

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 22^Η

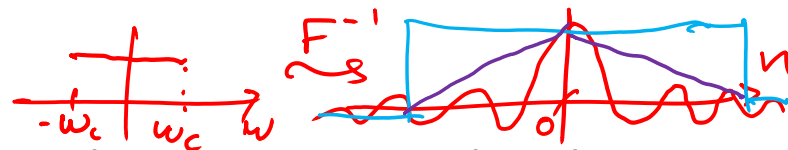
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Είδαμε λοιπόν ότι υπάρχει μεγάλη γκάμα φίλτρων που υλοποιούνται ως IIR φίλτρα διακριτού χρόνου
 - Βασιζόμαστε ιδιαίτερα στις γνώσεις μας από το συνεχή χρόνο
- Αντιθέτως, για τα FIR φίλτρα βασιζόμαστε σχεδόν αποκλειστικά στο διακριτό χρόνο!
- Αυτό σημαίνει ότι στη σχεδίαση FIR φίλτρων προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την κατάλληλη απόκριση σε συχνότητα κατευθείαν στο διακριτό χρόνο
- Η πιο απλή μέθοδος σχεδίασης ονομάζεται η μέθοδος του παραθύρου ✓
- Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις σχέσεις

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \leftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

για μια ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$



- Τα ιδανικά φίλτρα $h_d[n]$ ξέρετε ότι έχουν άπειρης διάρκειας κρουστική απόκριση και είναι και μη αιτιατά!
- Μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγισή τους «κόβοντας» σε μικρότερο τμήμα την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Το νέο σύστημα θα έχει κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- Δηλ. έχουμε κρατήσει $M + 1$ δείγματα από την ιδανική κρουστική απόκριση
- Το παραπάνω μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός της ιδανικής κρουστικής απόκρισης με ένα τετραγωνικό παλμό («παράθυρο») διάρκειας $M + 1$, δηλ.

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

με

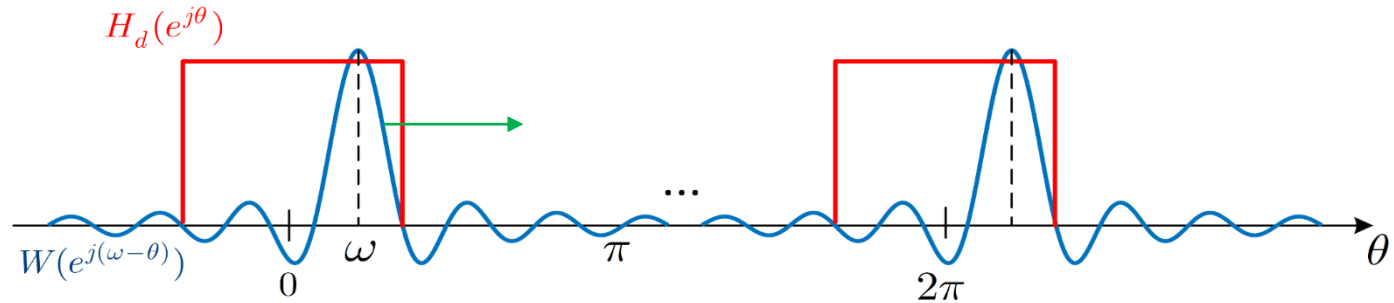
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Στο χώρο του Fourier το γινόμενο γίνεται συνέλιξη:

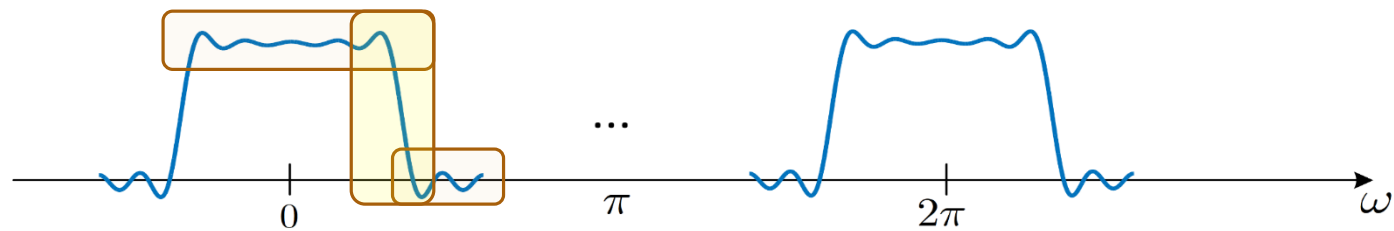
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier $H_d(e^{j\omega})$ του ιδανικού φίλτρου $h_d[n]$ συνελίσσεται ☺ στη συχνότητα (περιοδικά) με το μετασχ. Fourier $W(e^{j\omega})$ του παραθύρου $w[n]$

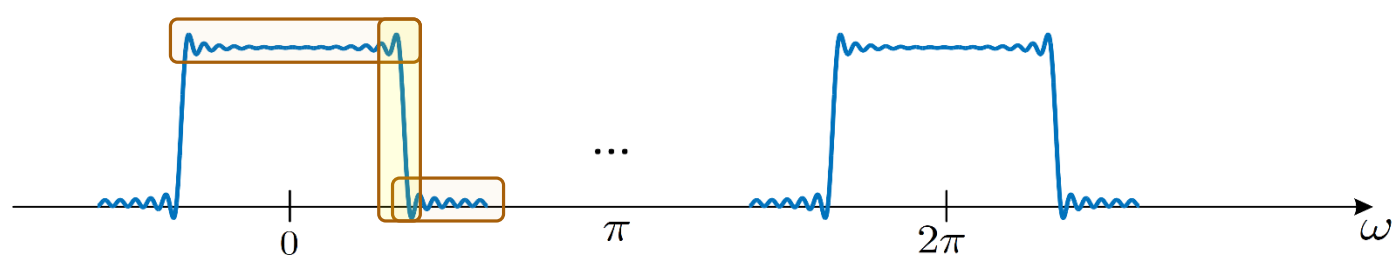
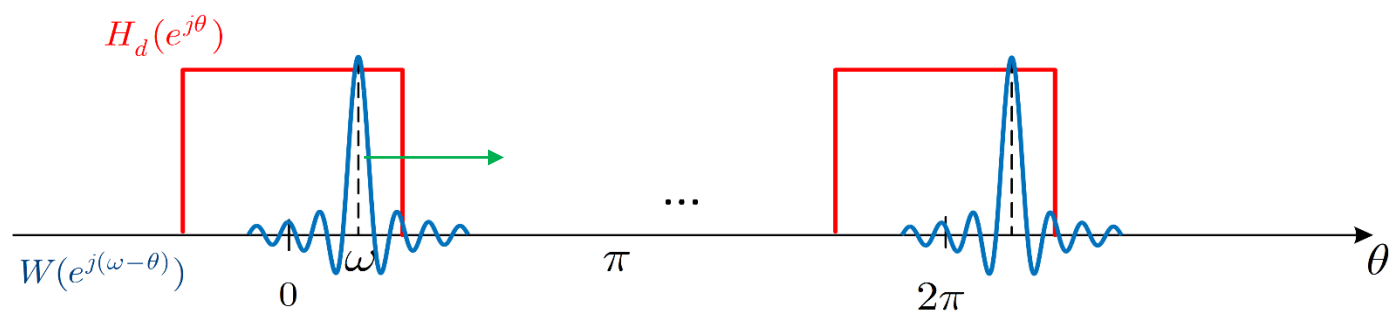
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



