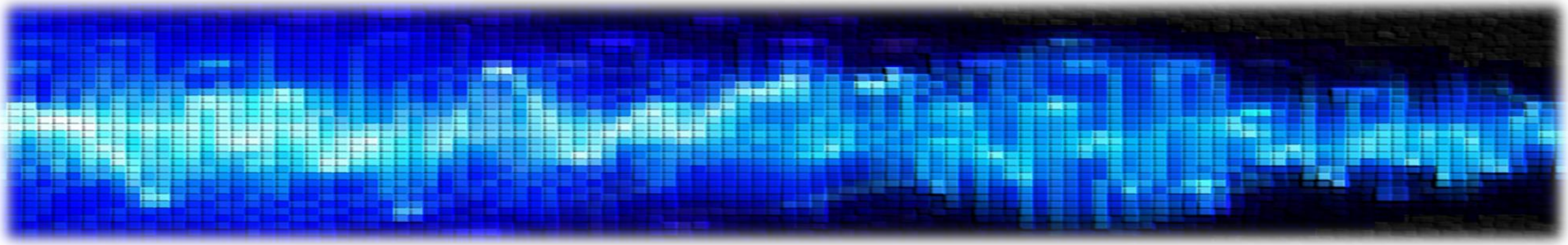
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 20Η



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης (cont'd)
- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:

○ ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \qquad |c_k| < 1$$

○ ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

○ ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{uc}(z) H_{max}(z)$$

με

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1}) z^{-M_i}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

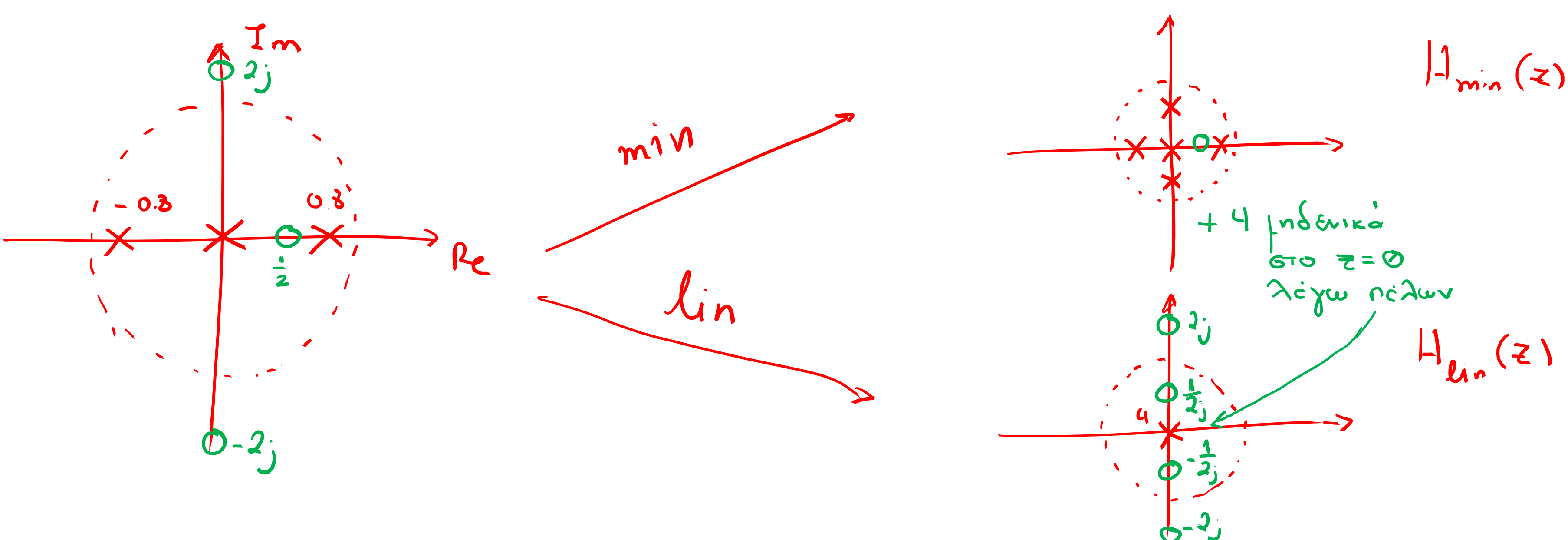
$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \qquad |z| > 0.8$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$

$$H(z) = \frac{(z-0.5)(z+2j)(z-2j)}{z(z-0.8)(z+0.8)} \longrightarrow$$

Πόλοι: $z=0$, $z=\pm 0.8$

Μηδενικά: $z=\frac{1}{2}$, $z=\pm 2j$



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Παράδειγμα:

Θα ακυρωθεί γιατί θα είναι 4 μηδενικά στο $z=0$ λόγω των 4 πόλων του linear phase filter

Το γραμμικής φάσης θα έχει μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2j, \pm \frac{1}{2j}$

Το ελάχιστης φάσης θα έχει μηδενικά στις θέσεις $z = \frac{1}{2}$ και πόλους στις θέσεις $z = \pm \frac{1}{2j}$, $z = \pm 0.8$, $z=0$

Άρα

$$H_{lin}(z) = \left(1 - 2j z^{-1}\right)\left(1 + 2j z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2j} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2j} z^{-1}\right), \; |z| > 0$$

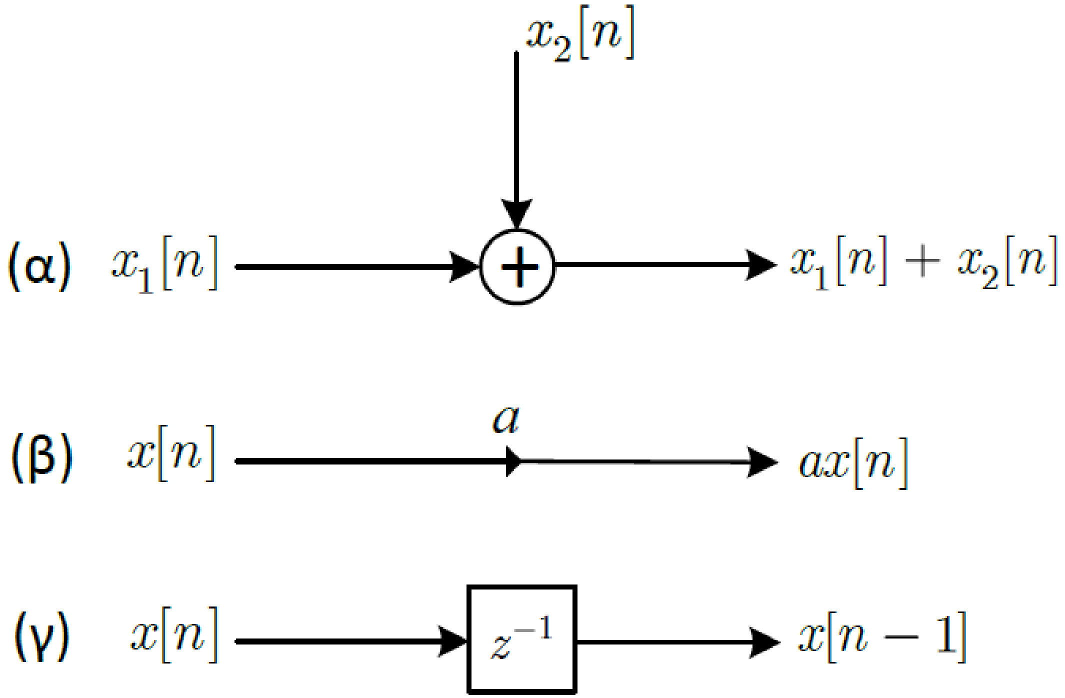
και άρα

$$H_{min}(z) = \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}{\left(1 + 0.8 z^{-1}\right)\left(1 - 0.8 z^{-1}\right)}}_{\text{από το αρχικό σύστημα}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2j} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2j} z^{-1}\right)}}_{\text{ακυρώνει μηδενικά που μπήκαν extra στο linear phase}}, \; |z| > 0.8$$

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - ❑ Πρόσθεση
  - ❑ Πολλαπλασιασμός
  - ❑ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n]$
- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της
- Κόστος:
  - ❑ Πλήθος πράξεων
  - ❑ Πλήθος θέσεων μνήμης
  - ❑ Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια
- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

