

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 24^H

- Φασματική Ανάλυση

- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier – **review**

- Διακριτός Μετασχ. Fourier (DFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier (IDFT):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Ο DFT θεωρεί ότι το σήμα $x[n]$ είναι η βασική περίοδος ενός N -περιοδικού σήματος

- Το πλήθος N των συντελεστών του DFT (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT σε συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες του $2\pi/N$) πρέπει να είναι **όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**

- Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα

- Πυκνή δειγματοληψία του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- Ιδιότητες παρόμοιες με του Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου...

- ... αλλά με σημαντικές διαφορές λόγω N -περιοδικότητας
- Κυκλική συνέλιξη, χρονική μετατόπιση, κ.α.

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Στο εξής θα γράφουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier ως **DFT** και το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ως **DTFT**, για συντομία

• Πρόβλημα: πολλή από τη θεωρία που μάθαμε για σήματα άπειρης διάρκειας έχει πρόβλημα εφαρμογής στην πράξη

- Άπειρη διάρκεια!!! 😊

• Στην πράξη, έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα/κομμάτι ενός σήματος άπειρης διάρκειας

- Για παράδειγμα, έχουμε μόνο N δείγματα ενός ημιτόνου

• Μπορούμε όμως να μελετήσουμε τέτοια σήματα υποθέτοντας ότι το άπειρης διάρκειας σήμα $x[n]$ πολλαπλασιάστηκε με ένα πεπερασμένης διάρκειας (N δειγμάτων) παράθυρο $w[n]$, και το αποτέλεσμα της πράξης είναι αυτό που έχουμε στα χέρια μας

• Άρα εμείς έχουμε το

$$\hat{x}[n] = x[n]w[n]$$

και η εικόνα του στο χώρο του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου είναι η

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας το κάνουμε πιο συγκεκριμένο: μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συχνότητα ενός ημιτόνου από ένα μόνο τμήμα του?
- Έστω το περιοδικό σήμα

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X(e^{j\omega}) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

- Η «τετραγωνικώς» παραθυροποιημένη ☺ έκδοση του θα έχει DTFT

$$\text{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)})$$

- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα έχουμε το μετασχ. Fourier του παραθύρου!
 - Ο οποίος ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet**

- Άρα θα δειγματοληπτήσουμε στη συχνότητα το σήμα

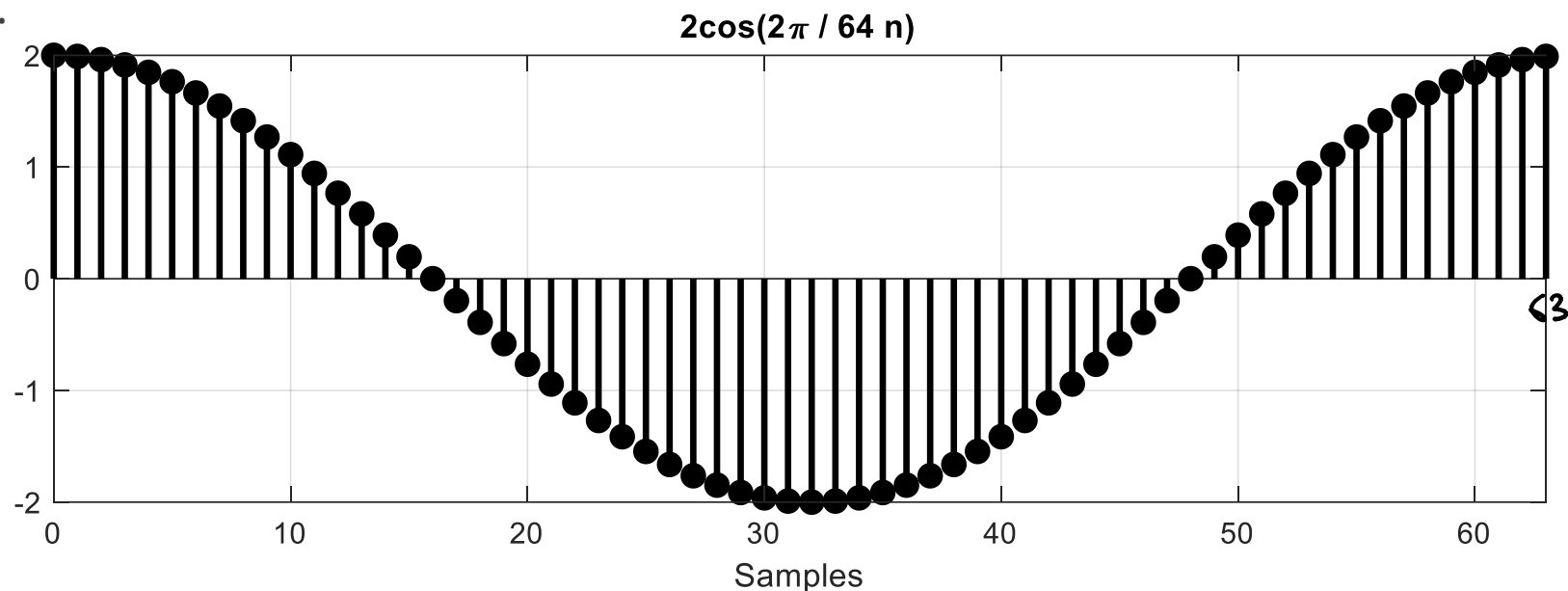
$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)})$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = 0$, $A_1 = 2$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

- Έστω ότι $\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$ και επιλέγουμε να πάρουμε ακριβώς 64 δείγματα του σήματος στο χρόνο, δηλ.

