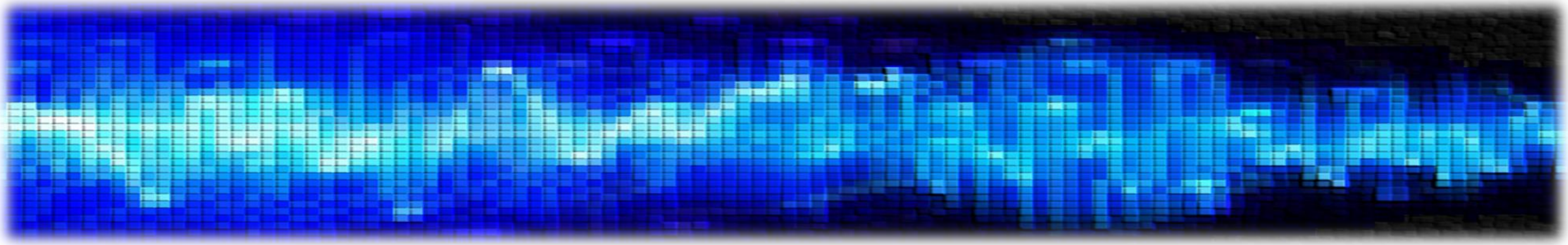
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η



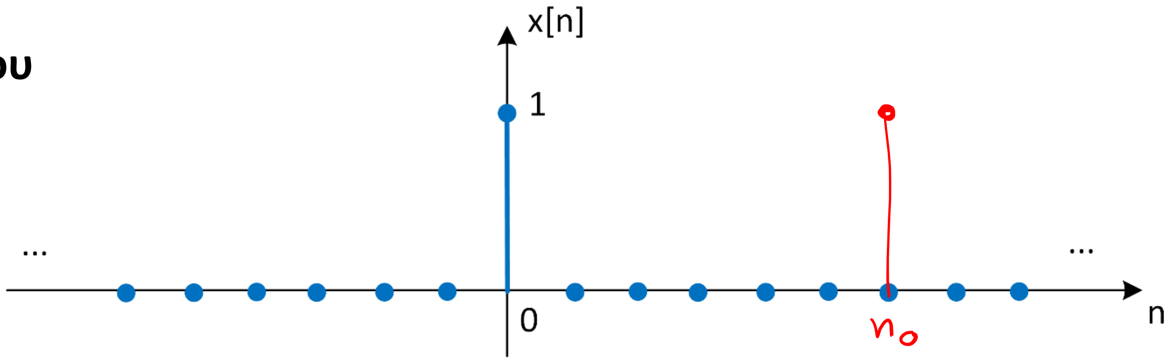
- Βασικά Σήματα, Συστήματα και Ιδιότητες

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

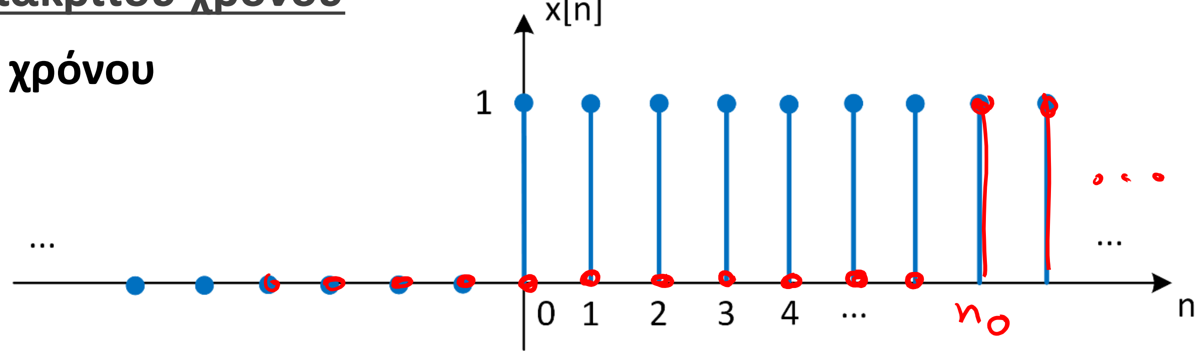
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- <u>Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου</u>
- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$u[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

