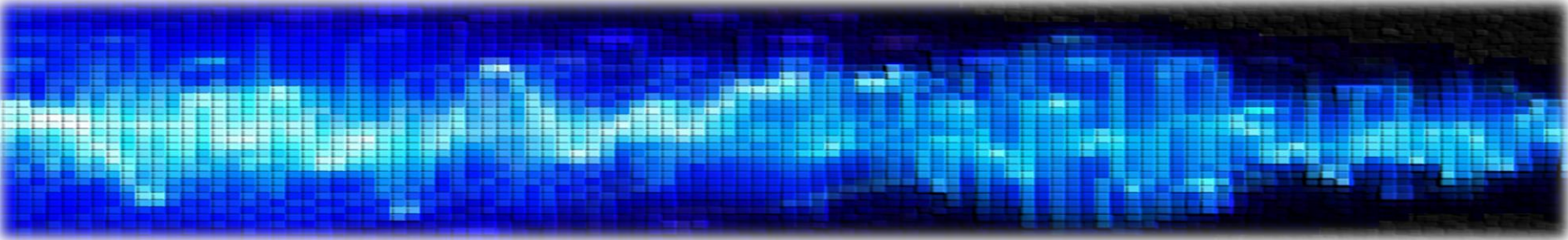
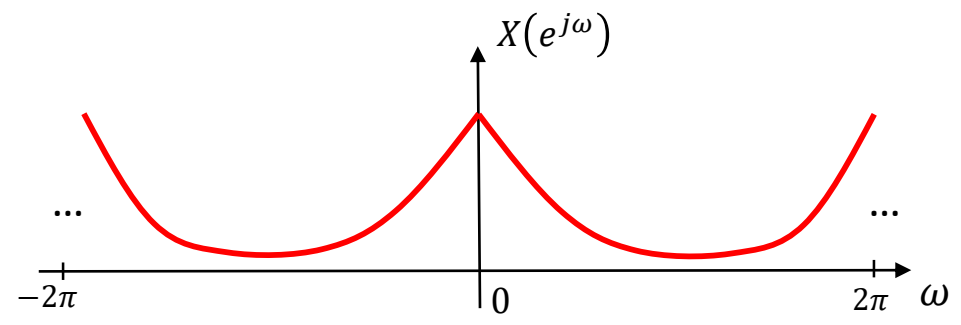
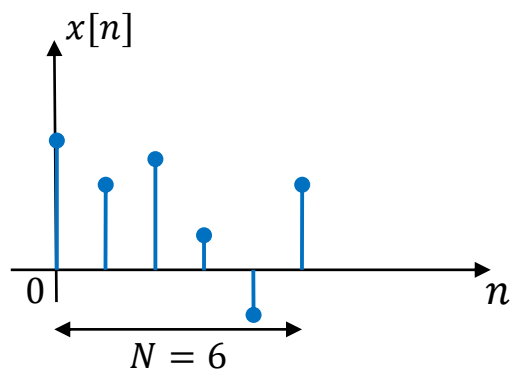


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

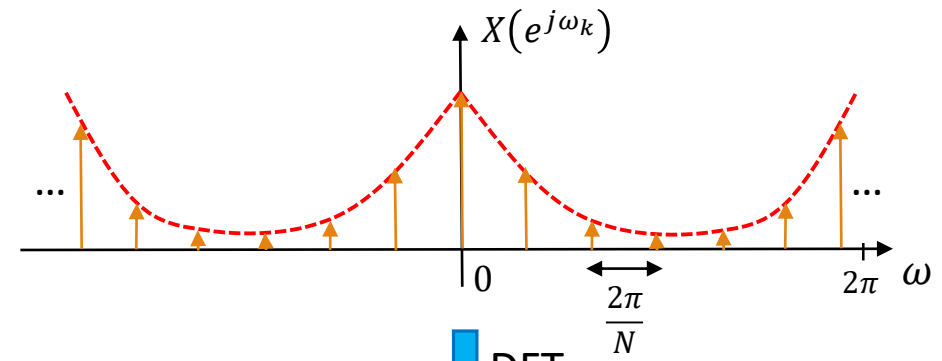
ΔΙΑΛΕΞΗ 26^Η

- 
- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (cont'd)
 - Φασματική Ανάλυση

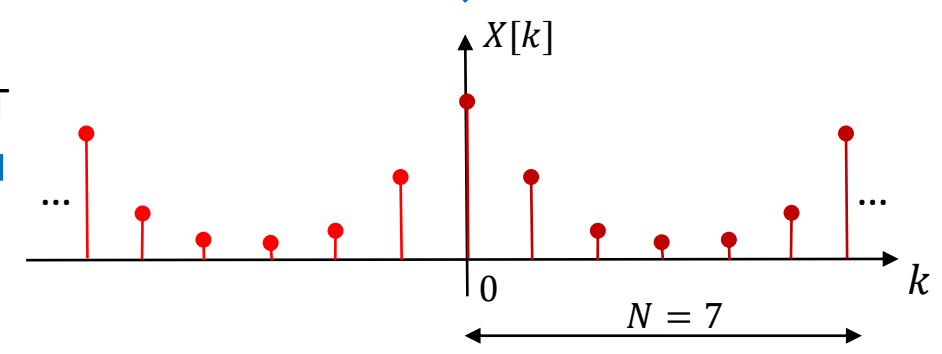
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (review...)



Δειγματοληψία
 $N = 7$ δείγματα σε μια περίοδο 2π



DFT

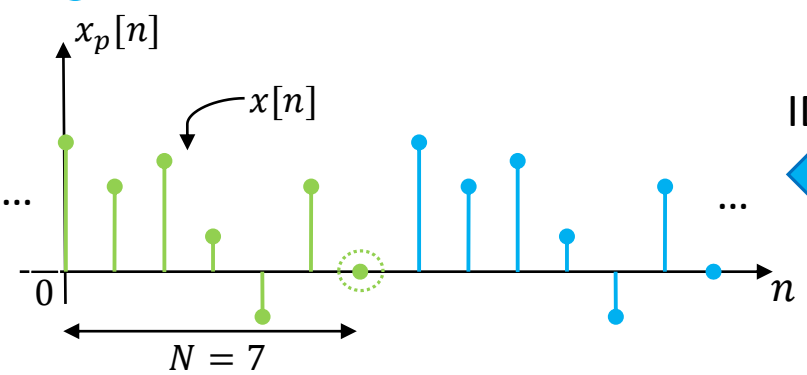


DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

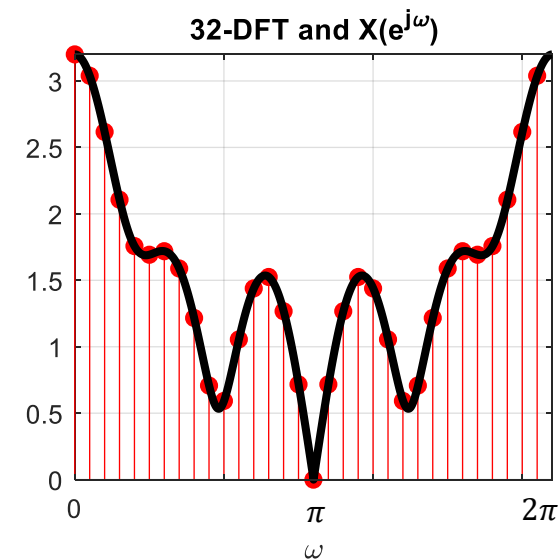
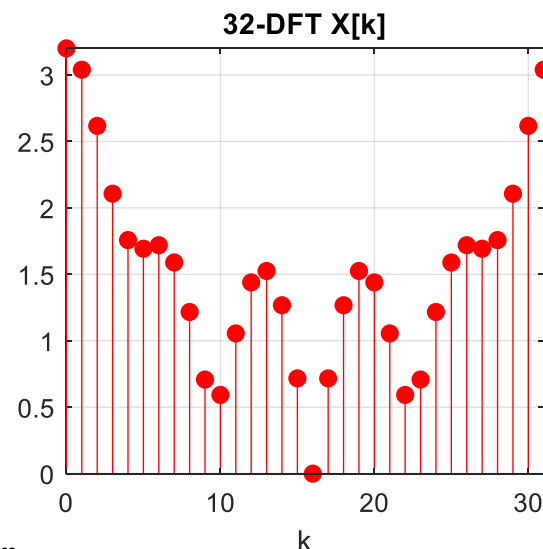
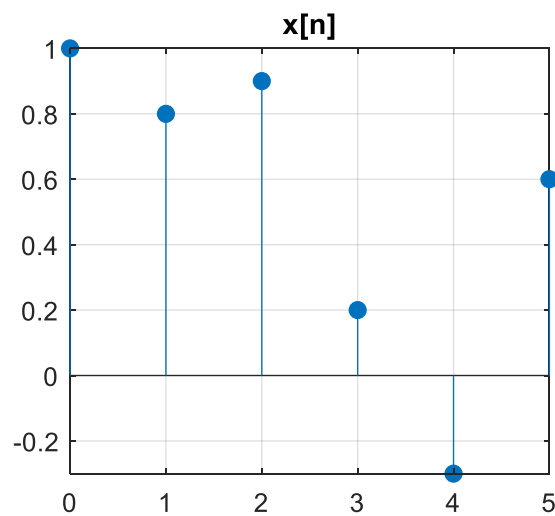
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

IDFT



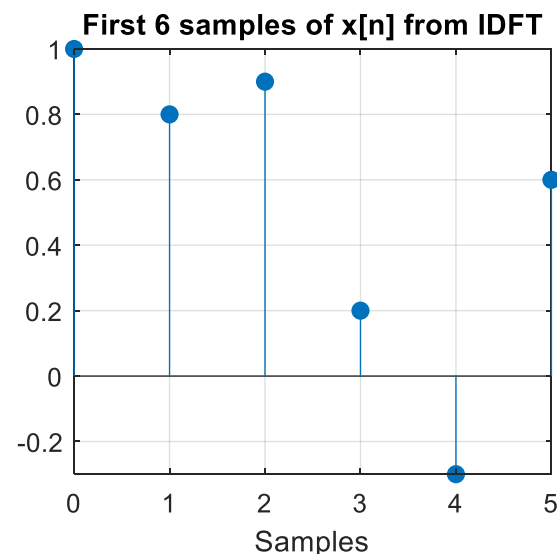
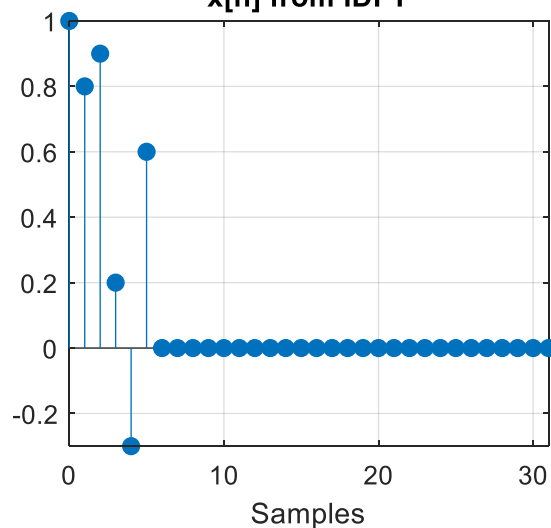
- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (review...)

$$X[k] = \sum x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, N = 32, k = 0, \dots, 31$$



$$x[n] = \frac{1}{N} \sum X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, N = 32, n = 0, \dots, 31$$

x[n] from IDFT



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (review...)

```
% Signal
x = [1 0.8 0.9 0.2 -0.3 0.6];
% 32-DFT
N = 32;
X = fft(x, N);
% Plots
figure; subplot(231);
stem(0:5, x, 'filled'); grid; xlabel('Samples'); title('x[n]'); axis tight;
subplot(232);
stem(0:N-1, abs(X), 'filled', 'r'); axis tight;
grid; xlabel('k'); title('32-DFT X[k]');
subplot(233);
% Simulating X(exp(jw))
Nsim = 2048;
Xw = fft(x, Nsim);
w = linspace(0,N, Nsim);
stem(0:N-1, abs(X), 'r', 'filled');
title('32-DFT and X(e^{j\omega})'); grid; xlabel('\omega'); axis tight;
hold on; plot(w, abs(Xw), 'k', 'LineWidth', 3);
% Inverse 32-DFT
xinv = ifft(X, N);
% Plots
subplot(234); stem(0:N-1, xinv, 'filled'); grid;
axis tight; xlabel('Samples'); title('x[n] from IDFT');
subplot(235); stem(0:5, xinv(1:6), 'filled'); grid;
axis tight; xlabel('Samples'); title('First 6 samples of x[n] from IDFT');
```

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (review...)
- Η εγγενής περιοδικότητα του Διακριτού Μετασχ. Fourier οδηγεί σε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά το σήμα στο χρόνο αλλά και στη συχνότητα

