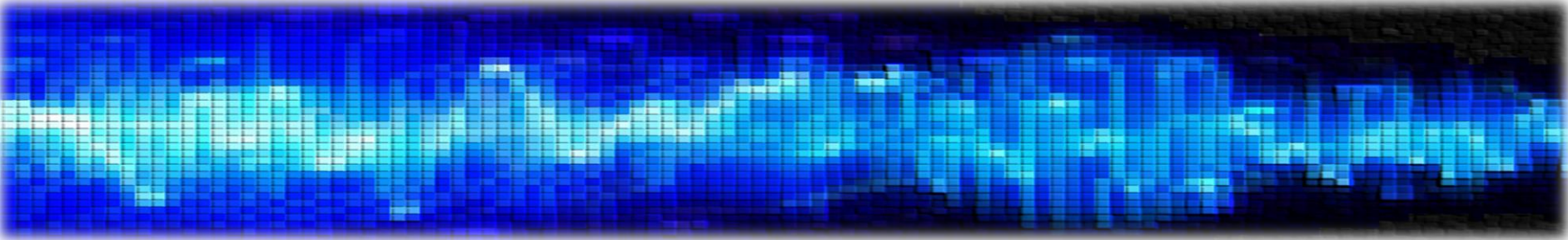


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 19<sup>Η</sup>

- 
- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (cont'd)
  - Συστήματα Γραμμικής Φάσης

## • Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Συστήματα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου
- Εναλλακτικά, συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα
- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ελάχιστης φάσης?
- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους
- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) \leq 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H(e^{j\omega}) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

**τότε το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές** από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Κατά συνέπεια

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] > 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] > \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

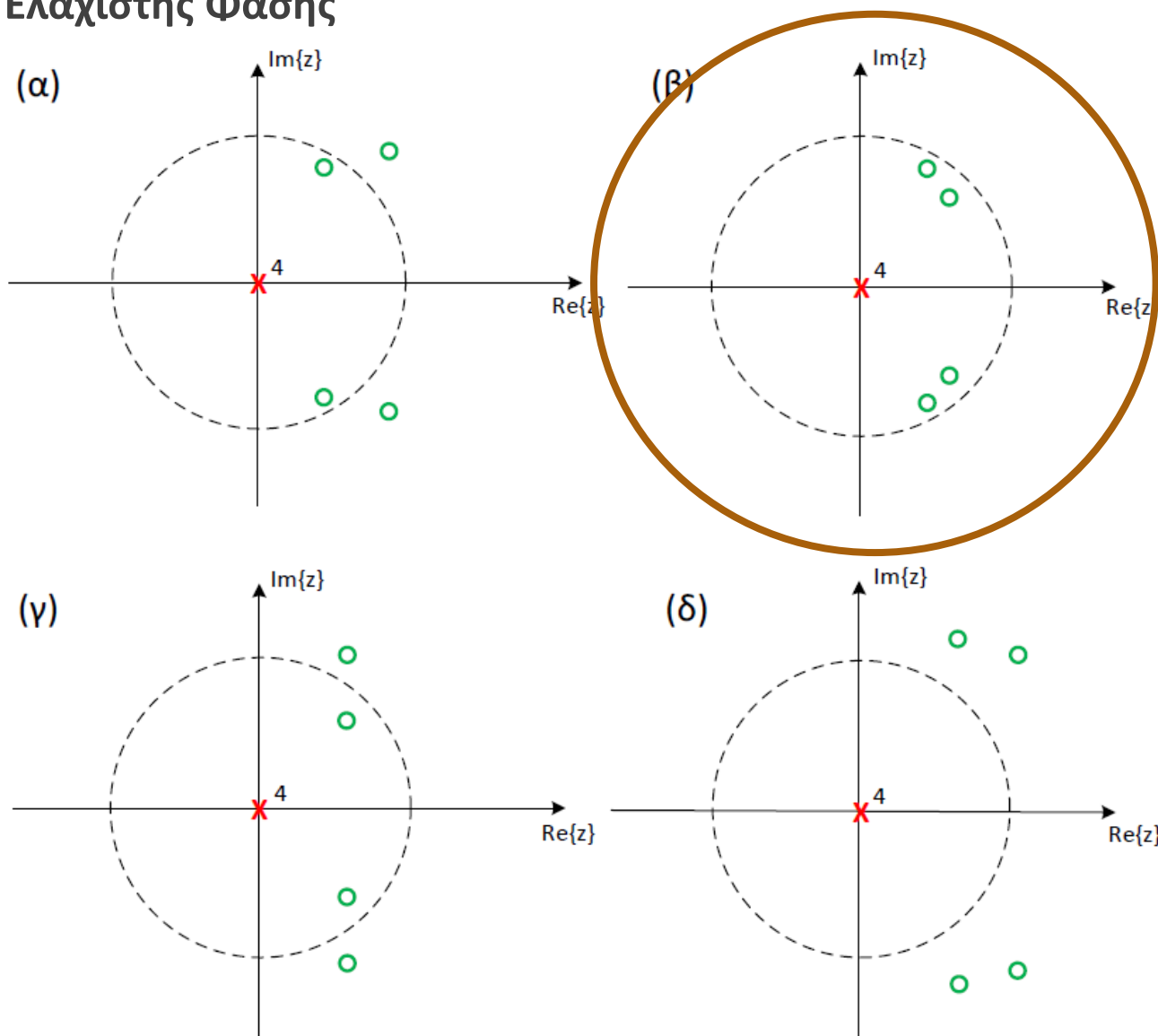
## • Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Μπορεί ναδειχθεί ότι η κρουστική απόκριση  $h_{min}[n]$  ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις  $h[n]$  άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση **μερικής ενέργειας**

$$E(n) \leq E_{min}(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2$$

- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η **ενέργεια του συστήματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης**
- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανομημένη και πιο «διάσπαρτη»
- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
  - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
  - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval
- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης



- Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

## • Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2$$

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

### Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n = 0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n = 1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n = 2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n = 3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n = 4$	13.71	13.71	13.71	13.71