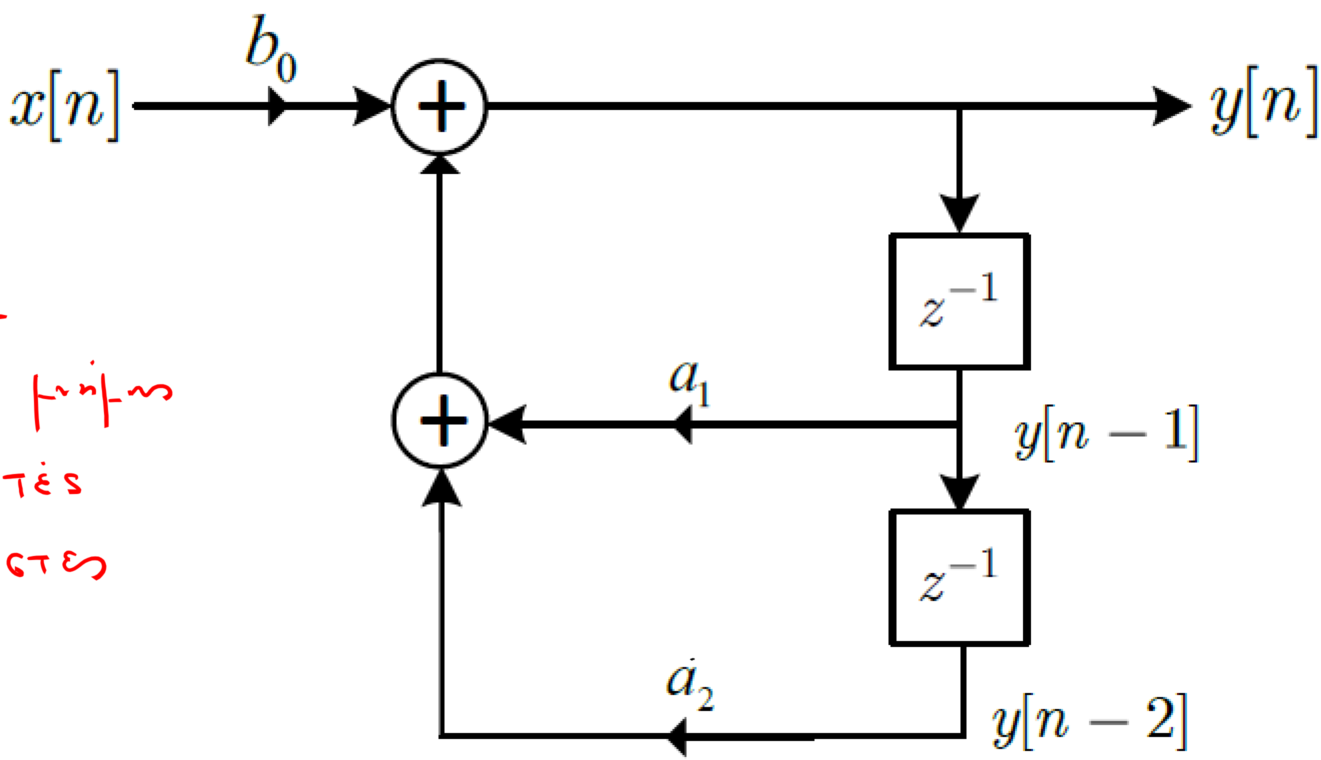
$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$

- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



Κόστος:

2 θέσεις μνήμης

3 αθροιστές

2 πολλ/στές

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

μηδενικά

πόλοι

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

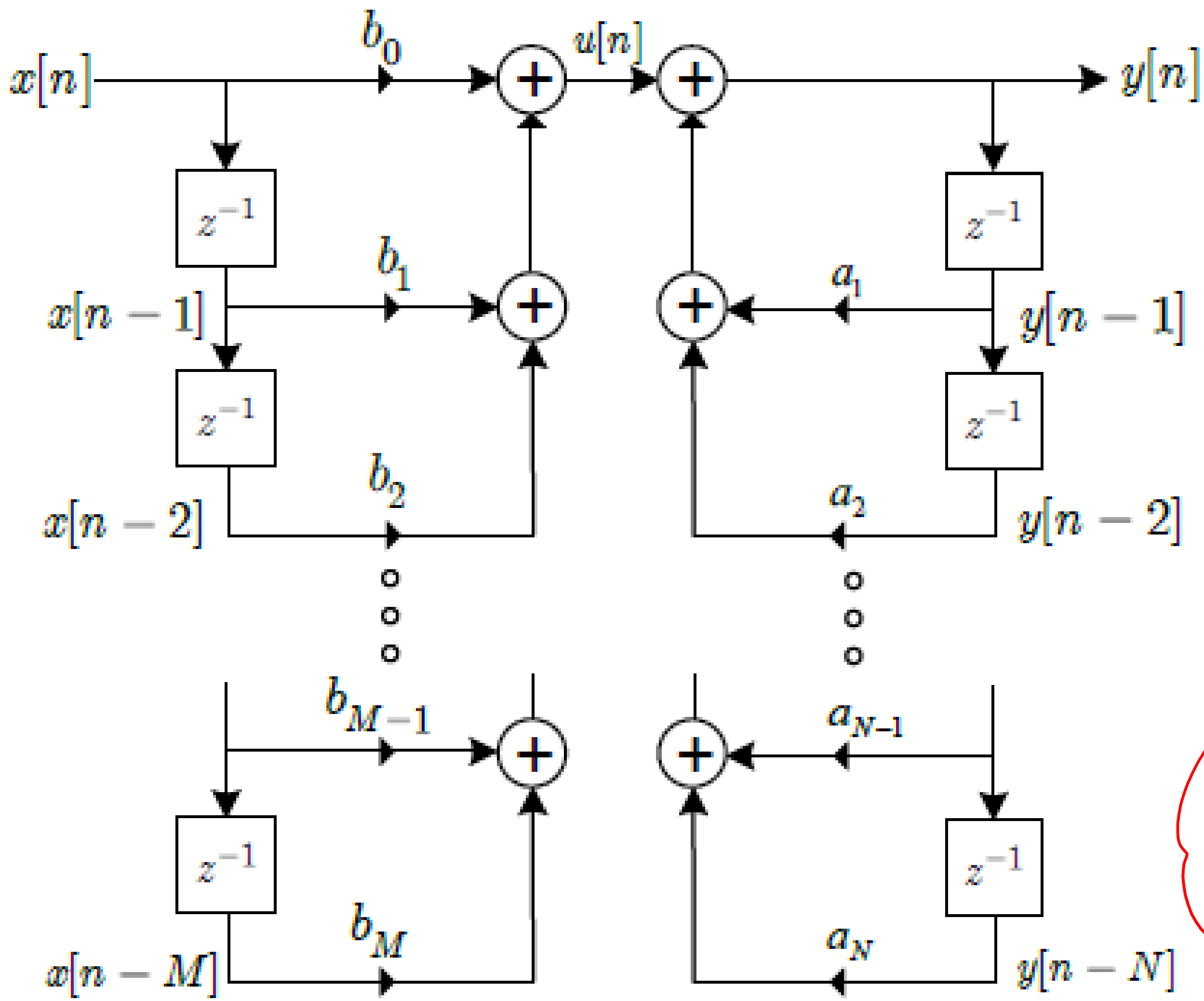
- Δυο υπο-εξισώσεις:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