Ένα μικρό σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)



Ένα μεγαλύτερο σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)

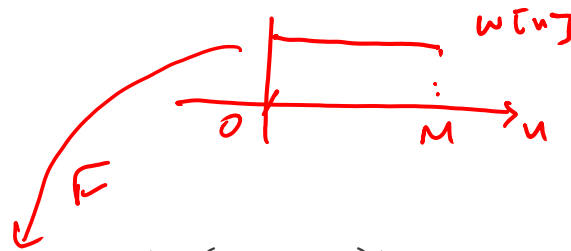


• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

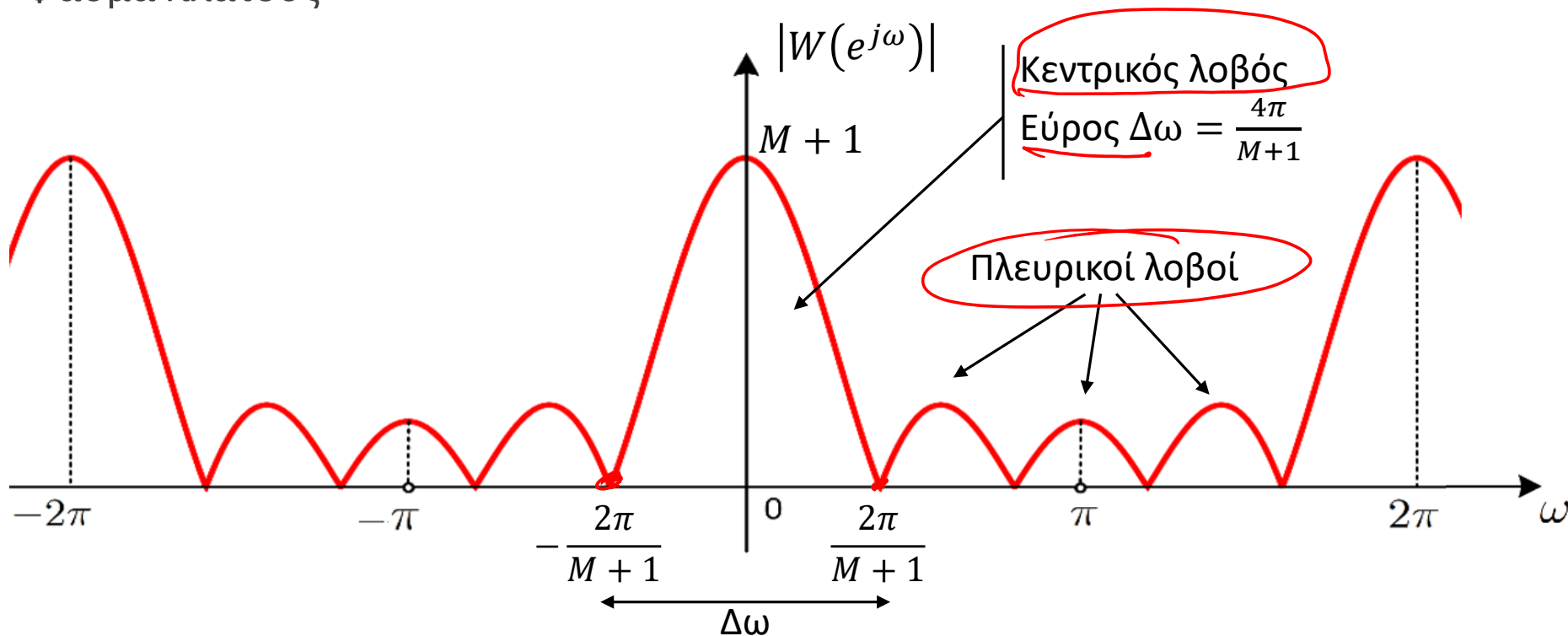
- Ιδανικά, αν $w[n] = 1, \forall n$ τότε ο μετ. Fourier του θα ήταν $W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$
- Θα θέλαμε λοιπόν το επιλεχθέν παράθυρο $w[n]$ να πλησιάζει όσο γίνεται το ιδανικό
- Σε αυτήν την περίπτωση, ο μετασχ. Fourier του θα πλησιάζει όλο και πιο πολύ στη συνάρτηση Δέλτα $2\pi\delta(\omega)$
- Όμως θέλουμε ένα παράθυρο όσο το δυνατόν μικρότερο σε διάρκεια στο χρόνο για να μην έχουμε πολλές πράξεις κατά την υλοποίηση...
- ... και ταυτόχρονα να έχει όσο γίνεται στενότερο φάσμα, δηλ. να έχει συγκεντρωμένο όλο το φασματικό περιεχόμενο γύρω από μια συχνότητα
 - Γιατί αυτό? Όστε η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας να αναπαράγει όσο γίνεται πιστότερα την επιθυμητή απόκριση συχνότητας
- Όπως καταλαβαίνετε, αυτές είναι αντικρουόμενες προδιαγραφές! 😊

- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Ας δούμε λίγο το τετραγωνικό παράθυρο
- Γνωρίζουμε ότι

