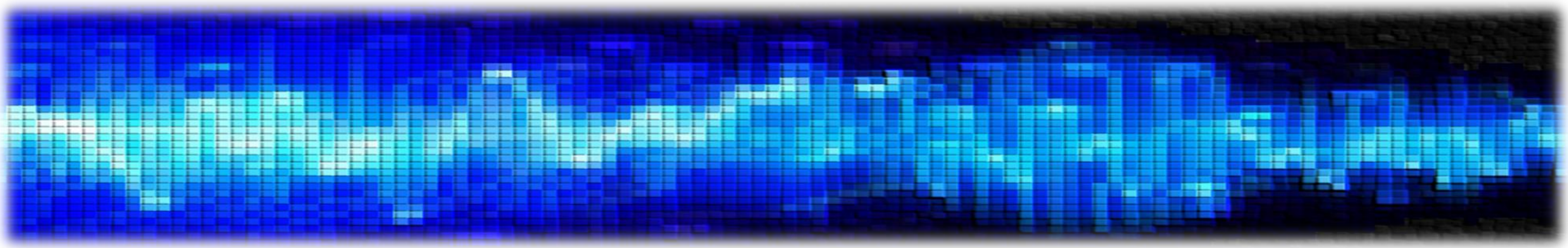
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 17^{Η}

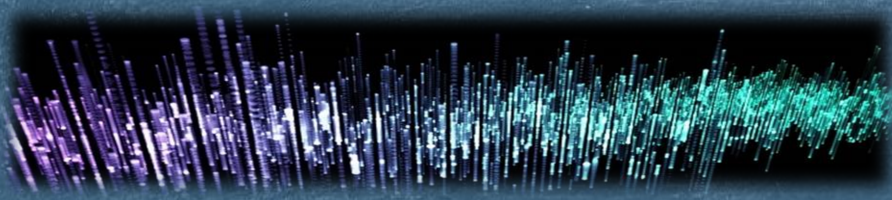


- Συστήματα στο χώρο του Ζ

Τι περιέχει το ΗΥ370?

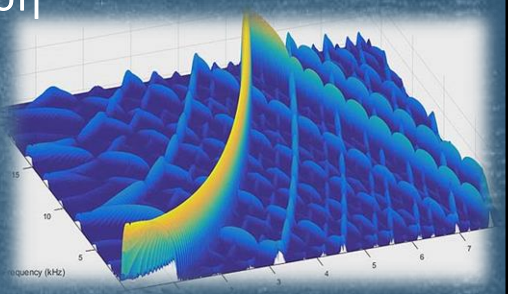
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Αντίστροφα Συστήματα**

- Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο
  - Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη
    - Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου
  - Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε
$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$
    δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο
  - Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$
  - Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Ζ προκύπτει ότι
$$H_i(z)H(z) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$
  - Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$
  - Στο χώρο του Ζ, αν
$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$
τότε
$$H_i(z) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

$|z| > 0.5 \cap |z| > 0.8 \neq \emptyset$

$|z| < 0.5$

$$h_i[n] = Z^{-1}\{H_i(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} - 0.8\,Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right\} =$$

$$= (0.5)^n u[n] - 0.8\,(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:

$0.5 - z^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{z} \Rightarrow z = 2$

○ Έστω $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$, $\boxed{|z| > 0.8.}$ Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}} = \frac{1}{1/2 - z^{-1}} - 0.8 \frac{z^{-1}}{1/2 - z^{-1}} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - 1.6 \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$

$|z| > 2$

$|z| < 2$

$, |z| > 0.8 \neq \emptyset$

α) $|z| > 2$

β) $0.8 < |z| < 2$

α) $h_i[n] = Z^{-1}\left\{\frac{2}{1 - 2z^{-1}}\right\} - 1.6\, Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}\right\}$

$= 2\, 2^n u[n] - 1.6\, 2^{n-1} u[n-1]$

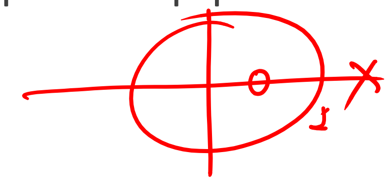
Αιτιατό, όχι ευσταθές

β) $h_i[n] = -2\, 2^n u[-n-1] + 1.6\, 2^{n-1} u[-n]$

όχι Αιτιατό, είναι ευσταθές

- **Αντίστροφα Συστήματα**

  - Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
  - Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό



  - Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
    - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του **<u>εντός</u>** του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
    - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
  - Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
  - Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
    - **Άρα <u>όλα</u> τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται ΚΑΙ ΑΥΤΑ εντός του μοναδιαίου κύκλου**
  - Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
    - θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα…

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Ζ ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Ζ «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «διαισθητική»
- θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε *ακριβώς* πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_k (1 - b_k e^{-j\omega})}{\prod_l (1 - a_l e^{-j\omega})}$$

❑ Απόκριση Πλάτους

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |A| \frac{\prod_{k=1}^{M} \left|1 - b_k e^{-j\omega}\right|}{\prod_{l=1}^{N} \left|1 - a_l e^{-j\omega}\right|}$$

❑ Απόκριση Φάσης

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle A + \angle \prod_{k=1}^{M} \left(1 - b_k e^{-j\omega}\right) - \angle \prod_{l=1}^{M} \left(1 - a_l e^{-j\omega}\right)$$

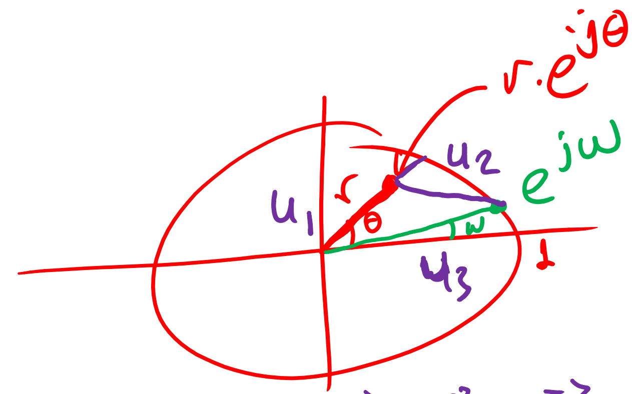
$$= \angle A + \sum_{k=1}^{M} \angle\left(1 - b_k e^{-j\omega}\right) - \sum_{l=1}^{M} \angle\left(1 - a_l e^{-j\omega}\right)$$

❑ Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle\left(1 - a_k e^{-j\omega}\right) - \sum_{l=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle\boxed{\left(1 - b_l e^{-j\omega}\right)}$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $\left|\boxed{\left(1 - c_k e^{-j\omega}\right)!!}\right| = \left|\cancel{e^{-j\omega}}\right| \cdot \left|\left(e^{j\omega} - c_k\right)\right|$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$



- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις
  - Το c είναι πόλος
  - Το c είναι μηδενικό

$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \Rightarrow$

- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης

$\Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{u}_3 - \vec{u}_1$

- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $\boxed{c = re^{j\theta}}$ ως **μηδενικό**:

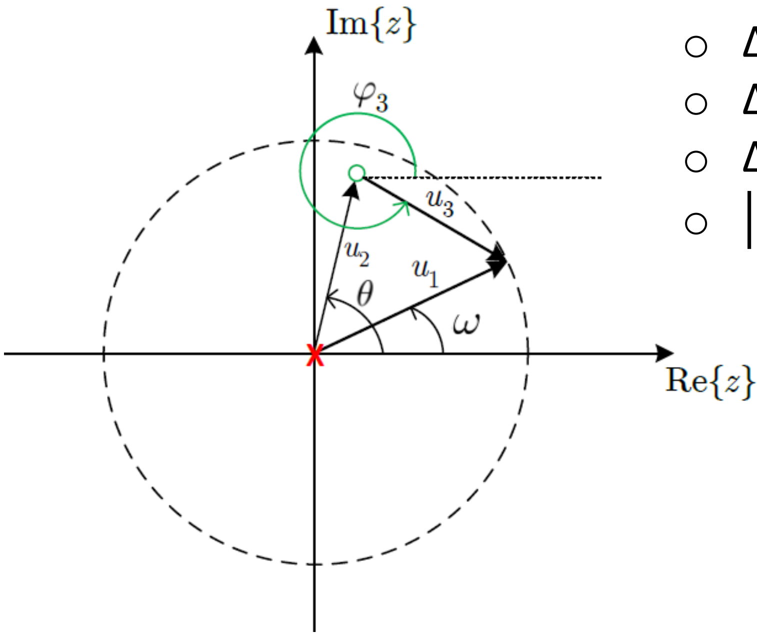
$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta}z^{-1}$$

- Οπότε:

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = |e^{-j\omega}||e^{j\omega} - re^{j\theta}| = \boxed{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από Ο ως το μηδενικό
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του $\vec{u}_3$!!