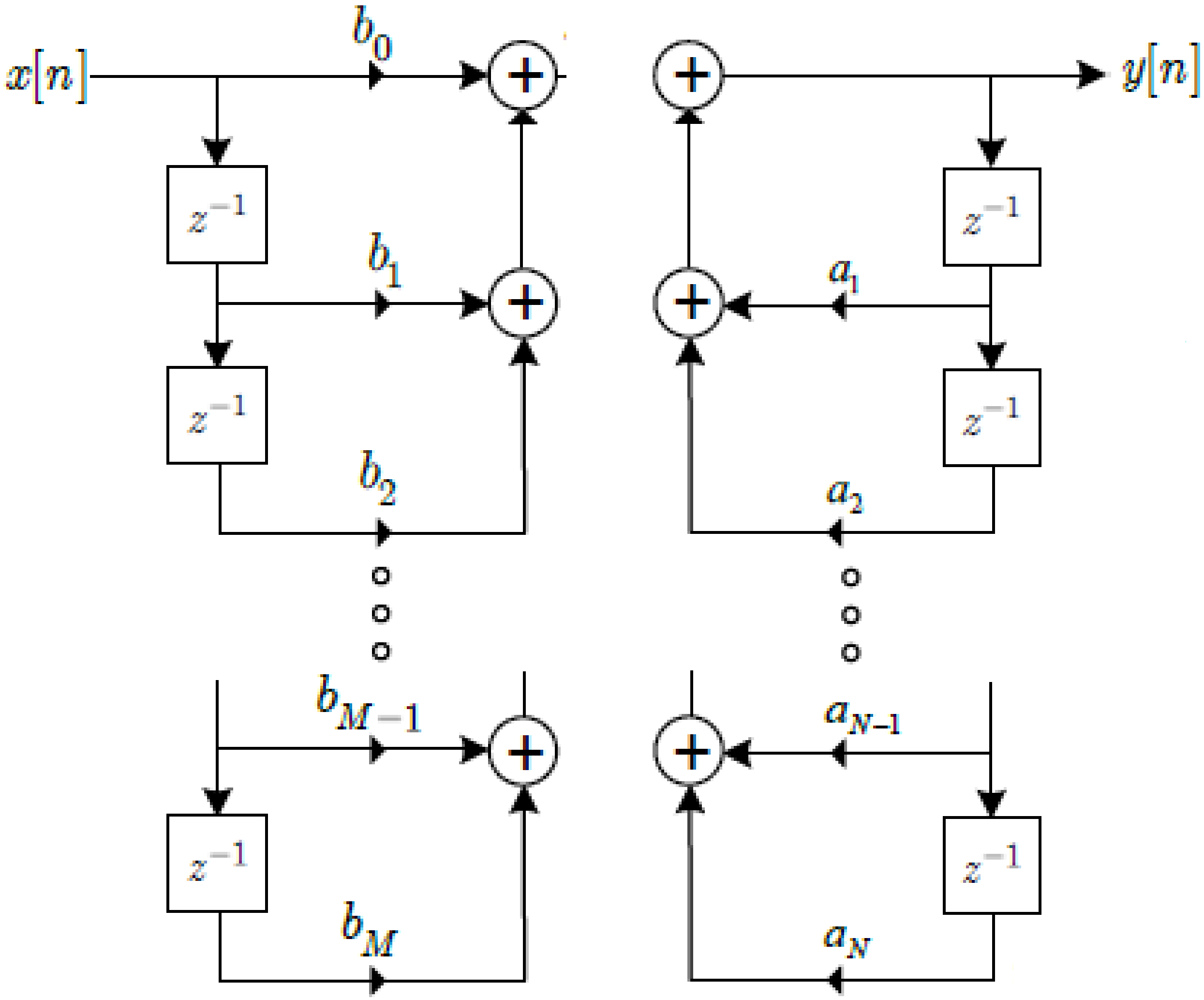
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



M+N
θέσεις
μνήμης

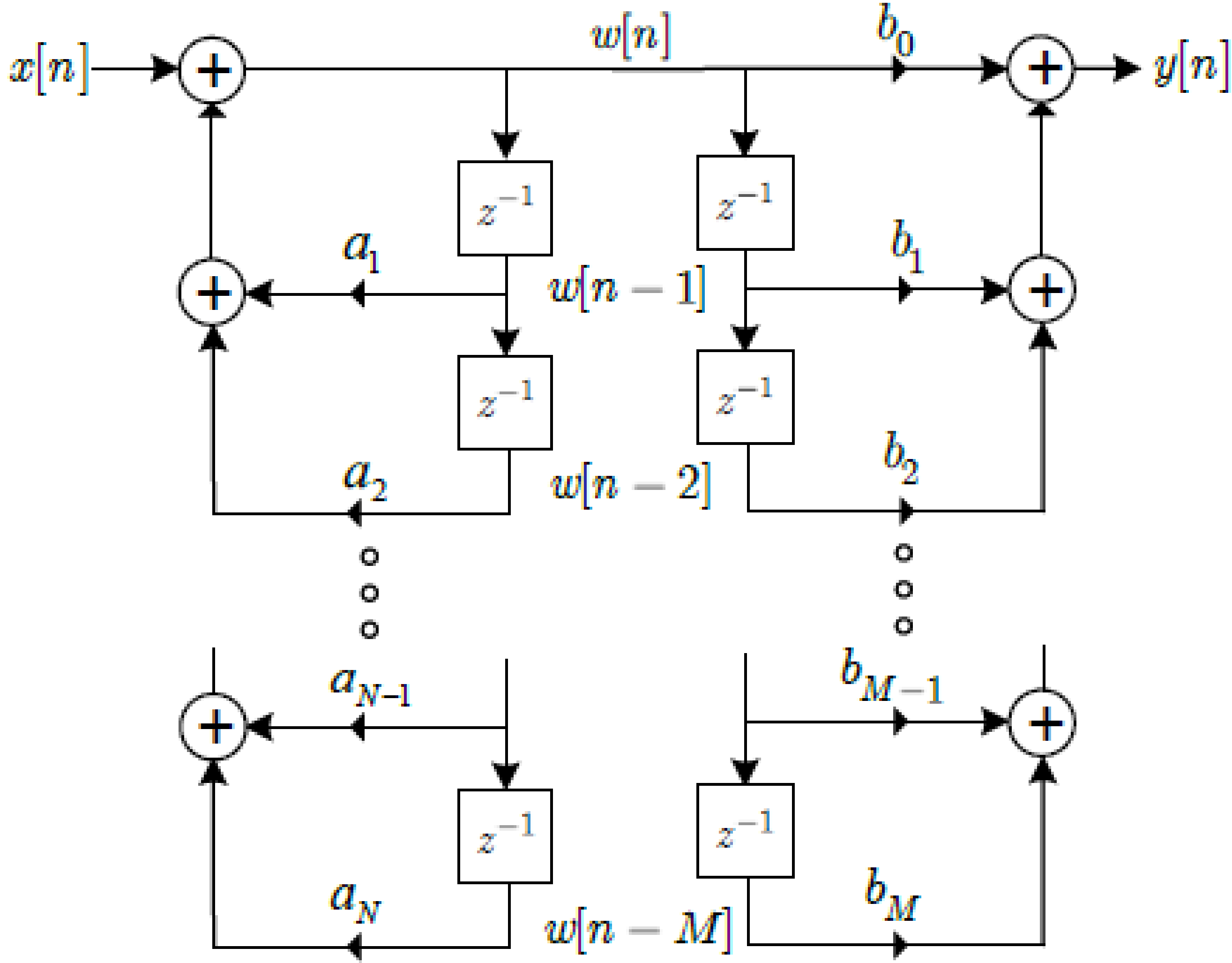
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$