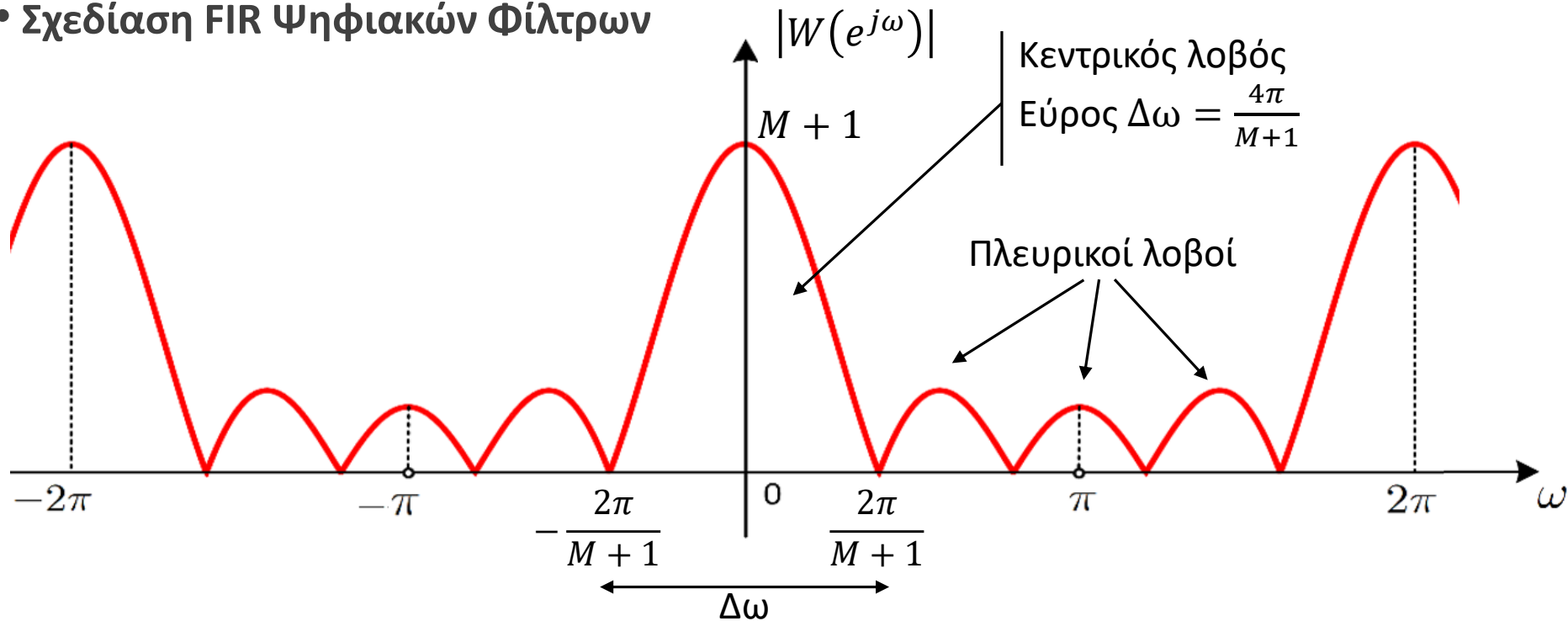
$$W(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



- Φάσμα πλάτους

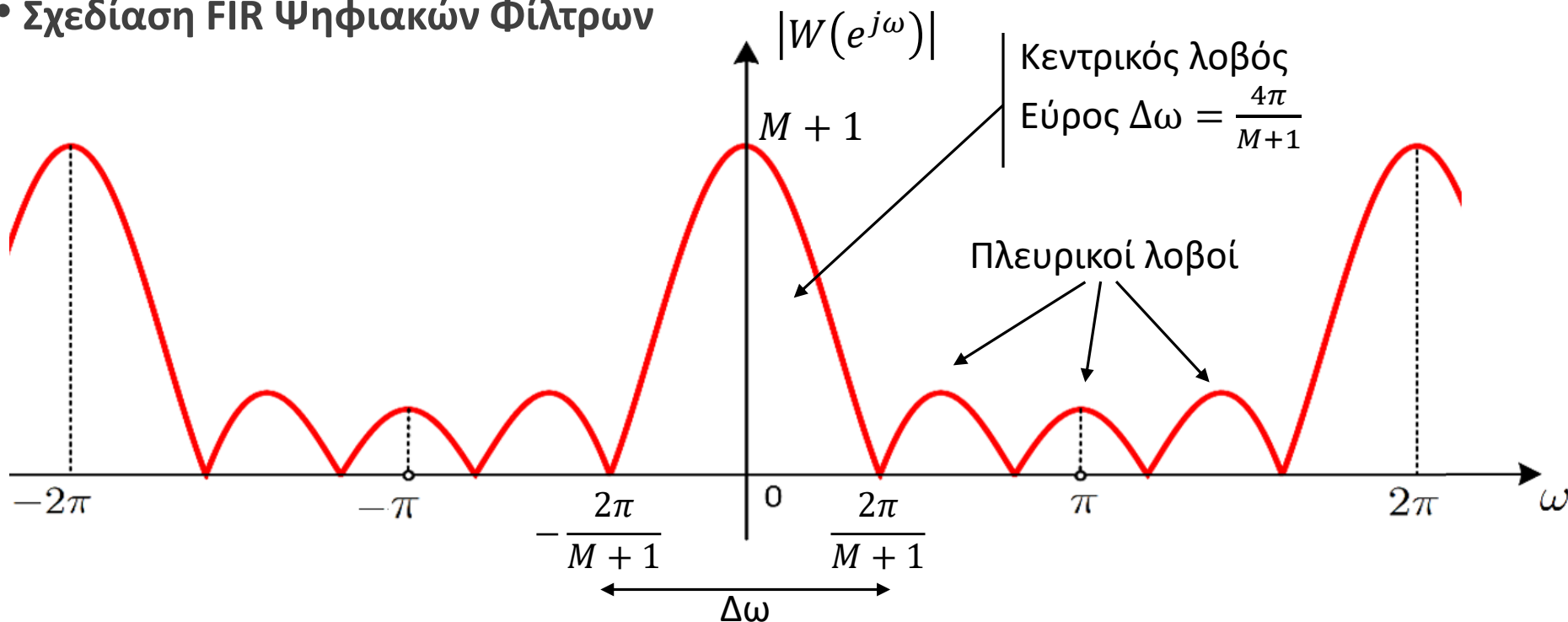


• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Όταν το M αυξάνει, το «ύψος» του κεντρικού λοβού μεγαλώνει και το εύρος του μικραίνει
- Οι πλευρικοί λοβοί έχουν «ύψος» που δεν εξαρτάται ουσιαστικά από το M αλλά από το σχήμα του παραθύρου
- Όμως το εμβαδό κάτω από τους λοβούς παραμένει σταθερό με την αύξηση του M !
- Η συνέλιξη $\frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ θα παράγει ισχυρές ταλαντώσεις κάθε φορά που οι πλευρικοί λοβοί περνούν από την ασυνέχεια του $H_d(e^{j\omega})$!

