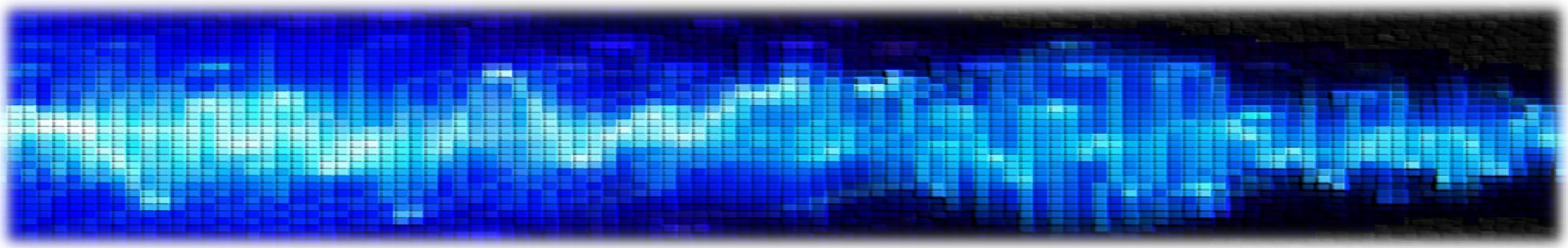
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$
- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)
- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

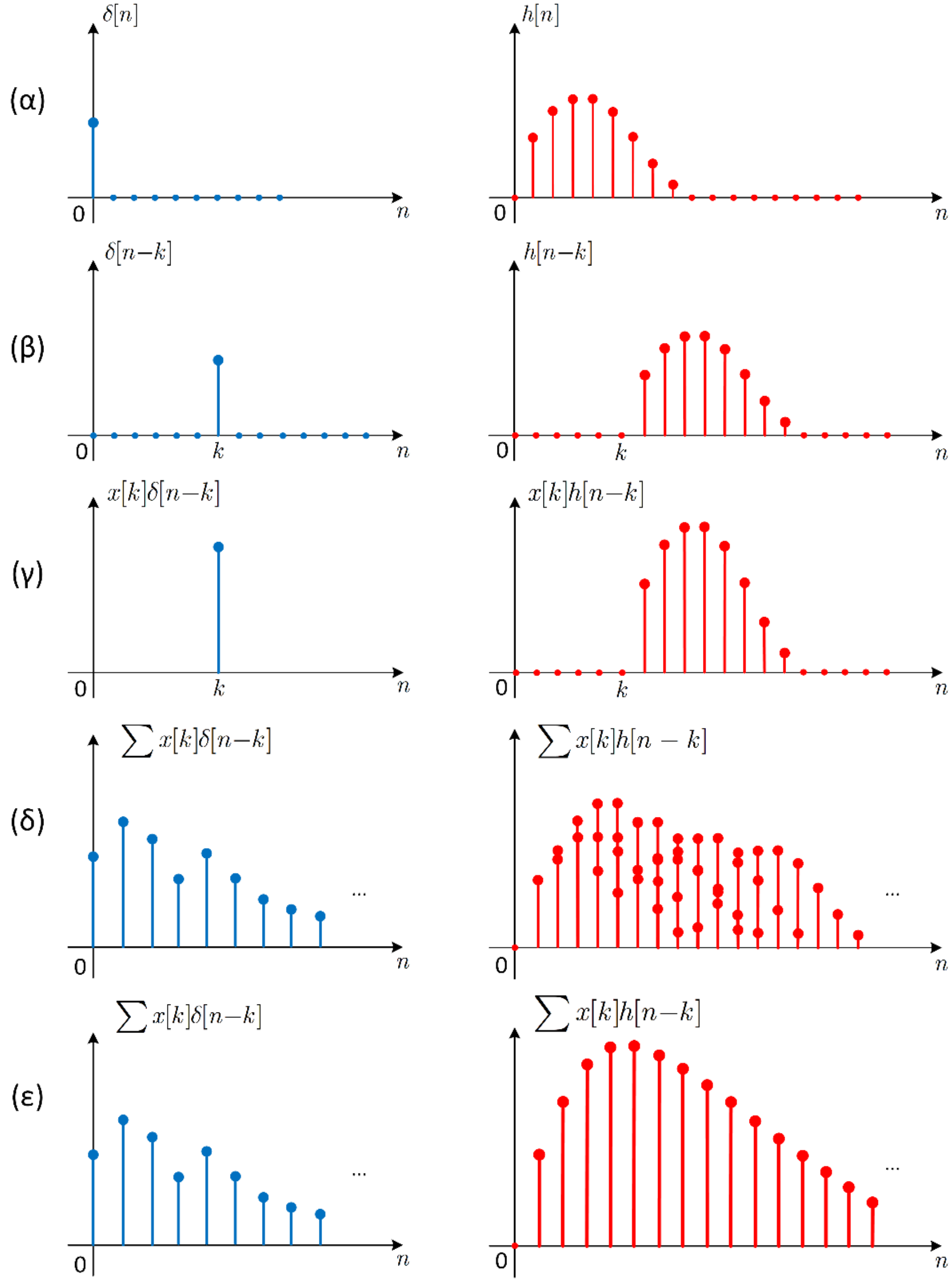
- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί…