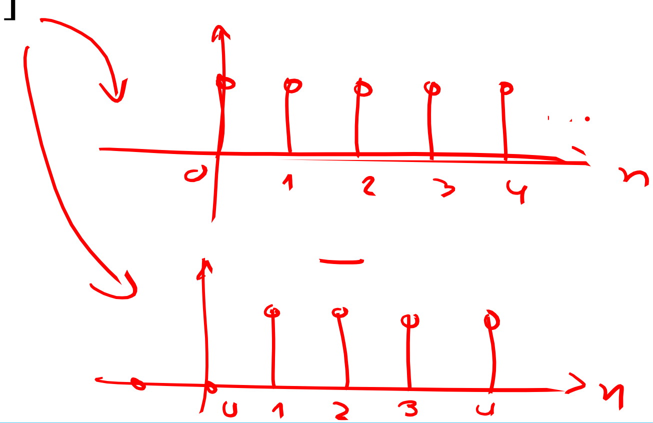
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

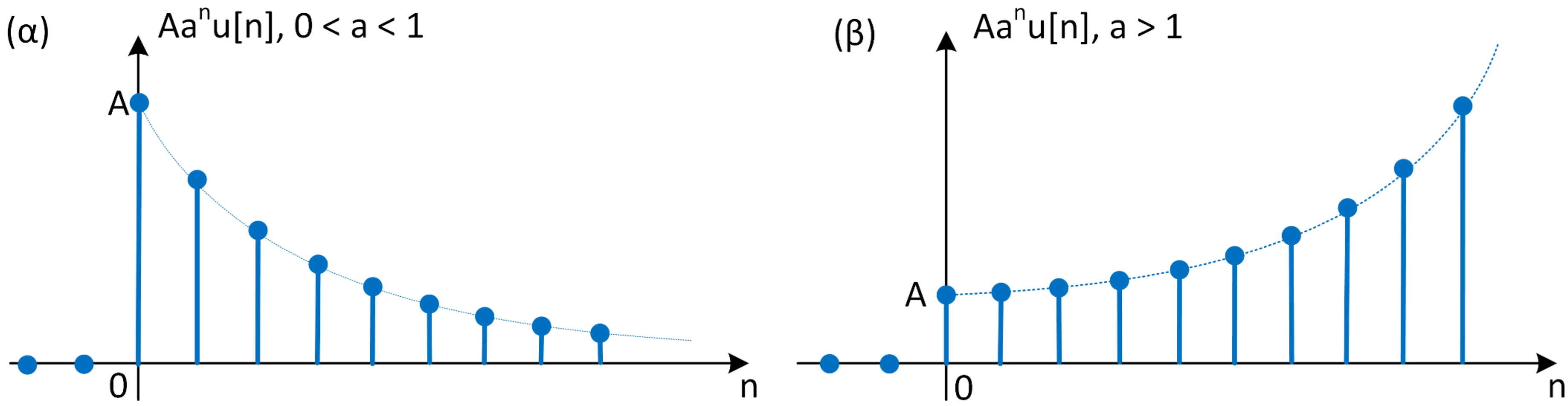
- ## Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- **Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου**