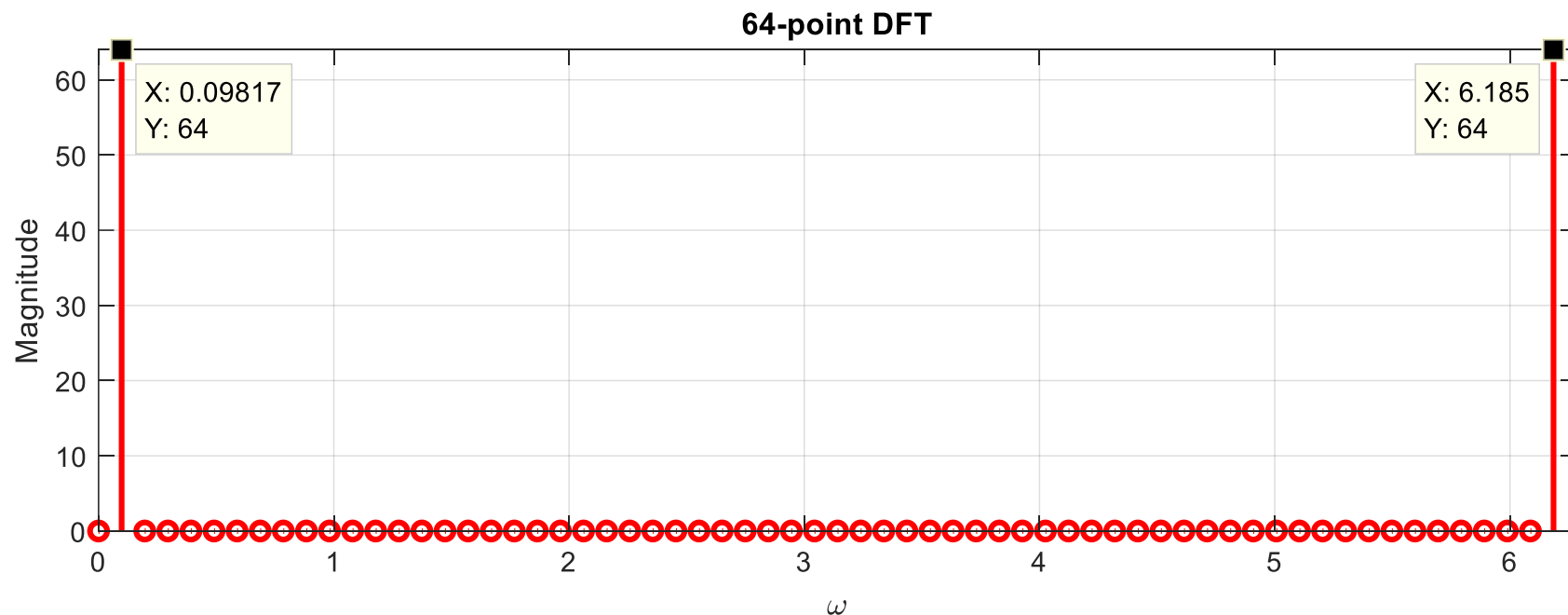


- Παρατηρήστε ότι πήραμε ακριβώς μια περίοδο του περιοδικού ημιτόνου (περίοδος $N = 64$)
- Ας κάνουμε DFT επάνω στο σήμα αυτό...

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{X}[k] = W(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}) + W(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)})$$

- Η εικόνα που παίρνουμε είναι αυτή:

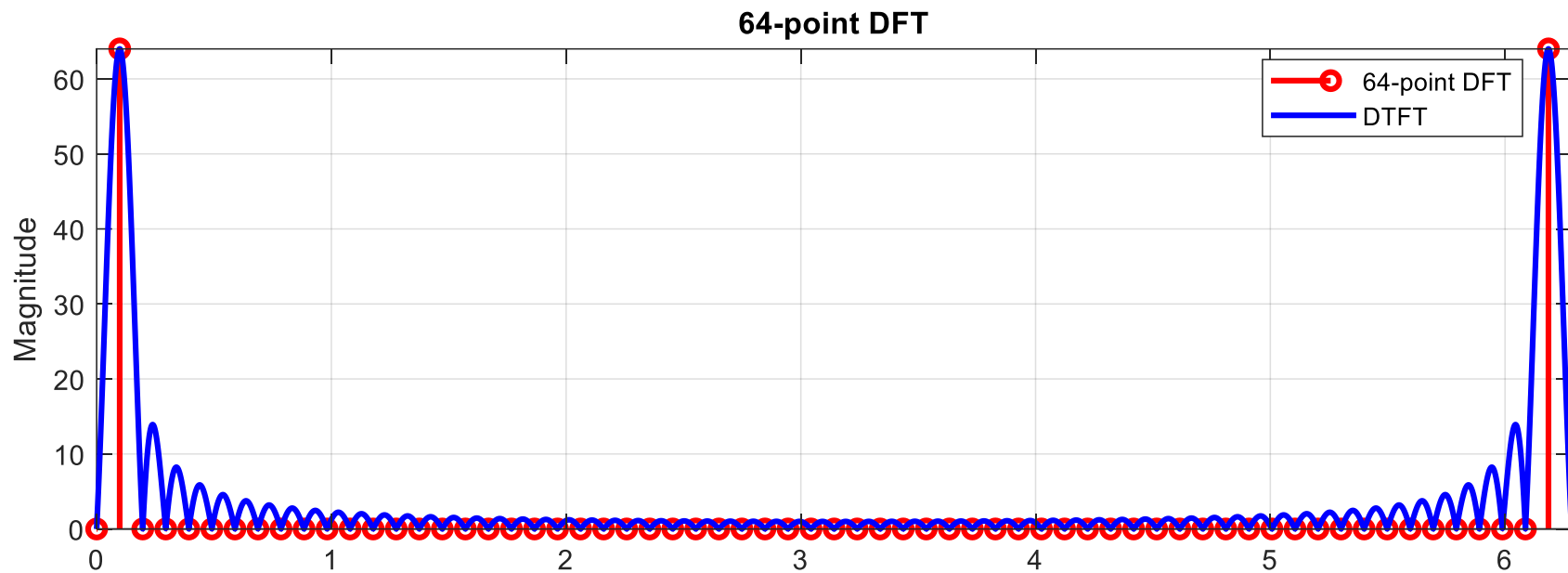


- Παρατηρήστε ότι έχουμε λάβει μη μηδενικές τιμές **ακριβώς** στις συχνότητες $2\pi/64$ και $2\pi - \frac{2\pi}{64}$!!
- Σαν να δειγματοληπήσαμε ακριβώς στις υποτιθέμενες συναρτήσεις Δέλτα που αντιστοιχούν στο ημίτονο μας!
 - Γιατί συνέβη αυτό?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

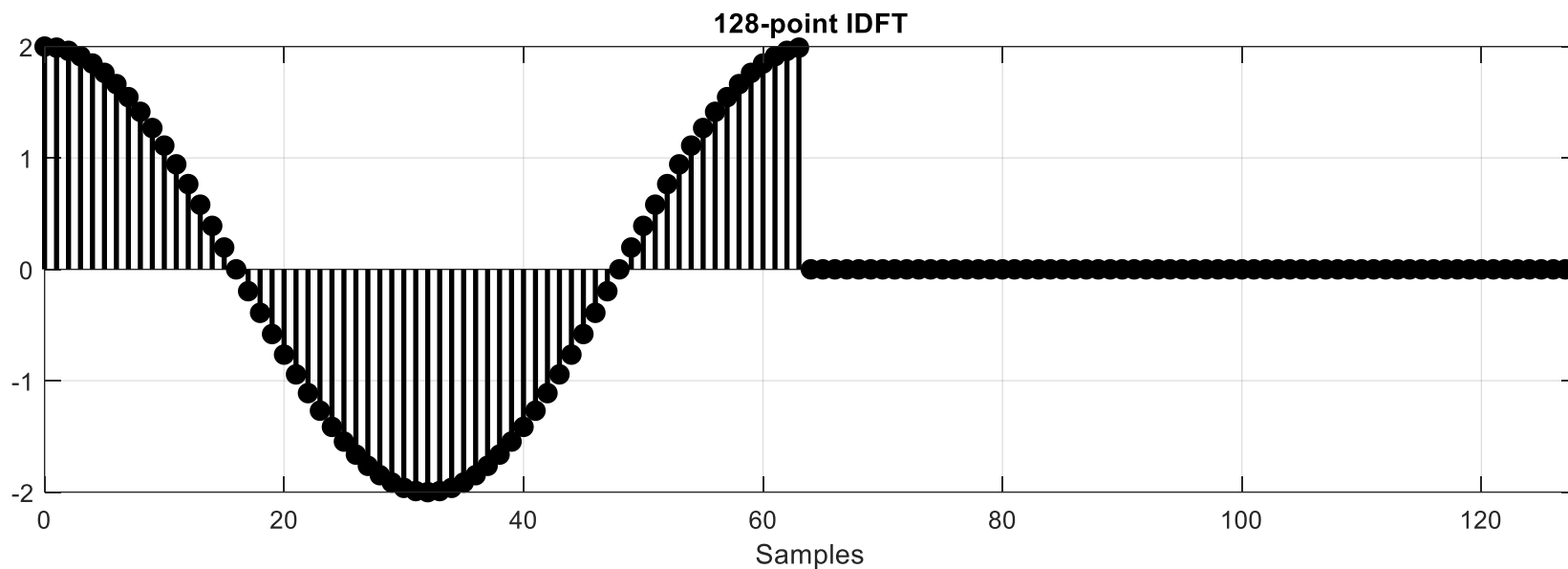
$$\hat{X}[k] = W(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}) + W(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)})$$