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική
- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
  - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
  - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου
- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j(a\omega+\beta)}$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$
- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
  - ...τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR 😊
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση
- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
  - ...ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης
- Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV



## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ άρτιο}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο  $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

- Απόκριση Συχνότητας

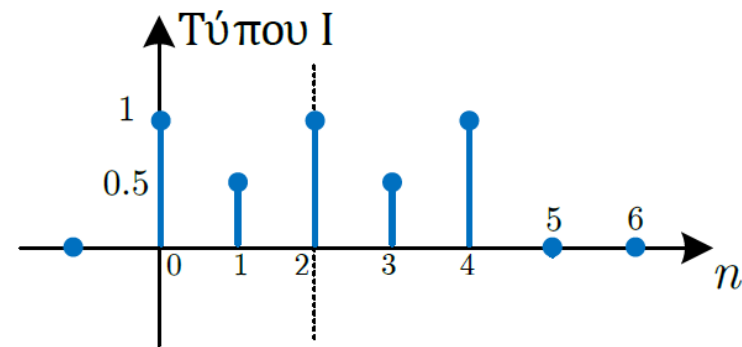
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^M h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[M-k]e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + \sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} h[k]e^{-j\omega(\frac{M}{2}-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left( \sum_{n=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-n\right]\cos(\omega n) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$



$$k := M - n$$

$$h[M - k] = h[k]$$

$$n := \frac{M}{2} - k$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I
- Οπότε συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h \left[ \frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$a_0 = h \left[ \frac{M}{2} \right]$$

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

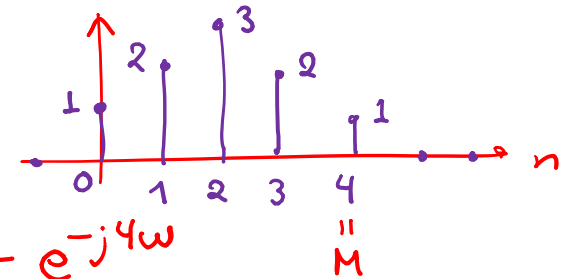
• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] \quad (1)$$

$$h[4-n] = h[n]$$

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$



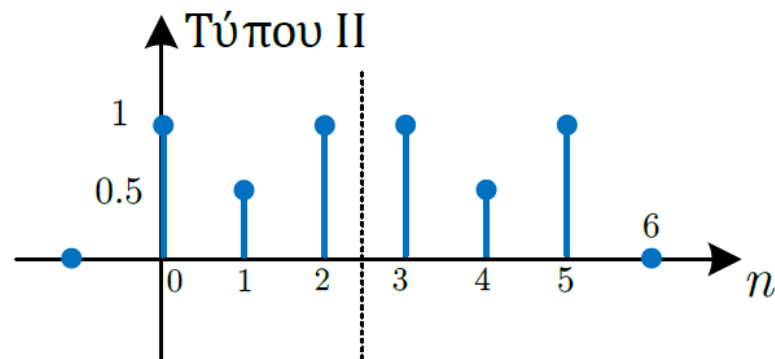
$$\begin{aligned} \text{Από: } (1) \Rightarrow H(e^{j\omega}) &= 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega} \\ &= (1 + e^{-j4\omega}) + 2(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) + 3e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + 2e^{-j2\omega} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 3e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j2\omega} (2\cos(2\omega)) + 2e^{-j2\omega} (2\cos(\omega)) + 3e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j2\omega} (3 + 2\cos(2\omega) + 4\cos(\omega)) \rightarrow \text{Tina I} \\ &\quad \text{FIR} \\ &\quad \Gamma. \Phi. \end{aligned}$$

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου II έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο  $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ \u0391\u03a1\u03a4\u0399\u039f}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο  $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

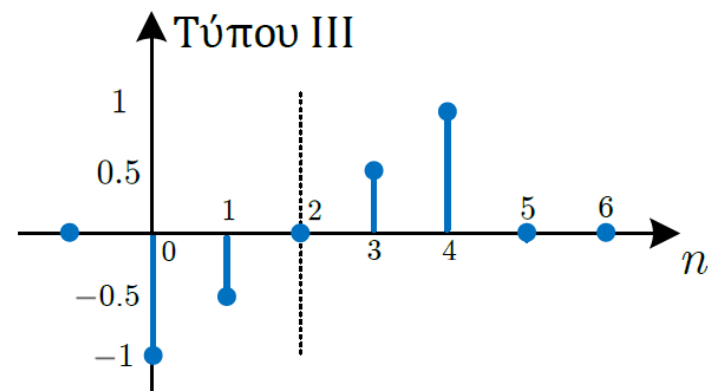
- Απόκριση Συχνότητας

- Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$



## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο  $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$

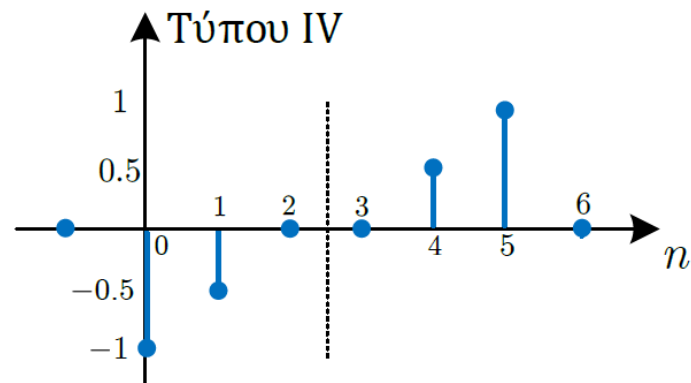
- Απόκριση Συχνότητας

- Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

**Τύπου I – συμμετρική  $h[n]$  – άρτιο  $M$** 

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h \left[ \frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$a_0 = h \left[ \frac{M}{2} \right]$$