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

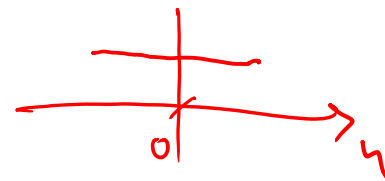


- Αν όμως χρησιμοποιήσουμε κάποιο παράθυρο που δεν είναι τόσο «απότομο» στα άκρα του όπως το τετραγωνικό, τότε μπορούμε να μειώσουμε αυτά τα φαινόμενα
 - Οι ασυνέχειες του τετραγωνικού παραθύρου χρειάζονται υψηλές συχνότητες για να «συντεθούν»
- Τέτοια παράθυρα «σβήνουν» σταδιακά προς το μηδέν στα άκρα τους στο χρόνο (περιορίζουν την ασυνέχεια)
- Κόστος? «Φαρδύτερος» κεντρικός λοβός \leftrightarrow «μακρύτερη» μετάβαση γύρω από την ασυνέχεια του ιδανικού φίλτρου
- Κέρδος? Χαμηλότεροι πλευρικοί λοβοί \leftrightarrow μικρότερες ταλαντώσεις γύρω απ' την ασυνέχεια
- Ας δούμε μερικά τέτοια γνωστά παράθυρα...

- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

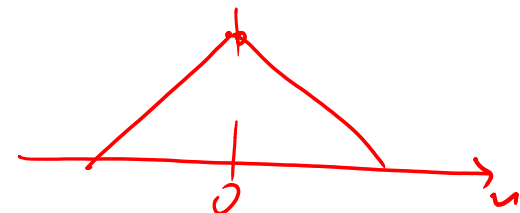
- Τετραγωνικό

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



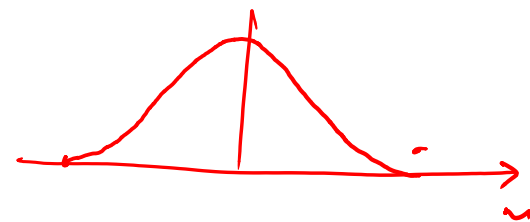
- Τριγωνικό (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \text{αλλού} \end{cases}$$



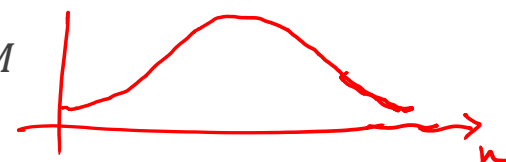
- Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



- Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

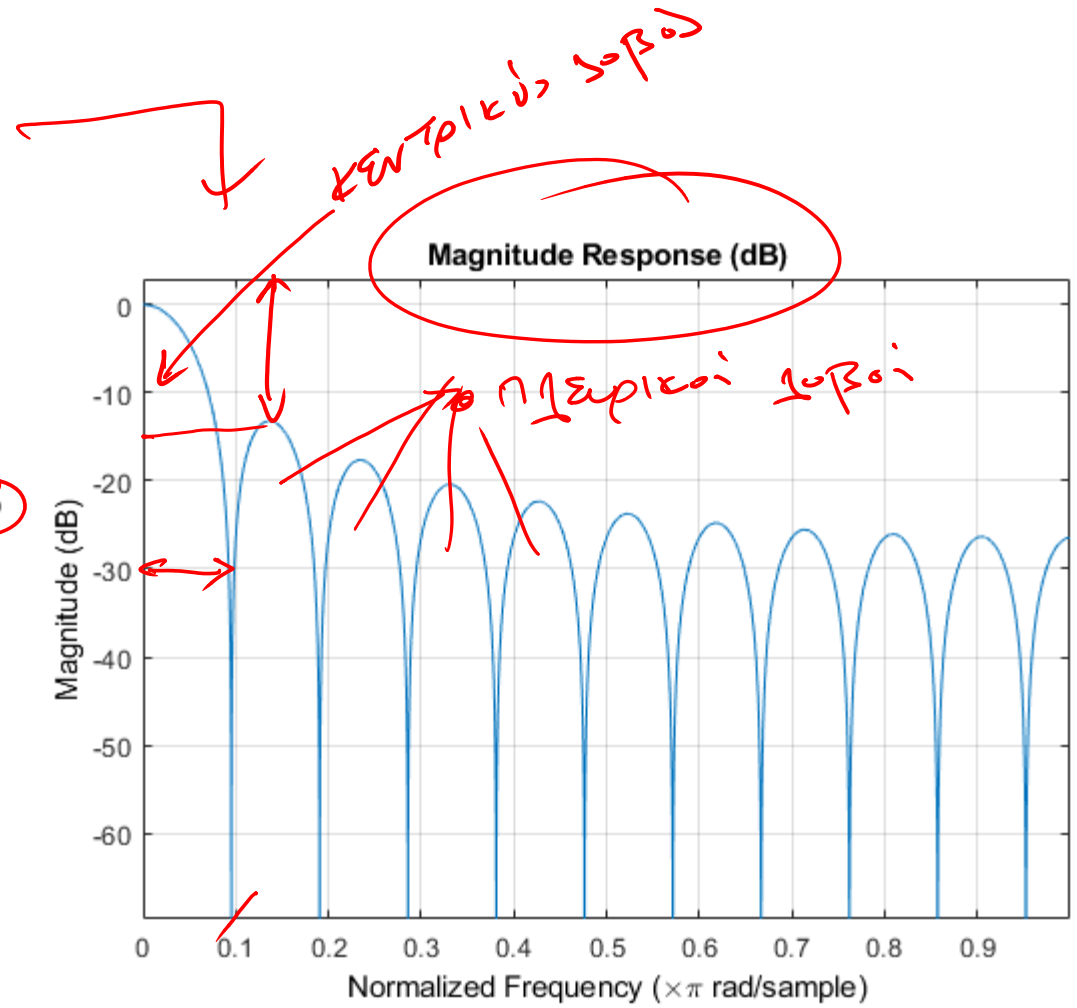
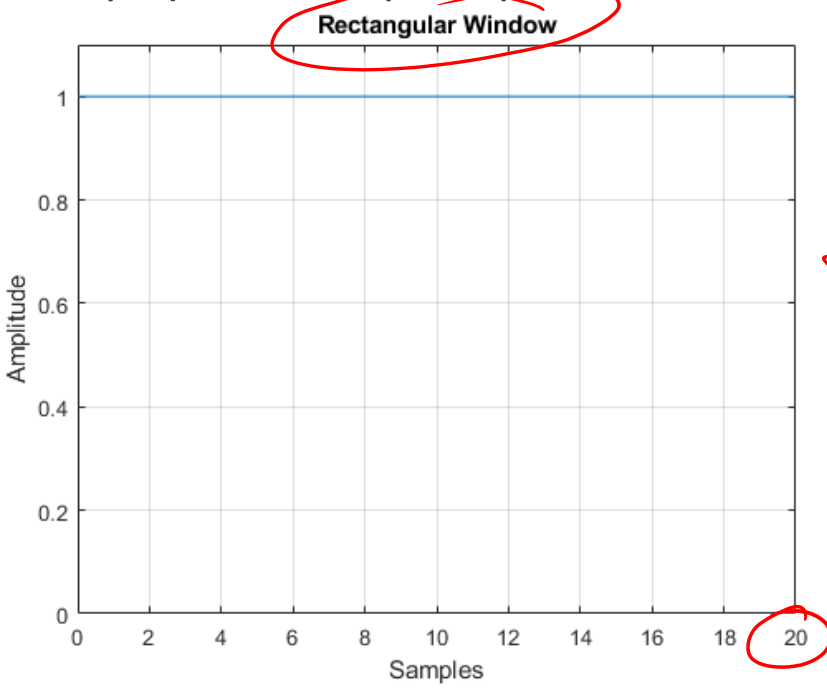