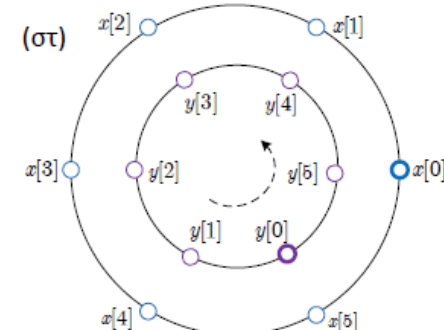
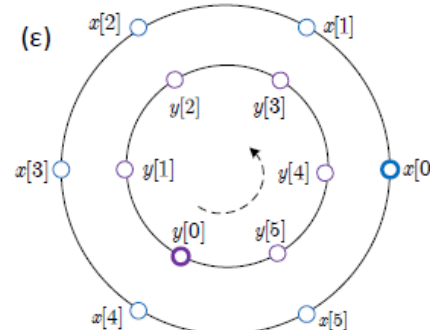
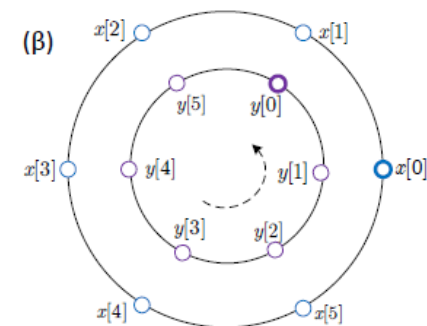
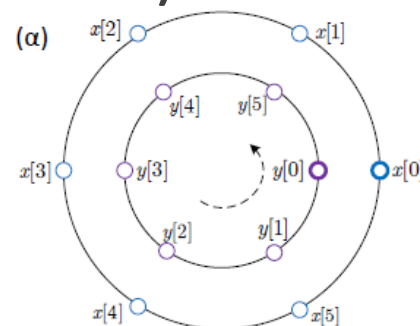
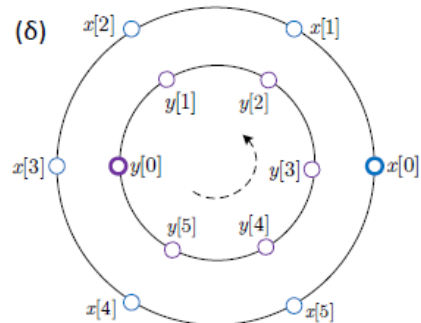
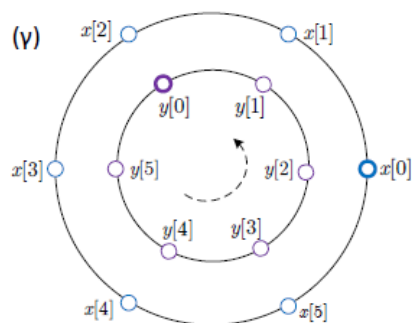
Ιδιότητες Διακριτού Μετασχ. Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Διακριτός Μετασχ. Fourier
	$x[n]$ με διάρκεια N $y[n]$ με διάρκεια N	$X[k]$ $Y[k]$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX[k] + BY[k]$
Χρονική μετατόπιση	$x[((n - n_0))_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi Mn/N} x[n]$	$X[(k - M)_N]$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[(-n)_N]$	$X^*[(-k)_N]$
Δυϊκότητα	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
Συνέλιξη	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n - m)_N]$	$X[k]Y[k]$
Πολλαπλασιασμός	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X[l]Y[(k - l)_N]$
Συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X[k] = X^*[(-k)_N], \\ \text{Re}\{X[k]\} = \text{Re}\{X[(-k)_N]\}, \\ \text{Im}\{X[k]\} = -\text{Im}\{X[(-k)_N]\}, \\ X[k] = X[(-k)_N] , \\ \angle X[k] = -\angle X[(-k)_N] \end{cases}$
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] ^2$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (review...)

κυκλική συνέλιξη

$$x[n] = \{1, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



$$(\alpha') \quad z[0] = y[0]x[0] + y[5]x[1] + y[4]x[2] + y[3]x[3] + y[2]x[4] + y[1]x[5] = 1$$

$$(\beta') \quad z[1] = y[1]x[0] + y[0]x[1] + y[5]x[2] + y[4]x[3] + y[3]x[4] + y[2]x[5] = \frac{3}{2}$$

$$(\gamma') \quad z[2] = y[2]x[0] + y[1]x[1] + y[0]x[2] + y[5]x[3] + y[4]x[4] + y[3]x[5] = \frac{3}{2}$$

$$(\delta') \quad z[3] = y[3]x[0] + y[2]x[1] + y[1]x[2] + y[0]x[3] + y[5]x[4] + y[4]x[5] = \frac{3}{2}$$

$$(\epsilon') \quad z[4] = y[4]x[0] + y[3]x[1] + y[2]x[2] + y[1]x[3] + y[0]x[4] + y[5]x[5] = \frac{1}{2}$$

$$(\zeta') \quad z[5] = y[5]x[0] + y[4]x[1] + y[3]x[2] + y[2]x[3] + y[1]x[4] + y[0]x[5] = 0$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Εμάς όμως μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η απλή (**γραμμική**) συνέλιξη μεταξύ απεριοδικών σημάτων!
- Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη συνέλιξη από την κυκλική συνέλιξη?
- Θυμηθείτε ότι η ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης μας λέει ότι αν ένα απεριοδικό σήμα $x[n]$ έχει «διάρκεια» M δείγματα ($0 \leq n \leq M - 1$), και ένα άλλο απεριοδικό σήμα $y[n]$ έχει «διάρκεια» N δείγματα ($0 \leq n \leq N - 1$), τότε η συνέλιξη τους $c_{xy}[n]$ έχει «διάρκεια» $M + N - 1$ ($0 \leq n \leq M + N - 2$)
- Άρα μπορούμε να απομονώσουμε το αποτέλεσμα της **γραμμικής** συνέλιξης από την κυκλική αν «κόψουμε» το κομμάτι της κυκλικής συνέλιξης στο ($0 \leq n \leq M + N - 2$)!
- Βασική προϋπόθεση για να ισχύει αυτό είναι να έχουμε δειγματοληπτήσει το Μετασχ. Fourier $C_{xy}(e^{j\omega})$ σε $L \geq M + N - 1$ σημεία, δηλ. να έχουμε υπολογίσει το Διακριτό Μετασχ. Fourier **τουλάχιστον** ($M + N - 1$) σημείων!
 - Αποφεύγουμε το time aliasing
- Έτσι, έχουμε έναν έτοιμο και γρήγορο αλγόριθμο για τον υπολογισμό της συνέλιξης δυο απεριοδικών σημάτων μέσω του Διακριτού Μετασχ. Fourier!

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Γραμμική συνέλιξη δυο απεριοδικών σημάτων $x[n]$, $y[n]$ διάρκειας M και N μέσω DFT:

1. Κάνουμε zero padding στα δυο σήματα ώστε να έχουν διάρκεια τουλάχιστον

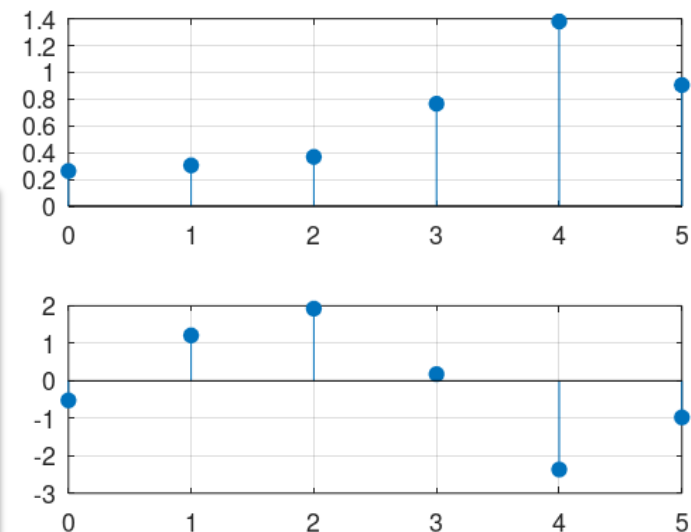
$$L = M + N - 1$$

2. Εφαρμόζουμε Διακριτό Μετασχ. Fourier L σημείων στα δυο σήματα $\rightarrow X[k], Y[k]$

3. Πολλαπλασιάζουμε τους Διακριτούς μετασχ. Fourier μεταξύ τους: $X[k]Y[k]$

4. Εφαρμόζουμε αντίστροφο Διακριτό Μετασχ. Fourier και κρατάμε L δείγματα του αποτελέσματος

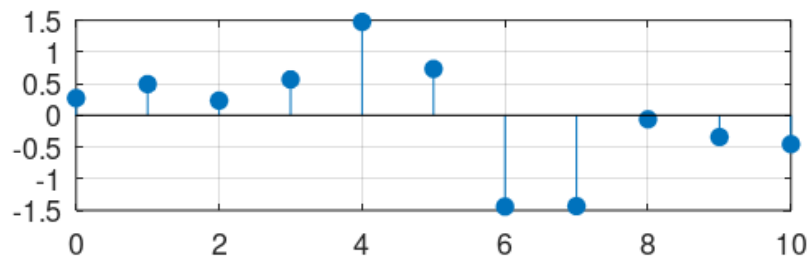
- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
- Ενδεικτικός κώδικας



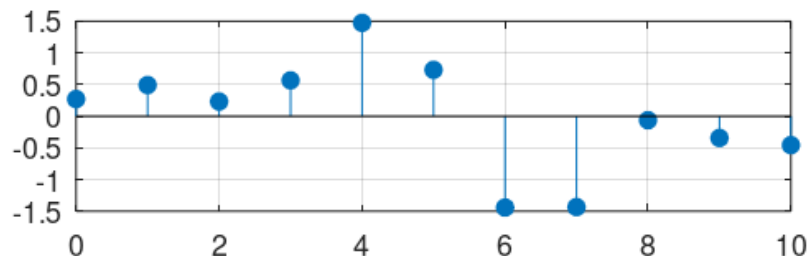
```
% Random signals of N = 6
x = randn(1, 6);
h = randn(1, 6);
n = 0:5;
% Plotting
figure;
subplot(211); stem(n, x); subplot(212); stem(n, h);
% Convolution length
ConvLenMin = 11;
```

```
% Zero-padding
xzp = [x zeros(1, ConvLenMin-length(x))];
hzp = [h zeros(1, ConvLenMin-length(h))];
% Taking DFT (default, @ N points)
X = fft(xzp);
H = fft(hzp);
% Multiply
Y = X.*H;
% Inverse DFT (circular convolution)
yzp = ifft(Y);
% Linear Convolution
y = conv(x, h);
% Plotting
figure; subplot(211); stem(0:10, yzp);
subplot(212); stem(0:10, y);
```

IFFT based convolution



Classic convolution



- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier – **review**

- Διακριτός Μετασχ. Fourier (DFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier (IDFT):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Ο DFT θεωρεί ότι το σήμα $x[n]$ είναι η βασική περίοδος ενός N -περιοδικού σήματος

- Το πλήθος N των συντελεστών του DFT (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT σε συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες του $2\pi/N$) πρέπει να είναι **όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**

- Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα

- **Πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- Ιδιότητες παρόμοιες με του Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου...

- ... αλλά με σημαντικές διαφορές λόγω N -περιοδικότητας
- Κυκλική συνέλιξη, χρονική μετατόπιση, κ.α.