- Ας βάλουμε τον DTFT επάνω στο ίδιο γράφημα:



- Βλέπετε ότι δειγματοληπτήσαμε «βέλτιστα» - όσον αφορά τη συχνότητα του ημιτονοειδούς – τον DTFT!
- Τι θα συνέβαινε αν δειγματοληπτούσαμε με περισσότερα από 64 δείγματα στη συχνότητα?
- Θα είχαμε zero-padded σήμα στο χρόνο!

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Το zero-padding οδηγεί σε ασυνέχεια!



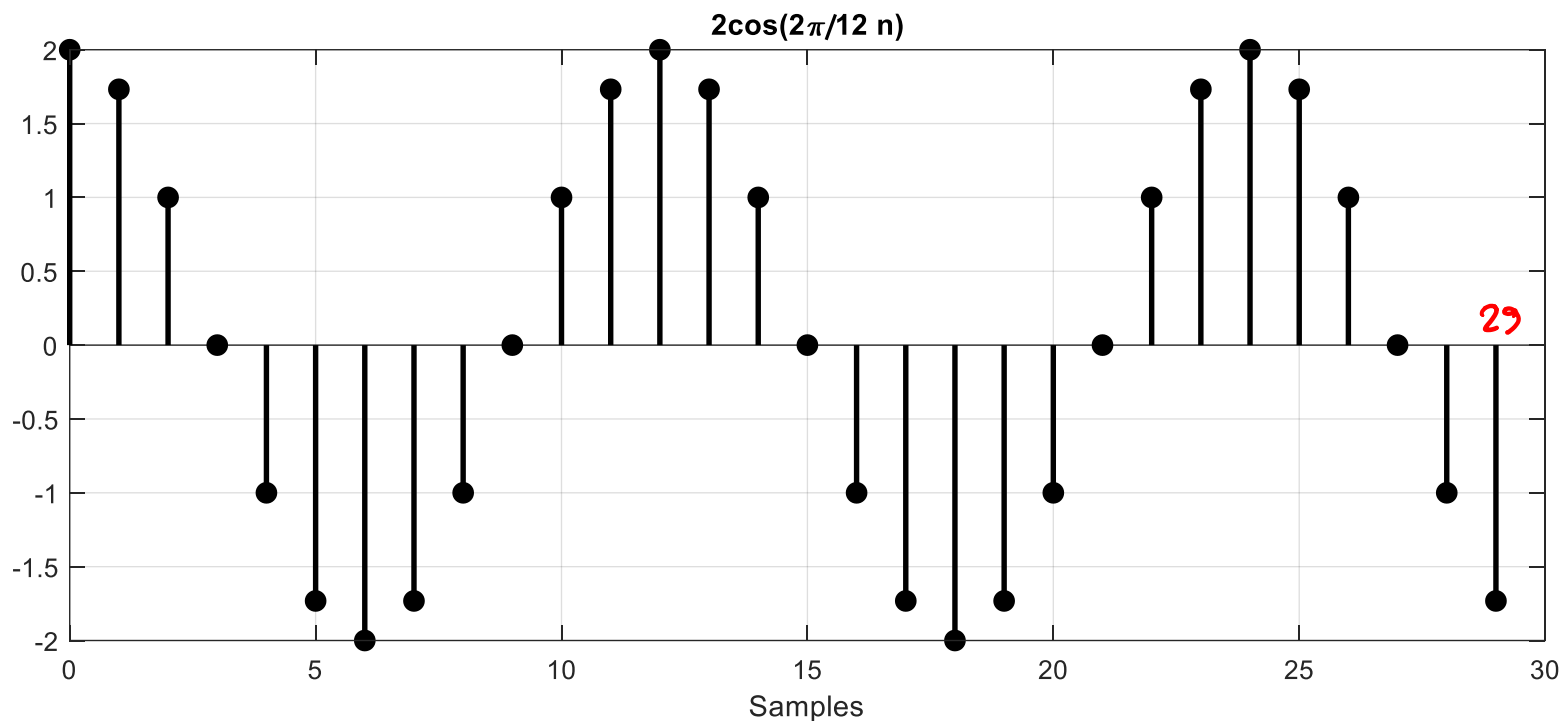
- Μια τέτοια ασυνέχεια χρειάζεται κι άλλες συχνότητες για να αναπαρασταθεί
 - Πράγματι, τέτοιες συχνότητες θα πάρουμε αν πάρουμε παραπάνω δείγματα του DFT, δηλ. δείγματα σε συχνότητες διαφορετικές της $\frac{2\pi}{64}$
- Επιπλέον, επειδή δώσαμε ακριβώς μια περίοδο του ημιτόνου στον DFT, αυτός θεώρησε ότι το σήμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα **ΜΙΑΣ** συχνότητας $\frac{2\pi}{64}$, και εμφάνισε μόνο **μια** μη μηδενική τιμή σε αυτή τη συχνότητα!