- Blackman

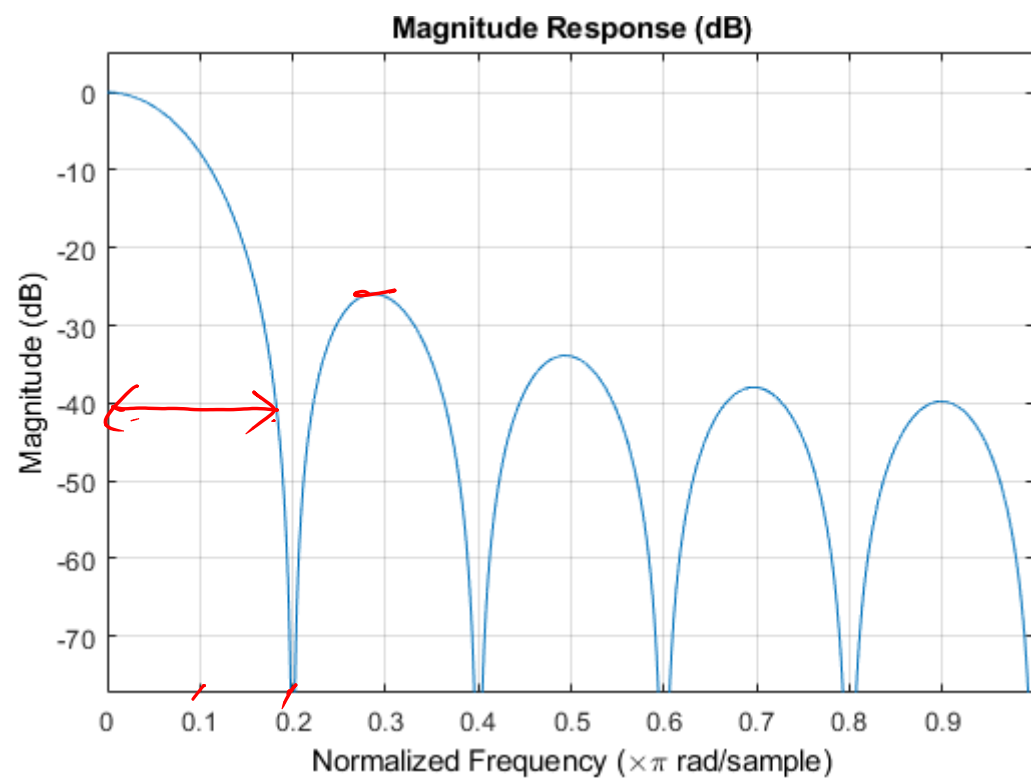
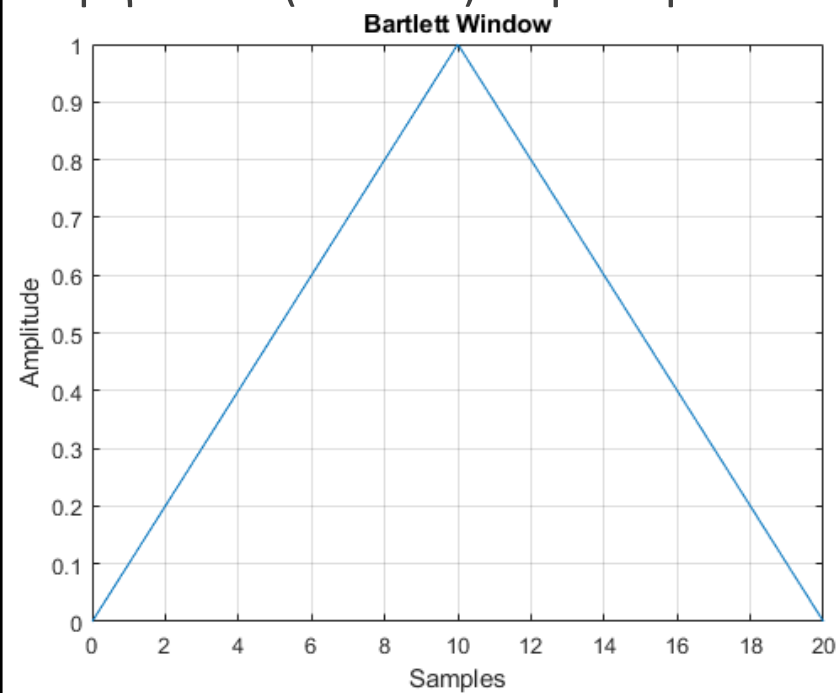
$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