**Τύπου II – συμμετρική  $h[n]$  – περιττό  $M$** 

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) \omega \right)$$

με

$$b_k = 2h \left[ \frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

**Τύπου III – αντισυμμετρική  $h[n]$  – άρτιο  $M$** 

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j \left( \frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h \left[ \frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

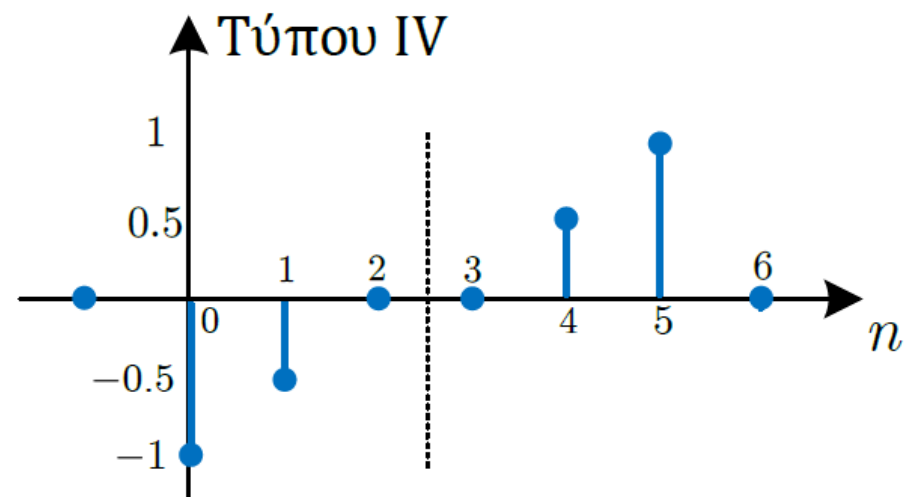
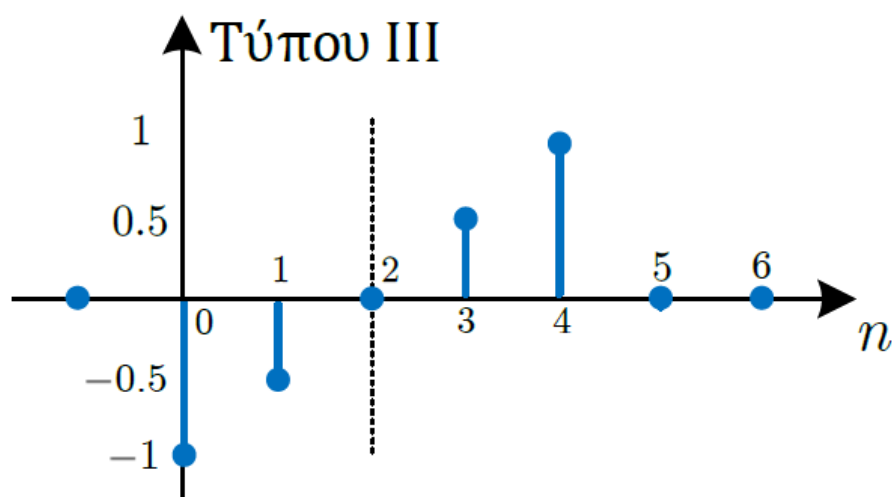
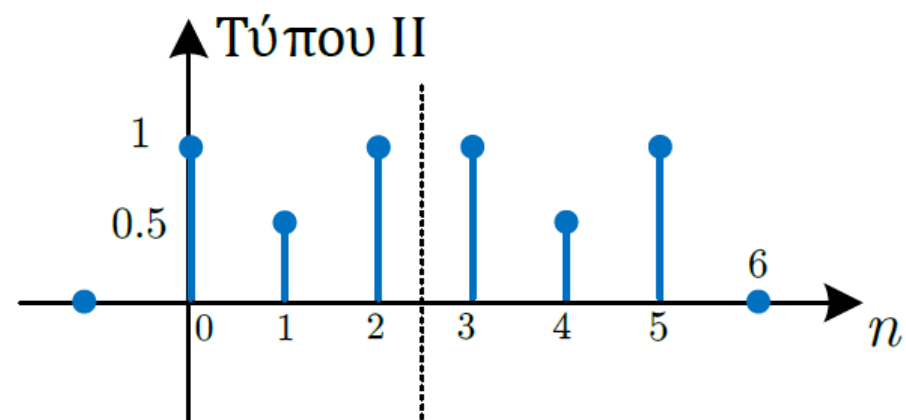
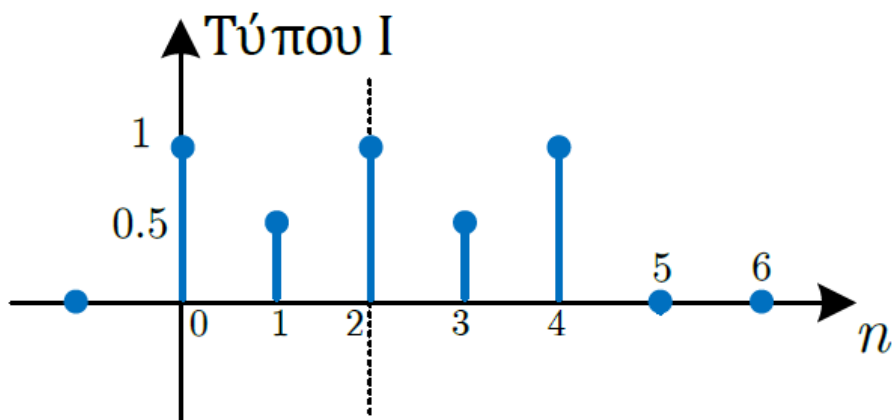
**Τύπου IV – αντισυμμετρική  $h[n]$  – περιττό  $M$** 

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j \left( \frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) \omega \right)$$

με

$$d_k = 2h \left[ \frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη





## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A(e^{j\omega})$$

- Το  $A(e^{j\omega})$  είναι πραγματική συνάρτηση του  $\omega$  και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
  - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή  $\pm\pi$

- Για  $0 \leq \omega \leq \pi$ , η απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$  γράφεται

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\omega M}{2}, & \text{τύπου I, II, } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II, } A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV, } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV, } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του  $Z$**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του  $Z$  για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο  $z = 0$

- Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου I, II:  $h[n] = h[M - n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$

- Τύπου III, IV:  $h[n] = -h[M - n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

- Αν  $z = z_0$  ένα μηδενικό του συστήματος  $H(z)$ , τότε υποχρεωτικά και το  $z = \frac{1}{z_0}$  είναι μηδενικό του συστήματος

- Το ζεύγος  $(z_0, \frac{1}{z_0})$  λέγεται αμοιβαίο

- Το ζεύγος  $(z_0, \frac{1}{z_0^*})$  λέγεται συζυγές αμοιβαίο (όπως ξέρετε)

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση  $z = z_0$ , πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση  $z = \frac{1}{z_0}$ !!!

