

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 16<sup>Η</sup>

- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Z

# Τι περιέχει το ΗΥ370?



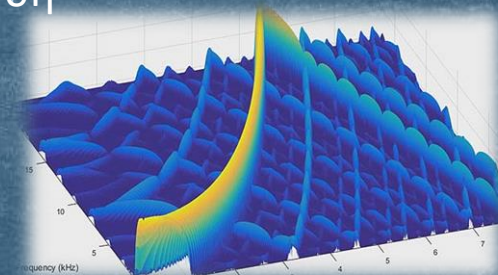
## 1<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



## 2<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- FIR συστήματα (επανάληψη...)

- Συμπεράσματα

- Ένα **αιτιατό** FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| > 0\}$
- Ένα **αντι-αιτιατό** FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| < \infty\}$
- Ένα **μη-αιτιατό** FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα (επανάληψη...)**

- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του  $z^{-1}$
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι
  - Ένα **αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
  - Ένα **αντι-αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
  - Ένα **μη-αιτιατό** IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών (επανάληψη...)

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]$$

$$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4}$$

$$|z| > 0$$

πόλος: 4 στο  $z=0$

μηδ:  $z_1 = -1$

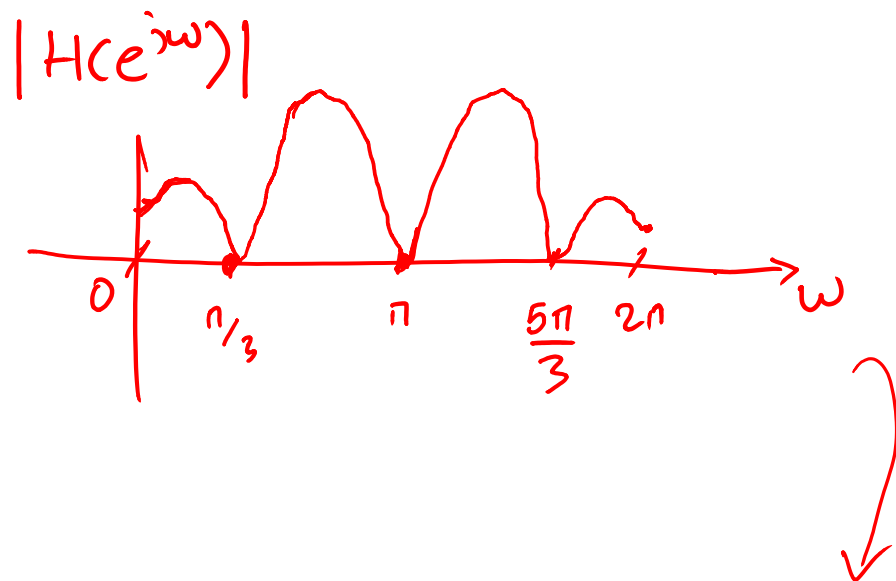
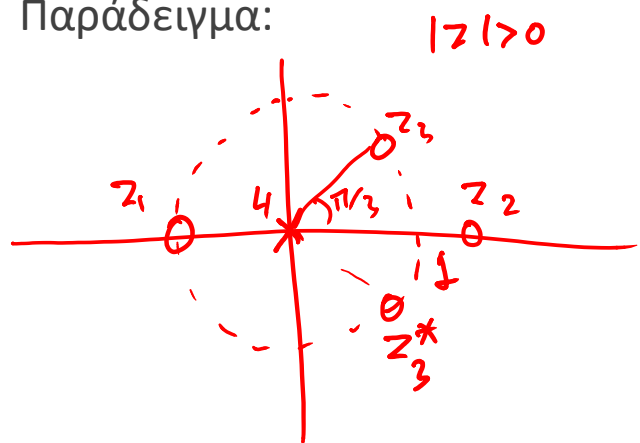
$$z_2 = 4/3$$

$$z_3 = e^{j\pi/3}$$

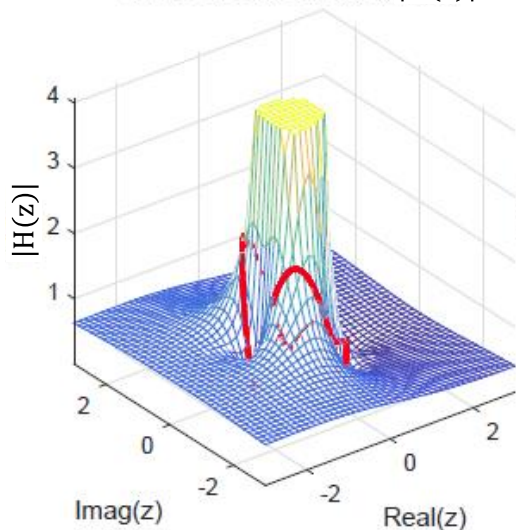
$$z_4 = e^{-j\pi/3}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