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Δεν μπορούμε όμως να ξέρουμε εκ των προτέρων την περίοδο ενός σήματος που θέλουμε να αναλύσουμε (ειδικά όταν αποτελείται από άθροισμα πολλών άγνωστων σημάτων)

• Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι – σε όμοιο παράδειγμα – τα δείγματα μας δεν αντιστοιχούν σε μια περίοδο αλλά σε ένα τυχαίο αριθμό, ας πούμε 2.5 περιόδους

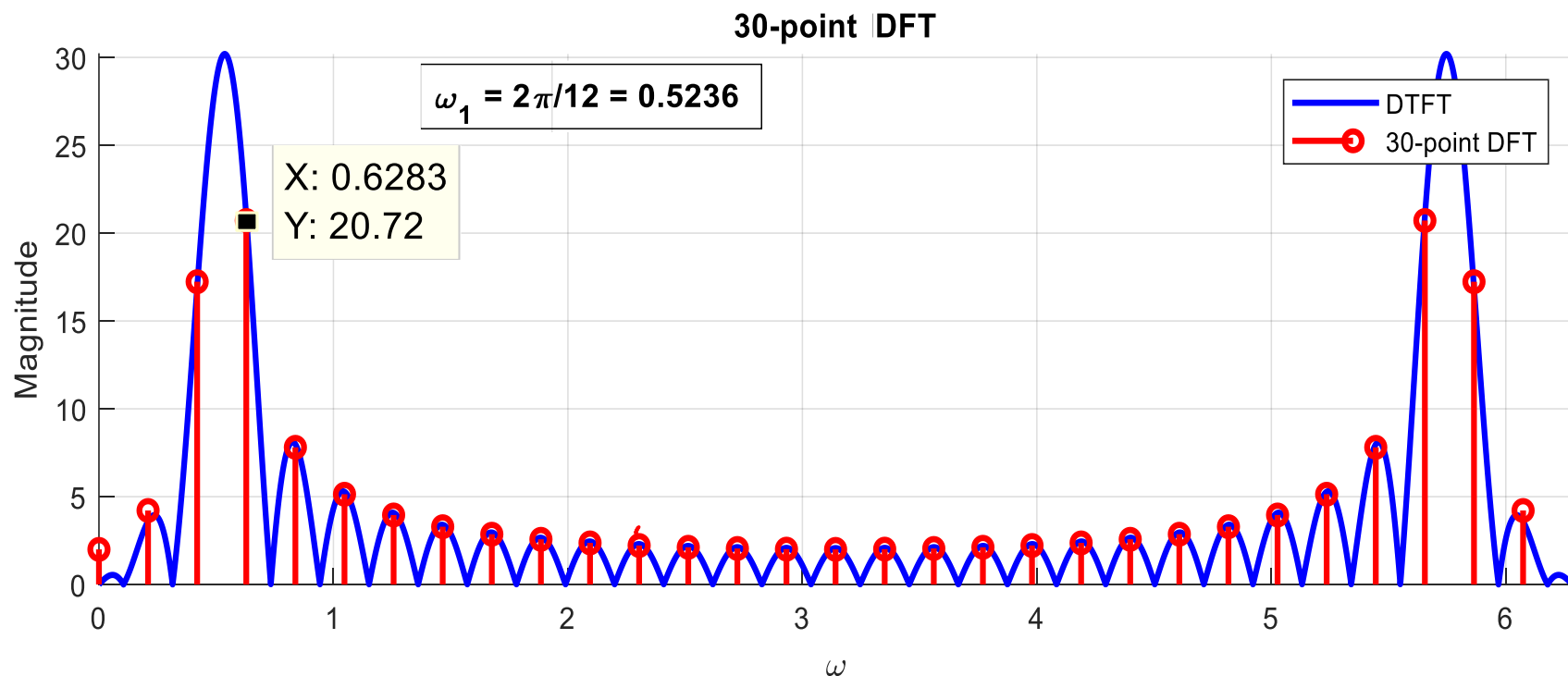
• Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$, για λόγους αισθητικούς (απεικόνισης)



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Ο DFT σε 30 σημεία, μαζί με τον DTFT, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα

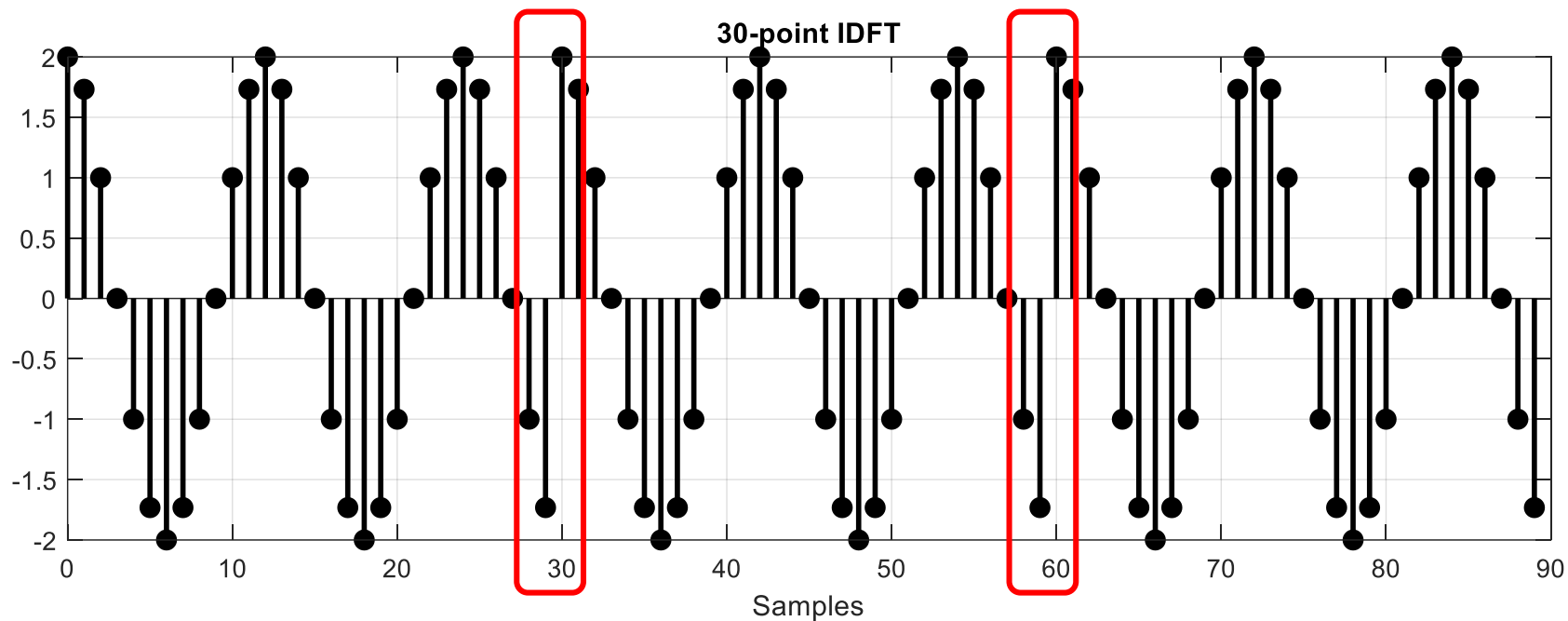
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$$