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του  $Z$

- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

- Το  $H(z)$  μπορεί να έχει μηδενικά:

- συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο:  $z_k = e^{\pm j\theta_k}$

- αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα:  $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$

- αμοιβαία, αλλού:  $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$  και  $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

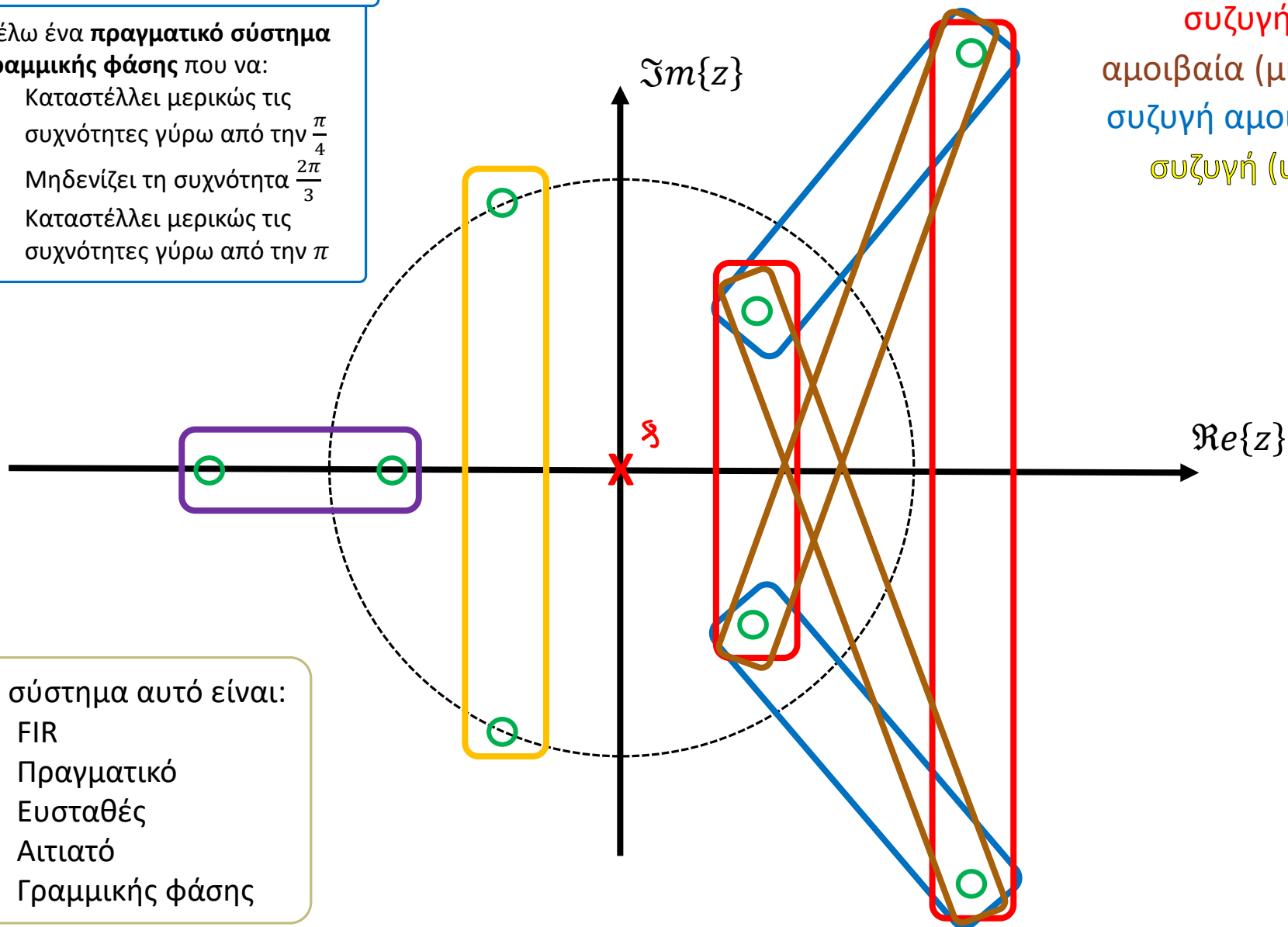
- Αν επιπλέον το  $H(z)$  αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ( $h[n] \in \mathbb{R}$ ), τότε το  $H(z)$  μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρνει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left( z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

## • Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Θέλω ένα **πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης** που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την  $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα  $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την  $\pi$



αμοιβαία (πραγμ.)  
 συζυγή  
 αμοιβαία (μιγαδ.)  
 συζυγή αμοιβαία  
 συζυγή (uc)

Το σύστημα αυτό είναι:

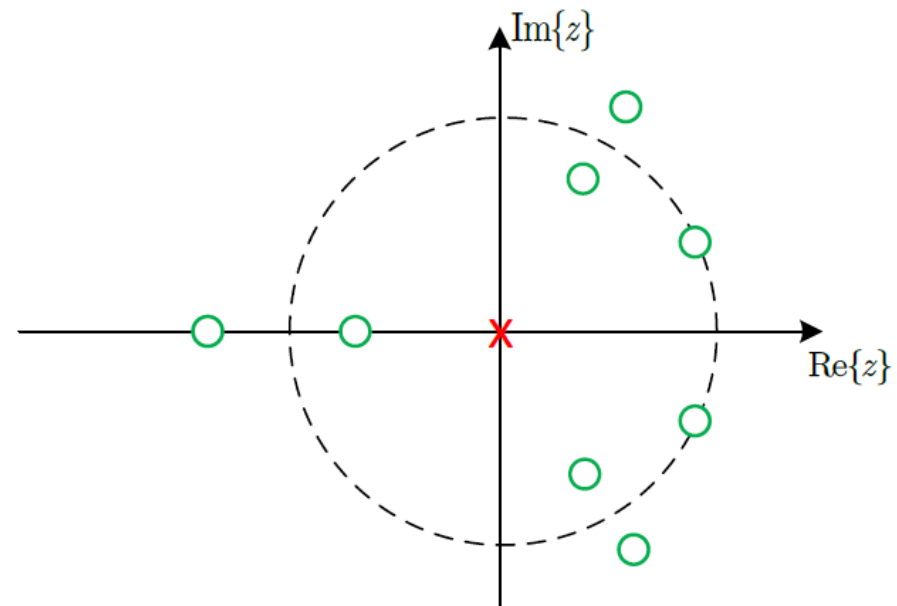
- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του  $Z$

- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις  $z = \pm 1$

- Τύπου I :  $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = 1$ : ταυτότητα

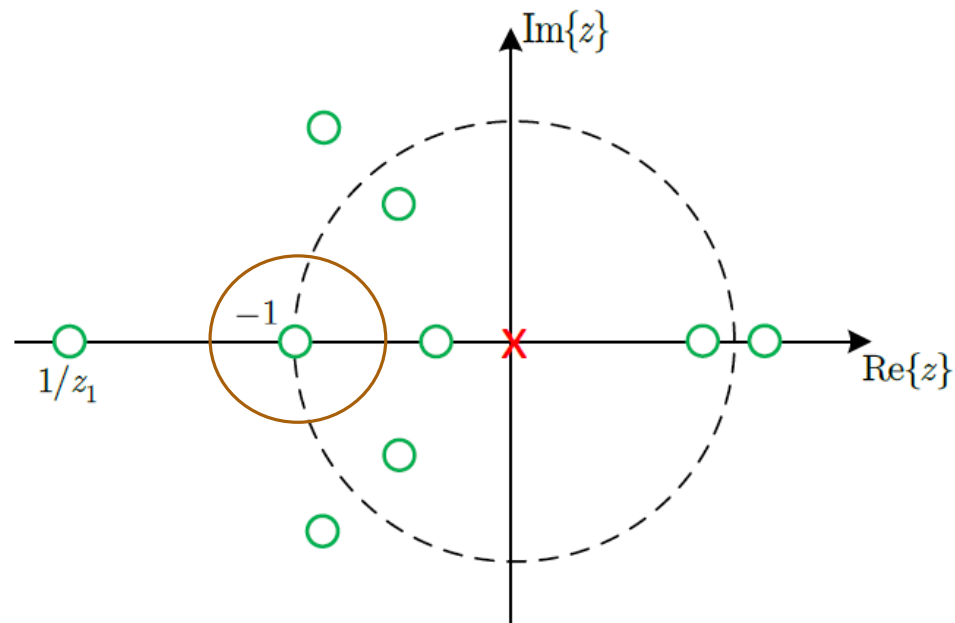
- Τύπου I :  $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = -1$ : ταυτότητα



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του  $Z$
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις  $z = \pm 1$
- Τύπου II :  $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  περιττό, για  $z = 1$ : ταυτότητα
- Τύπου II :  $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  περιττό, για  $z = -1$ :

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για  $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}(e^{j\pi}) = 0$  !



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Τύπου III :  $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = 1$ :

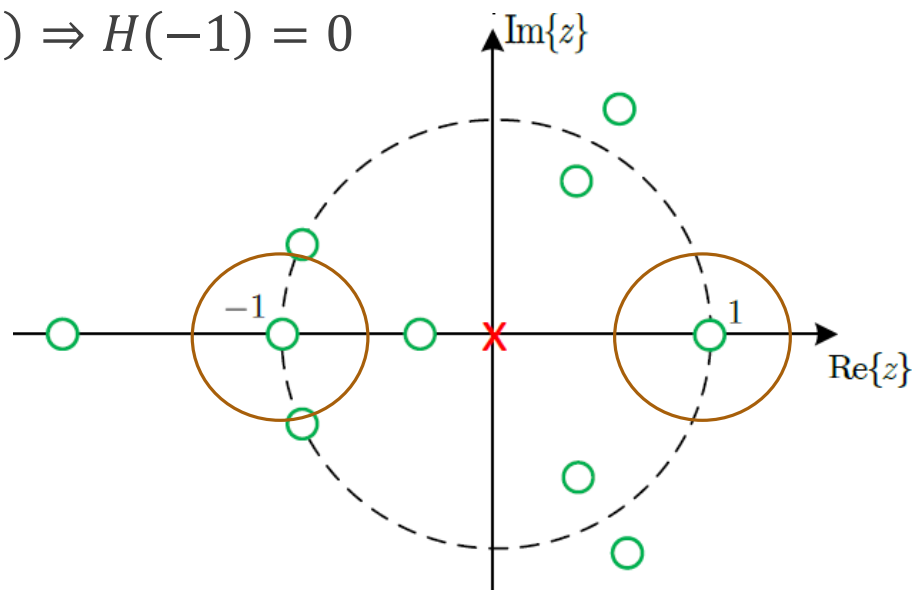
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για  $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0$  !

- Τύπου III :  $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = -1$ :

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για  $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0$  !