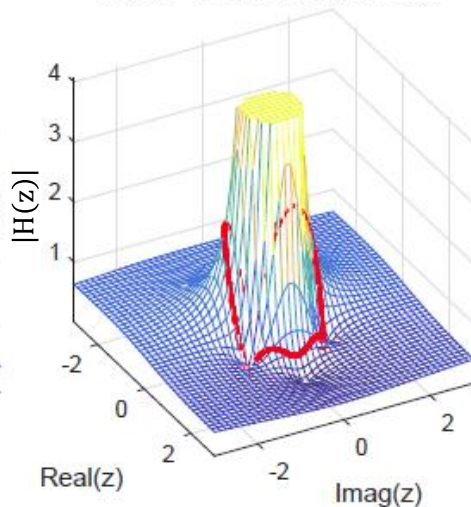
• Παράδειγμα:



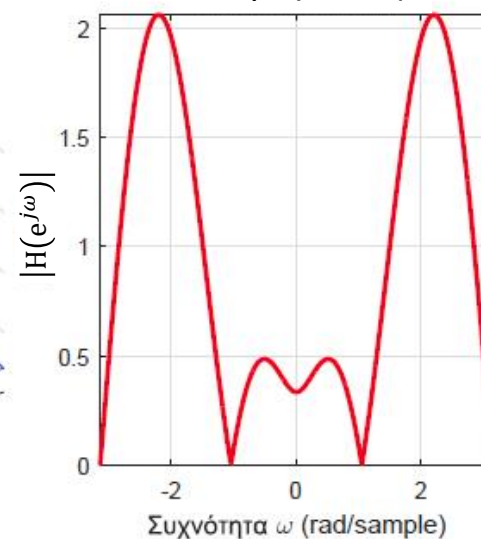
Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$



Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$



Απόκριση Πλάτους



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

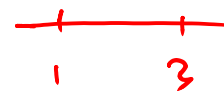
- Παράδειγμα:

- Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών
 
$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{(z+3)(z-1)}$$



$$\text{Μη-αιτιατό: } 1 < |z| < 3 \quad \checkmark$$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{1 + 3z^{-1}} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} |z| > 1 \checkmark \\ |z| < 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |z| > 3 \\ |z| < 3 \checkmark \end{array}$$

$$A = (1 - z^{-1})H(z) \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow h[n] = -\frac{1}{4} u[n] - \frac{5}{4} (-3)^n u[-n-1]$$