- Για την απόκριση φάσης

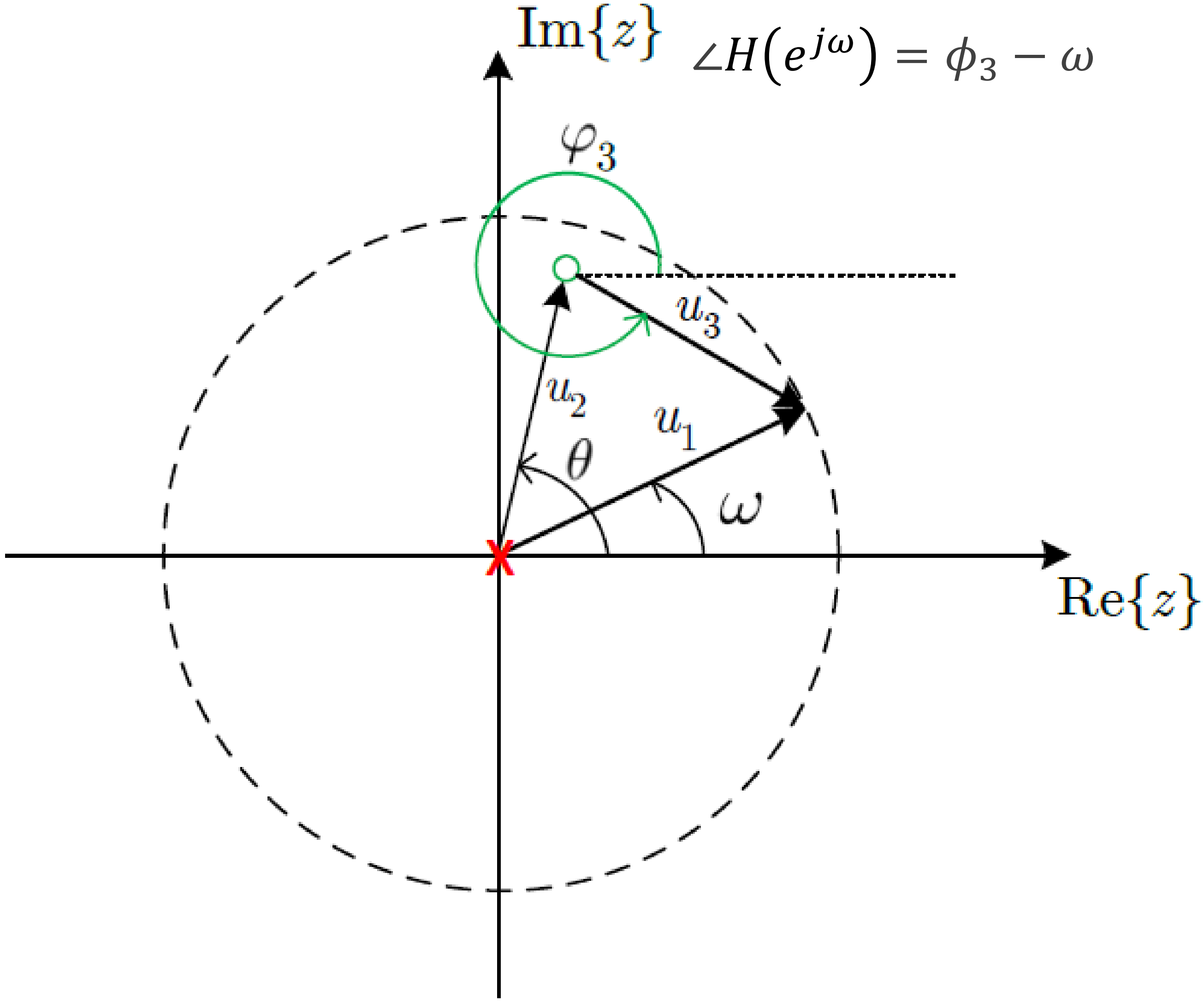
$$\angle\left(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right) = \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