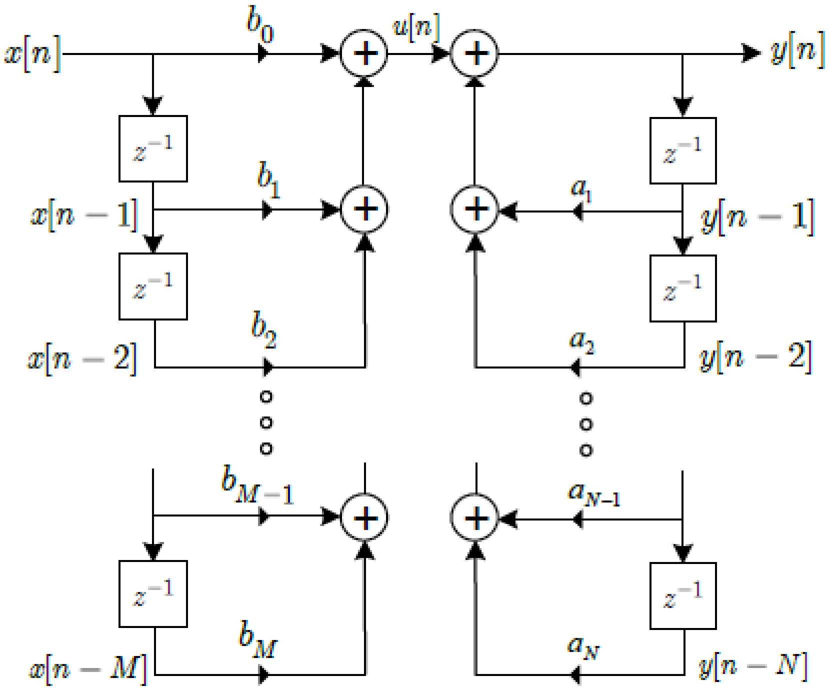


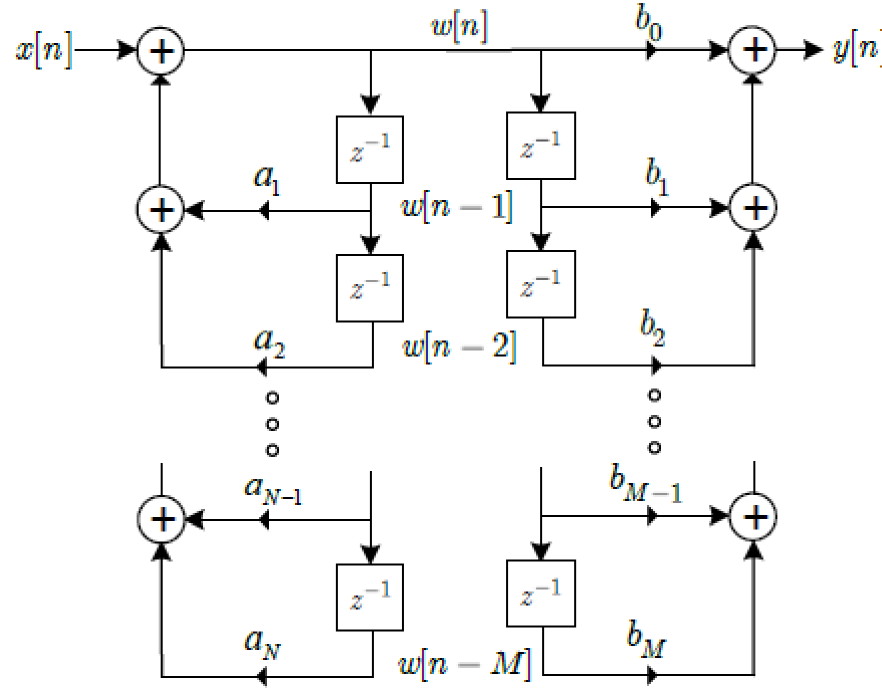
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad , \qquad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

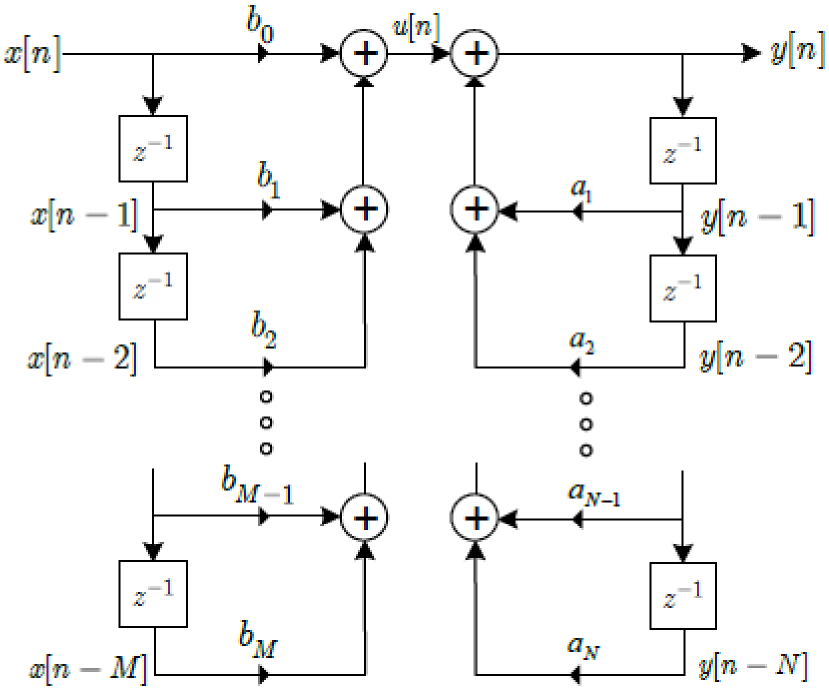


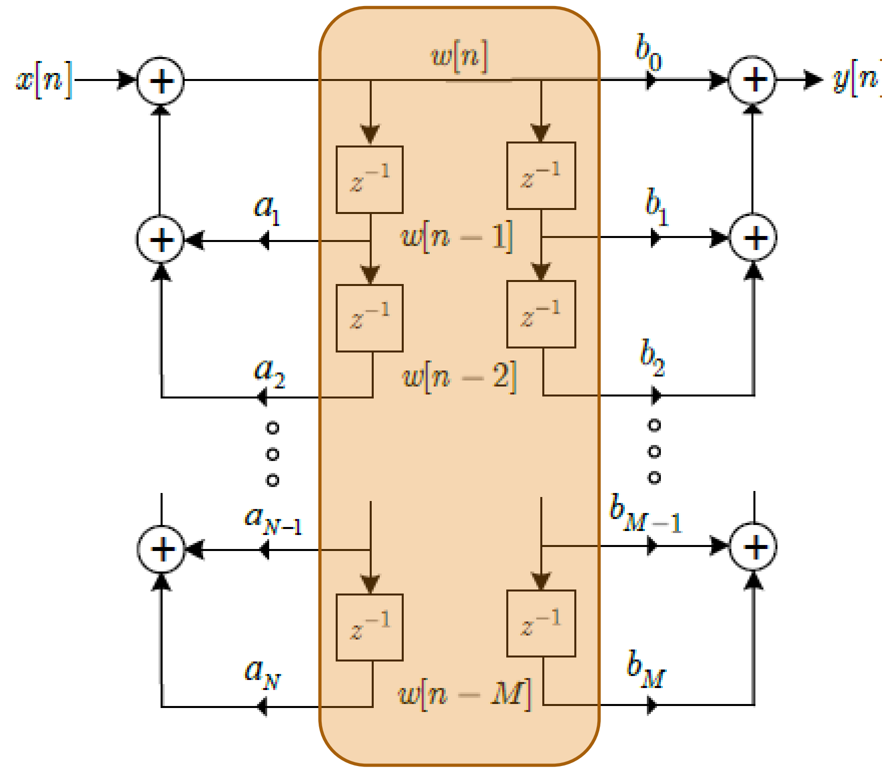


- Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων
  - ❑ Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
  - ❑ Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

- Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες
  - ❑ Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

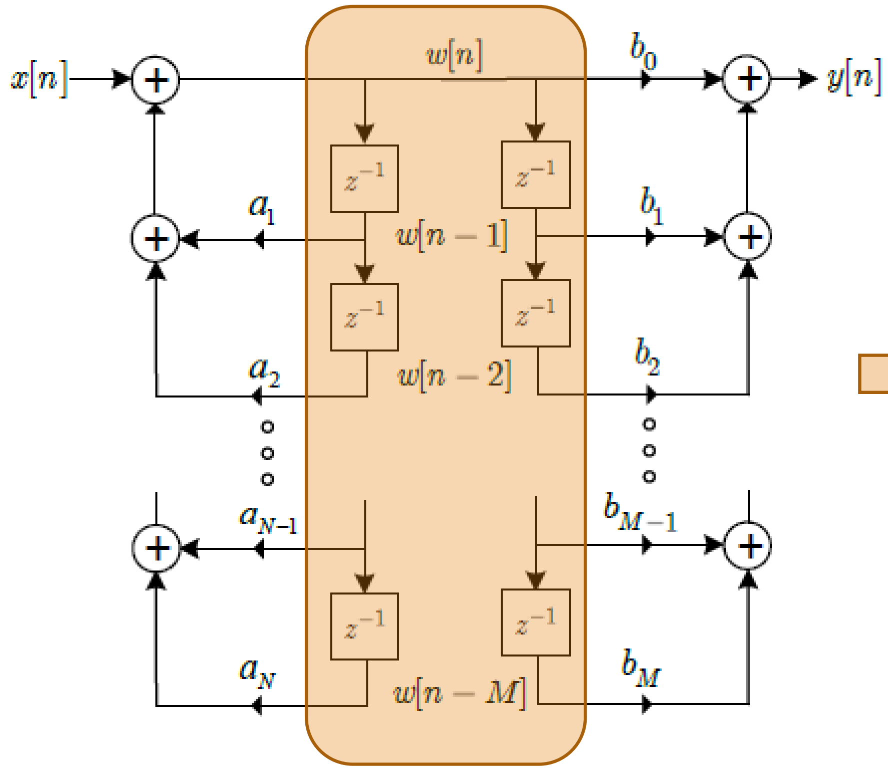
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