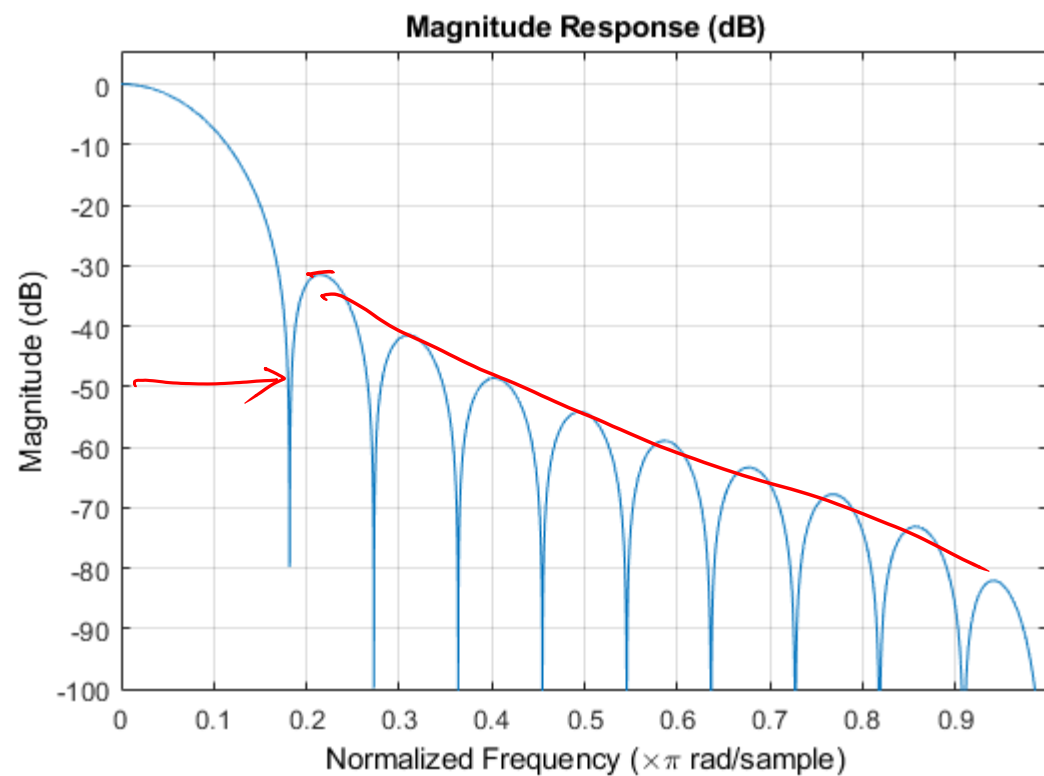
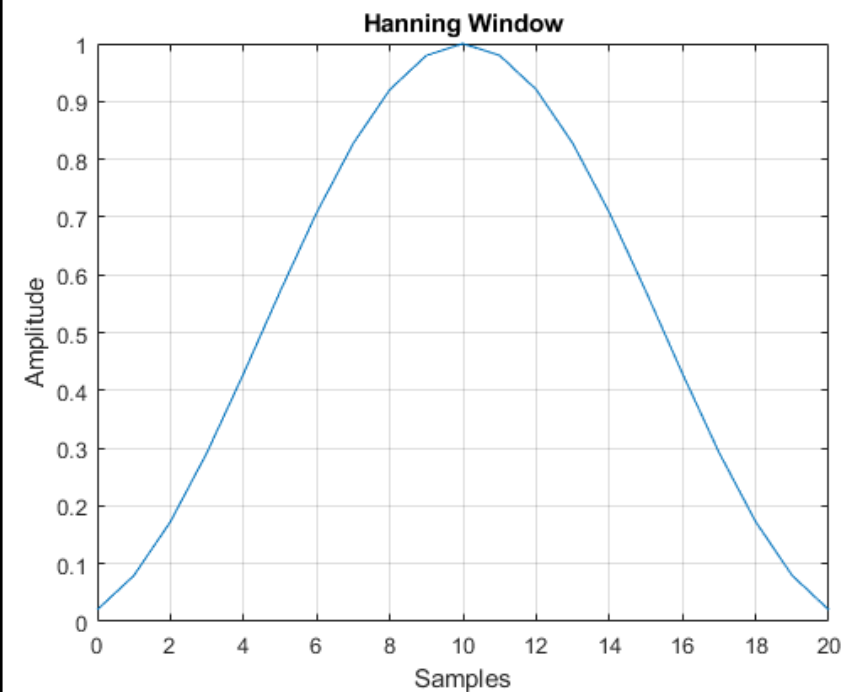
- Τετραγωνικό παράθυρο



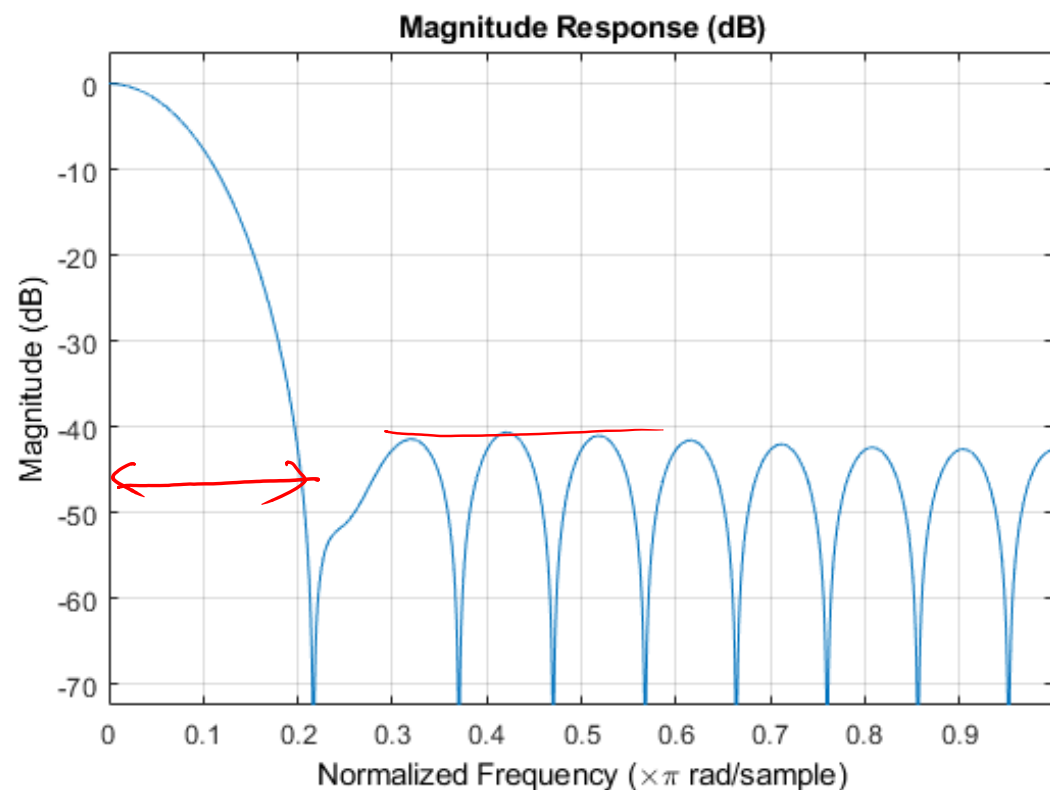
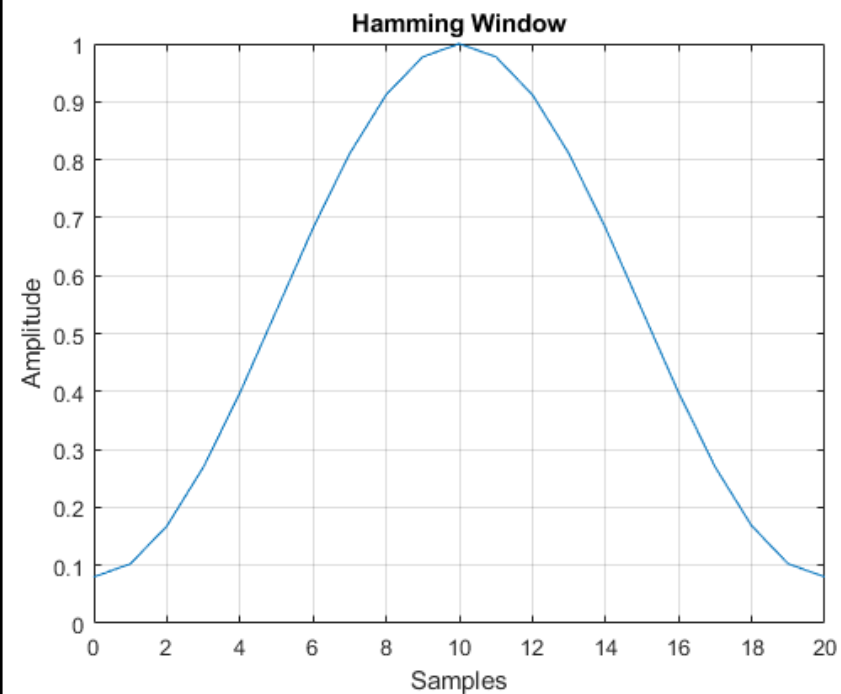
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Τριγωνικό (Bartlett) παράθυρο