- Βλέπετε ότι όχι μόνο «χάσαμε» το peak που αντιστοιχεί στη συχνότητα μας...
 - ...αφού τα frequency bins «πέφτουν» εκατέρωθεν της πραγματικής συχνότητας (**spectral scalloping**) ...
- ...αλλά δειγματοληπήσαμε και συχνότητες που «ανήκουν» στο μετασχ. Fourier του παραθύρου!
- Γιατί συνέβη αυτό?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Ο DFT υπέθεσε ότι το σήμα που αναλύει είναι το παρακάτω:



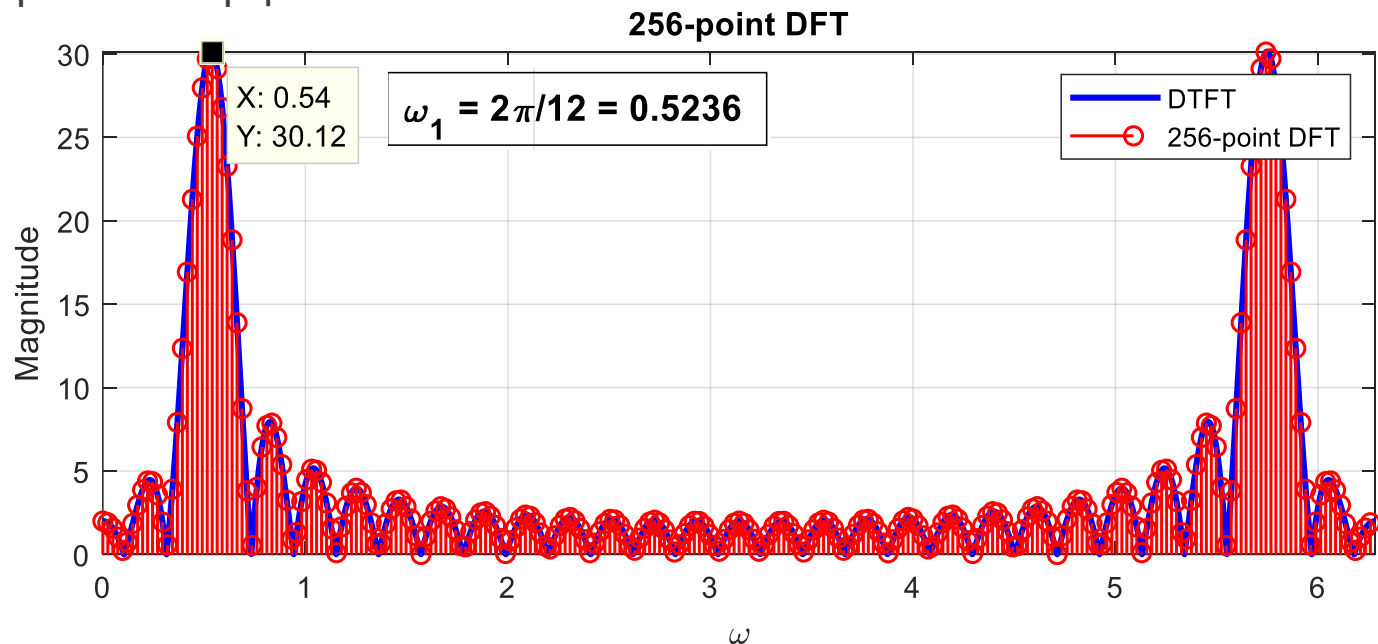
- Οι ασυνέχειες **αυτές** απαιτούν κι άλλες συχνότητες (χαμηλές και υψηλές) για να μοντελοποιηθούν, πέραν της $\frac{2\pi}{12}$

- Τις συχνότητες αυτές που δειγματοληπήσαμε στον DTFT!

- Μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση?

- Ναι! Να δειγματοληπήσουμε **πυκνότερα** τον DTFT! 😊

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Δηλ. να αυξήσουμε τον αριθμό N των δειγμάτων που παίρνουμε στον DFT
- Κάποια από τα παραπάνω δείγματα θα «έπεφταν» πάνω στις δυο κορυφές του DTFT και θα «έπιαναν» τις σωστές συχνότητες
- **Πυκνότερη δειγματοληψία του DTFT (ήτοι, μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων N του DFT) οδηγεί σε zero-padding του σήματος στο χρόνο**
 - Η περιοδικότητα «καταργείται»!
 - Δημιουργούνται ασυνέχειες!
 - Αλλά η συχνότητα μπορεί να εκτιμηθεί! 😊



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Frequency
w0 = 2*pi/12;
% Period
N0 = 12;
% Number of periods
NoP = 2.5;
% Signal length
N = NoP*N0;
% Windowed signal
x = 2*cos(w0*(0:N-1));
% Plotting
figure; stem((0:N-1), x, 'k');
grid;
```