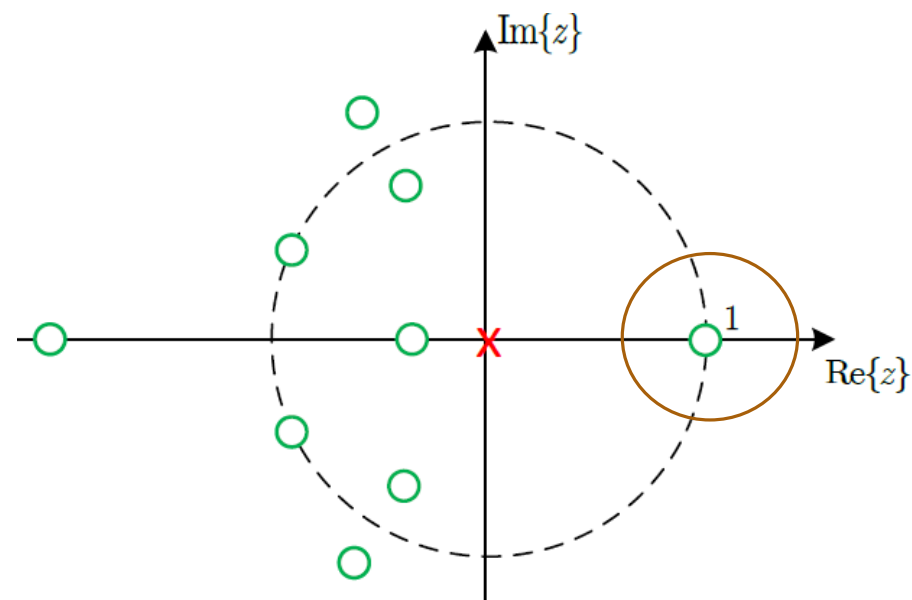
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του  $Z$

- Τύπου IV :  $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = 1$ :

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για  $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}(e^{j0}) = 0$  !

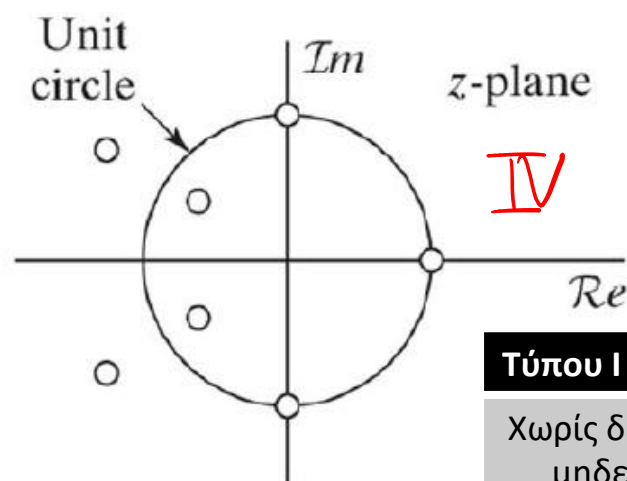
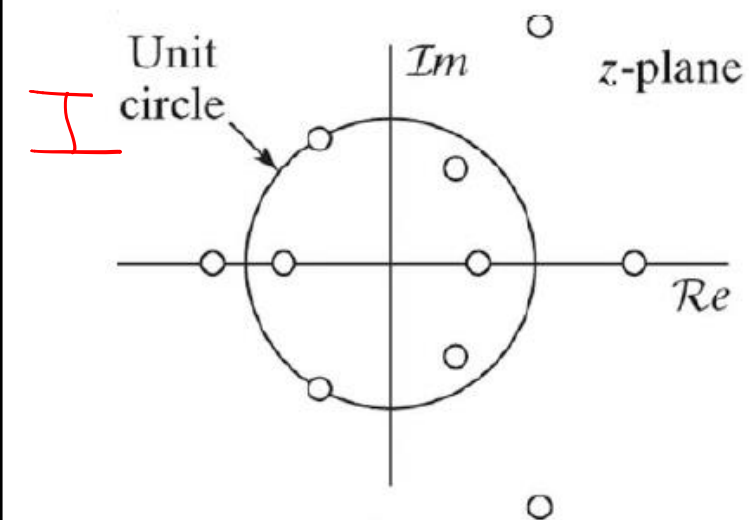
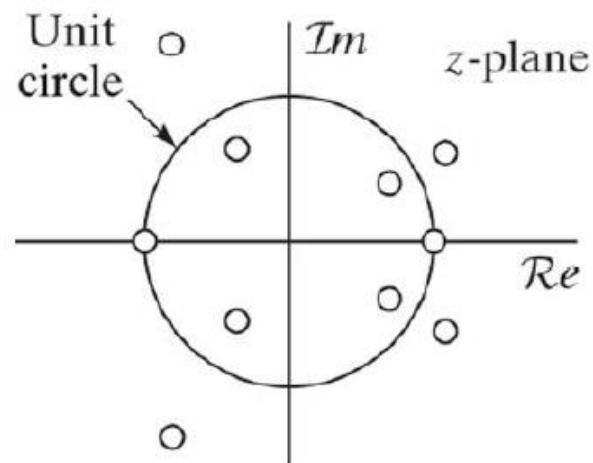
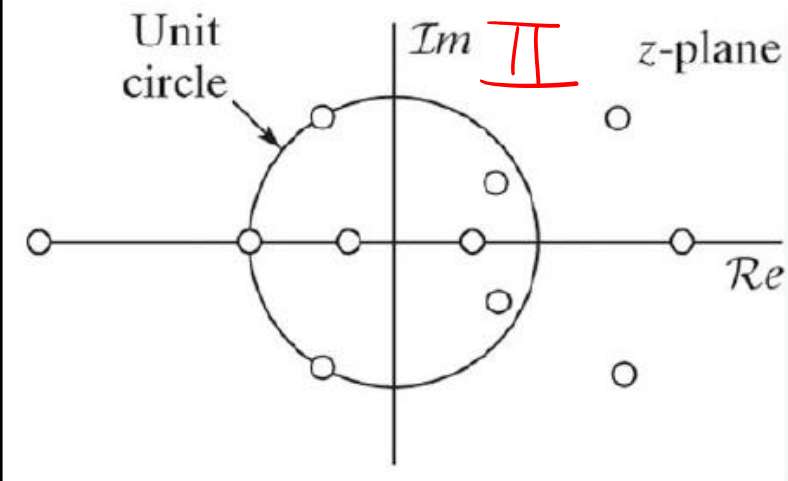
- Τύπου IV :  $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$ ,  $M$  άρτιο, για  $z = -1$ : ταυτότητα