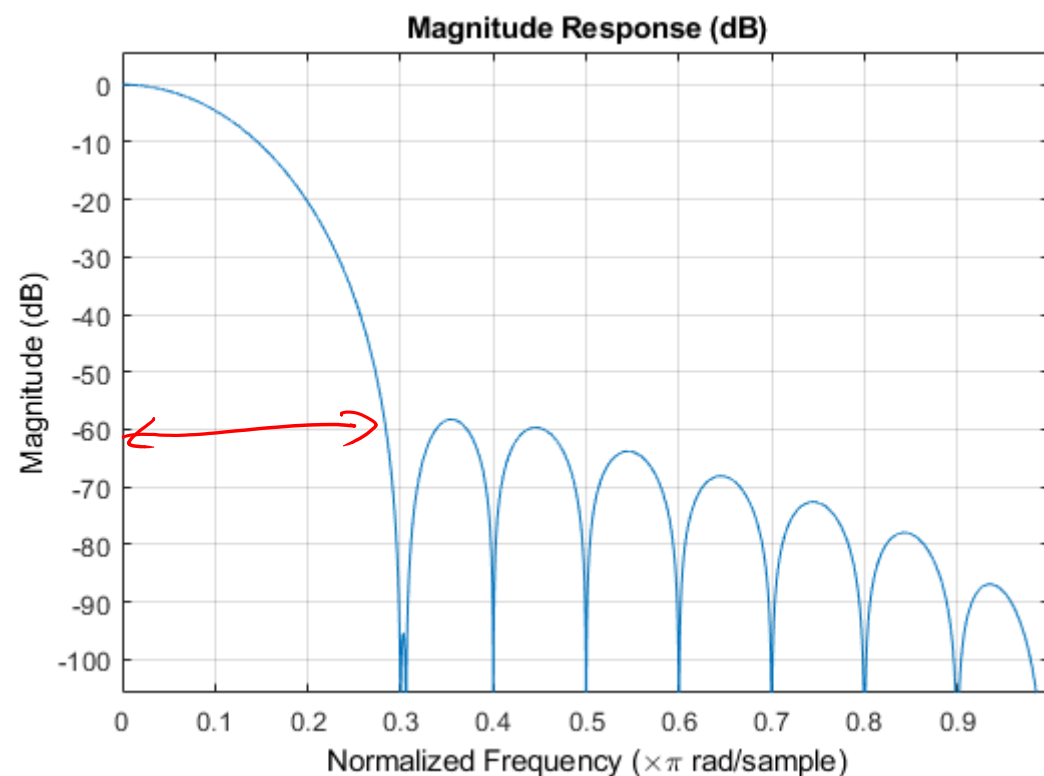
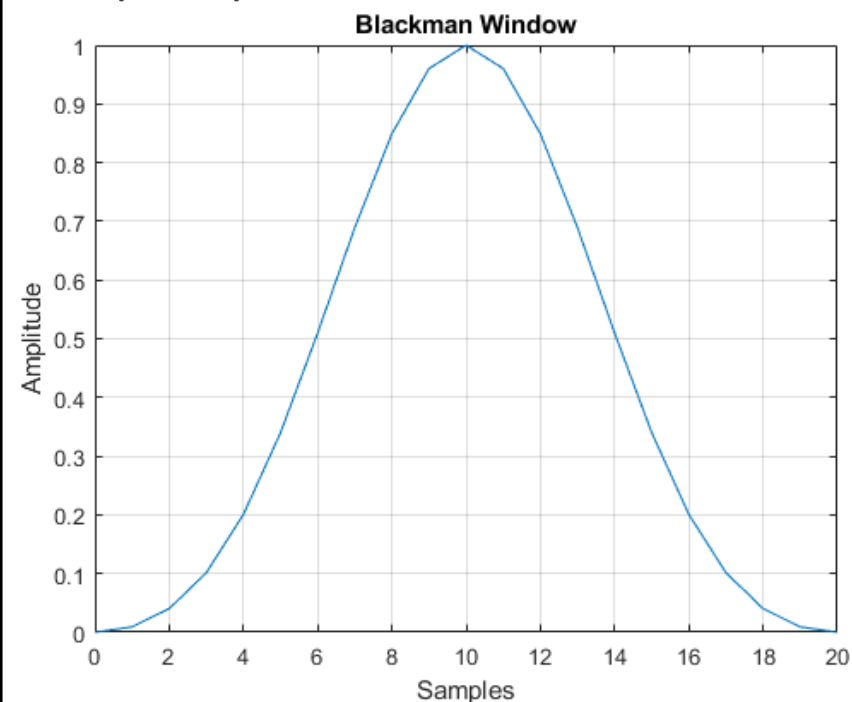
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hanning



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hamming



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Blackman



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Ιδιότητες Παραθύρων



Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB ✓	$\frac{12\pi}{M}$

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Μιλήσαμε πολύ για τα συστήματα γραμμικής φάσης

• Όλα τα προηγούμενα παράθυρα ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση

• Προσέξτε ότι σε όλα ισχύει

$$w[n] = \begin{cases} w[M - n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = \boxed{A_{\text{even}}(e^{j\omega})} e^{-\frac{j\omega M}{2}} \in \mathfrak{R}$$

• Έστω ότι η επιθυμητή κρουστική απόκριση είναι γραμμικής φάσης, δηλ.

$$h_d[M - n] = h_d[n]$$

• Στο χώρο του Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = \boxed{H_{\text{even}}(e^{j\omega})} e^{-\frac{j\omega M}{2}} \in \mathfrak{R}$$

• Αν το παράθυρο είναι συμμετρικό (αντίστοιχα για αντισυμμετρικό), τότε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{even}}(e^{j\theta}) \boxed{A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)})} e^{-\frac{j\theta M}{2}} e^{-\frac{j(\omega-\theta)M}{2}} d\theta \in \mathfrak{R} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \boxed{H_{\text{even}}(e^{j\theta}) A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)})} d\theta \right) e^{-\frac{j\omega M}{2}} \end{aligned}$$