```
% FFT
NFFT = 256;
X = fft(x, NFFT);
omega = linspace(0, 2*pi, 6000);
% DTFT of w[n] centered around w0
W1 = (sin((omega-w0)*N/2)./sin((omega-w0)/2))...
    .*exp(-1i*(omega-w0)*(N-1)/2);
% DTFT of w[n] centered around 2pi-w0
W2 = (sin((omega-(2*pi-w0))*N/2)./sin((omega-(2*pi-w0))/2))...
    .*exp(-1i*(omega-(2*pi-w0))*(N-1)/2);
% Sum of DTFTs
W = W1+W2;
% Plotting
figure; plot(omega, abs(W), 'b', 'LineWidth', 2)
axis([0 2*pi 0 max(abs(W))]); grid;
hold on; stem((0:NFFT-1)*2*pi/NFFT, abs(X), 'r', 'LineWidth', 1);
title('256-point DFT');
xlabel('\omega'); ylabel('Magnitude');
legend('DTFT', '256-point DFT');
```

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Όσον αφορά το πλάτος του ημιτόνου?

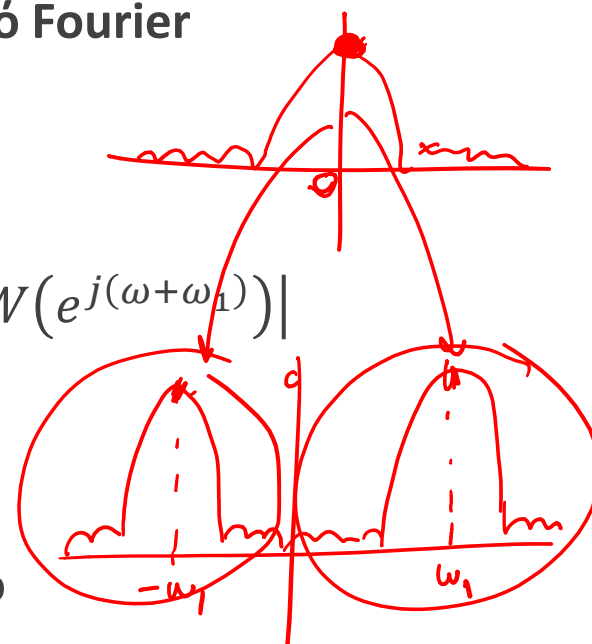
- Έχουμε

$$|\hat{X}(e^{j\omega})| \approx \frac{A_1}{2} |W(e^{j(\omega-\omega_1)})| + \frac{A_1}{2} |W(e^{j(\omega+\omega_1)})|$$

- Ξέρουμε ότι

$$|W(e^{j0})| = N + 1$$

με $N + 1$ τη διάρκεια του τετραγ. παραθύρου στο χρόνο



- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε το πλάτος που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \pm\omega_1$ που εκτιμούμε με τον αριθμό $N + 1$

- Ο αριθμός $N + 1$ συμπίπτει με τον αριθμό των δειγμάτων στο τετραγωνικό παράθυρο

- Για οποιοδήποτε παράθυρο έχουμε

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε με το άθροισμα όλων των δειγμάτων του $w[n]$

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Το πρόβλημα της **φασματικής διασποράς (spectral spreading)** - το γεγονός ότι ο μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου έχει ενέργεια και σε άλλες συχνότητες εκτός του $\omega = 0$ - παραμένει