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική $h[n]$ – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου IV – αντισυμμετρική $h[n]$ – περιττό M
$H_{III}(e^{j0}) = 0, H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

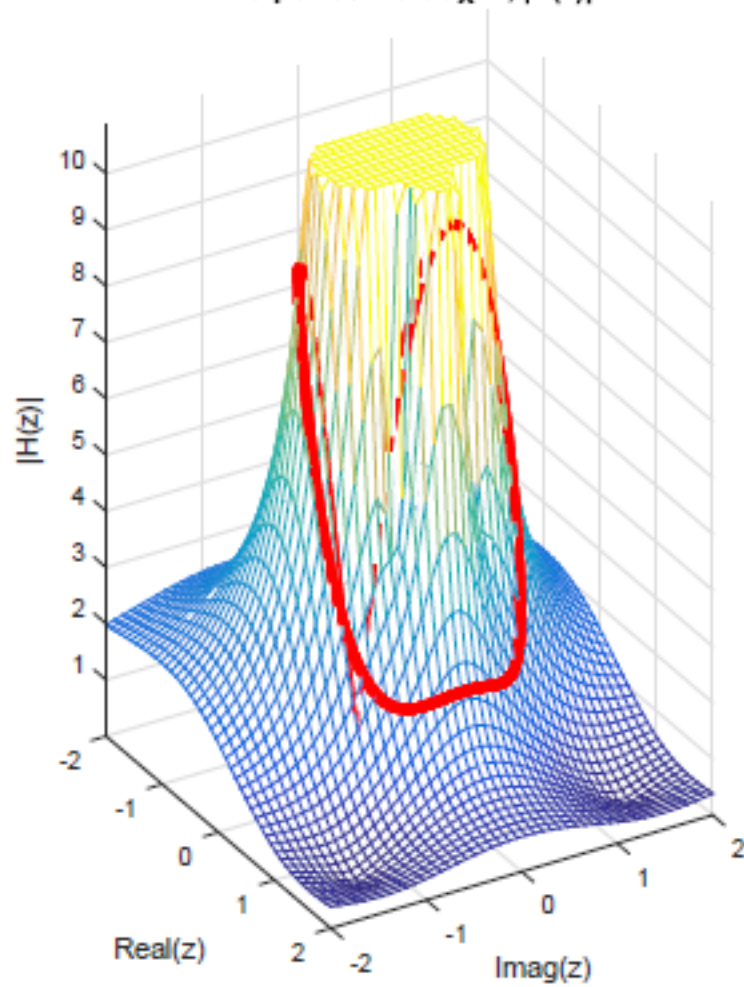
# • Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z



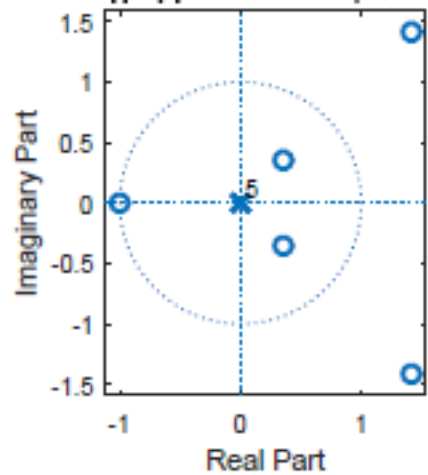
Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	Τύπου IV
$H_{III}(e^{j0}) = 0,$ $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

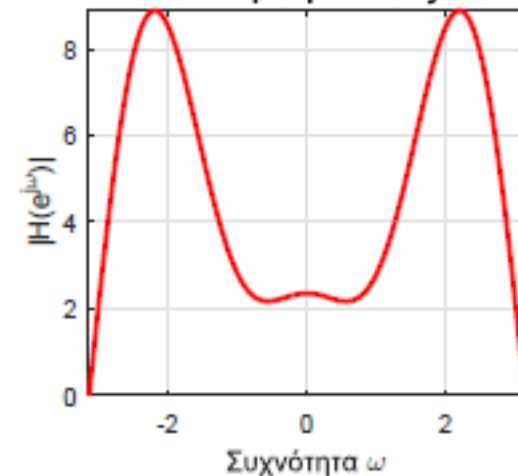
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$ 

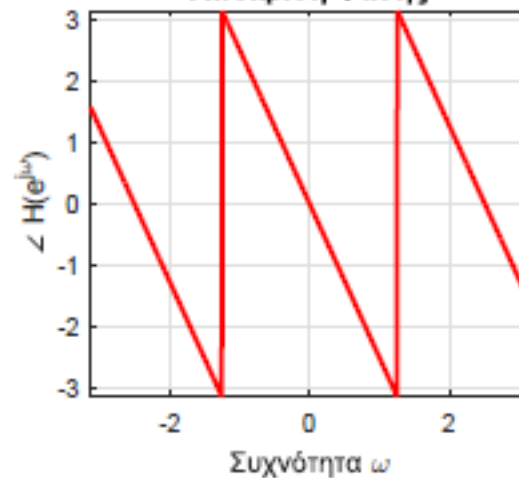
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