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Στο εξής θα γράφουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier ως **DFT** και το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ως **DTFT**, για συντομία
- Πρόβλημα: πολλή από τη θεωρία που μάθαμε για σήματα άπειρης διάρκειας έχει πρόβλημα εφαρμογής στην πράξη
 - Άπειρη διάρκεια!!! 😊
- Στην πράξη, έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα/κομμάτι ενός σήματος άπειρης διάρκειας
 - Για παράδειγμα, έχουμε μόνο N δείγματα ενός ημιτόνου
- Μπορούμε όμως να μελετήσουμε τέτοια σήματα υποθέτοντας ότι το άπειρης διάρκειας σήμα $x[n]$ πολλαπλασιάστηκε με ένα πεπερασμένης διάρκειας (N δειγμάτων) παράθυρο $w[n]$, και το αποτέλεσμα της πράξης είναι αυτό που έχουμε στα χέρια μας
- Άρα εμείς έχουμε το

$$\hat{x}[n] = x[n]w[n]$$

και η εικόνα του στο χώρο του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου είναι η

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας το κάνουμε πιο συγκεκριμένο: μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συχνότητα ενός ημιτόνου από ένα μόνο τμήμα του?
- Έστω το περιοδικό σήμα

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X(e^{j\omega}) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

- Η «τετραγωνικώς» παραθυροποιημένη ☺ έκδοση του θα έχει DTFT

$$\text{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)})$$

- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα έχουμε το μετασχ. Fourier του παραθύρου!
 - Ο οποίος ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet**

- Άρα θα δειγματοληπτήσουμε στη συχνότητα το σήμα

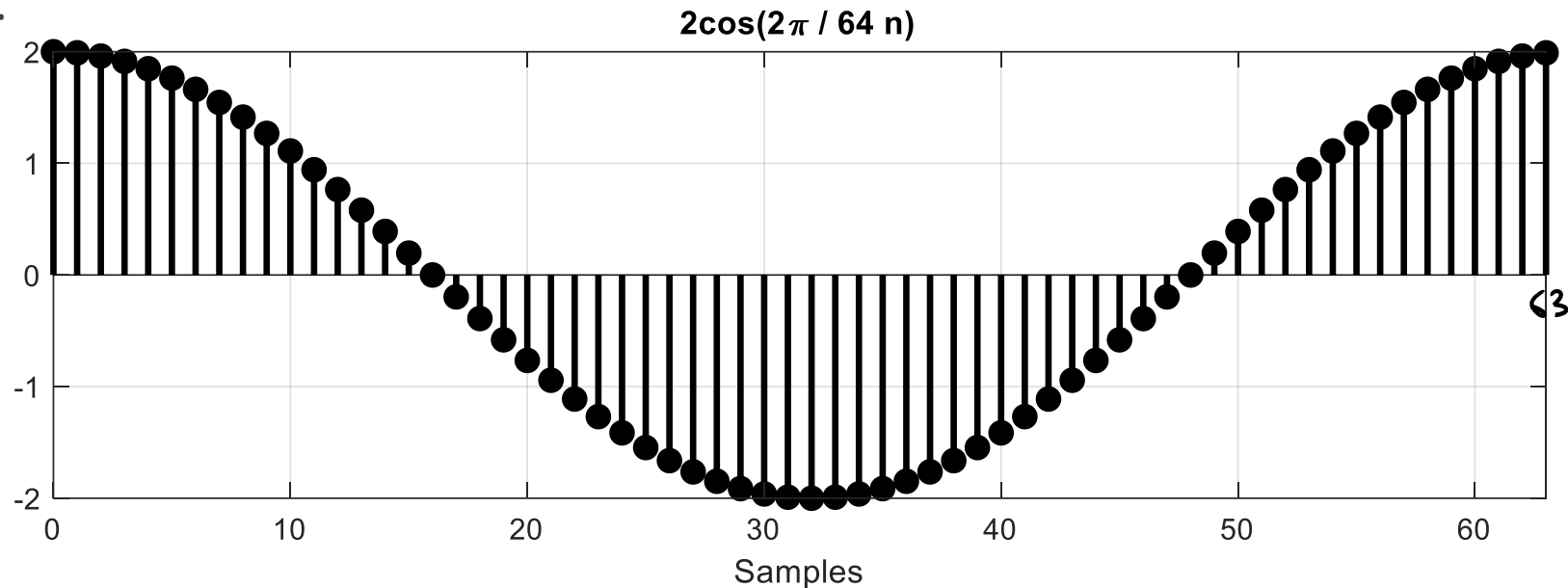
$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)})$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = 0$, $A_1 = 2$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

- Έστω ότι $\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$ και επιλέγουμε να πάρουμε ακριβώς 64 δείγματα του σήματος στο χρόνο, δηλ.

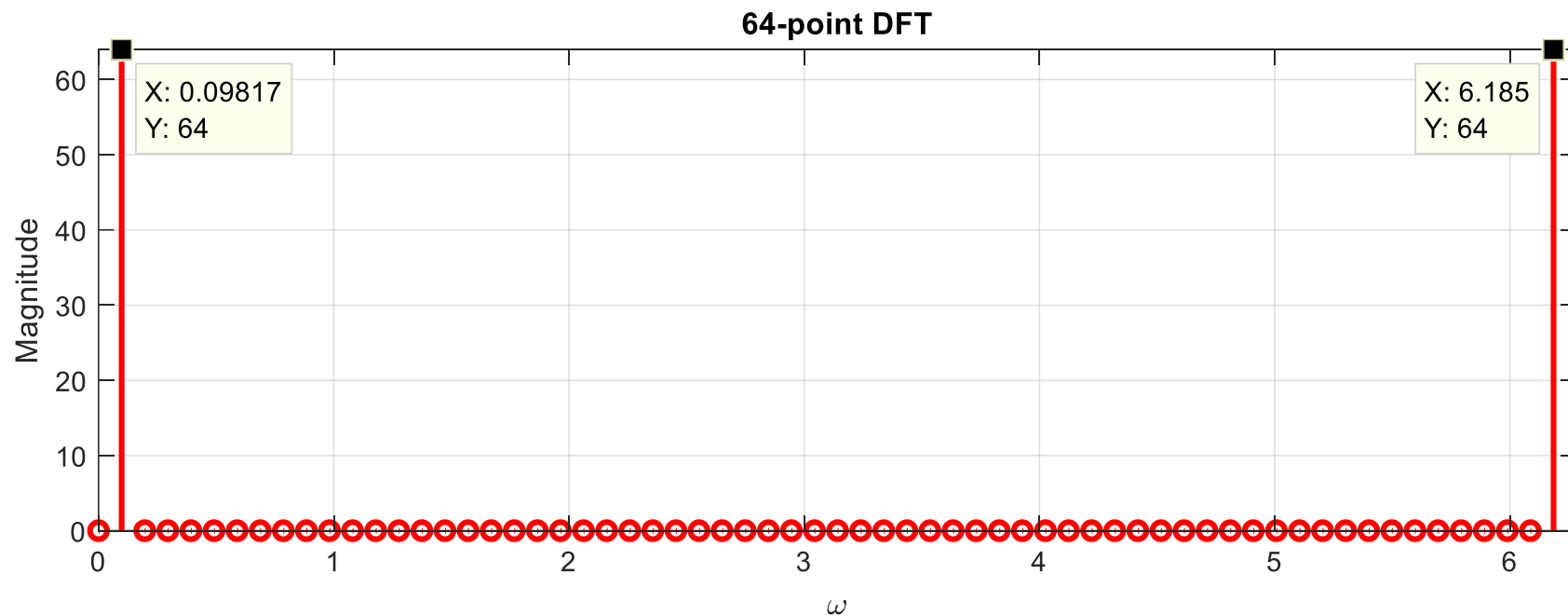


- Παρατηρήστε ότι πήραμε ακριβώς μια περίοδο του περιοδικού ημιτόνου (περίοδος $N = 64$)
- Ας κάνουμε DFT επάνω στο σήμα αυτό...

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{X}[k] = W(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}) + W(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)})$$

- Η εικόνα που παίρνουμε είναι αυτή:

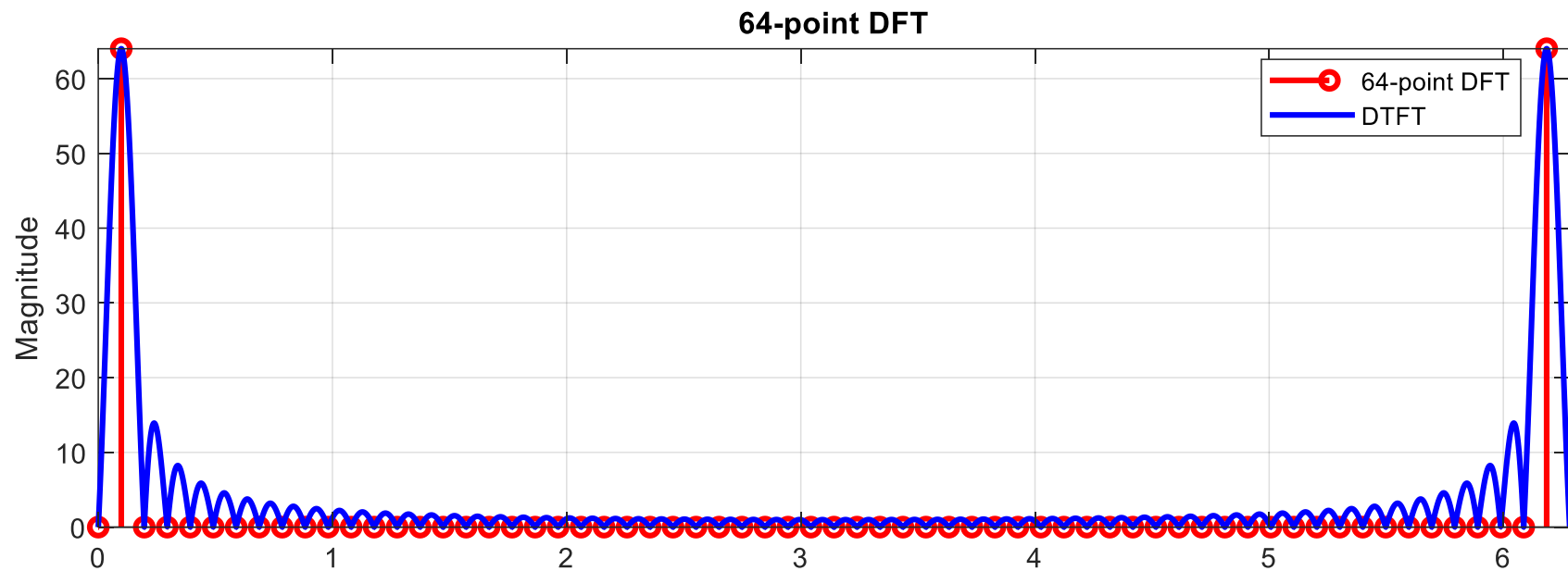


- Παρατηρήστε ότι έχουμε λάβει μη μηδενικές τιμές **ακριβώς** στις συχνότητες $2\pi/64$ και $2\pi - \frac{2\pi}{64}$!!
- Σαν να δειγματοληπτήσαμε ακριβώς στις υποτιθέμενες συναρτήσεις Δέλτα που αντιστοιχούν στο ημίτονο μας!
 - Γιατί συνέβη αυτό?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

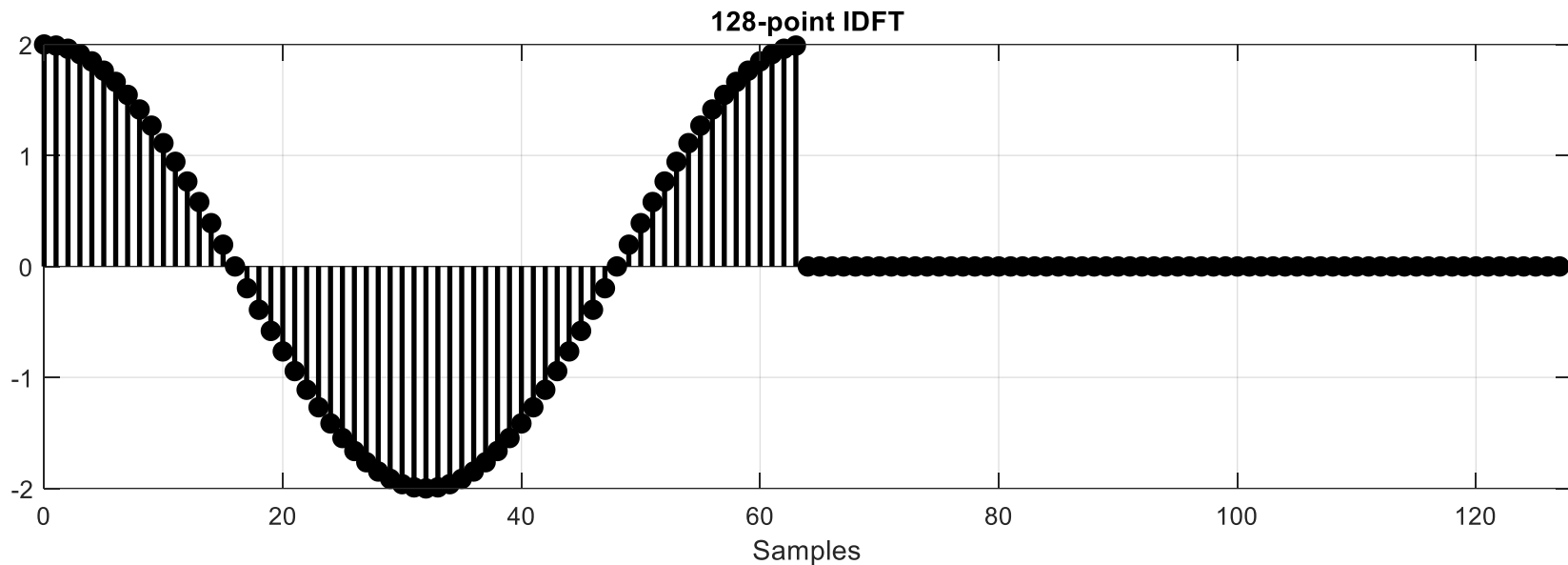
$$\hat{X}[k] = W(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}) + W(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)})$$

- Ας βάλουμε τον DTFT επάνω στο ίδιο γράφημα:



- Βλέπετε ότι δειγματοληπτήσαμε «βέλτιστα» - όσον αφορά τη συχνότητα του ημιτονοειδούς – τον DTFT!
- Τι θα συνέβαινε αν δειγματοληπτούσαμε με περισσότερα από 64 δείγματα στη συχνότητα?
- Θα είχαμε zero-padded σήμα στο χρόνο!