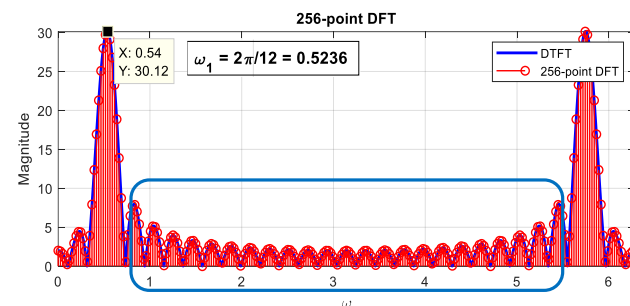
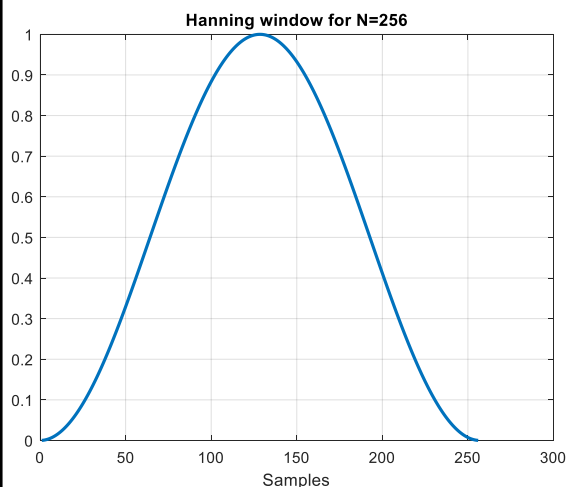
- Ύπαρξη ισχυρών πλευρικών λοβών!

- Πώς θα μπορούσαμε να το βελτιώσουμε κι αυτό?

- Να αλλάξουμε παράθυρο! 😊

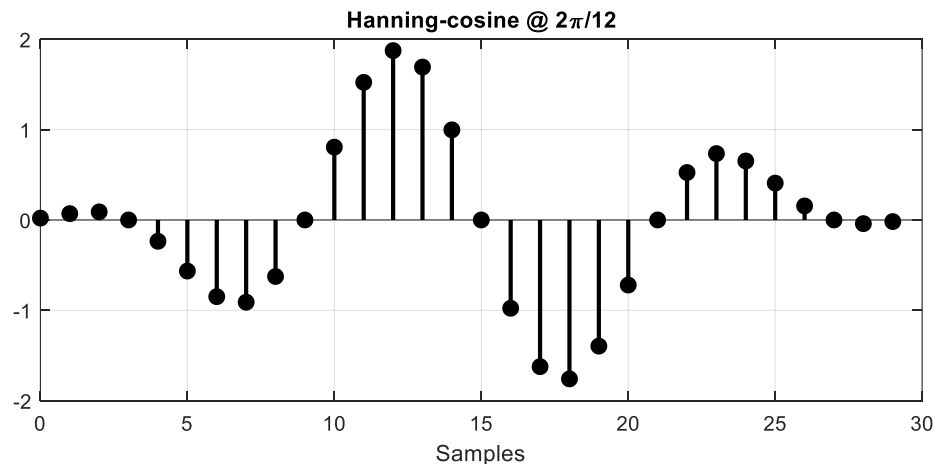
- Ας δοκιμάσουμε το παράθυρο Hanning (Von Hann) αντί του τετραγωνικού:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

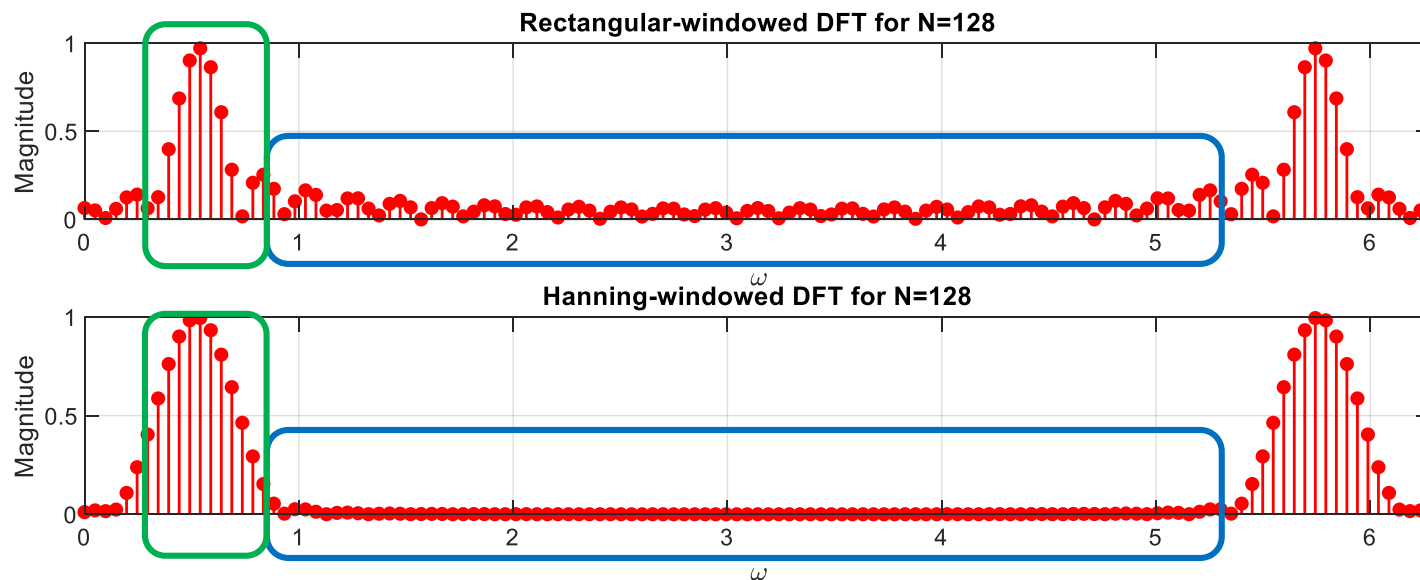


- Ο DTFT του αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό τριών DTFT του τετραγωνικού παραθύρου

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Πολλαπλασιάζοντας το ημίτονο με ένα παράθυρο Hanning:



- Παίρνοντας τώρα DFT σε 128 σημεία και κανονικοποιώντας, έχουμε:



+++ Μείωση
διασποράς

--- Αύξηση εύρους
κεντρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Άρα ξανά επιβεβαιώνουμε ότι **το πλήθος N των συντελεστών του DFT** (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) **πρέπει να είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό γνωρίζουμε ότι γίνεται με **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**

- Επίσης, **πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- **Σωστή εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο

- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1) \\ &\quad + A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2) \end{aligned}$$

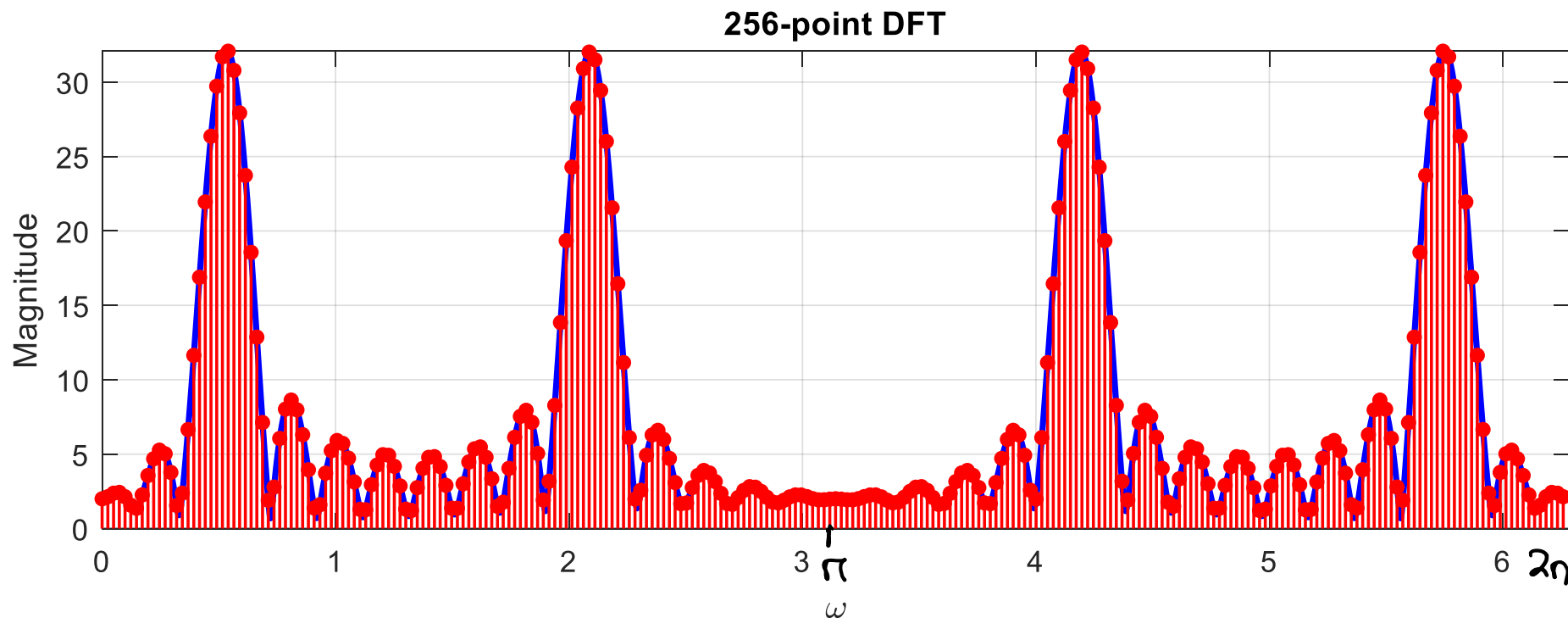
- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x[n]w[n]\} &= \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)}) \\ &\quad + \frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W(e^{j(\omega + \omega_2)}) \end{aligned}$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + W(e^{j(\omega + \omega_1)}) + W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + W(e^{j(\omega + \omega_2)})$$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$

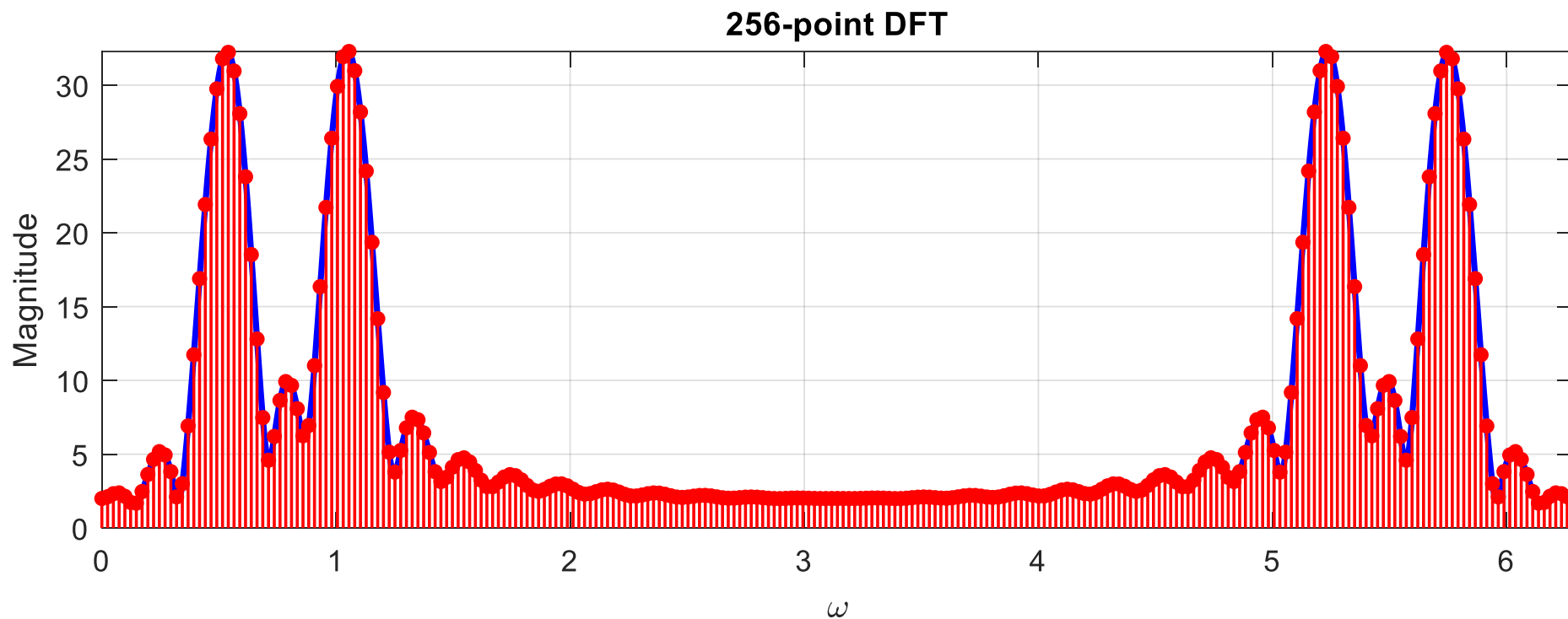


- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο

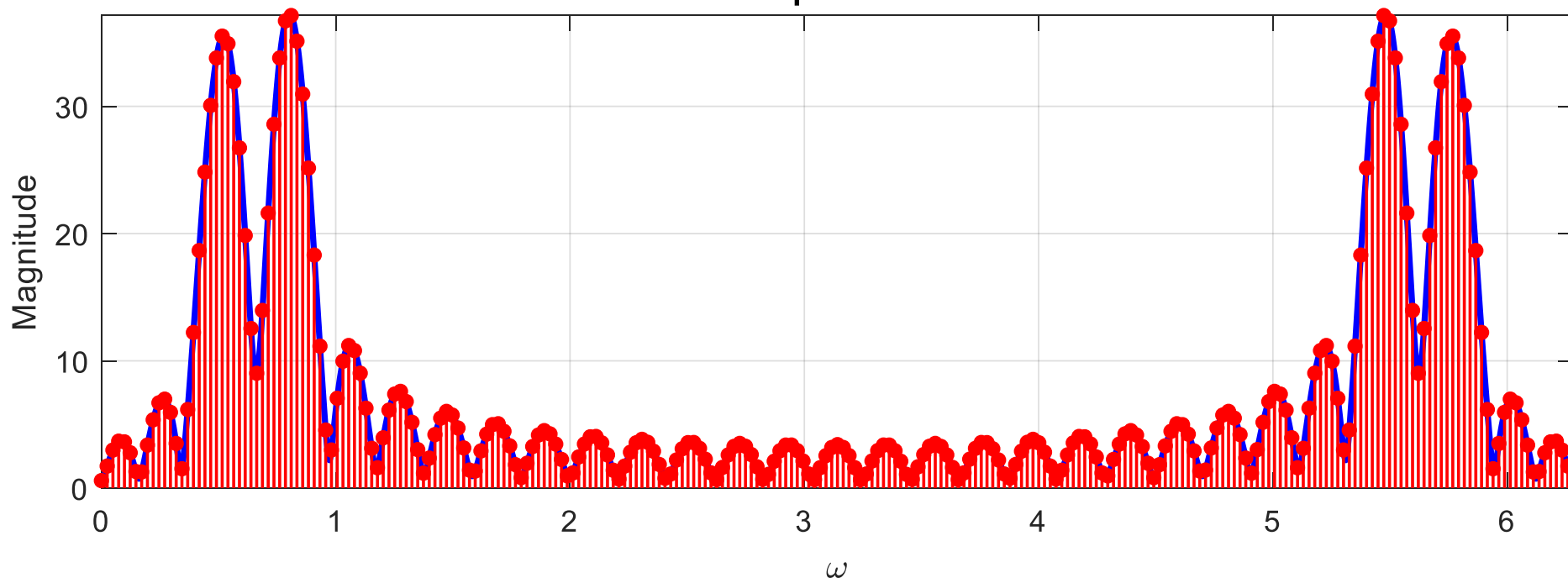
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2

- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$

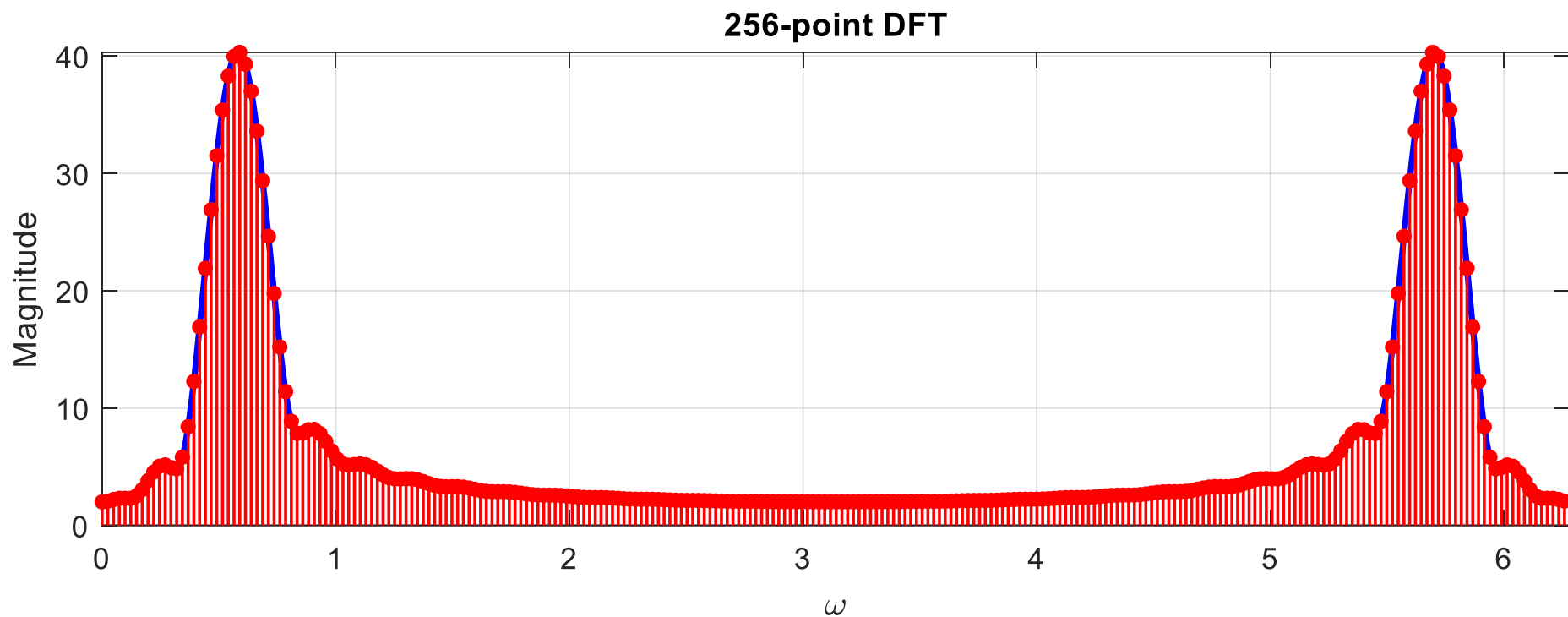


- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$

256-point DFT



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$



• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Τι παρατηρήσατε?

• α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης

- Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!

- Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$

• β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!

- Ανεπαρκής ανάλυση!

• Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου...

• ...ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου...

- ...είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς...

• Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου

- Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς

• Τι μπορούμε να κάνουμε?

Συνεχίζεται... 😊