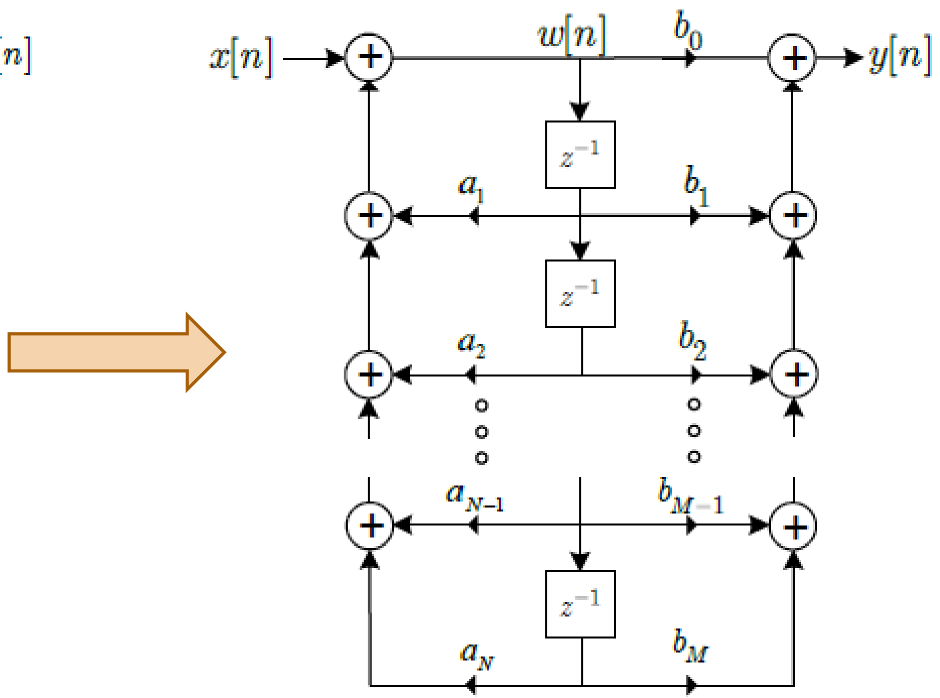




- Παρατήρηση:
  - **Οι μεταβλητές $w[n-k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!**
  - Μπορούμε να «γλιτώσουμε» τις μισές θέσεις μνήμης!
  - Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**





- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**
- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

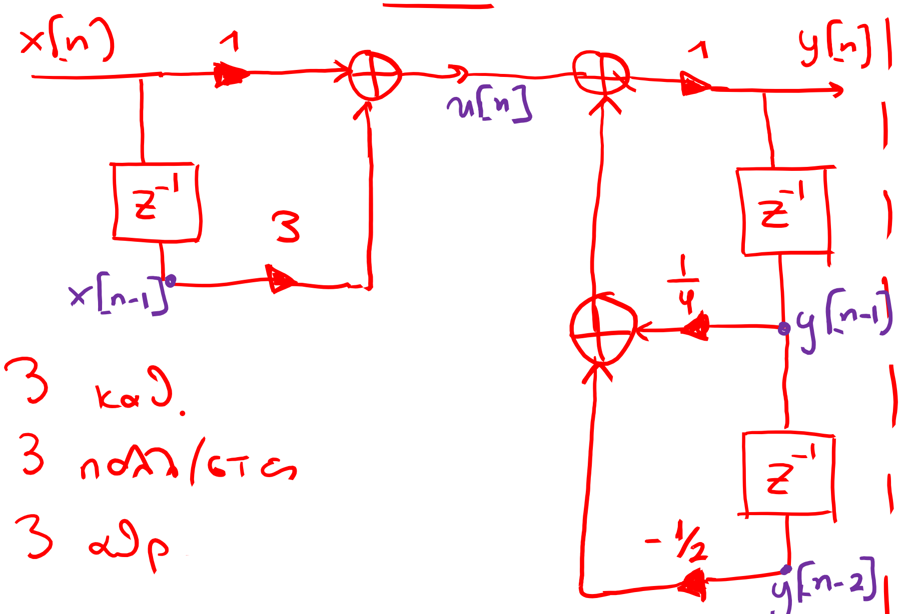
$y[n] = \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{2} y[n-2] + x[n] + 3x[n-1]$

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1+3z^{-1}}{1-\left(\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

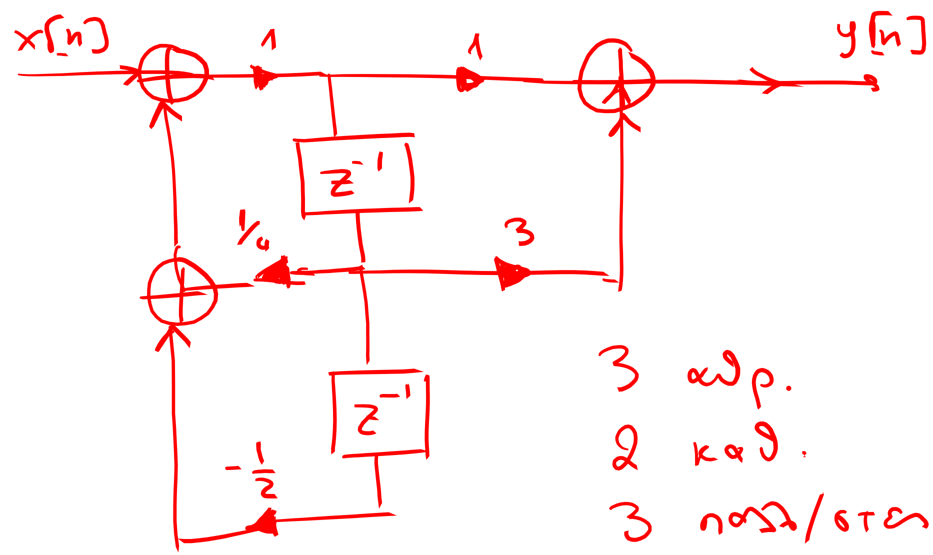
Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II

DF I



3 καθ.
3 πολλ/στες
3 αθρ

DF II



3 αθρ.
2 καθ.
3 πολλ/στες

Κέρδος: μια θέση μνήμης!

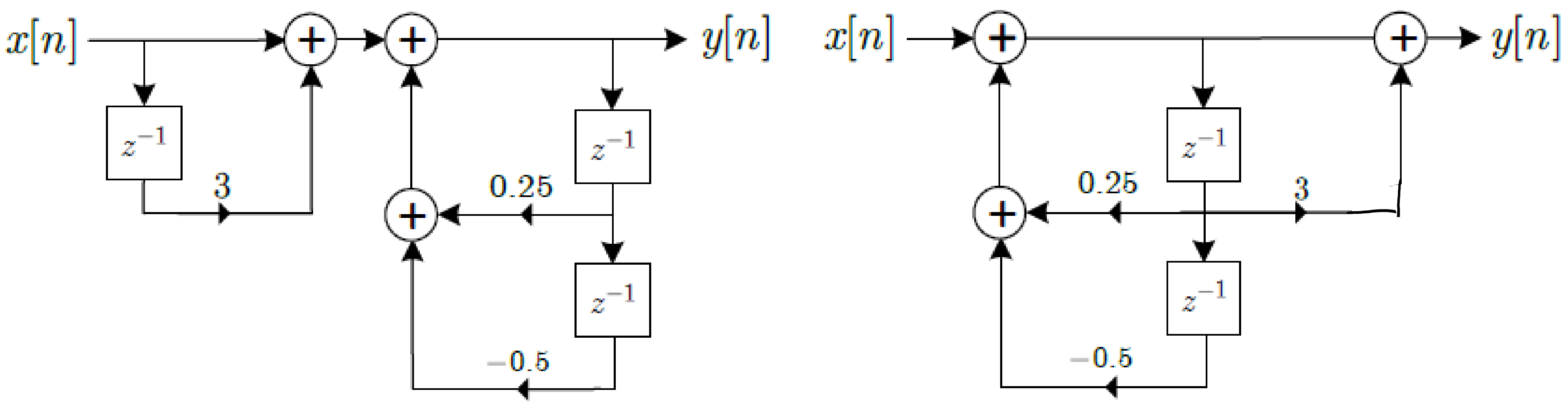
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



(α) (β)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;

  ✓ **Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη**

  ✓ **Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη**

  ✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις

  ✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον

  ✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Μορφή σε σειρά (cascade form)

$$x \rightarrow \boxed{H_1} \rightarrow \boxed{H_2} \rightarrow \boxed{H_3} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{H_k} \rightarrow y$$

- Συνάρτηση μεταφοράς

∈ ℝ ∈ ℂ ∈ ℂ

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

← μηδενικά

← πόλοι

∈ ℝ ∈ ℂ ∈ ℂ

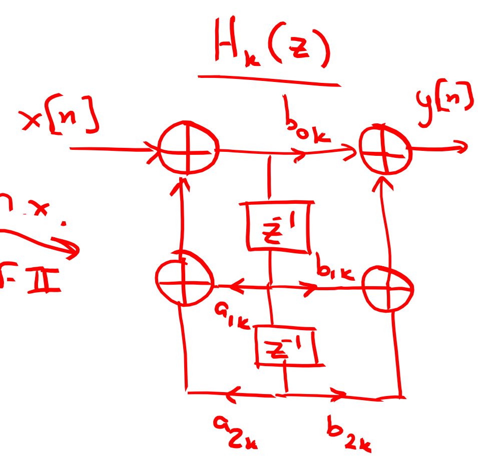
με $N = N_1 + 2N_2, \;\; M = M_1 + 2M_2$