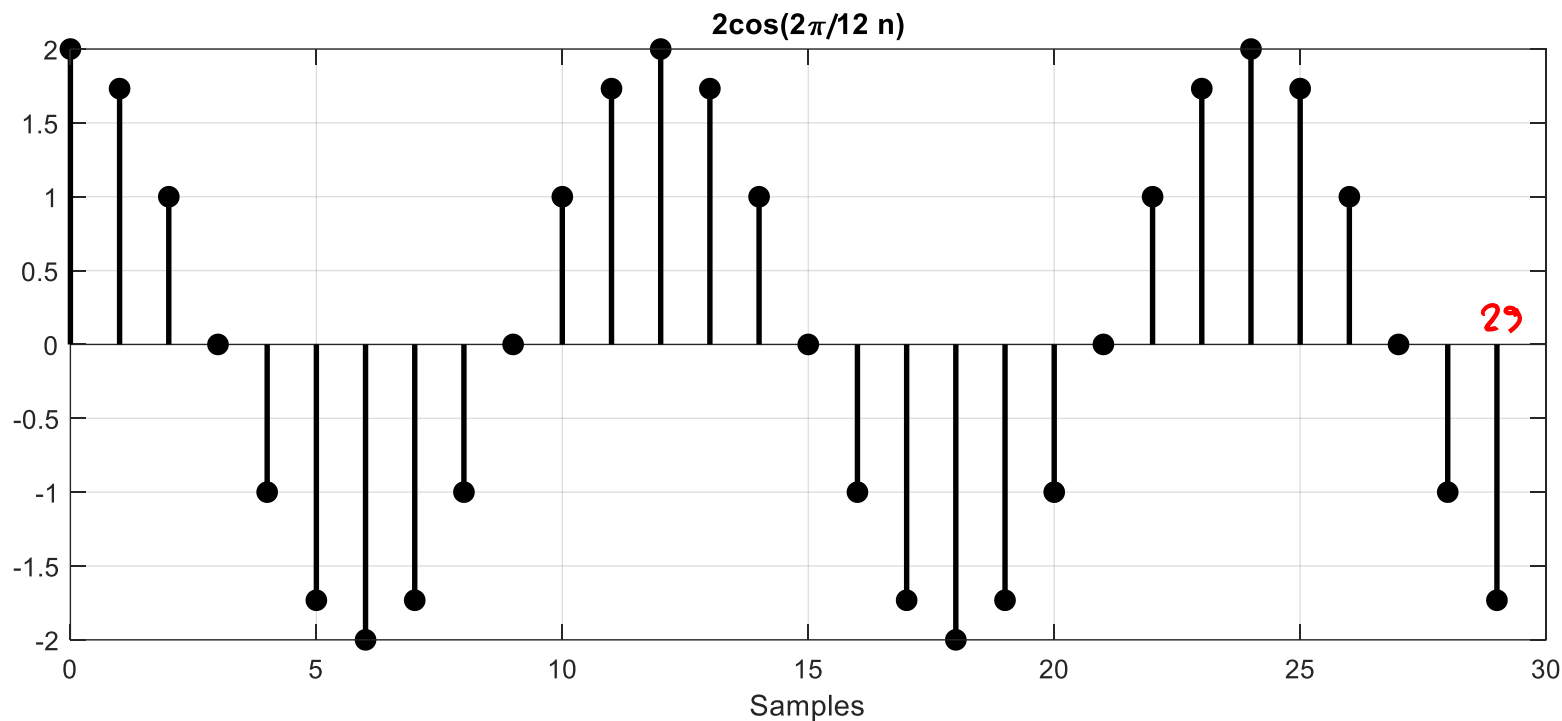
- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Το zero-padding οδηγεί σε ασυνέχεια!



- Μια τέτοια ασυνέχεια χρειάζεται κι άλλες συχνότητες για να αναπαρασταθεί
 - Πράγματι, τέτοιες συχνότητες θα πάρουμε αν πάρουμε παραπάνω δείγματα του DFT, δηλ. δείγματα σε συχνότητες διαφορετικές της $\frac{2\pi}{64}$
- Επιπλέον, επειδή δώσαμε ακριβώς μια περίοδο του ημιτόνου στον DFT, αυτός θεώρησε ότι το σήμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα **ΜΙΑΣ** συχνότητας $\frac{2\pi}{64}$, και εμφάνισε μόνο **μια** μη μηδενική τιμή σε αυτή τη συχνότητα!

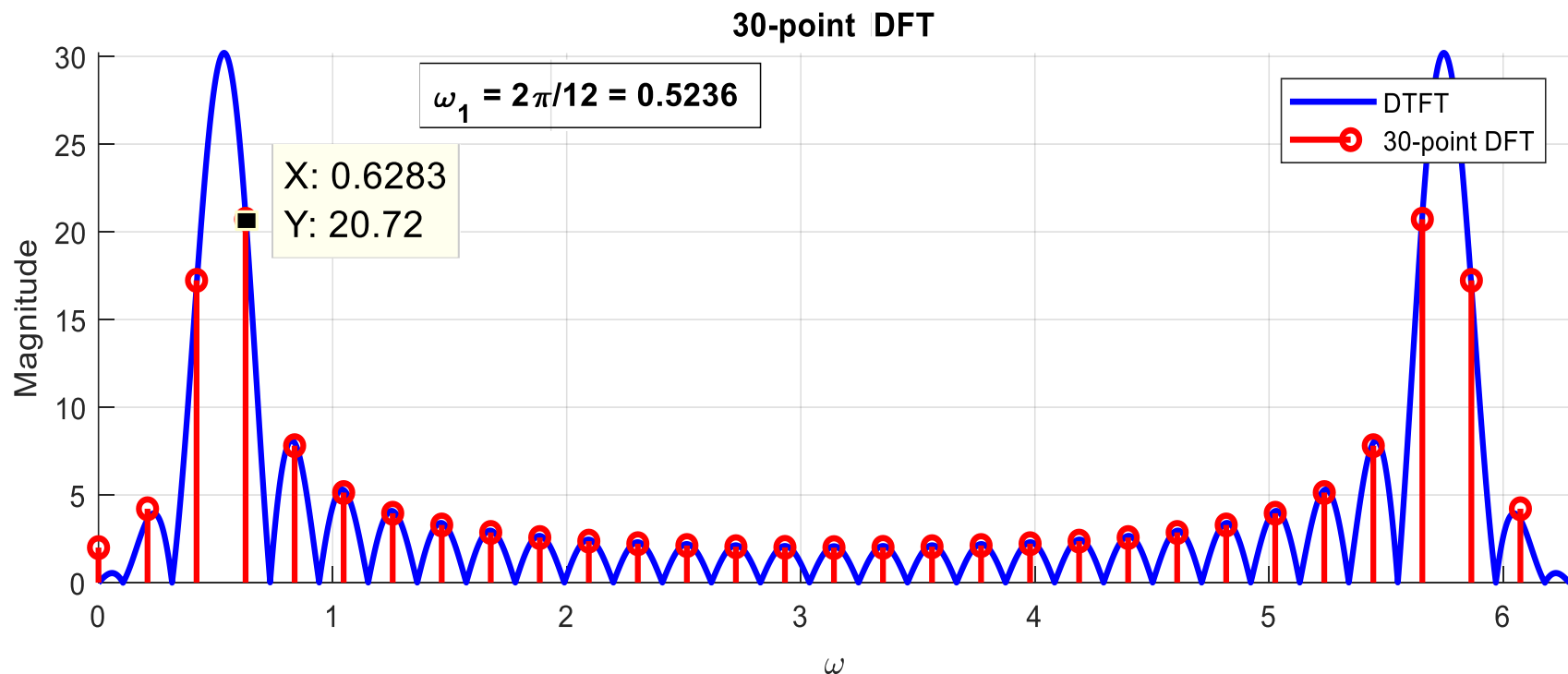
• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Δεν μπορούμε όμως να ξέρουμε εκ των προτέρων την περίοδο ενός σήματος που θέλουμε να αναλύσουμε (ειδικά όταν αποτελείται από άθροισμα πολλών άγνωστων σημάτων)
- Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι – σε όμοιο παράδειγμα – τα δείγματα μας δεν αντιστοιχούν σε μια περίοδο αλλά σε ένα τυχαίο αριθμό, ας πούμε 2.5 περιόδους
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$, για λόγους αισθητικούς (απεικόνισης)



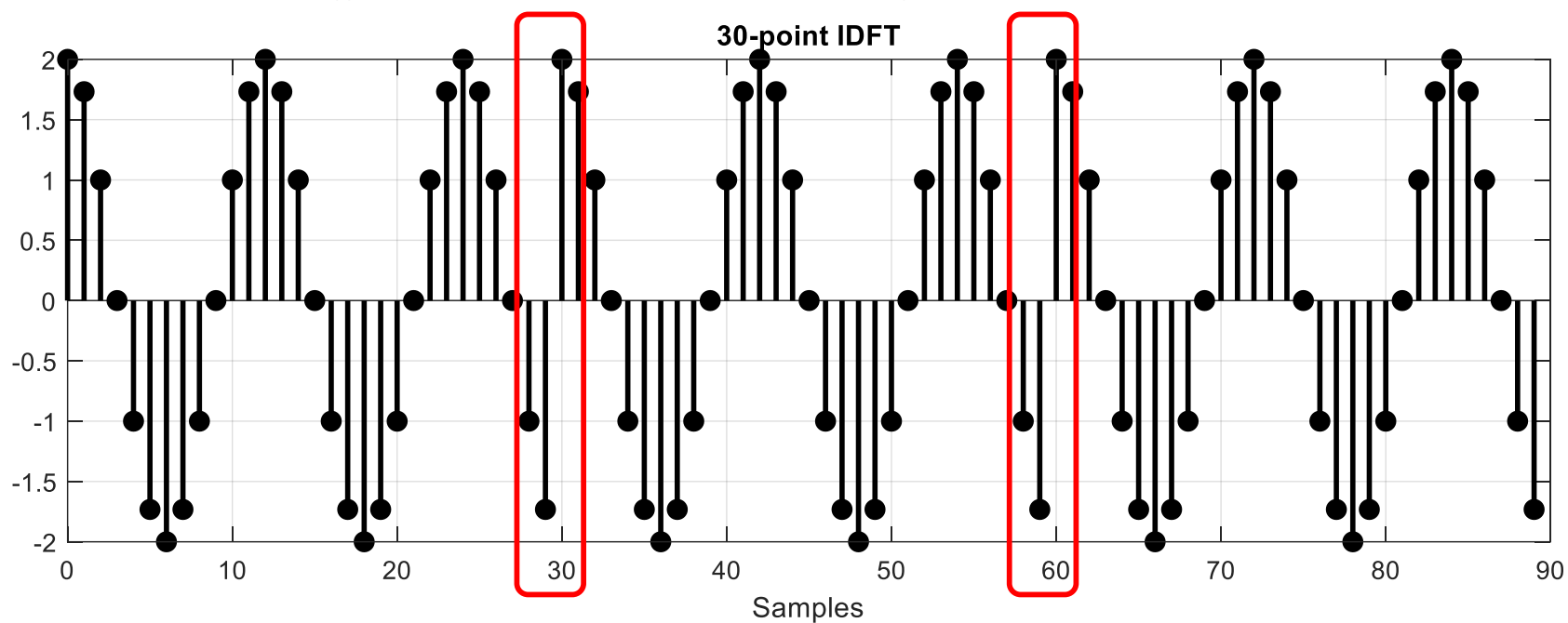
• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Ο DFT σε 30 σημεία, μαζί με τον DTFT, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