$$B = (1 + 3z^{-1})H(z) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

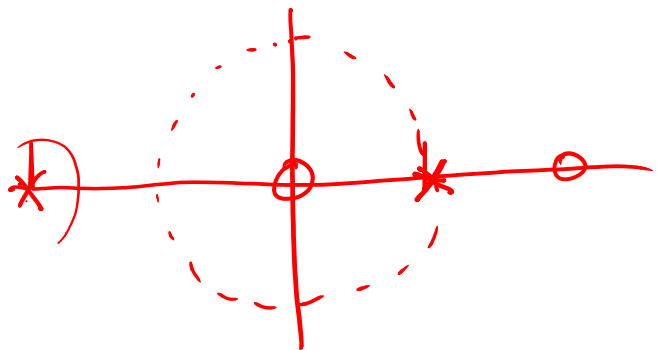


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

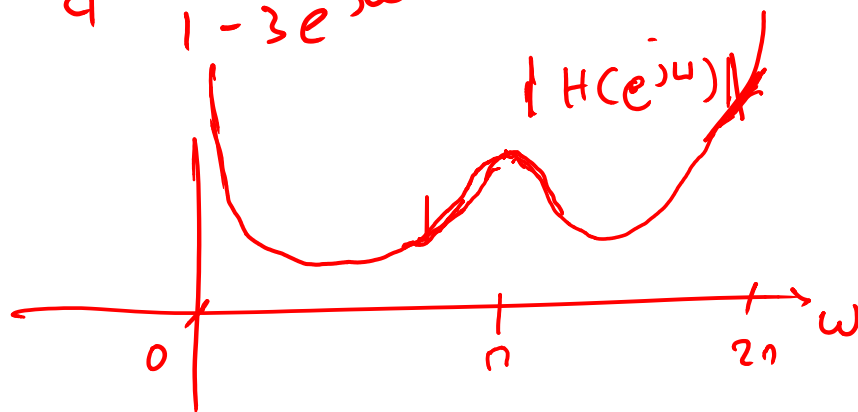
- Παράδειγμα:

$$h[n] = -\frac{1}{4} \delta[n] - \frac{5}{4} (-3)^n \delta[n-1]$$

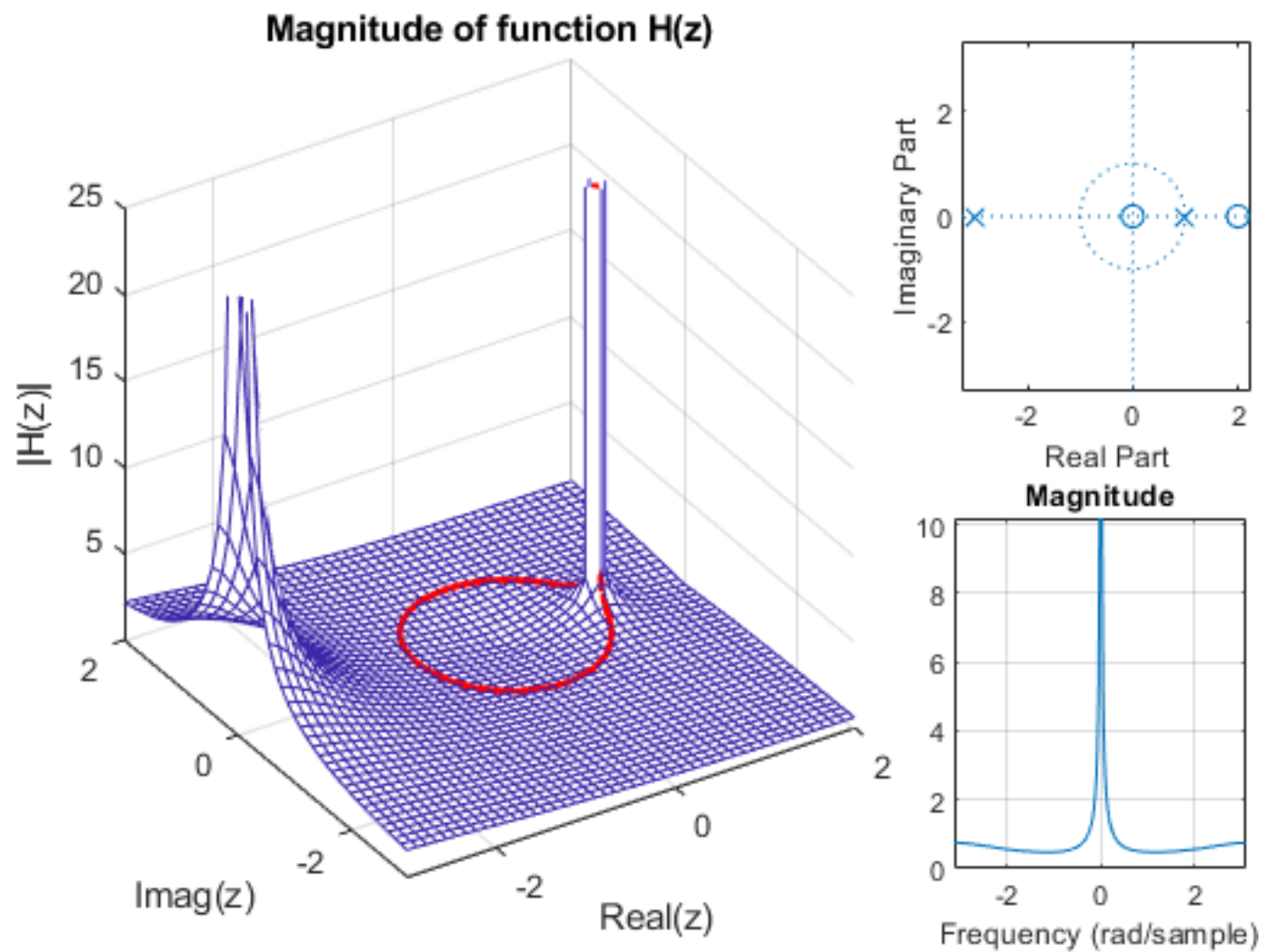
$$H(e^{j\omega}) = -\frac{1}{4} (\pi \delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}) + \frac{5}{4} \frac{1}{1 - 3e^{-j\omega}}$$