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Παρ’ όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Άρα

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (ομογένεια)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] && \boxed{\text{Χρον. Αμεταβλητότητα}} \end{aligned}$$



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι <u>εξαιρετικά</u> σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boldsymbol{x[n] * h[n]}$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

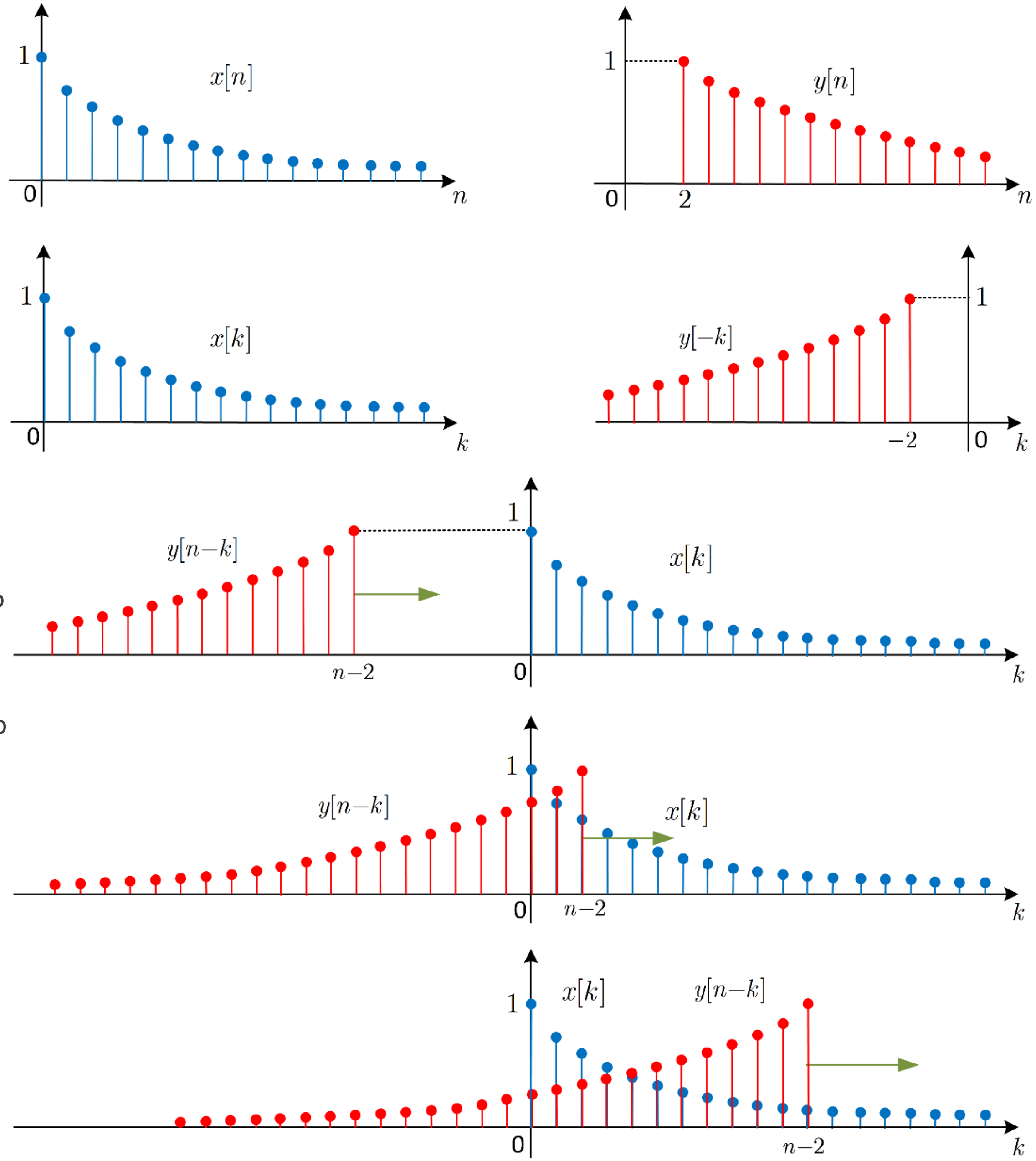
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n]*y[n] = x[n]*ay[n] = a(x[n]*y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n]*y[n] = y[n]*x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n]*y[n])*z[n] = x[n]*(y[n]*z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n]*(y[n]+z[n]) = x[n]*y[n]+x[n]*z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n]*y[n] \\ z_2[n] = x_2[n]*y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n]+bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n]*y[n] = az_1[n]+bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n]*y[n] : [n_1+n_3, n_2+n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n]*\delta[n] = \delta[n]*x[n] = x[n]$