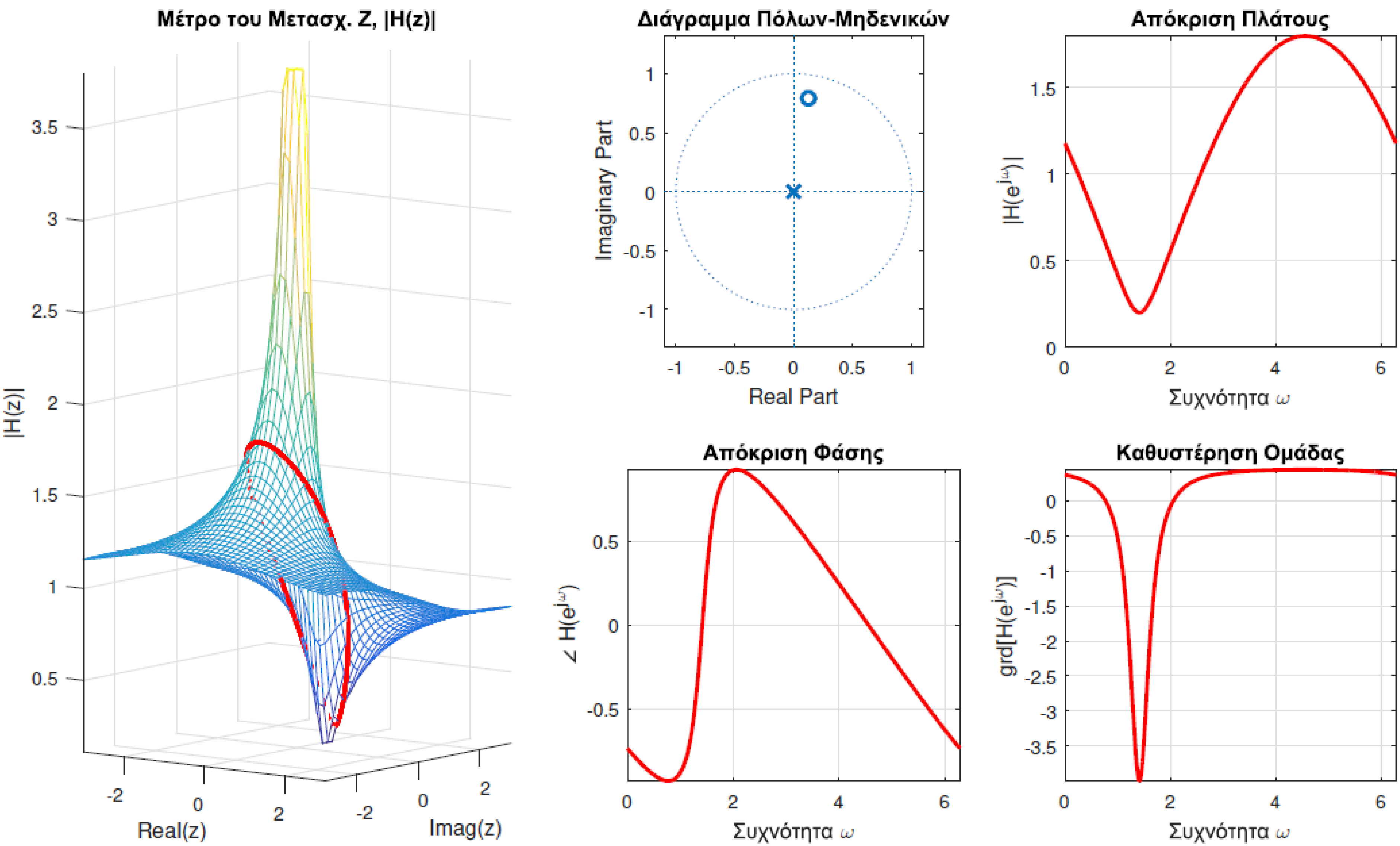
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = |\vec{u}_3|$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \phi_3 - \omega$$

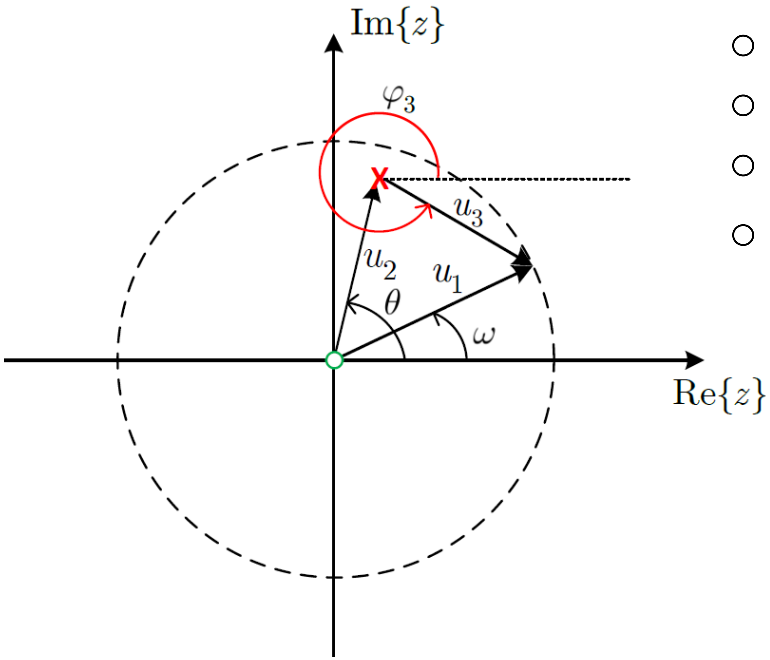


- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από Ο ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{|e^{j\omega}-re^{j\theta}|} = \frac{1}{|\vec{u}_1-\vec{u}_2|} = \frac{1}{|\vec{u}_3|}$