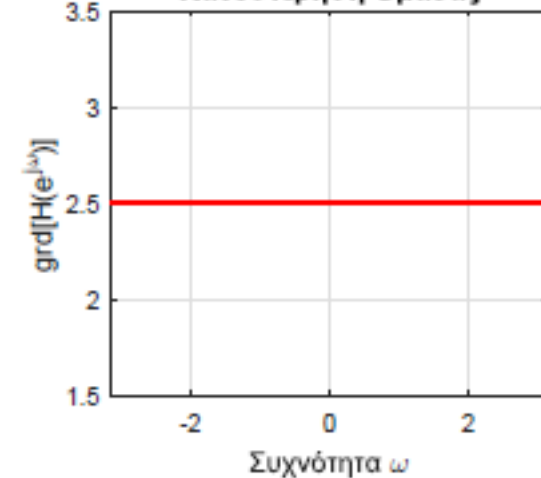
Απόκριση Πλάτους



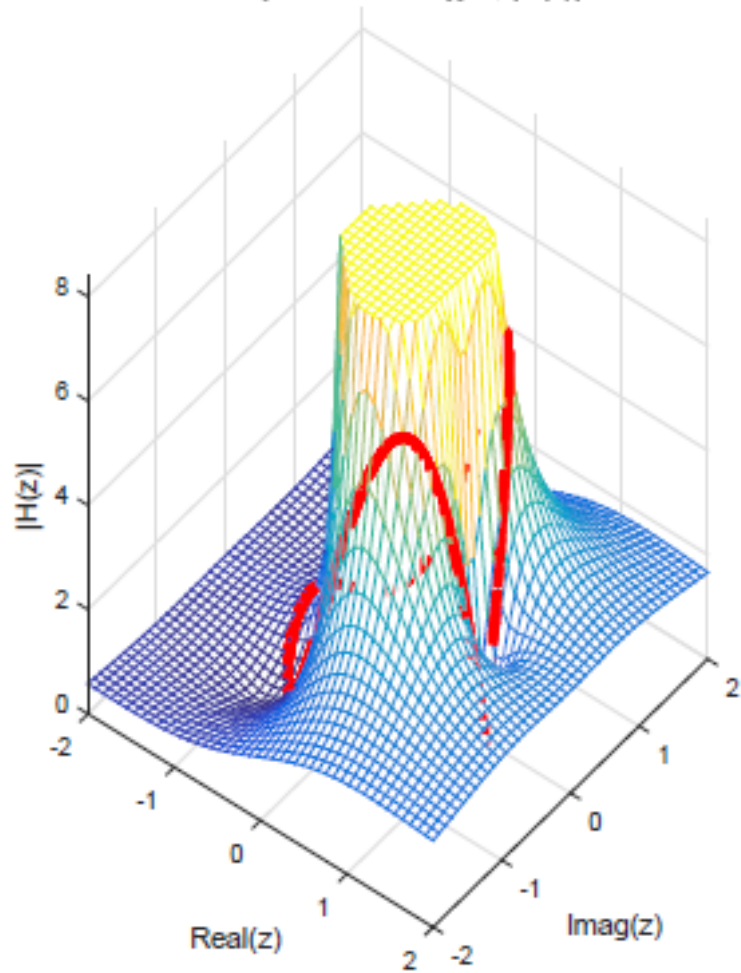
Απόκριση Φάσης



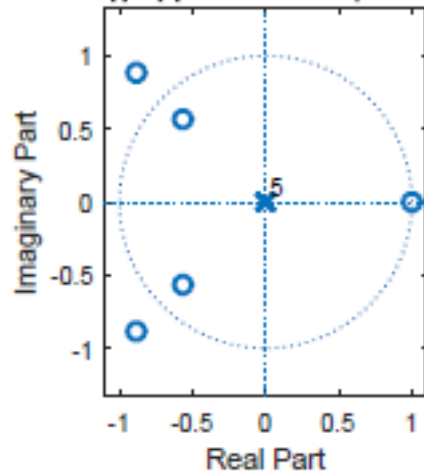
Καθυστέρηση Ομάδας



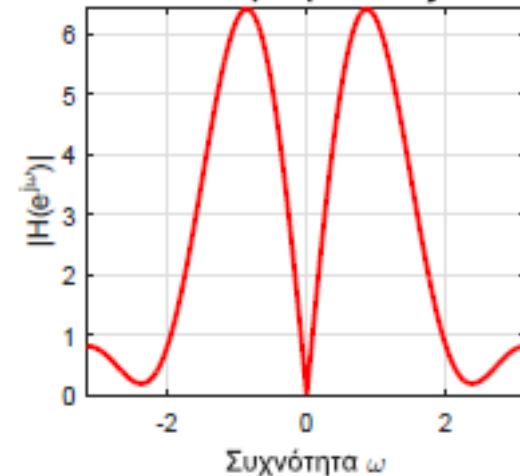
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$ 

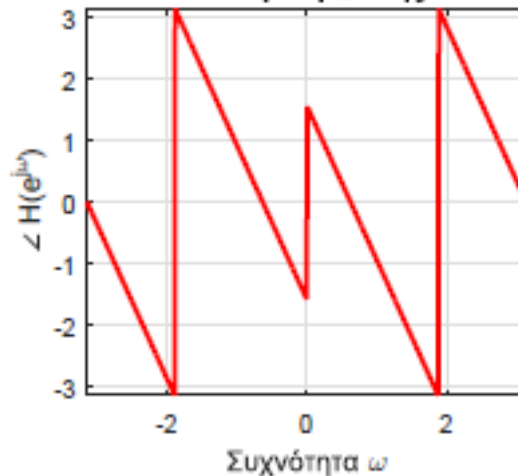
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



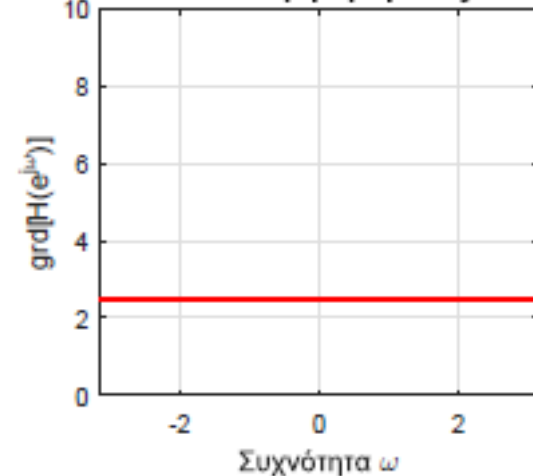
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