$$x[n] = a^n, \qquad a \in C$$

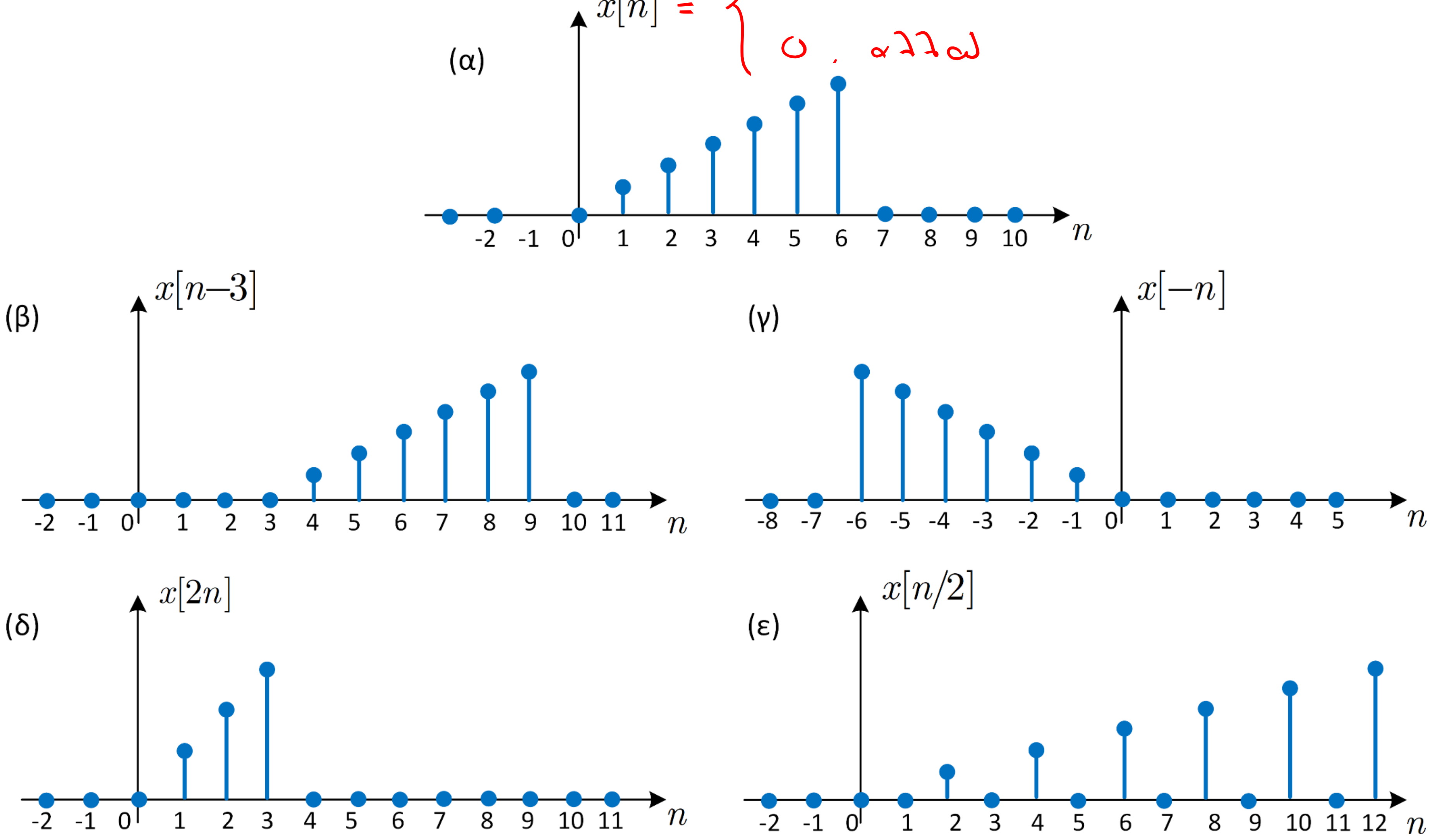
- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

$$x[n] = a^n u[n],\ \ 0 < a < 1 \text{ ή } a > 1$$

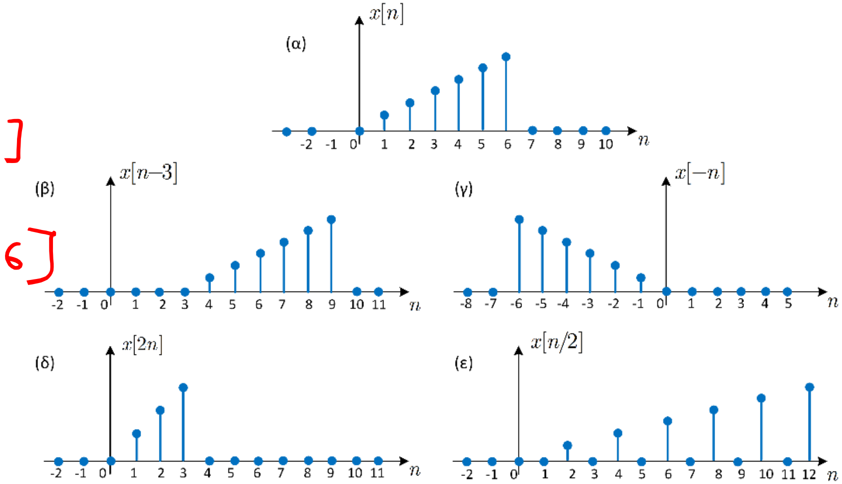


- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



- **Μετασχηματισμοί σημάτων**



$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = 0\cdot\delta[n] + 1\cdot\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \dots + 6\delta[n-6]$$