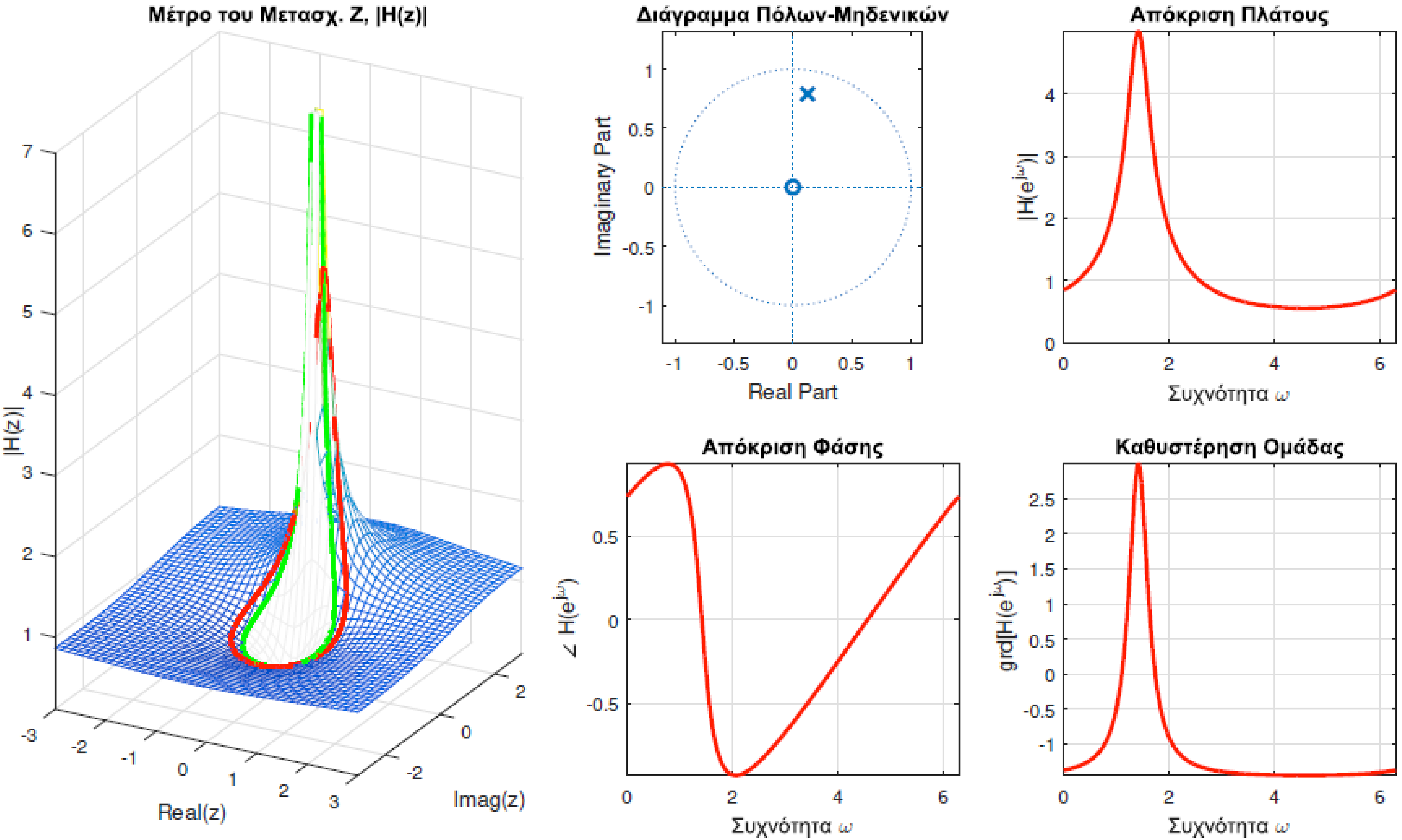
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του $\vec{u}_3$!!