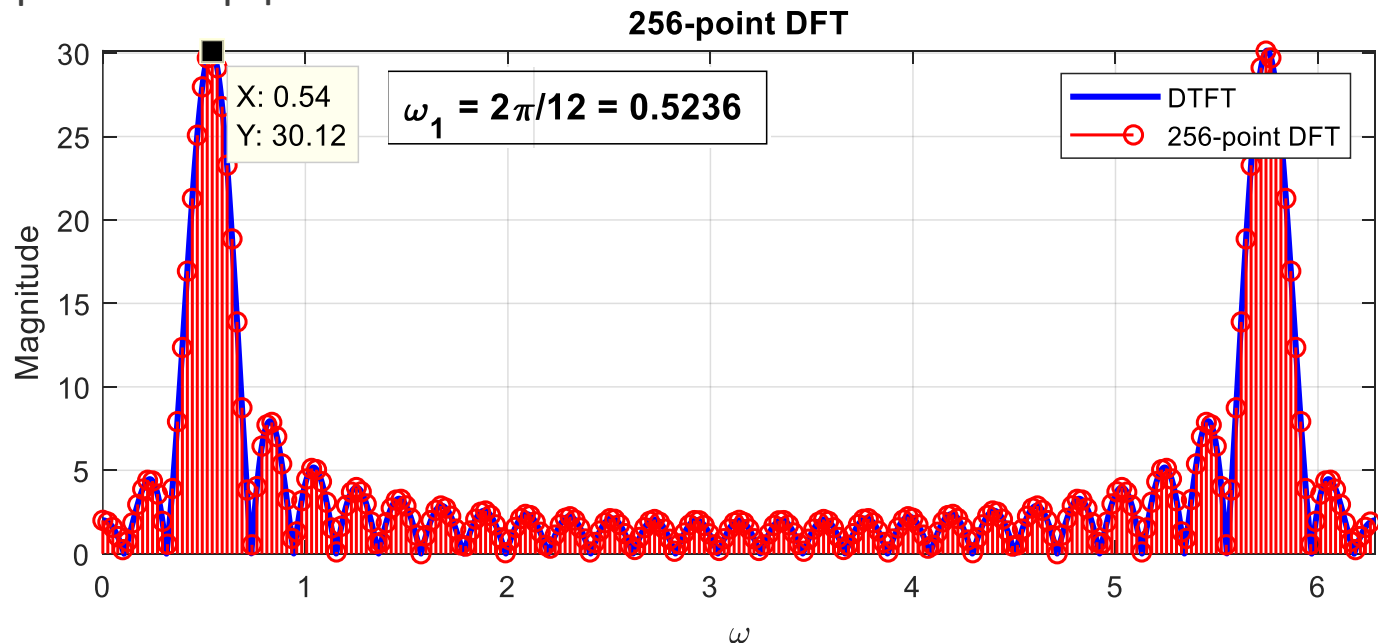
- Βλέπετε ότι όχι μόνο «χάσαμε» το peak που αντιστοιχεί στη συχνότητα μας...
 - ...αφού τα frequency bins «πέφτουν» εκατέρωθεν της πραγματικής συχνότητας (**spectral scalloping**) ...
- ...αλλά δειγματοληπήσαμε και συχνότητες που «ανήκουν» στο μετασχ. Fourier του παραθύρου!
- Γιατί συνέβη αυτό?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ο DFT υπέθεσε ότι το σήμα που αναλύει είναι το παρακάτω:



- Οι ασυνέχειες **αυτές** απαιτούν κι άλλες συχνότητες (χαμηλές και υψηλές) για να μοντελοποιηθούν, πέραν της $\frac{2\pi}{12}$
 - Τις συχνότητες αυτές που δειγματοληπήσαμε στον DTFT!
- Μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση?
 - Ναι! Να δειγματοληπήσουμε **πυκνότερα** τον DTFT! 😊

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Δηλ. να αυξήσουμε τον αριθμό N των δειγμάτων που παίρνουμε στον DFT
- Κάποια από τα παραπάνω δείγματα θα «έπεφταν» πάνω στις δυο κορυφές του DTFT και θα «έπιαναν» τις σωστές συχνότητες
- **Πυκνότερη δειγματοληψία του DTFT (ήτοι, μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων N του DFT) οδηγεί σε zero-padding του σήματος στο χρόνο**
 - Η περιοδικότητα «καταργείται»!
 - Δημιουργούνται ασυνέχειες!
 - Αλλά η συχνότητα μπορεί να εκτιμηθεί! 😊



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Frequency
w0 = 2*pi/12;
% Period
N0 = 12;
% Number of periods
NoP = 2.5;
% Signal length
N = NoP*N0;
% Windowed signal
x = 2*cos(w0*(0:N-1));
% Plotting
figure; stem((0:N-1), x, 'k');
grid;
```