β) $$x[n-3] = \begin{cases} n-3, & 0 \le n-3 \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} n-3, & 3 \le n \le 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

γ) $$x[-n] = \begin{cases} -n, & 0 \le -n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -n, & -6 \le n \le 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

δ) $$x[2n] = \begin{cases} 2n, & 0 \le 2n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 2n, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ε) $$x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & 0 \le \frac{n}{2} \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- **Ανάλυση σήματος**

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνο μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$

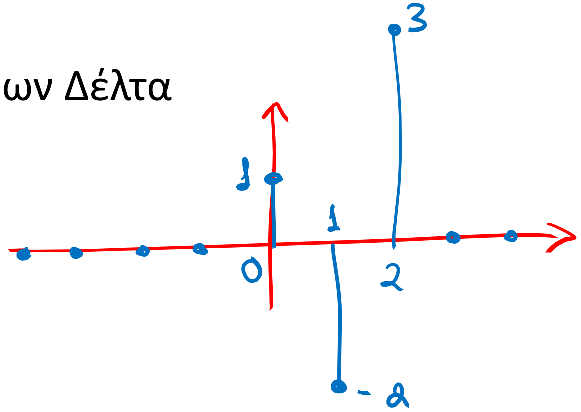
- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Παράδειγμα:

  ○ Γράψτε το σήμα $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ με χρήση συναρτήσεων Δέλτα

$x[n] = 1 \cdot \delta[n] - 2 \cdot \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$



- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος

- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
  - **Όλα** τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας

- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια

- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **ισχύς** ενός σήματος

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Hints:
- Σήμα με:
  - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty$ → **πιθανότατα σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που **δε** φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty$ → **σήμα ισχύος**
  - **Περιοδικό** σήμα με πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ισχύος**
- Από μαθηματικής σκοπιάς, μπορεί να υπάρχουν σήματα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες αλλά να μην είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος
  - Αλλά αυτά είναι μαθηματικές κατασκευές, δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν στο εργαστήριο, δεν υπάρχουν στη φύση, και δε μας ενδιαφέρουν από πρακτικής σκοπιάς

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Παραδείγματα:
  - Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u^2[n]$$

Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u^2[n]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

• Παραδείγματα:

○ Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι $P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u^2[n]$

$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} 1^2} \overset{1}{=} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} (N+1)$

$= \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\cancel{N}(1+\frac{1}{N})}{\cancel{N}(2+\frac{1}{N})} = \frac{1}{2} > 0$ ✓

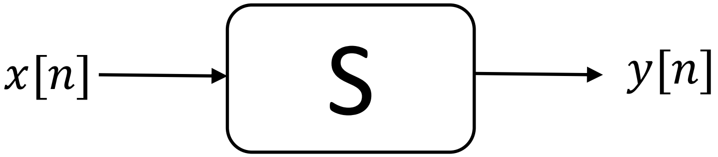
$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$

1

- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**

- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
  - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
  - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση

- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη



- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με $x[n]$

- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με $y[n]$

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό
- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με $T\{\cdot\}$ να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος $x[n]$ ώστε να παραχθεί η έξοδος $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**
- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$
$$y[n] = 3x^2[n-1]$$
$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

- Αργότερα, ένα σύστημα θα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = 2x[n] + 3x[n-5]$$

- Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ θα δίνει έξοδο $y[n]$

- **Δυναμικά ή Στατικά**
  - Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**

  - **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή n_0

  - **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή n_0 απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή <u>και μόνο</u>

  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \quad \text{Δυν.}$$
$$y[n] = x[n+1] - 2x[n-1] \quad \text{Δυν.}$$
$$y[n] = \log|x[n]| \quad \text{Στ.}$$
$$y[n] = x^2[n] \quad \text{Στ.}$$