- Για την απόκριση φάσης

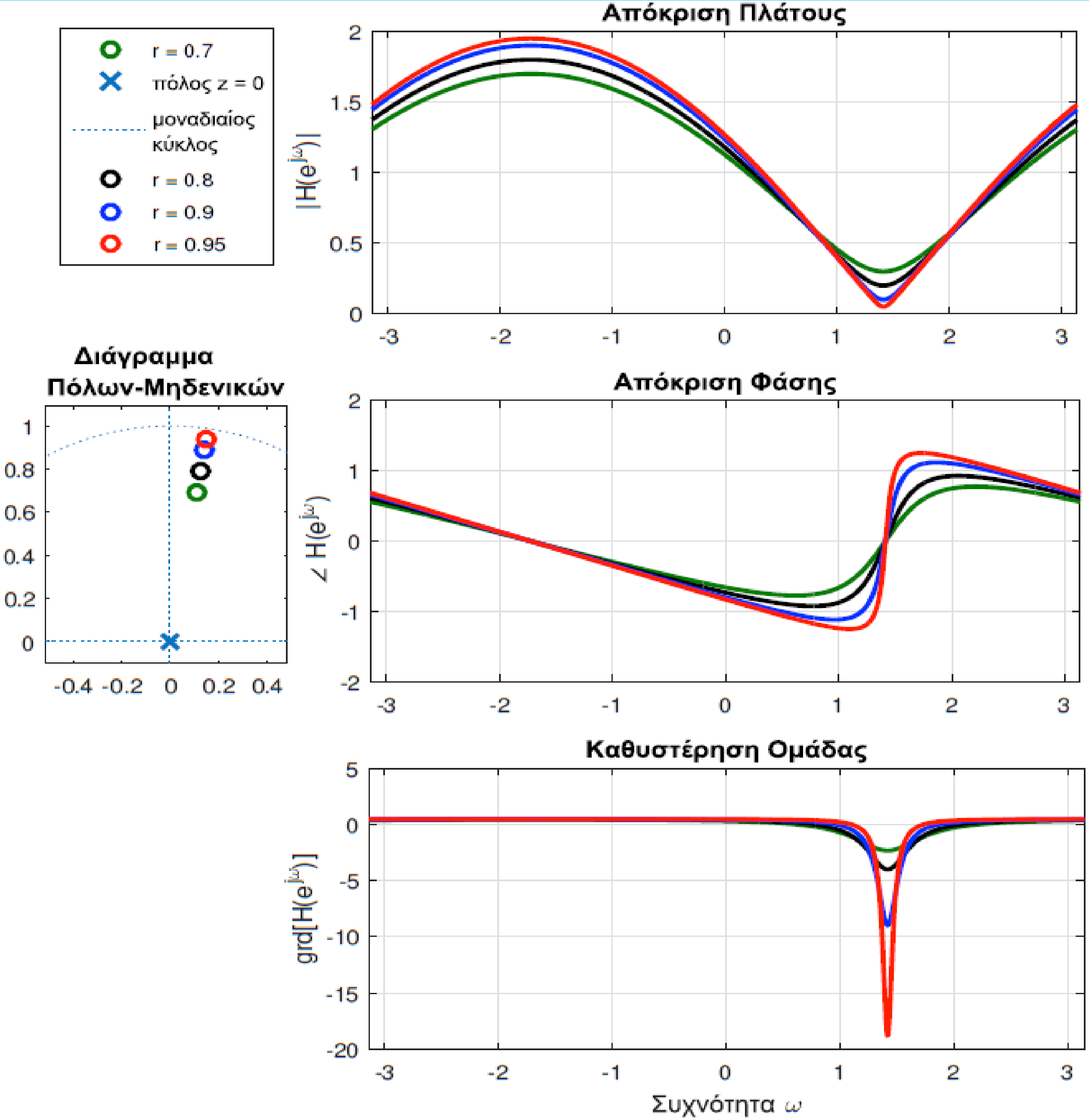
$$\angle\frac{1}{(1-re^{j\theta}e^{j\omega})} = \angle e^{j\omega} - \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) = \omega - \phi_3$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