```
% FFT
NFFT = 256;
X = fft(x, NFFT);
omega = linspace(0, 2*pi, 6000);
% DTFT of w[n] centered around w0
W1 = (sin((omega-w0)*N/2)./sin((omega-w0)/2))...
    .*exp(-1i*(omega-w0)*(N-1)/2);
% DTFT of w[n] centered around 2pi-w0
W2 = (sin((omega-(2*pi-w0))*N/2)./sin((omega-(2*pi-w0))/2))...
    .*exp(-1i*(omega-(2*pi-w0))*(N-1)/2);
% Sum of DTFTs
W = W1+W2;
% Plotting
figure; plot(omega, abs(W), 'b', 'LineWidth', 2)
axis([0 2*pi 0 max(abs(W))]); grid;
hold on; stem((0:NFFT-1)*2*pi/NFFT, abs(X), 'r', 'LineWidth', 1);
title('256-point DFT');
xlabel('\omega'); ylabel('Magnitude');
legend('DTFT', '256-point DFT');
```

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Όσον αφορά το πλάτος του ημιτόνου?

- Έχουμε

$$|\hat{X}(e^{j\omega})| \approx \frac{A_1}{2} |W(e^{j(\omega-\omega_1)})| + \frac{A_1}{2} |W(e^{j(\omega+\omega_1)})|$$

- Ξέρουμε ότι

$$|W(e^{j0})| = N + 1$$

με $N + 1$ τη διάρκεια του τετραγ. παραθύρου στο χρόνο

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε το πλάτος που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \pm\omega_1$ που εκτιμούμε με τον αριθμό $N + 1$

- Ο αριθμός $N + 1$ συμπίπτει με τον αριθμό των δειγμάτων στο τετραγωνικό παράθυρο

- Για οποιοδήποτε παράθυρο έχουμε

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε με το άθροισμα όλων των δειγμάτων του $w[n]$

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Το πρόβλημα της **φασματικής διασποράς (spectral spreading)** - το γεγονός ότι ο μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου έχει ενέργεια και σε άλλες συχνότητες εκτός του $\omega = 0$ – παραμένει

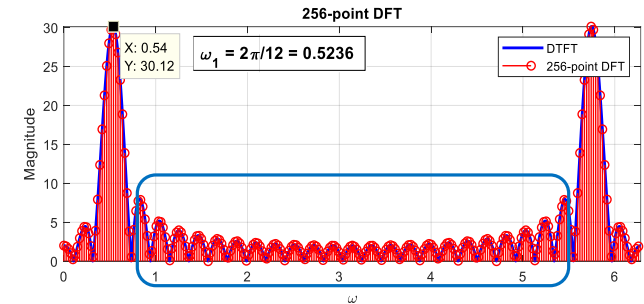
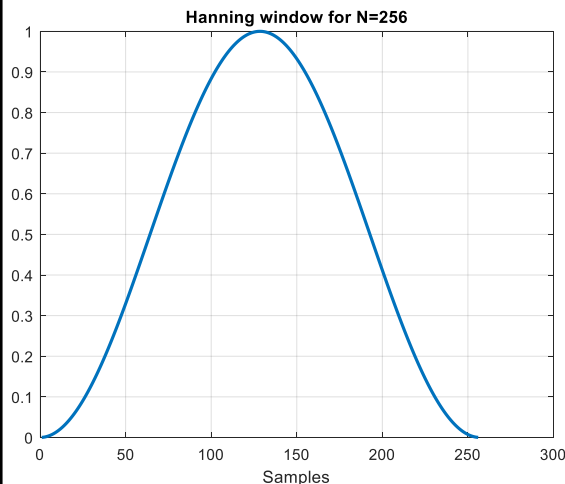
- Ύπαρξη ισχυρών πλευρικών λοβών!

• Πώς θα μπορούσαμε να το βελτιώσουμε κι αυτό?

- Να αλλάξουμε παράθυρο! 😊

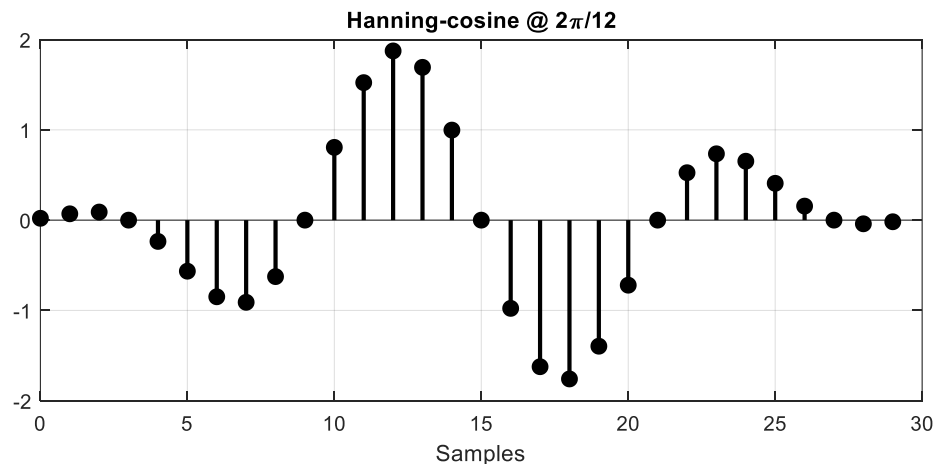
• Ας δοκιμάσουμε το παράθυρο Hanning (Von Hann) αντί του τετραγωνικού:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

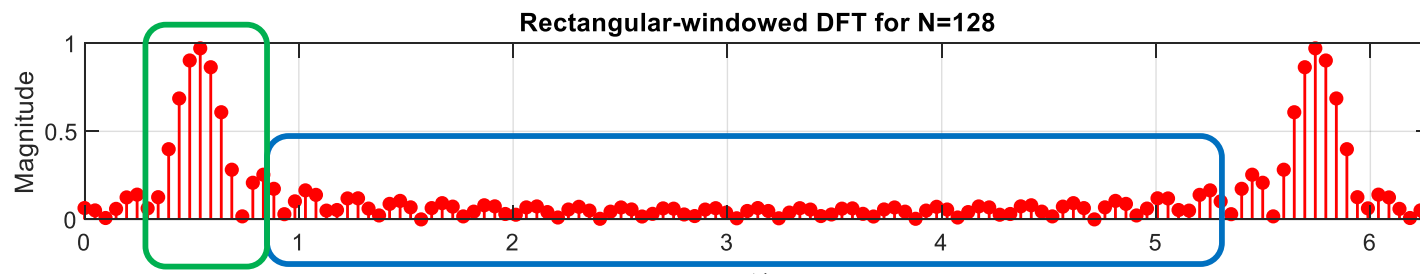


- Ο DTFT του αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό τριών DTFT του τετραγωνικού παραθύρου

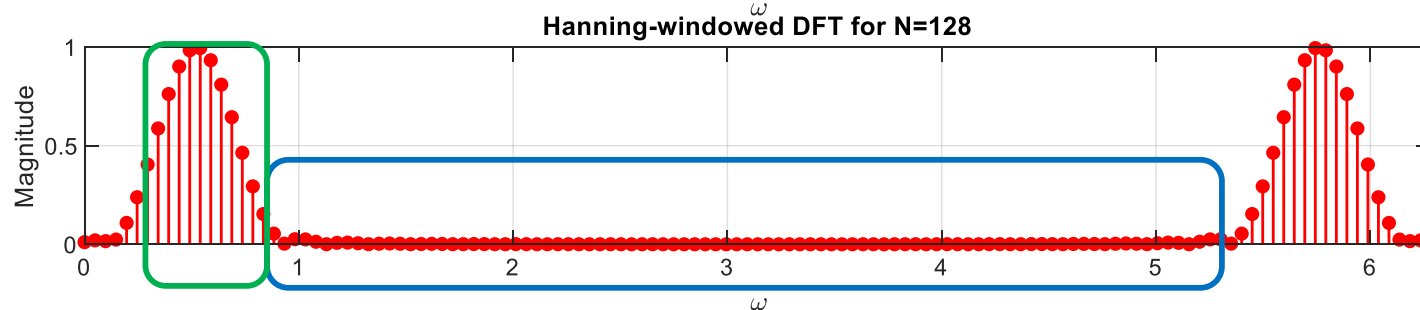
- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Πολλαπλασιάζοντας το ημίτονο με ένα παράθυρο Hanning:



- Παίρνοντας τώρα DFT σε 128 σημεία και κανονικοποιώντας, έχουμε:



+++ Μείωση
διασποράς



--- Αύξηση εύρους
κεντρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Άρα ξανά επιβεβαιώνουμε ότι **το πλήθος N των συντελεστών του DFT** (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) **πρέπει να είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό γνωρίζουμε ότι γίνεται με **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**

- Επίσης, **πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- «**Σωστή**» **εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο

- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1) \\ &\quad + A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2) \end{aligned}$$

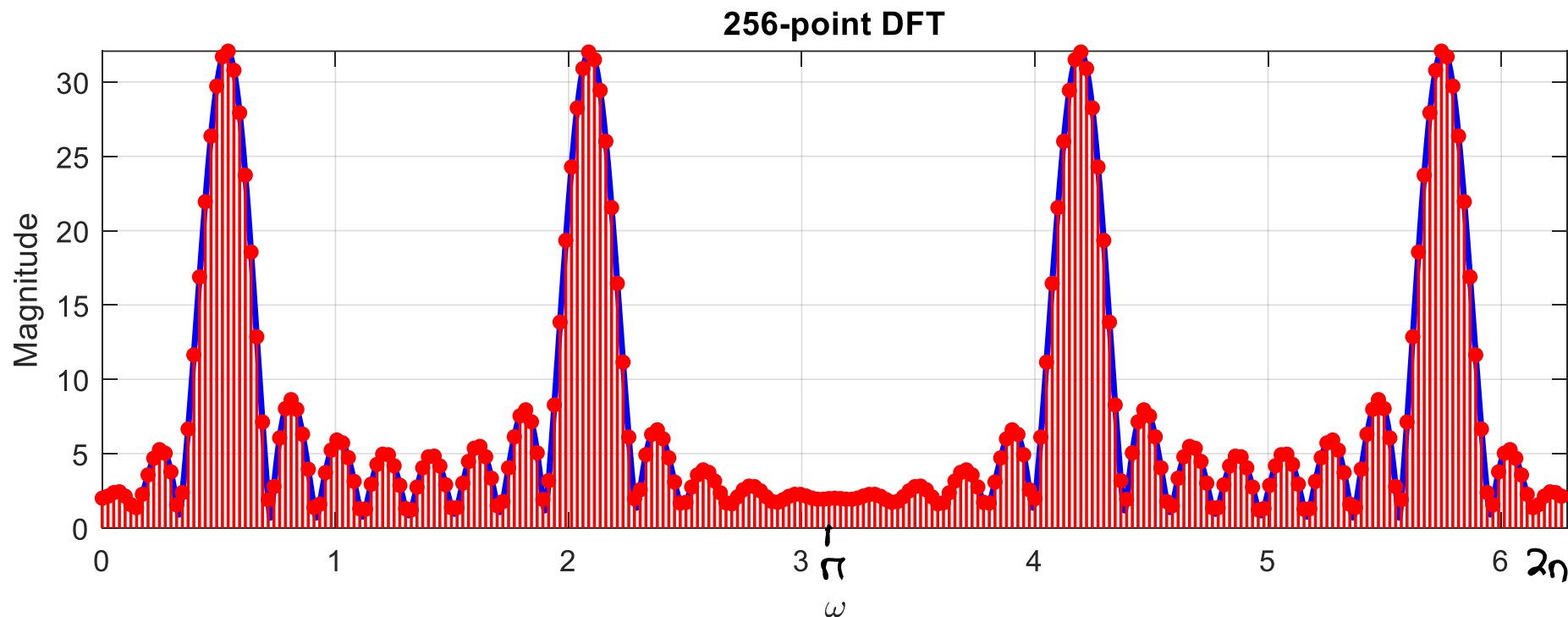
- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x[n]w[n]\} &= \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)}) \\ &\quad + \frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W(e^{j(\omega + \omega_2)}) \end{aligned}$$

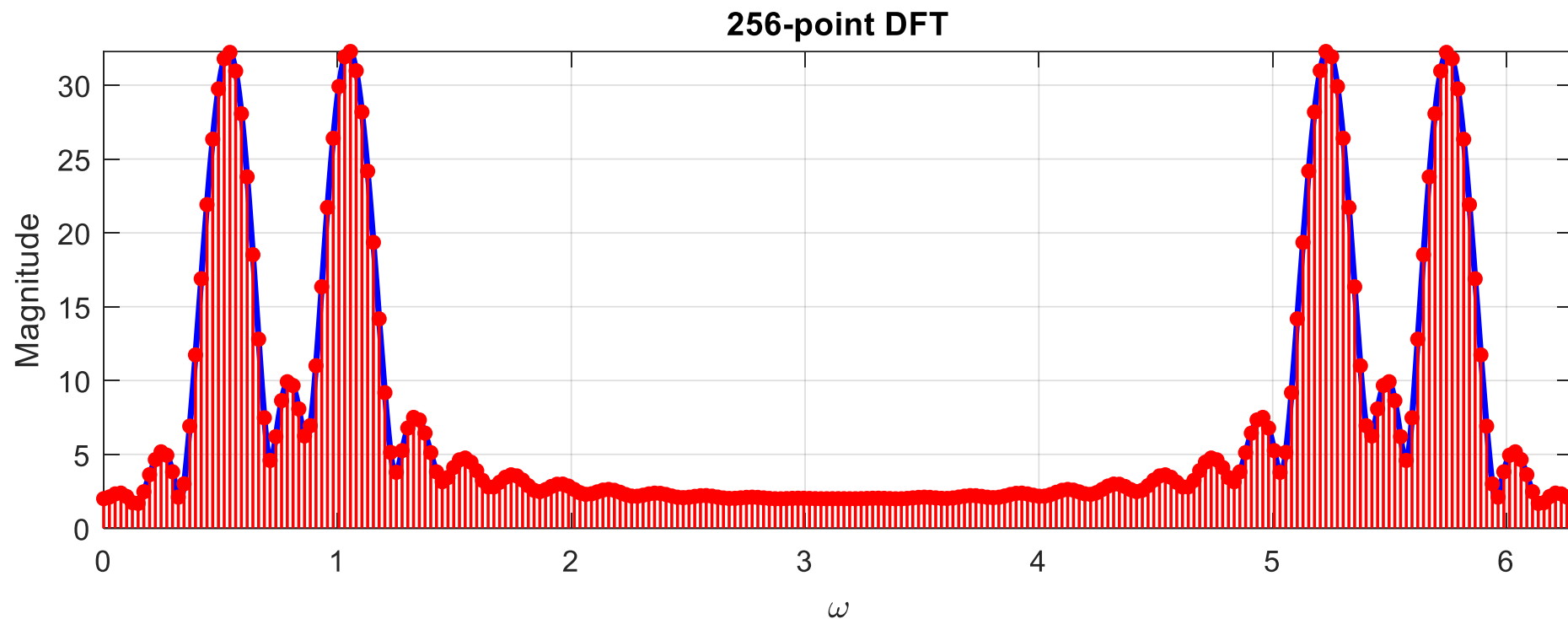
- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + W(e^{j(\omega + \omega_1)}) + W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + W(e^{j(\omega + \omega_2)})$$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$

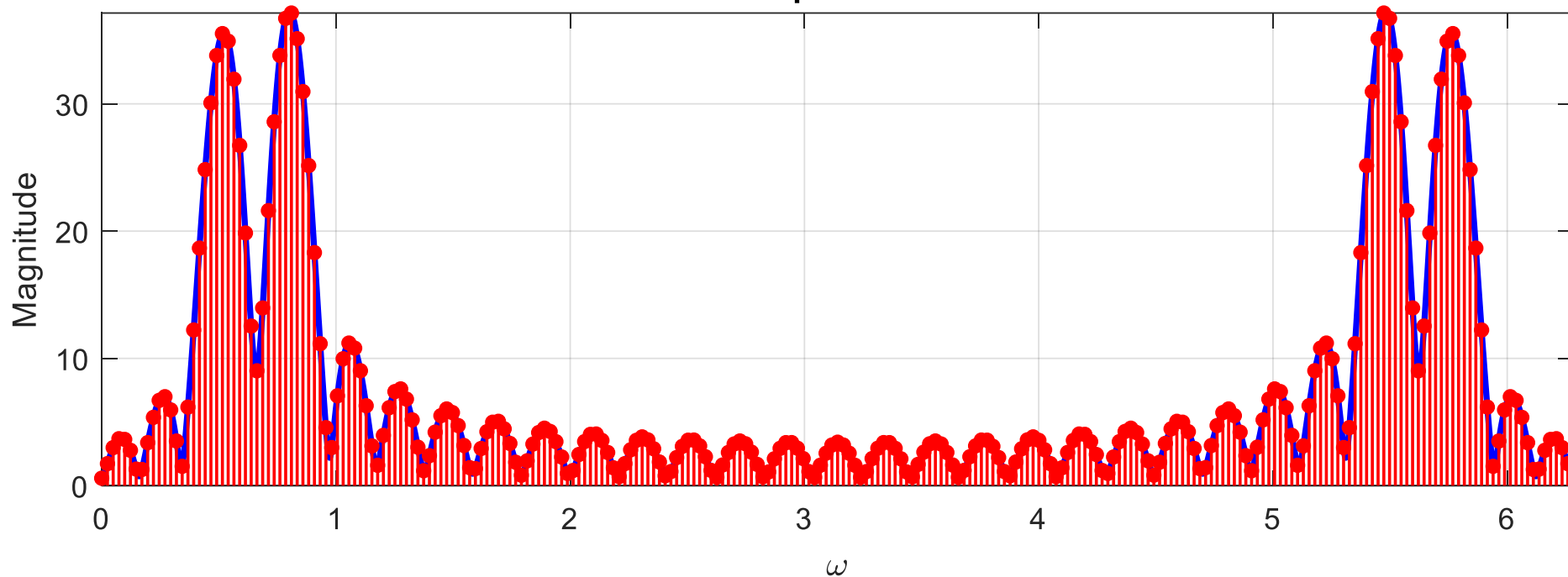


- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$

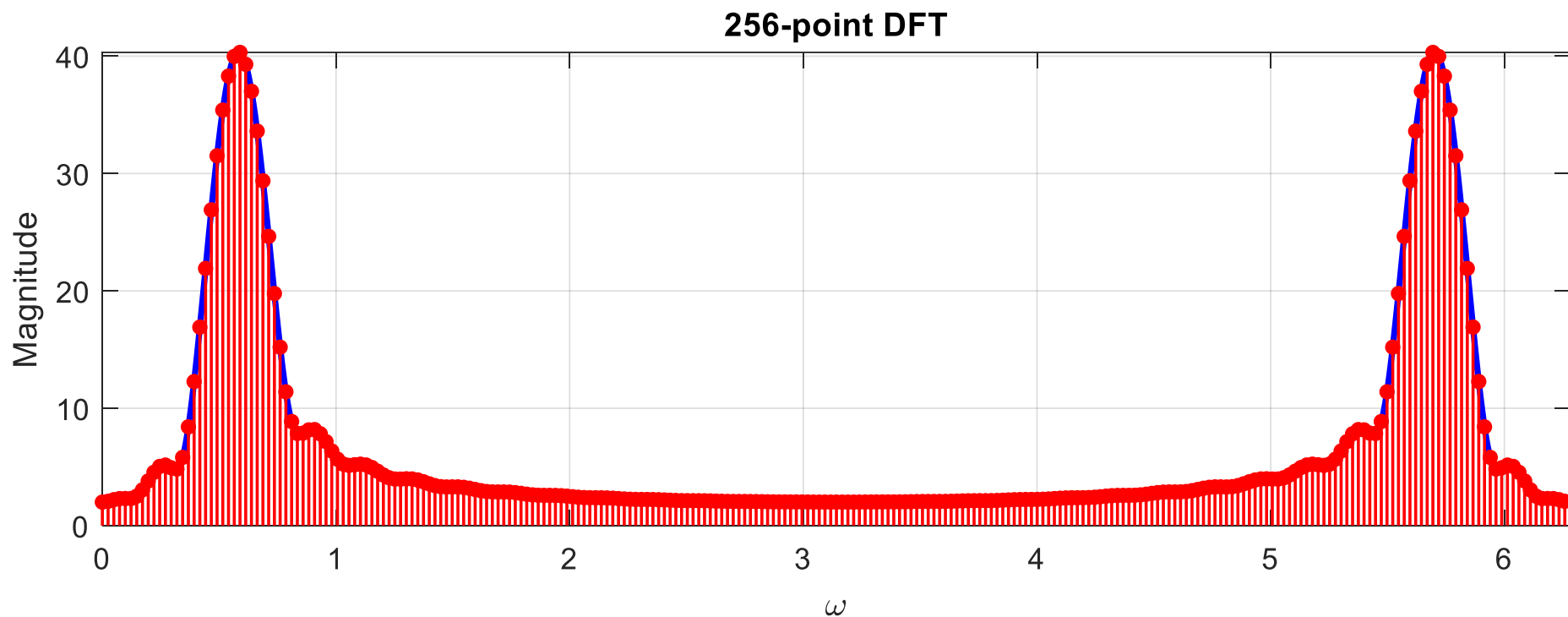


- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$

256-point DFT



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$



• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Τι παρατηρήσατε?

• α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης

- Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!
- Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$

• β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!

- Ανεπαρκής ανάλυση!

• Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου...

• ...ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου...

- ...είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς...

• Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου

- Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς

• Τι μπορούμε να κάνουμε?

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Έχουμε λοιπόν δυο προβλήματα:

- α) Να μειώσουμε τη φασματική διαρροή μέσω μείωσης της φασματικής διασποράς

a.k.a : να μειώσουμε τους πλευρικούς λοβούς

- β) Να αυξήσουμε την ανάλυση του φάσματος ώστε να διαχωρίζονται οι πολύ κοντινές συχνότητες

a.k.a : να «στενέψουμε» το εύρος του κεντρικού λοβού

- Γνωρίζουμε ότι για το α) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά παράθυρα ανάλυσης (Hamming, Hanning, Blackman, Bartlett, Kaiser, Poisson, Slepian, Flat-top, Gaussian, κ.α.)

- Για το β), η αλλαγή παραθύρου επιδεινώνει την κατάσταση, καθώς «φαρδαίνει» τον κεντρικό λοβό

- Πώς θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Μπορούμε να αυξήσουμε τη διάρκεια M του παραθύρου!!

- Με άλλα λόγια, να πάρουμε περισσότερα δείγματα από το υπό ανάλυση σήμα!

- Ας επιχειρήσουμε να λύσουμε τα προβλήματα μας...

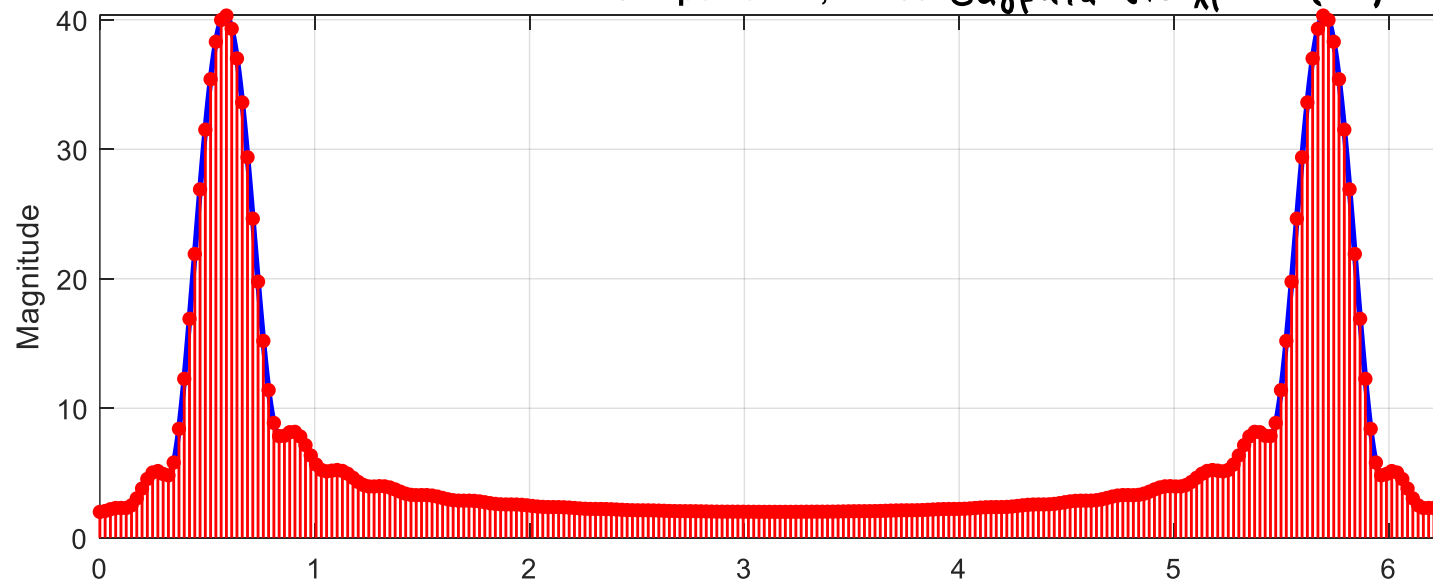
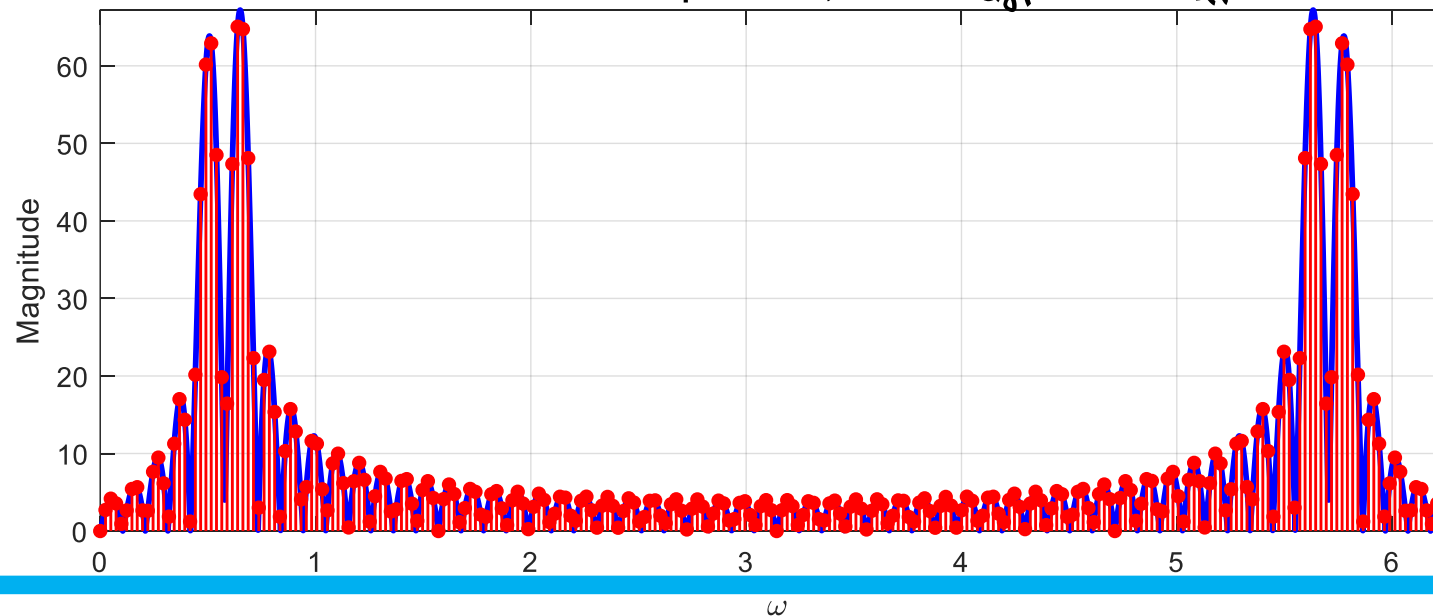
- Ας δούμε πόσο μήκος παραθύρου χρειαζόμαστε για να διαχωρίσουμε τις συχνότητες

- Για το τετραγωνικό παράθυρο, για να είναι (πλήρως) διαχωρίσιμες οι συχνότητες $\omega_1 < \omega_2$ (δηλ. χωρίς επικάλυψη των κεντρικών λοβών) αρκεί

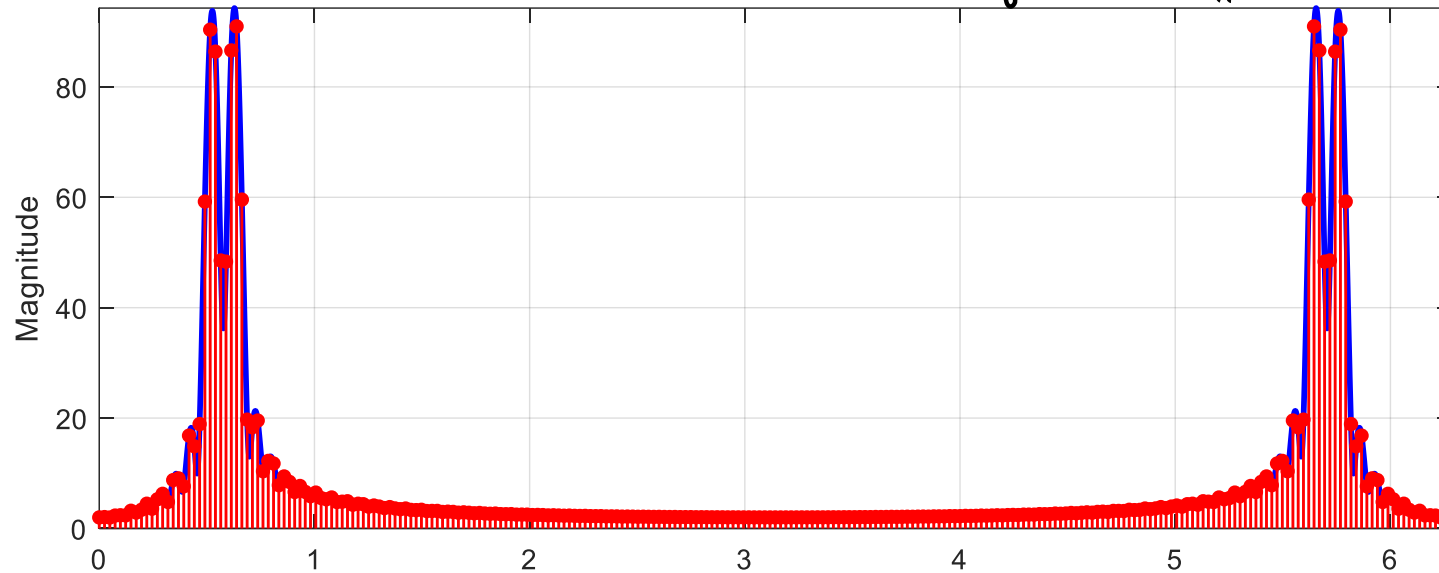
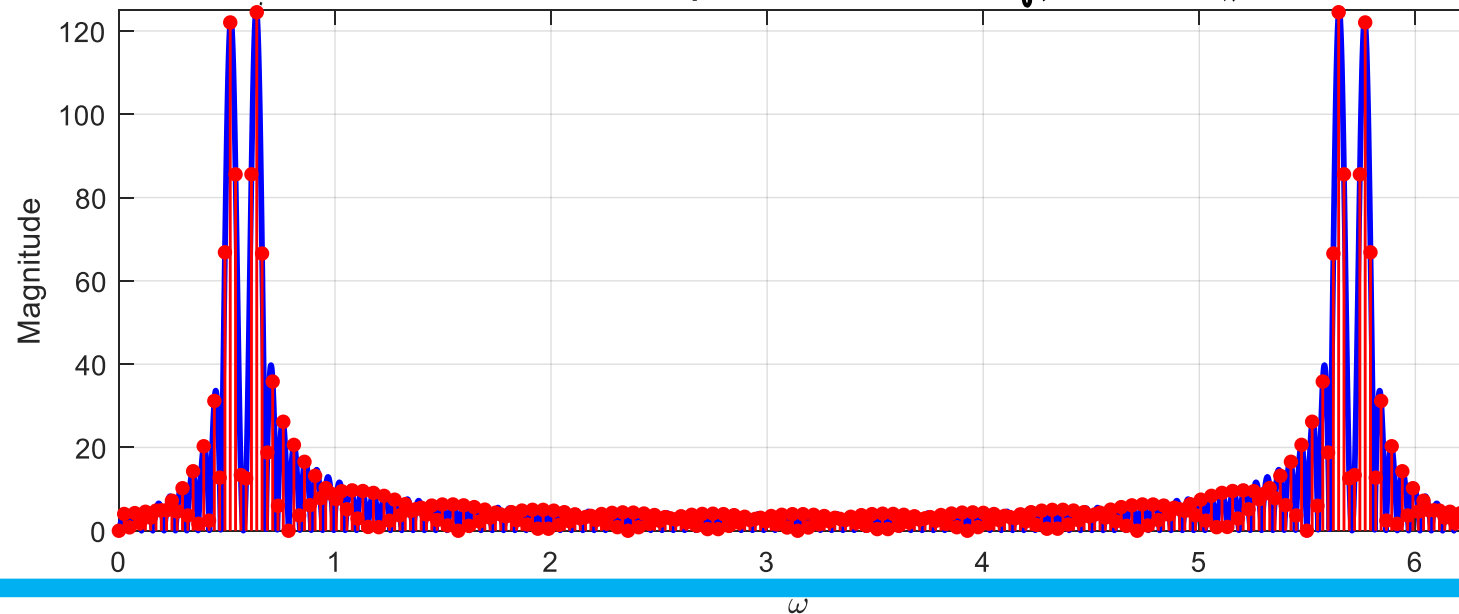
$$\omega_2 - \omega_1 \geq \frac{4\pi}{M} \Rightarrow M \geq \frac{4\pi}{\frac{\pi}{30}} = 120$$

- Ας δούμε διάφορες τιμές του M

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

512-point DFT, $N = 30$ δείγματα στο χρόνο (μ)512-point DFT, $N = 60$ δείγματα στο χρόνο (μ)

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

512-point DFT, $N = 90$ δείγματα στο χρόνο (M)512-point DFT, $N = 120$ δείγματα στο χρόνο (M)

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Γνωρίζουμε ήδη ένα πολύ καλό παράθυρο, το παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M-1}{2}}{\frac{M-1}{2}} \right]^2} \right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: διάρκεια σήματος παραθύρου M , παράμετρος σχήματος β
- Ας ορίσουμε ως Δ_{m1} το εύρος του κεντρικού λοβού, ως η απόσταση μεταξύ των πρώτων μηδενισμών του φάσματος πλάτους εκατέρωθεν του μηδενός
- Ας ορίσουμε ως A_{s1} το λόγο σε dB μεταξύ του πλάτους του κεντρικού λοβού προς το πλάτος του μεγαλύτερου πλευρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ο Kaiser βρήκε μια συνάρτηση του β συναρτήσει του A_{sl}

- Είναι

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26), & 13.26 < A_{sl} < 60 \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3), & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$

- Επίσης βρήκε μια σχέση μεταξύ M , Δ_{ml} , A_{sl} :

$$M \cong \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

- Οπότε για δεδομένα A_{sl} , Δ_{ml} μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους β , M

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Πολλά σήματα διακριτού χρόνου προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου
 - ...θέτοντας $t = nT_s = \frac{n}{f_s}$ στο σήμα συνεχούς χρόνου

- Συμβολίζοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας ως f_s και άρα την περίοδο δειγματοληψίας ως $T_s = \frac{1}{f_s}$, κατά τη δειγματοληψία θα έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = 2\pi f T_s$$

και όταν δειγματοληπτούμε τη συχνότητα ω σε N σημεία κατά τον DFT, έχουμε:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} = 2\pi f_k T_s \Leftrightarrow f_k = \frac{k}{NT_s} = \frac{k}{N} f_s$$

- Οπότε οι συχνότητες του συνεχούς χρόνου που δειγματοληπτούνται κατά τον DFT είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{N} f_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

- Ας δούμε ένα παράδειγμα

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 125t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

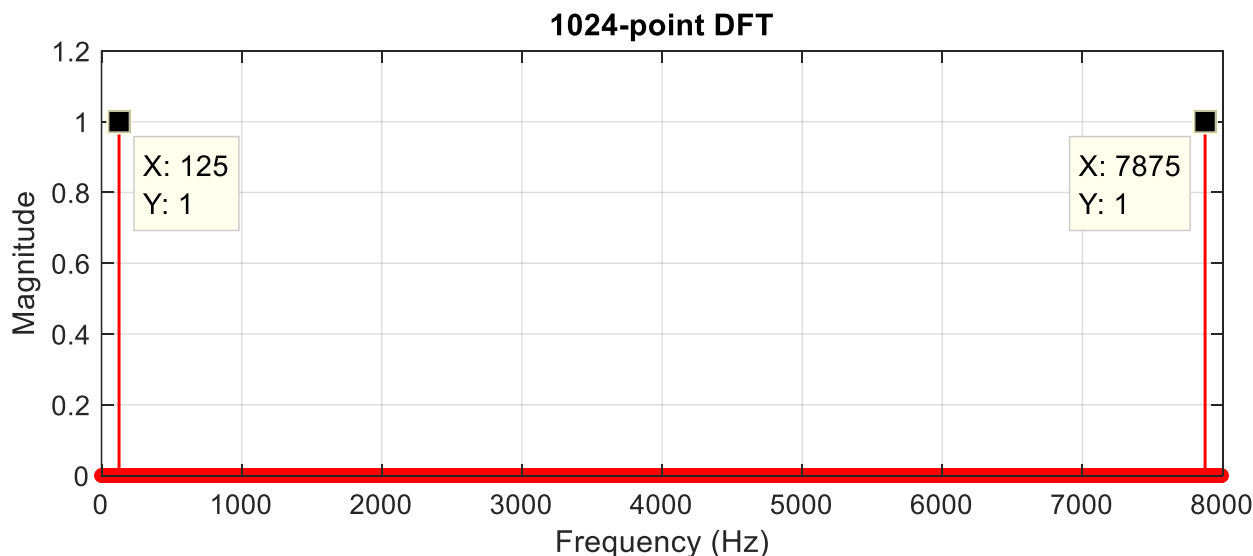
το οποίο δειγματοληπτούμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz

- Οι συχνότητες που αναπαρίστανται σε έναν DFT 1024 σημείων είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{1024} 8000 = 7.8125k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 1023$$

- Η συχνότητα του σήματος θα αναπαρασταθεί από το bin $k = 16$ του DFT

- ...αλλά και από το bin $k = 1008$!! (περιοδικότητα του φάσματος)



• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Ξέρουμε όμως ότι ένα σήμα που δειγματοληπτείται με συχνότητα f_s μπορεί να αναπαραστήσει μοναδικά συχνότητες ως $f_s/2$

• Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το αμφίπλευρο φάσμα στη συχνότητα f , στο διάστημα $\left(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right)$