$$x[n]*\delta]n-n_0] = x[n-n_0]$$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

- **Συνέλιξη**
  - Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε (αφού η πράξη της συνέλιξης είναι αντιμεταθετική) να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης. Επιπλέον, το $y[k]$ έχει υποστεί ανάκλαση και έχουμε πλέον το $y[-k]$.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ από το $y[-k]$ μετατοπίζοντάς το κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά μέσα στο άθροισμα της συνέλιξης. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[-k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά τη μετατόπιση. Μετά, ξεκινάμε να το ‘‘ολισθαίνουμε’’ πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y[n-k]$ συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντήσει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης, το οποίο θα είναι μη μηδενικό για $0 \leq k \leq n-2$ (στην προκείμενη περίπτωση).
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο «μέσα» στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση, καθώς πάλι τα δυο σήματα «αλληλεπιδρούν» από 0 ως $n-2$. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.



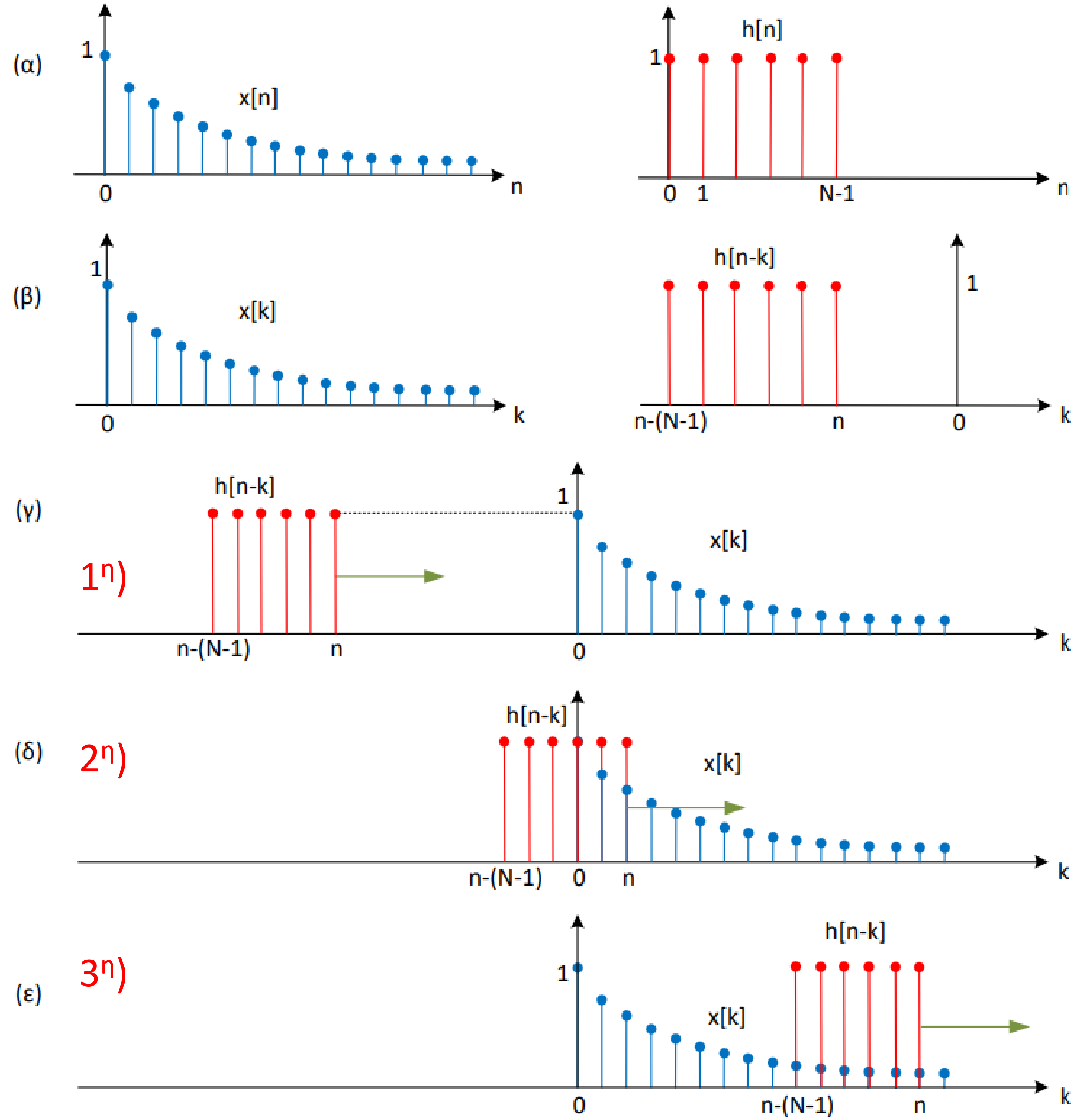
- **Συνέλιξη**

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

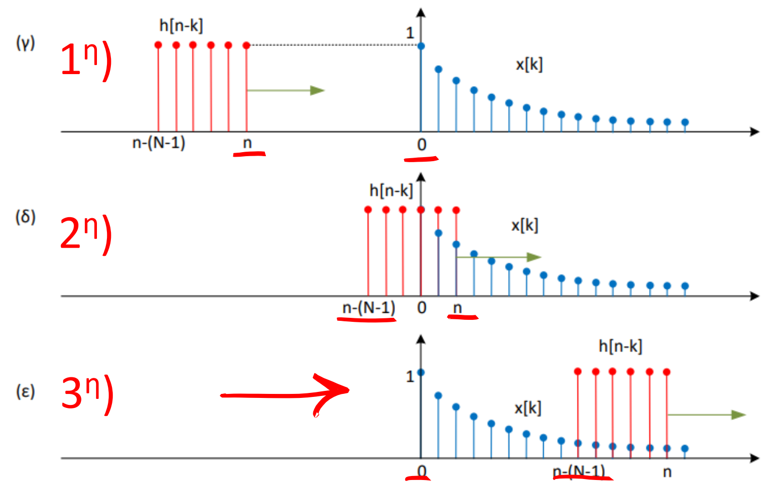
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και "σύρουμε" το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα "συνυπάρχουν", δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

$$x[n] = a^n u[n], \ |a| < 1.$$



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:



1η) $y[n] = 0, \quad n<0$

2η) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] =$

$= \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \ge 0$ και $n-(N-1)<0$

Άρα $0 \le n < N-1$.

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1}-a^{N_2+1}}{1-a}$$

3η) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k \cdot 1 =$

$= \frac{a^{n-(N-1)}-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \ge N-1$

Άρα τελικά

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \le n < N-1 \\ \frac{a^{n-(N-1)}-a^{n+1}}{1-a}, & n \ge N-1 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