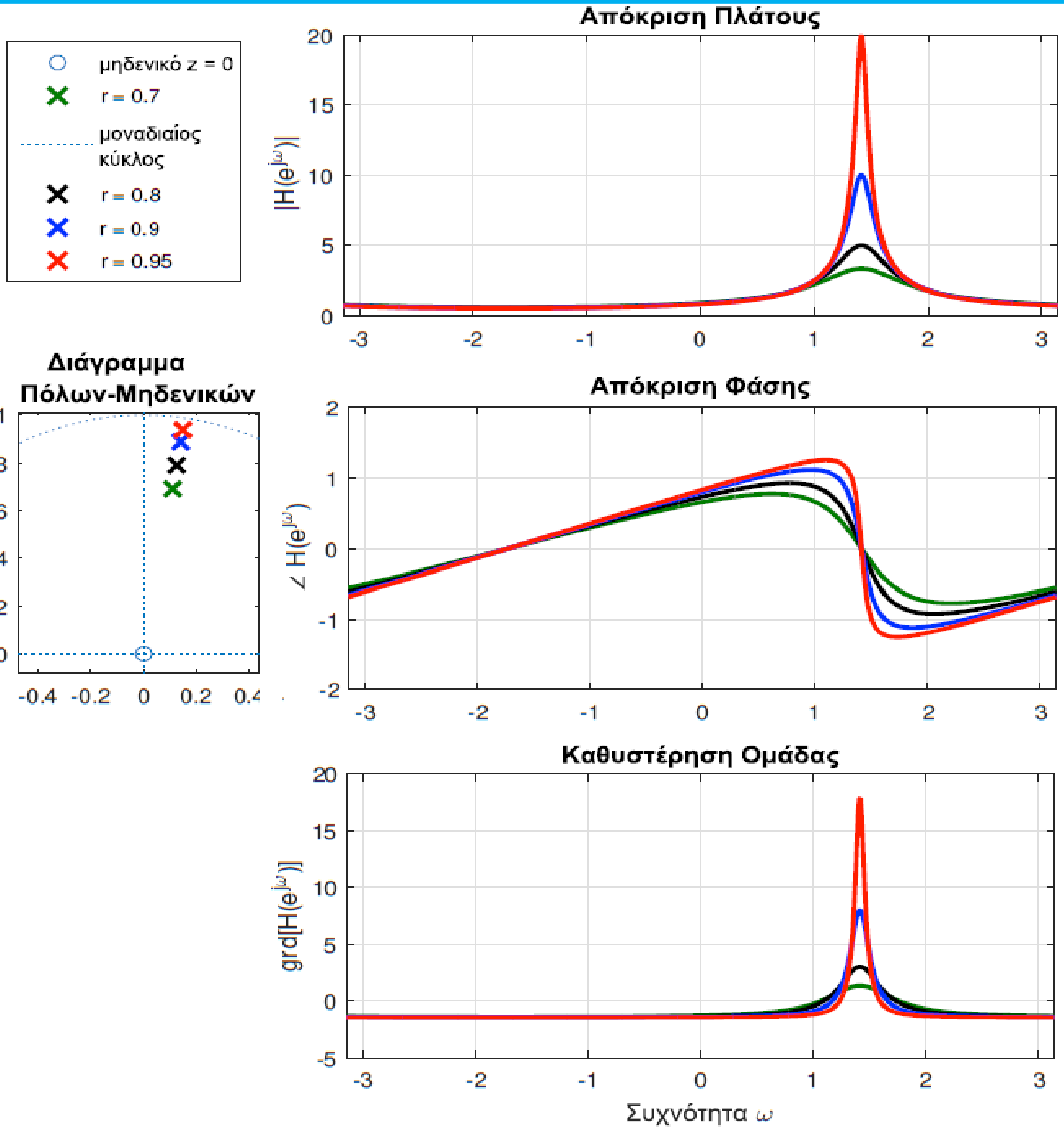
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



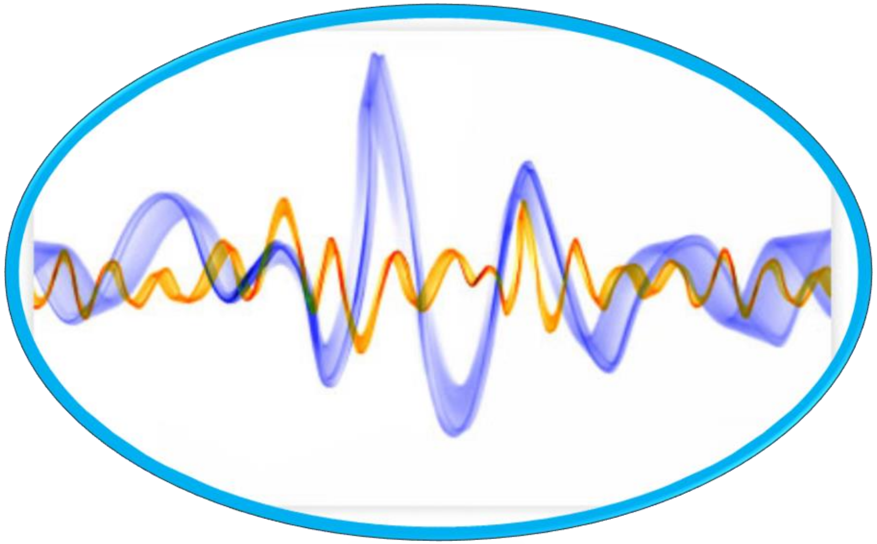
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