δευτεροβάθμιοι όροι

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

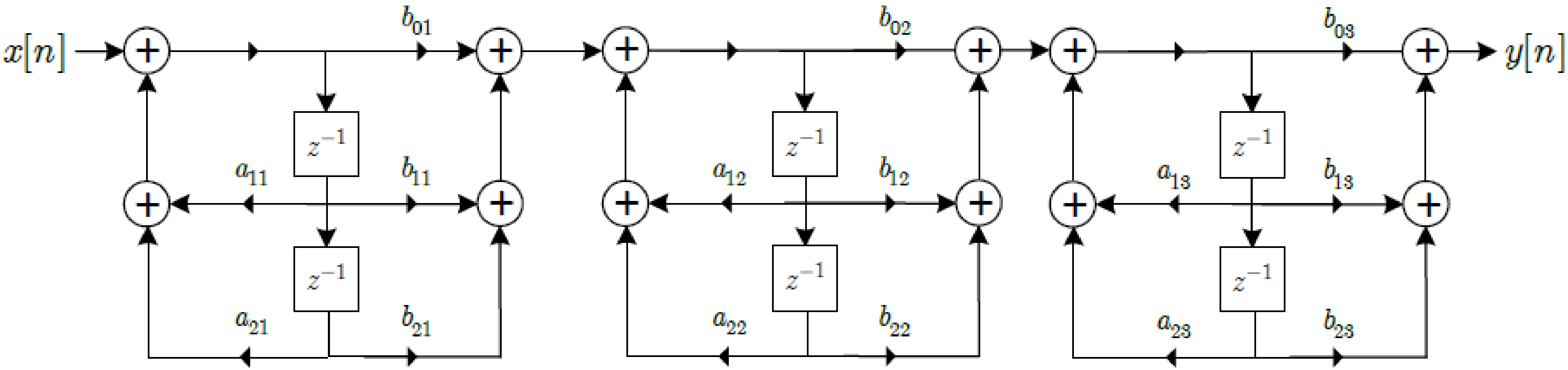
π.χ. DF-II



$$= \prod_{k=1}^{N_s} H_k(z)$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6ης τάξης



- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

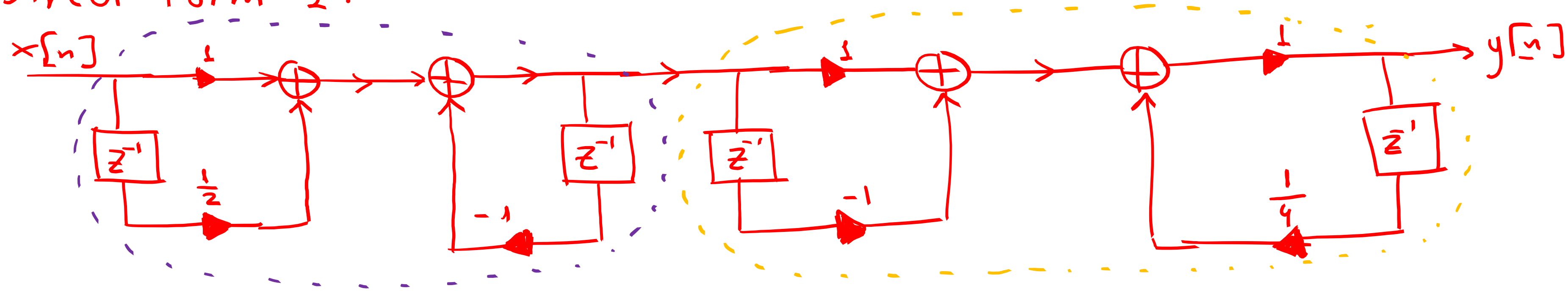
- Παράδειγμα:

  ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

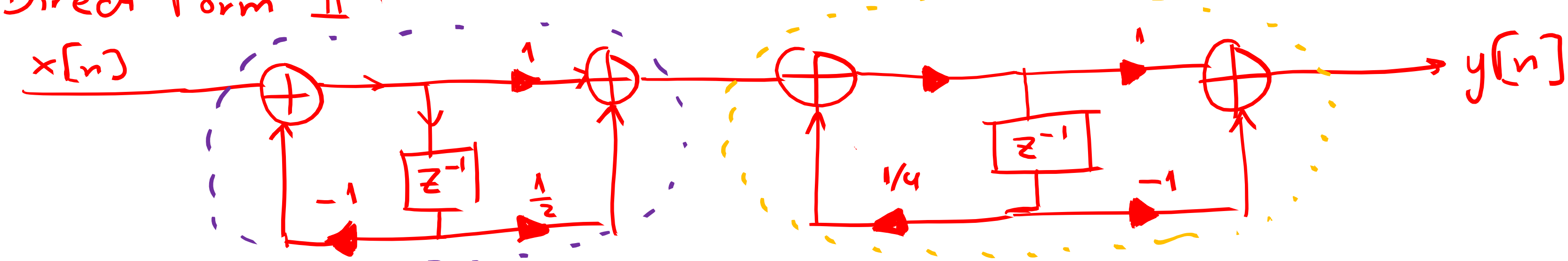
$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

  Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης

Direct Form I:



Direct Form II:



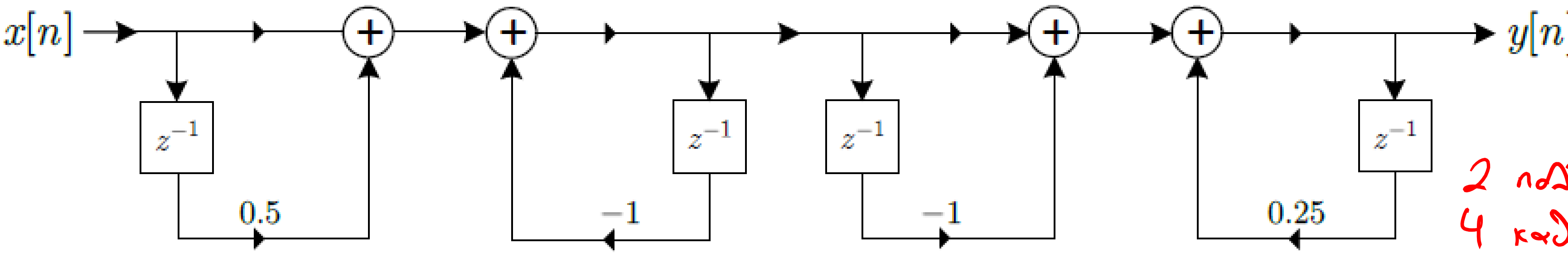
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

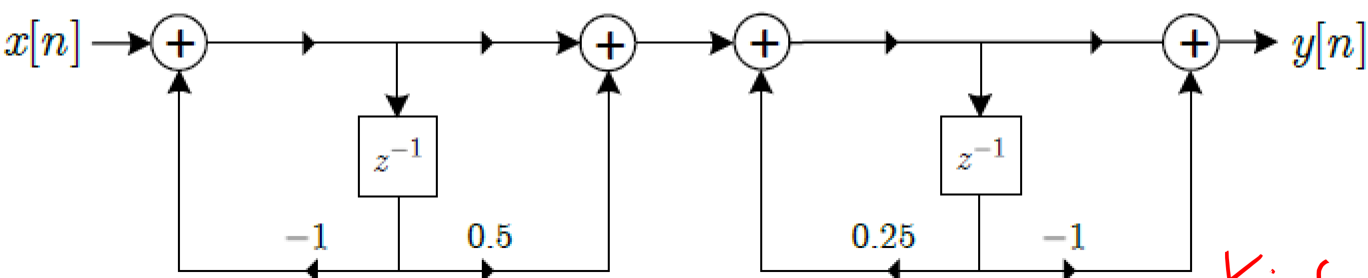
$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



(α)

2 πολλ/στες
4 καθυστ.
4 αθροιστ.



(β)

4 αθροιστ.
2 καθυστ.
2 πολλ/στες

Κέρδος: 2 μνήμες!

- **Υλοποίηση** **IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
  - Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

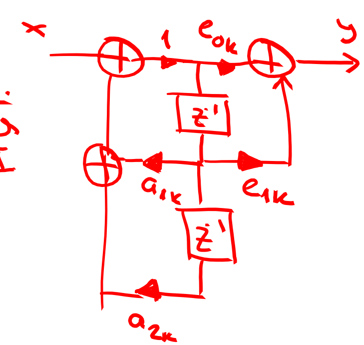
με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \overbrace{\frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}}^{H_k(z)}$$

π.χ.