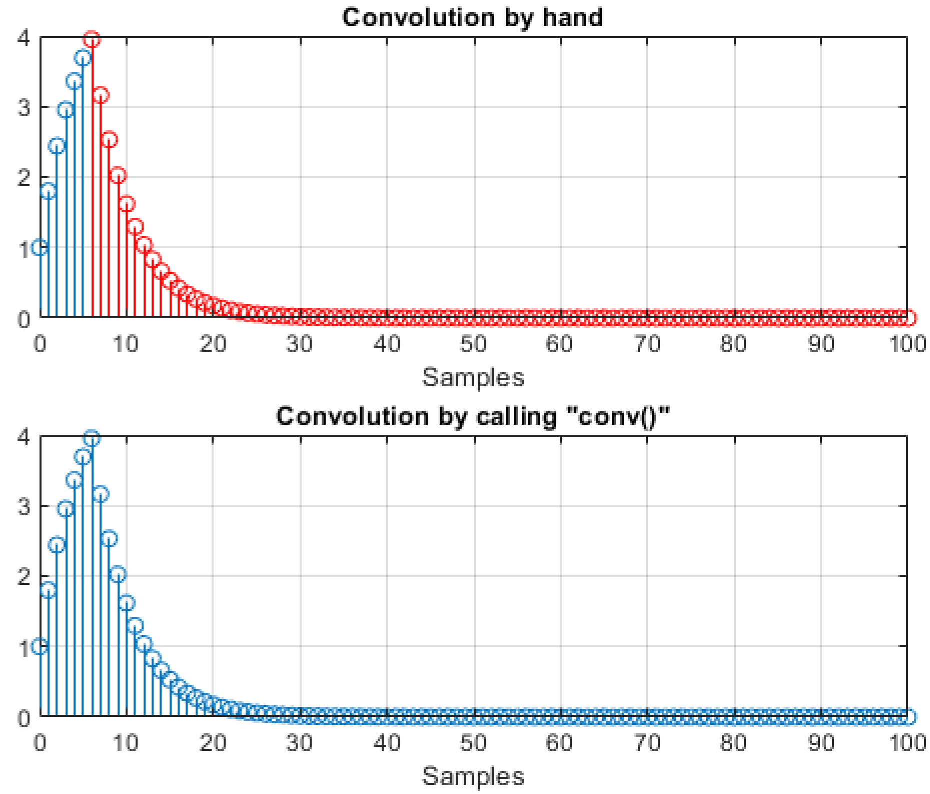
```
% Ορισμός διάρκειας
Nx = 7;

% Σήματα
x = ones(1,Nx);
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;

% Convolution by hand
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
c2 = (alpha.^([Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...
    - alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

Είναι $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k]$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^k \cdot a^{n-k}}_{a^n} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k]$ (1)

Ξέρω ότι $u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και $u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα $u[k]u[n-k] = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ 1, & \underline{0 \leq k \leq n} \end{cases}$ (2)

(1) $\xrightarrow{(2)}$ $y[n] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = a^n (n-0+1) = (n+1)a^n$.

για $n \geq 0$ *

* Άρα $y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (n+1)a^n, & n \geq 0 \end{cases} = (n+1)a^n u[n]$

$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$

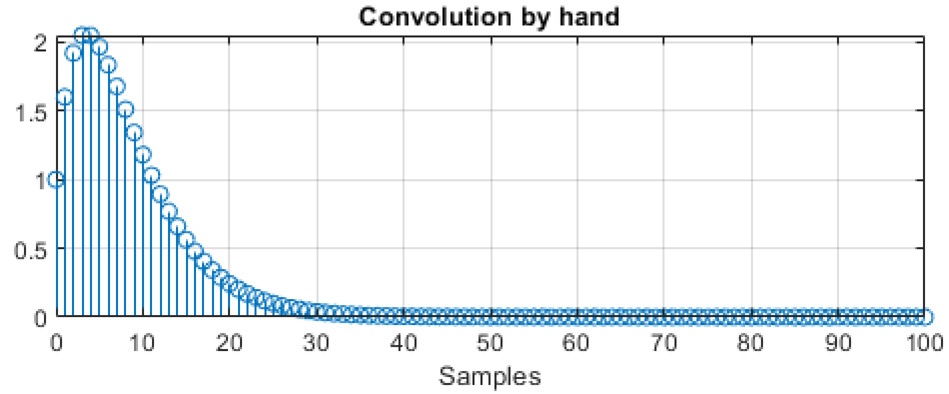
- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

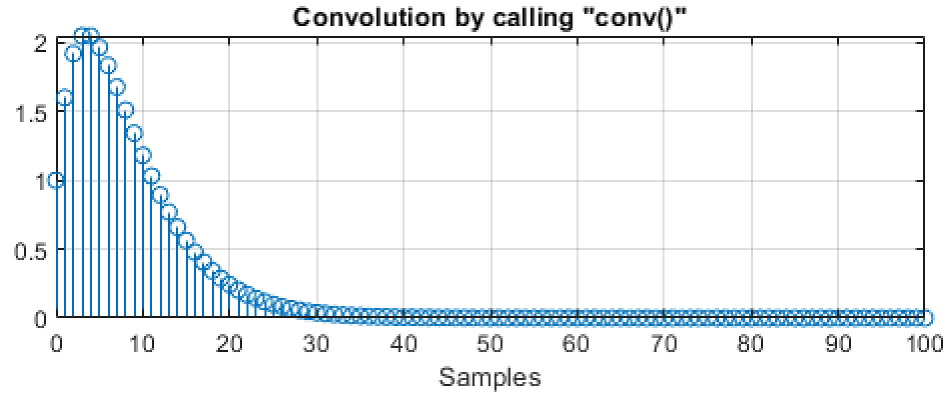
```
% Σήματα
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;
x = h;