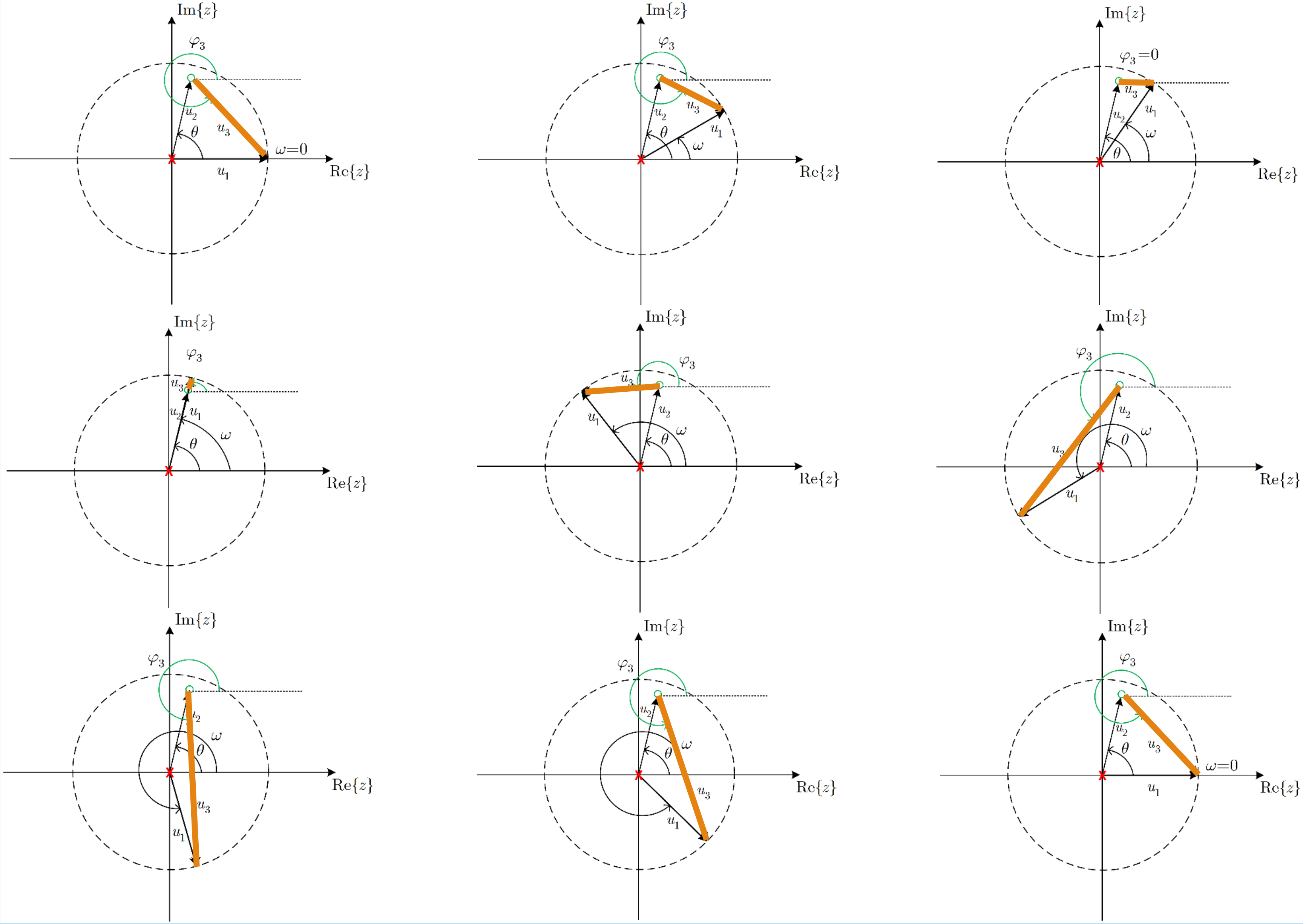
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**