DF II



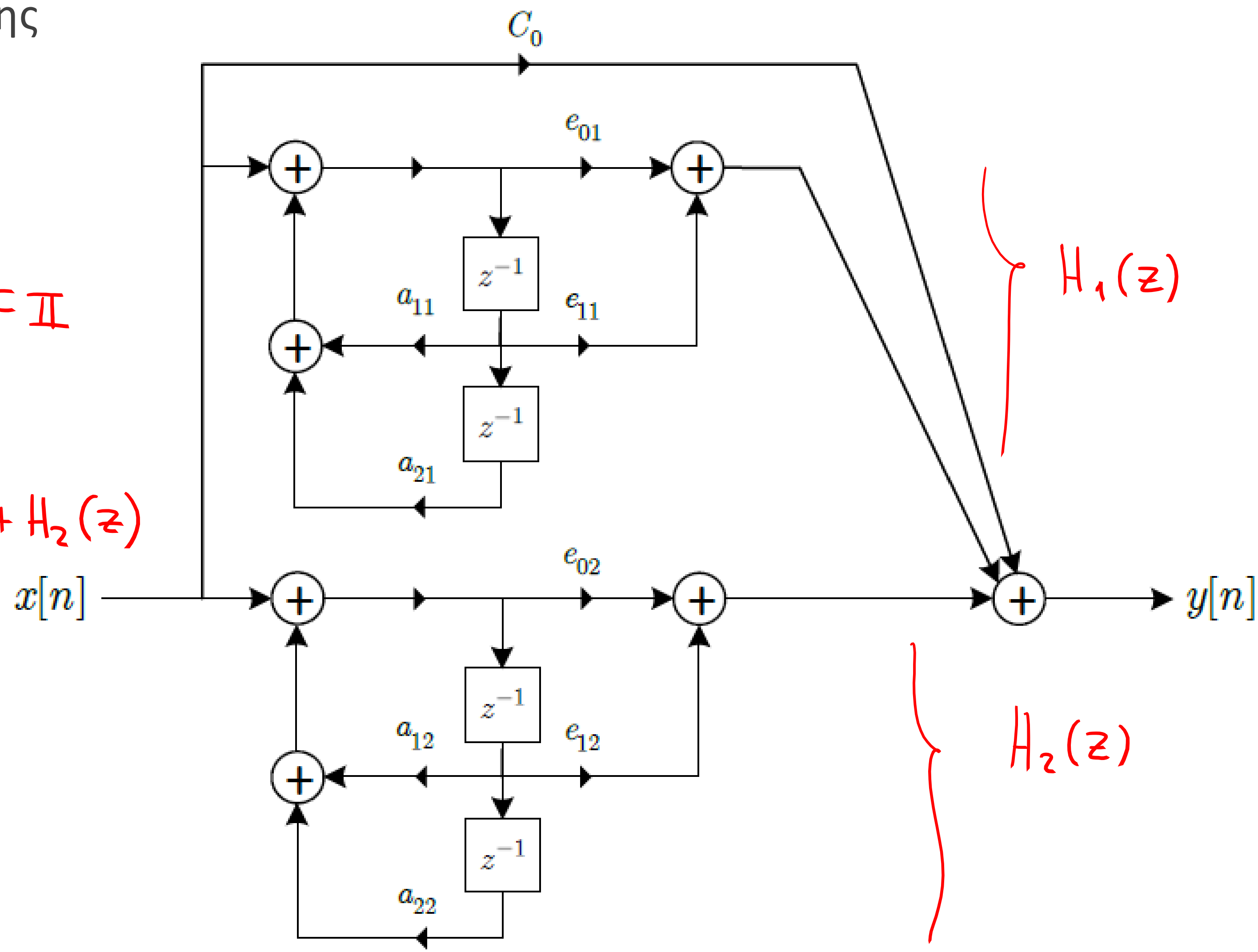
δευτεροβάθμια

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4ης τάξης

Οργάνωση σε υποσυστήματα DF II δευτέρου βαθμού

$H(z) = C_0 + H_1(z) + H_2(z)$



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}} \rightarrow 1 - \frac{1}{4}z^{-2}$$

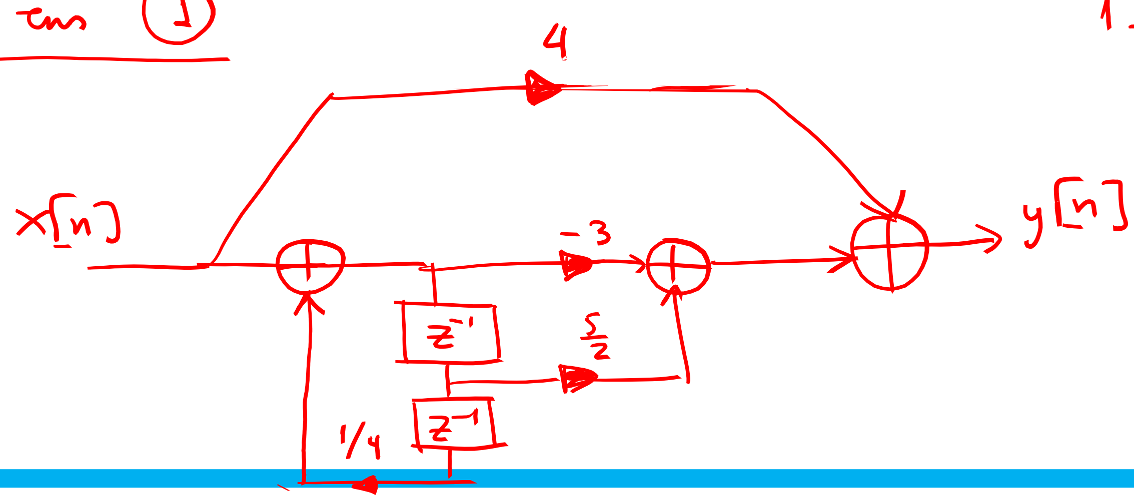
Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

$$\begin{array}{r|l} -\cancel{z^{-2}} + 2.5z^{-1} + 1 & -0.25z^{-2} + 1 \\ \cline{2-2} -(-\cancel{z^{-2}} + 0 + 4) & 4 \\ \hline 2.5z^{-1} - 3 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow H(z) = 4 + \frac{-3 + 2.5z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (1)$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2)$$

Υλοποίηση της (1)



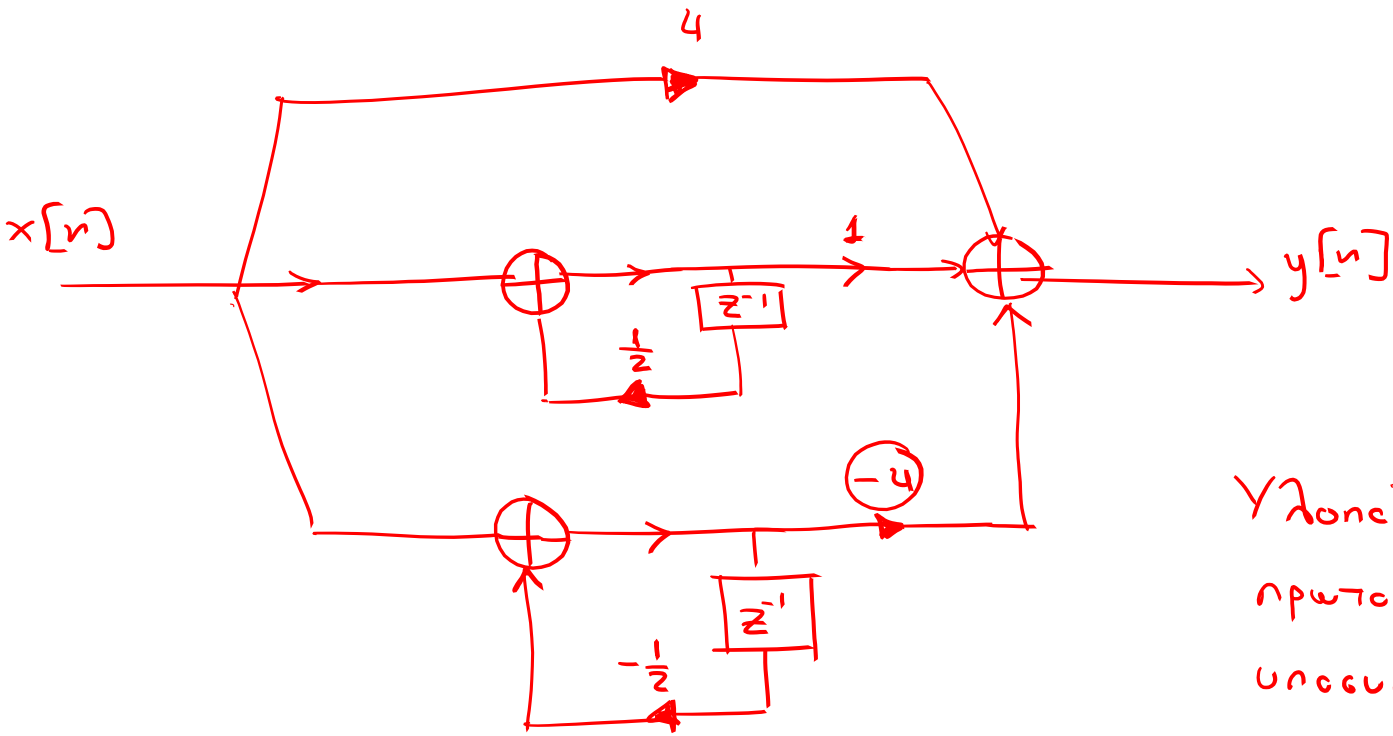
Υλοποίηση με δευτεροβάθμιο υποσύστημα

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Υλοποίηση της (2):