```
% Sampling frequency
fs = 8000;
% DFT samples
NFFT = 1024;
% Frequency bins
k = (-NFFT/2:NFFT/2-1);
% Frequency in Hz
f = k*fs/NFFT;
% Time index
t = 0:1/fs:1;
% f0
```

```
f0 = 125;
```

```
% Signal
```

```
x = 2*cos(2*pi*f0*t);
```

```
% DFT @ NFFT and normalize
```

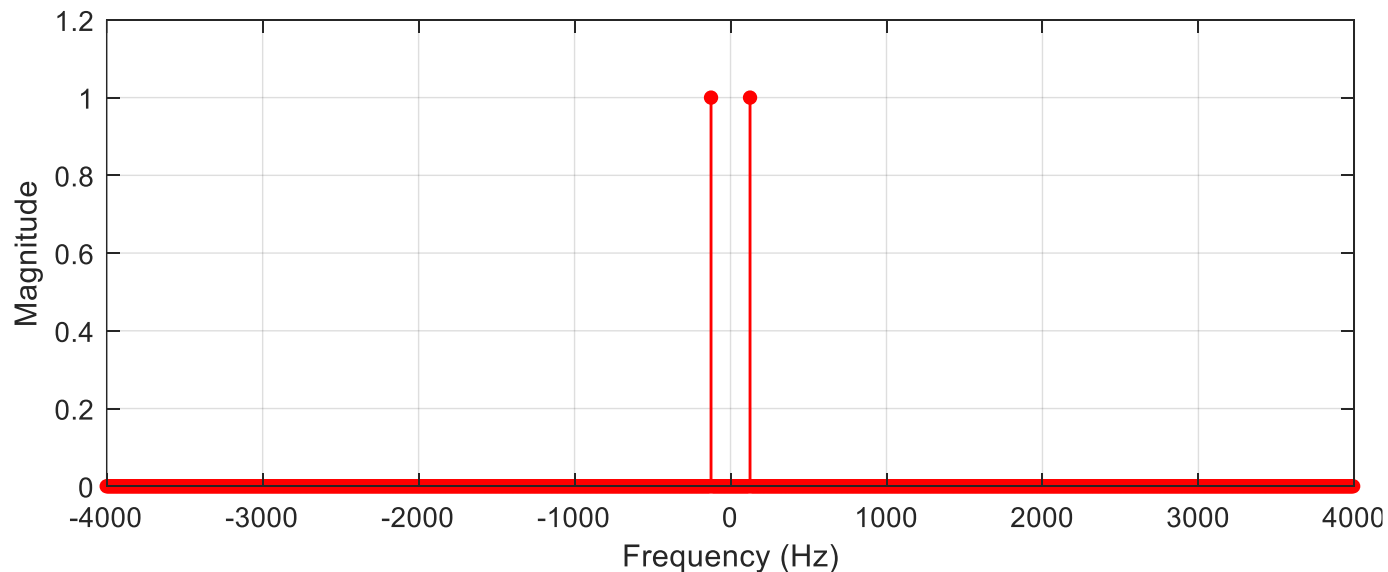
```
X = fft(x, NFFT)/NFFT;
```

```
% Plotting
```

```
stem(f, fftshift(abs(X)), 'r', 'LineWidth', 1);
```

```
grid; xlabel('Frequency (Hz)');
```

```
ylabel('Magnitude');
```



- Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση *fftshift* του MATLAB, η οποία αντιστρέφει το δεξί με το αριστερό τμήμα του φάσματος που επιστρέφει ο *fft*

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

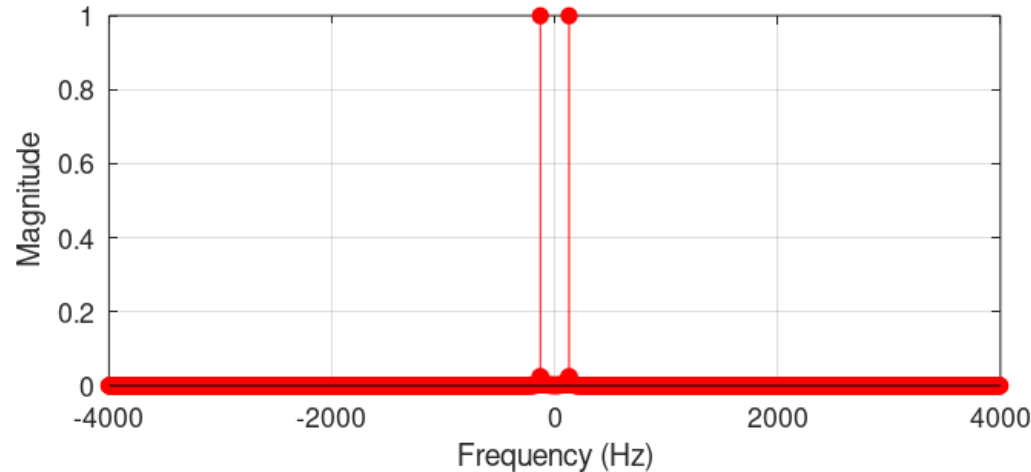
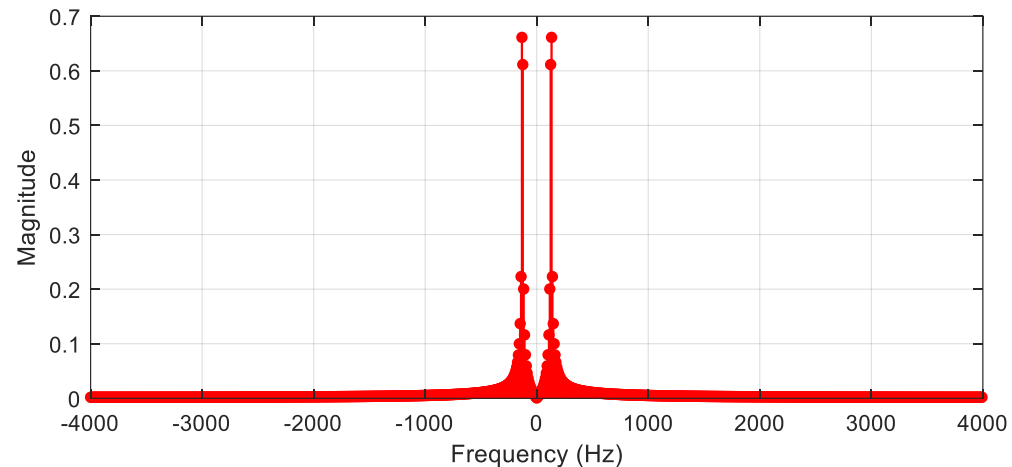
- Φυσικά δε γίνεται πάντα οι συχνότητες ενός σήματος να προκύπτουν ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{f_s}{N}$

- Έστω το σήμα $x(t) = 2 \cos(2\pi 129t)$

το οποίο δειγματοληπτούμε με συχν. δειγματοληψίας $f_s = 8$ kHz με έναν DFT 1024 σημείων

- Χρειαζόμαστε έναν DFT περισσότερων σημείων

- Με διπλάσια σημεία (2048), έχουμε μια πιο καλή εκτίμηση της συχνότητας και του πλάτους της



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