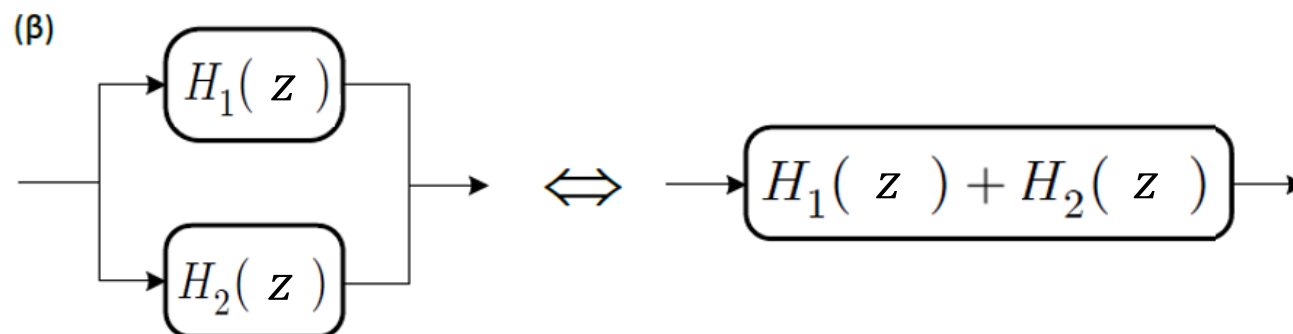
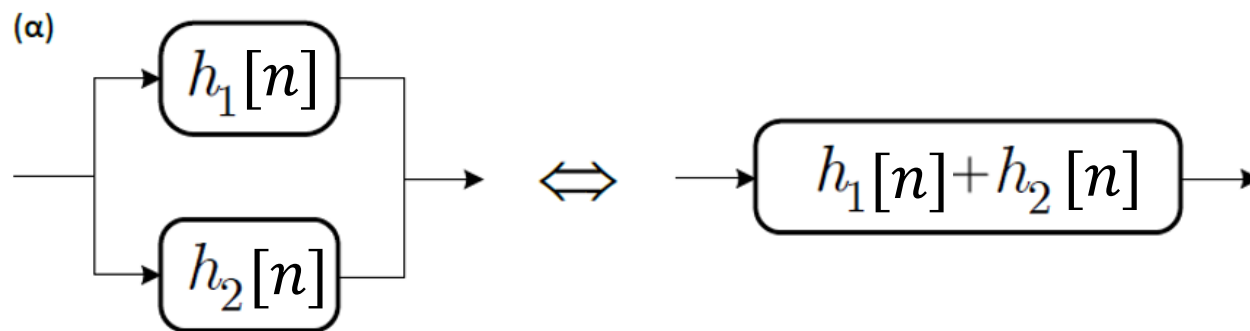
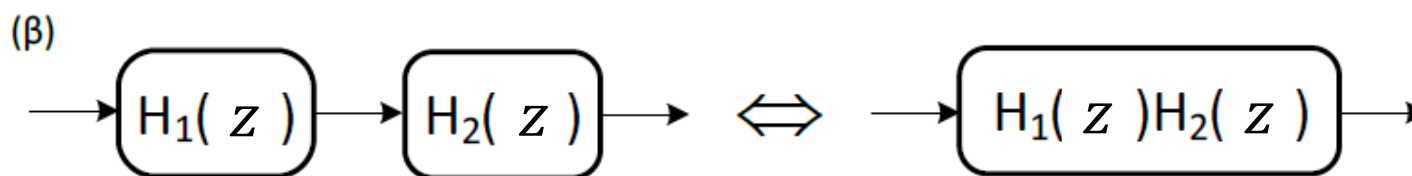
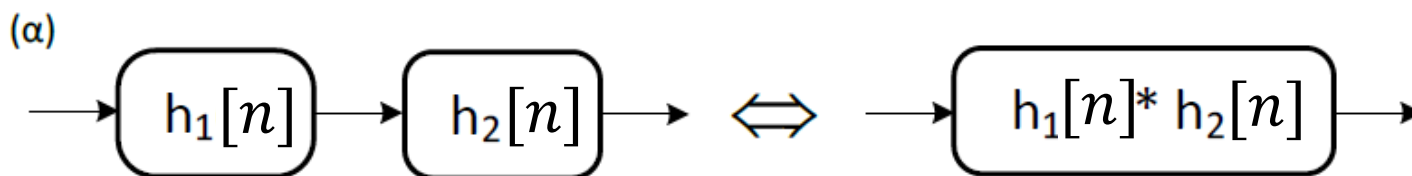
$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 2 \\ p_1 &= 1 \\ p_2 &= -3 \end{aligned}$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών
- Παράδειγμα:



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του  $Z$  – Διατάξεις Συστημάτων



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**

- Έχουμε δείξει ότι αν  $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$  τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν  $|\gamma_i| < 1, \forall i$ , όπου  $\gamma_i$  οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του  $h[n]$  συγκλίνει ομοιόμορφα  $\forall \omega$



- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

# ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

$$2 \left( 1 - \frac{3}{4} z^{-1} \right)$$

• Παράδειγμα:

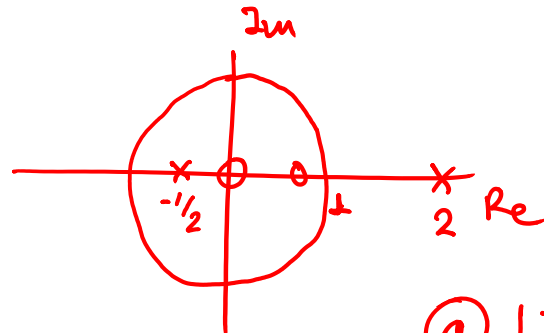
○ Έστω την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2} z^{-1}}{(1 - 2z^{-1}) \left( 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \right)} = \frac{A z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Δύο πόλους  $z_1 = 2$   
 $z_2 = -1/2$

Δύο μηδενικά  $z_1 = 0$   
 $z_2 = 3/4$



Επιλογές για ROC:

- Ⓐ  $|z| > 2 \rightarrow$  αιτιατό
- Ⓑ  $|z| < 1/2$
- Ⓒ  $1/2 < |z| < 2$  ✓ μοναδ. κύκλος  
 ↳ Ευσταθές εντός της ROC

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$\downarrow$  αρίστ.                       $\downarrow$  δεξ.

$$\frac{1}{2} < |z| < 2$$

για ευστάθεια

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Για αιτιατότητα  $|z| > 2$

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$\downarrow$  δεξ.                       $\downarrow$  αρίστ.

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow Y[n] - \frac{3}{2}Y[n-1] - Y[n-2] = 2X[n] - \frac{3}{2}X[n-1]$$

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{z^{-3} (z-1) \left(z - \frac{1}{2}\right) (z+3)} = \frac{z^3 + z^2}{(z-1) \left(z - \frac{1}{2}\right) (z+3)} = \frac{z^2 (z+1)}{(z-1) \left(z - \frac{1}{2}\right) (z+3)}$$

Μωδ :  $z_0 = 0$  (2)  
 $z_1 = -1$

$$= \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}$$

Πόλωση :  $p_1 = 1$   
 $p_2 = \frac{1}{2}$   
 $p_3 = -3$

	Αιτ.	Ευστάθεια
α) $ z  < \frac{1}{2}$	X	X
β) $\frac{1}{2} <  z  < 1$	X	X
γ) $1 <  z  < 3$	X	X
δ) $ z  > 3$	✓	X

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} |z| < \frac{1}{2} \\ \longleftarrow \end{array} \right| \frac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} -u[-n-1]$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$\frac{1}{1+3z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} -(-3)^n u[-n-1]$$

$$\alpha) |z| < \frac{1}{2} : h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$$

$$\beta) \frac{1}{2} < |z| < 1 : h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$$

$$\gamma) 1 < |z| < 3 : h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$$

$$\delta) |z| > 3 : h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n]$$



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