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:
  - Την ιδιότητα της **ομογένειας**
  - Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

  - **Ομογένεια**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $cx[n]$ τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα $cy[n]$

    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1]$, $\quad y[n] = x[n+3] - x[n]$, $\quad y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$

    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $\;\; y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $\;\; y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

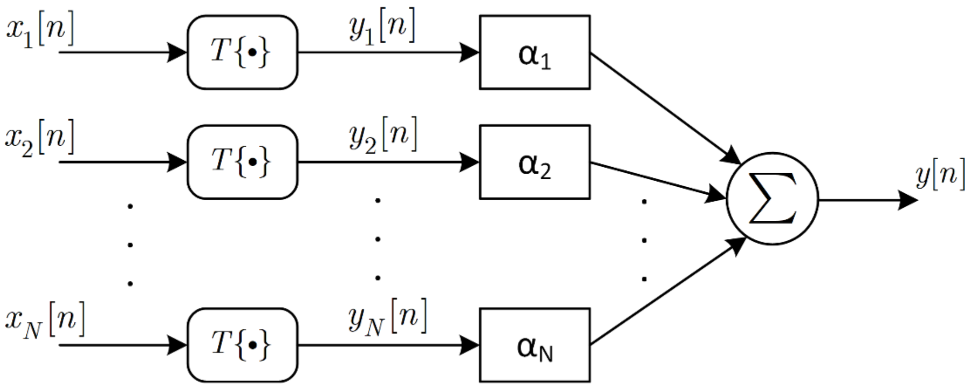
  - **Αθροιστικότητα**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $x_1[n] + x_2[n]$ τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y_1[n] + y_2[n]$, με $y_1[n]$ και $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ αντίστοιχα.

    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1] + x[n]$, $\;\; y[n] = nx[-n] - 5x[n+1]$, $\;\; y[n] = 3x[-n-1] + 2[n+1]$

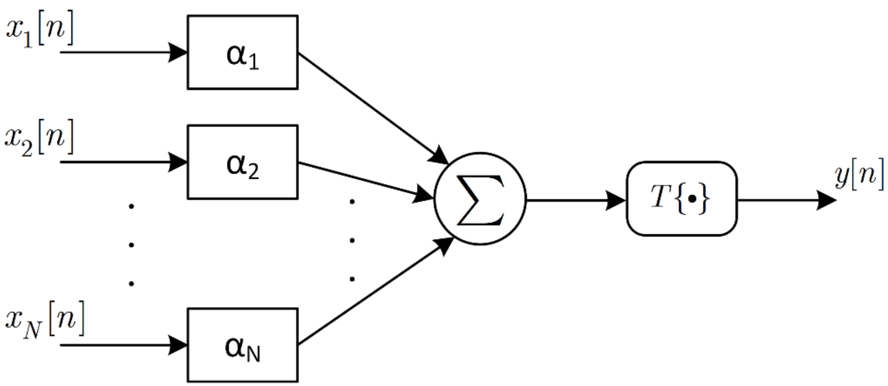
    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $\;\; y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $\;\; y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο



(α)



(β)

- Με μαθηματικά, αν

$$
\begin{aligned}
&T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = \\
&= \; T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\} \\
&= \; aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\
&= \; ay_1[n] + by_2[n]
\end{aligned}
$$

με $y_1[n]$, $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$, $x_2[n]$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

- Ομογένεια: $x[n] \xrightarrow{S} y[n] = 2x[n-1] + x[n]$

$$cx[n] \xrightarrow{S} 2cx[n-1] + cx[n] = c\left(2x[n-1] + x[n]\right) =$$
$$= cy[n] \quad \checkmark$$

- Αθροιστικότητα: $x_1[n] \xrightarrow{S} y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n]$

$$x_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n]$$

Αν $x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{S} 2\left(x_1[n-1] + x_2[n-1]\right) + x_1[n] + x_2[n] =$

$$= \underbrace{2x_1[n-1] + x_1[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{2x_2[n-1] + x_2[n]}_{y_2[n]} \quad \checkmark$$

Είναι γραμμικό!

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

  είναι γραμμικό.