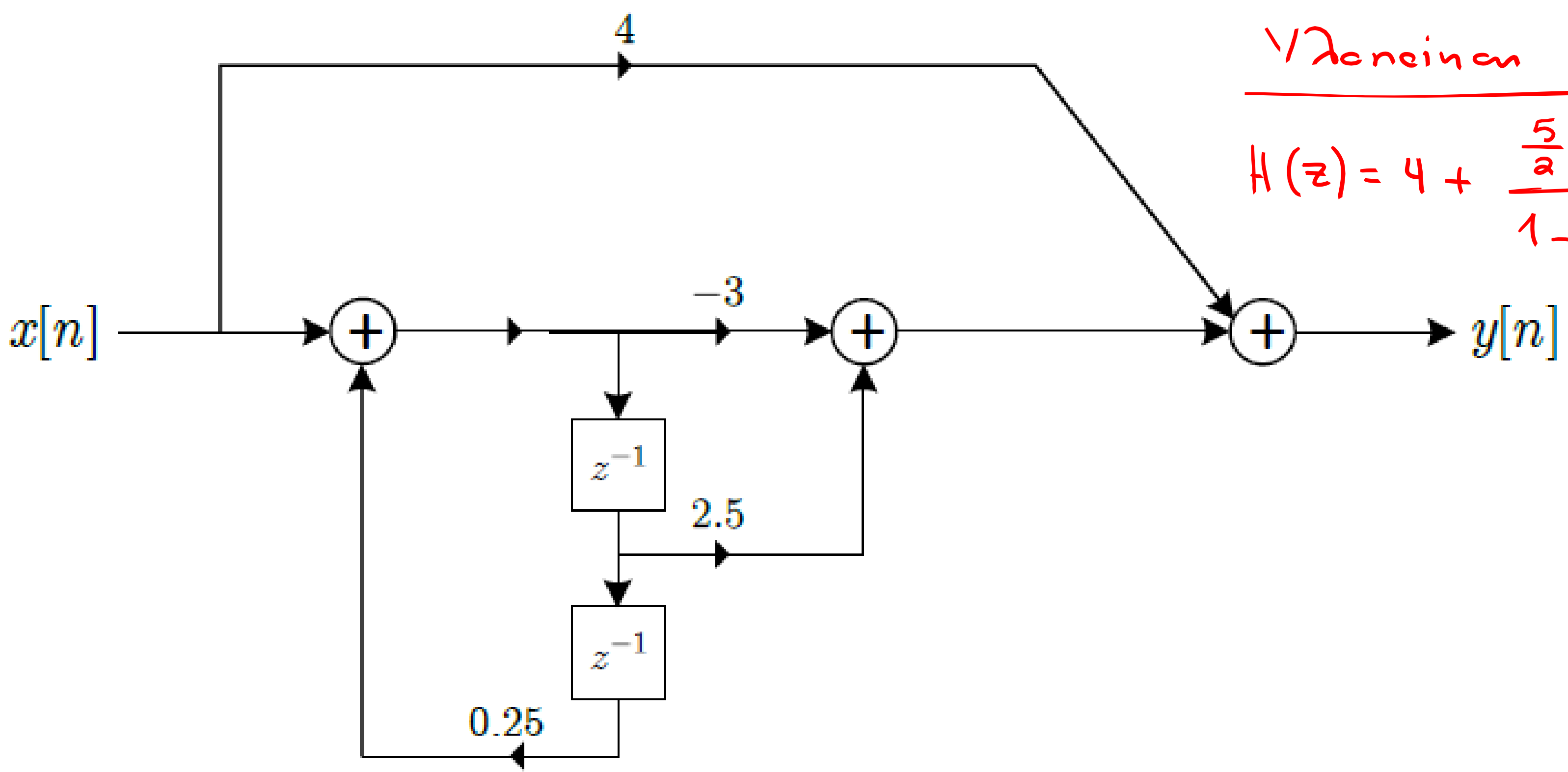


Υλοποίηση με πρωτοβάθμια υποσυστήματα

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης



Υλοποίηση της (1)

$$H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{2}z^{-1} - 3}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

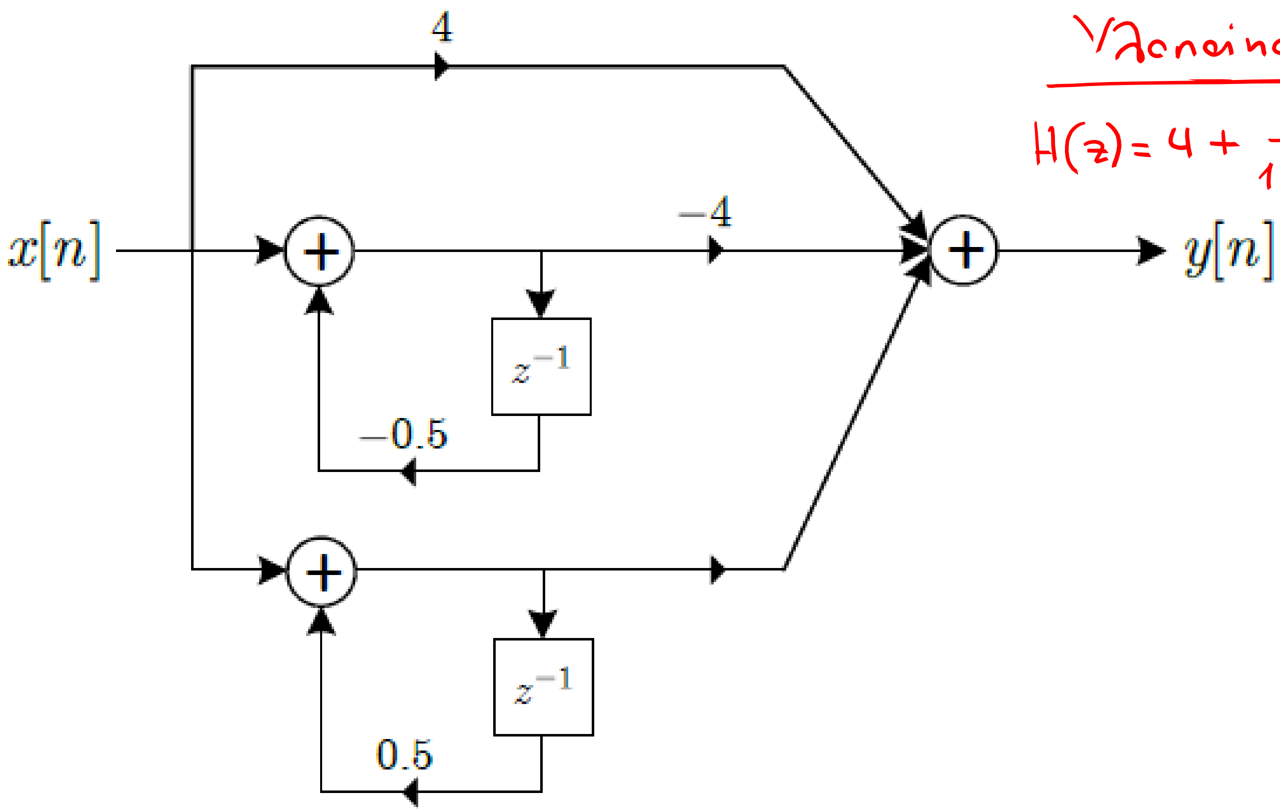
  ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

Υλοποίηση της 2

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