% Convolution by hand
chx = alpha.^n .* (n+1);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(n, chx);
title('Convolution by hand'); grid;
xlabel('Samples');
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"');
xlabel('Samples');
```





- **Συνέλιξη**

  - Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας

  - Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?

  - Τότε μια εναλλακτική γραφική μέθοδος είναι αυτή της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**
    - ... όμως και οι ιδιότητες της συναρτησης Δέλτα βοηθούν σημαντικά

  - Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

  - Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

• Συνέλιξη

x[k]

0	0	0	2	-3	½	0	0

y[k]

0	0	-1	1	2	-1	0	0

ανάκλαση ως προς k →

x[k]

0	0	0	2	-3	½	0	0

y[-k]

0	0	-1	2	1	-1	0	0

<u>Μετατοπίσεις</u>

k=0

(α)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

n-2 n+1 ολίσθηση →

c[n] = 0, n+1 < 0 => n < -1

(β)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0

n-2 n+1

c[-1] = -1x2 = -2 , γιατί n+1 = 0 άρα n = -1

(γ)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0

n-2 n+1

c[0] = 1x2 + (-3)x(-1) = 5 , γιατί n+1 = 1 δηλ. n = 0

(δ)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0

n-2 n+1

c[1] = 2^2 - 3 - ½ = ½ , γιατί n+1 = 2 δηλ. n = 1

(ε)

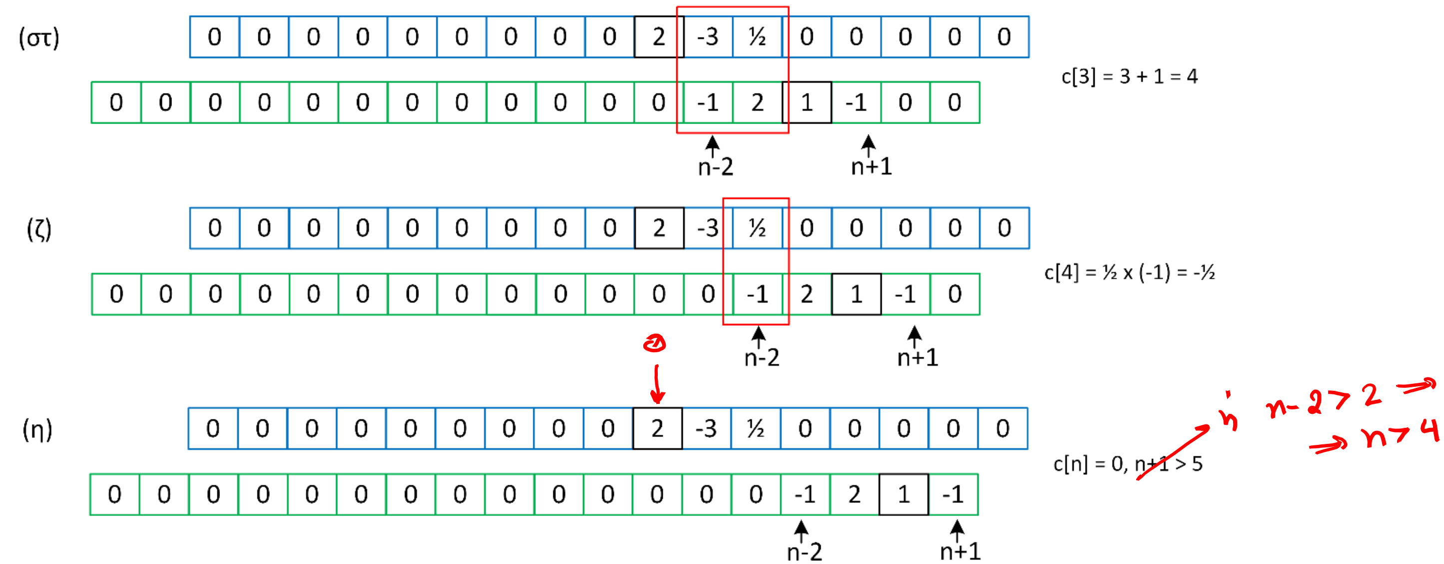
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0

n-2 n+1

c[2] = -2 - 6 + ½ = -15/2

- **Συνέλιξη**



- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?
- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

Homework: Επιβεβαιώστε το $c[n] = x[n] * y[n]$ αναλυτικά με χρήση της $\delta[n-k] * \delta[n-l] = \delta[n-k-l]$

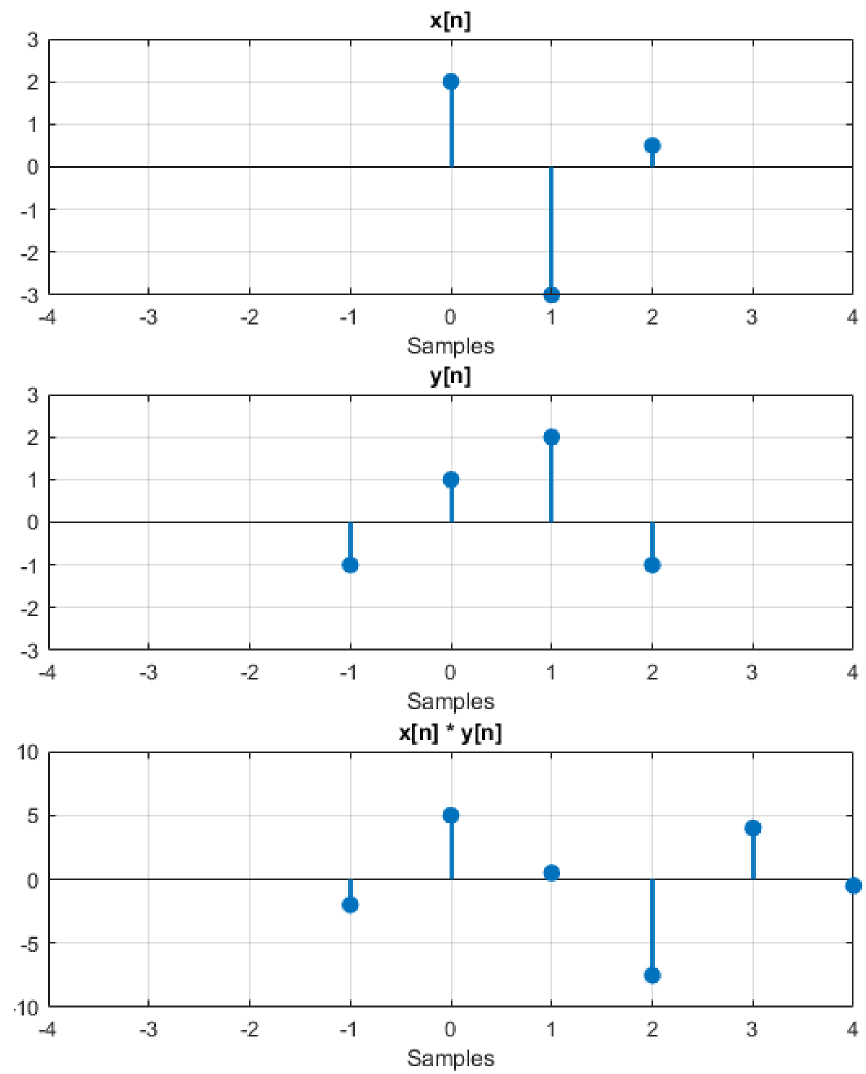
- **Συνέλιξη**