- Ομογένεια: $x[n] \xrightarrow{S} y[n] = x^2[n]$

$$cx[n] \xrightarrow{S} (cx[n])^2 = c^2x^2[n] \neq cx^2[n]$$ ✗

Δεν είναι ομογενές $\Rightarrow$ δεν είναι γραμμικό

- Αθροιστικότητα: $x_1[n] \xrightarrow{S} x_1^2[n] = y_1[n]$

$$x_2[n] \xrightarrow{S} x_2^2[n] = y_2[n]$$

Αν $x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{S} (x_1[n] + x_2[n])^2 = x_1^2[n] + 2x_1[n]x_2[n] + x_2^2[n]$

$$\neq x_1^2[n] + x_2^2[n] = y_1(n) + y_2[n]$$

Δεν είναι αθροιστικό.

• Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα

- Έστω $x[n]$ η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω $y[n]$ η έξοδος. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλ.

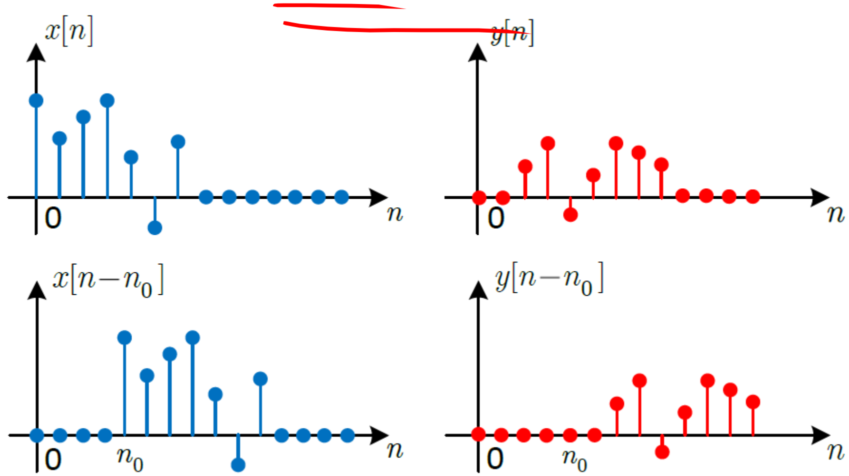
$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

Χ.Α.

- Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου
  - Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!



- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \xrightarrow{S} y[n] = x^2[n]$

— " — $x[n-n_0] \xrightarrow{S} y'[n] = x^2[n-n_0]$ } ίδια

Υπολογίζω την $y[n-n_0] = x^2[n-n_0]$

Άρα το σύστημα είναι Χ.Α.

- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \xrightarrow{S} nx^2[n]$

——— " ——— $x[n-n_0] \xrightarrow{S} nx^2[n-n_0]$ δεν είναι ίδια

Υπολογίζω το $y[n-n_0] = (n-n_0)x^2[n-n_0]$

Άρα το σύστημα είναι <u>Χ.Μ.</u>

- **Αιτιατά και μη αιτιατά**

  - Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του

  - Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό

  - Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
    - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο

  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2]$$ Αιτ.

$$y[n] = x^2[\underline{n+1}] - 2\sin(x[n-1])$$ Μη αιτιατό

$$y[n] = \log|x[\underline{n+1}]|$$ Μη αιτιατό

$$y[n] = \sqrt{x[n-1]}$$ Αιτιατό

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Ευσταθή και ασταθή**

  - Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO) ευσταθές** αν

$$|x[n]| \leq B_x, \qquad B_x \in \Re_+$$

  συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| \leq B_y, \qquad B_y \in \Re_+$$

  - Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη

- **Ευσταθή και ασταθή**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

$$y[n] = x^2[n-2]$$

είναι ευσταθή.

- $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, αν για κάποιο n_0 έχουμε $x[n_0] = 0$, τότε $y[n_0] \to \infty$

Άρα δεν είναι ευσταθές.

- $y[n] = x^2[n-2]$: αν $|x[n]| \leq B_x$, $B_x \in \mathbb{R}_+$, τότε:

$|y[n]| = |x^2[n-2]| \leq B_x^2 = B_y$, άρα είναι φραγμένη έξοδος.

Άρα είναι ευσταθές.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