```
% Σήματα
x = [2 -3 1/2];
nx = [0 1 2];

y = [-1 1 2 -1];
ny = [-1 0 1 2];

% Συνέλιξη
cxy = conv(x, y);
n_c = [-1 0 1 2 3 4];

% Σχήματα
figure; subplot(311); stem(nx, x);
xlabel('Samples'); title('x[n]');
subplot(312); stem(ny, y);
xlabel('Samples'); title('y[n]');
subplot(313); stem(n_c, cxy);
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

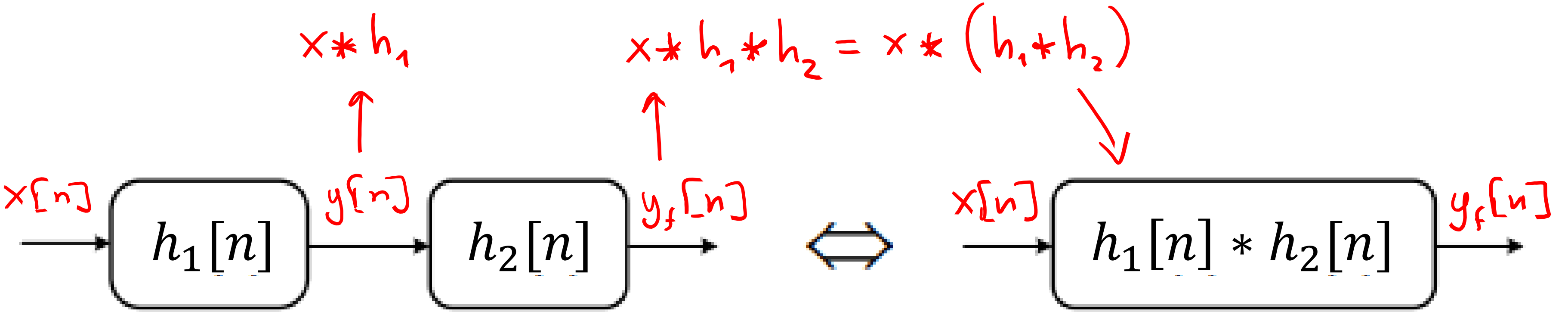
  - Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

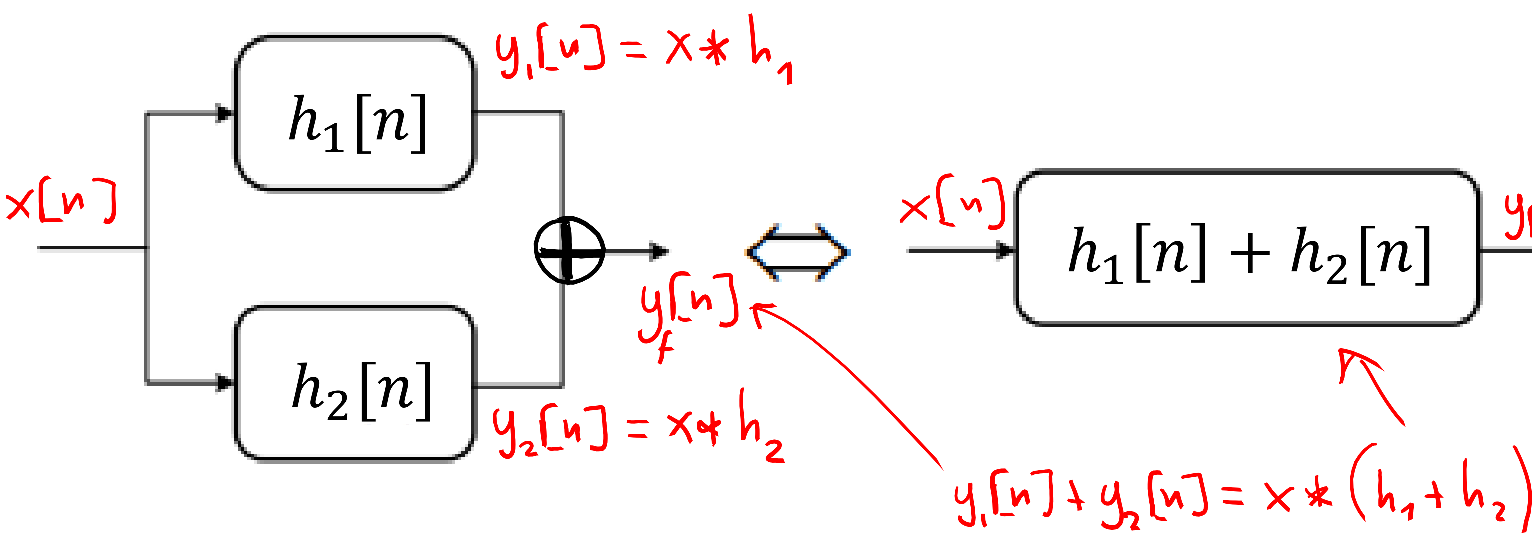
$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

  - Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**





Συνεχίζεται... ☺