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχετε καταλάβει ότι υπάρχει ένα trade-off μεταξύ εύρους κεντρικού λοβού και περιοχής πλευρικών λοβών
- Το trade-off αυτό μπορεί να ποσοτικοποιηθεί αναζητώντας το παράθυρο που είναι “βέλτιστα” συγκεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$
- Ο Kaiser βρήκε μια σχεδόν βέλτιστη λύση που υλοποιείται από μια γνωστή και εύκολη στην υλοποίηση συνάρτηση
 - Την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel $I_0(x)$, μηδενικής τάξης και 1^{ου} είδους

• Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt$$

με $I_0(\cdot)$ την περίφημη συνάρτηση Bessel που αναφέρθηκε

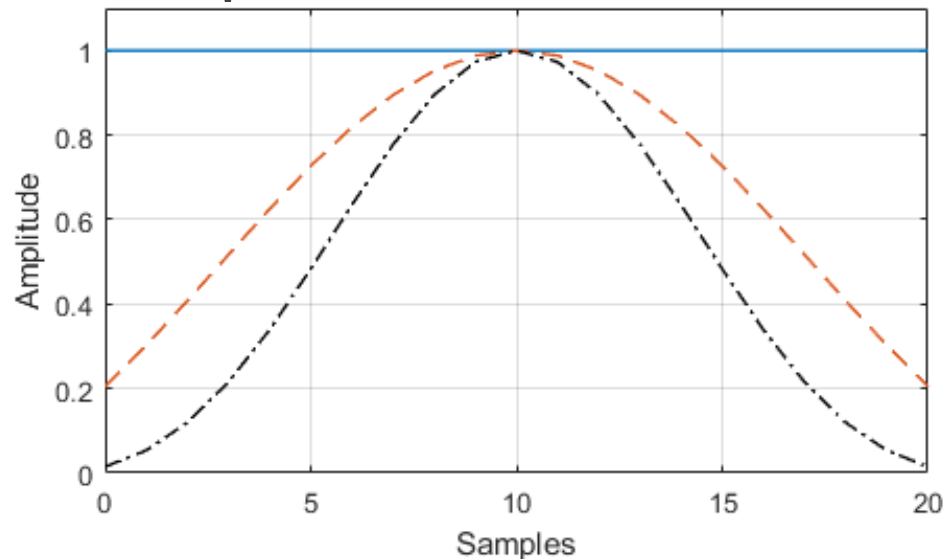
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: μήκος σήματος παραθύρου $M + 1$, παράμετρος σχήματος β
- «Παίζοντας» με τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε να ελέγξουμε το εύρος του λοβού και το πλάτος των πλευρικών λοβών
- Ας δούμε μερικές τιμές του παραθύρου

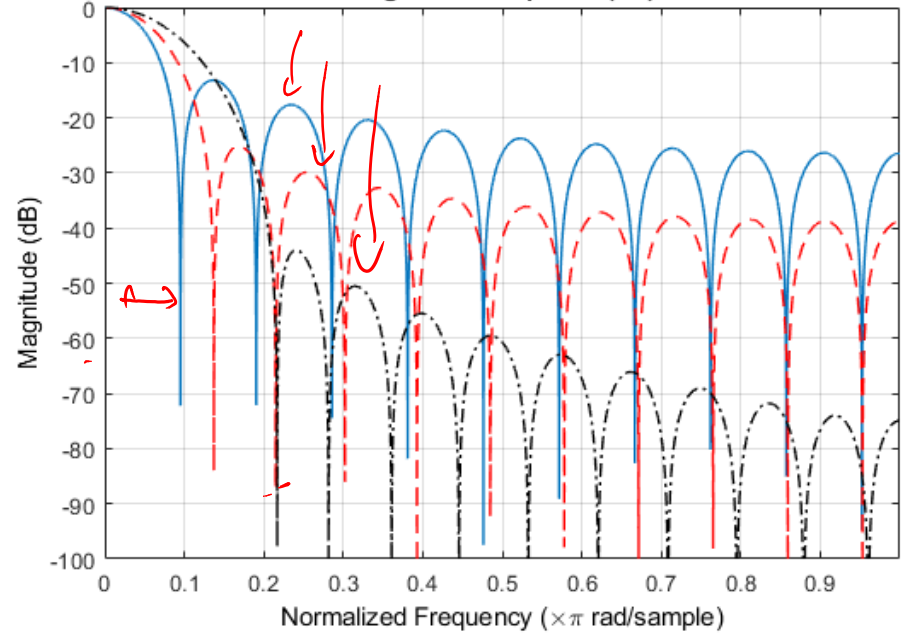
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



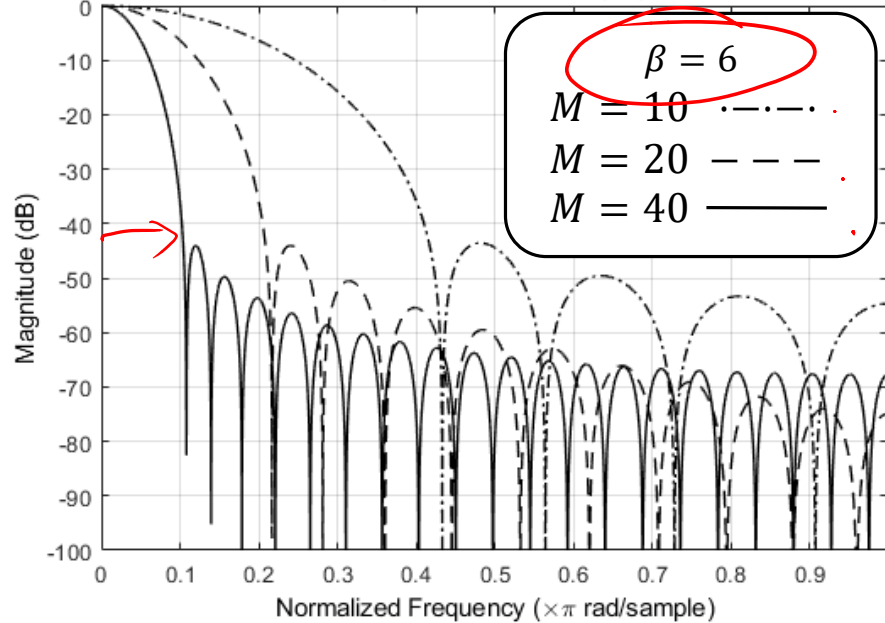
$\beta = 0$
 $\beta = 3$
 $\beta = 6$

$\beta = 0$
 $\beta = 3$
 $\beta = 6$

Magnitude Response (dB)

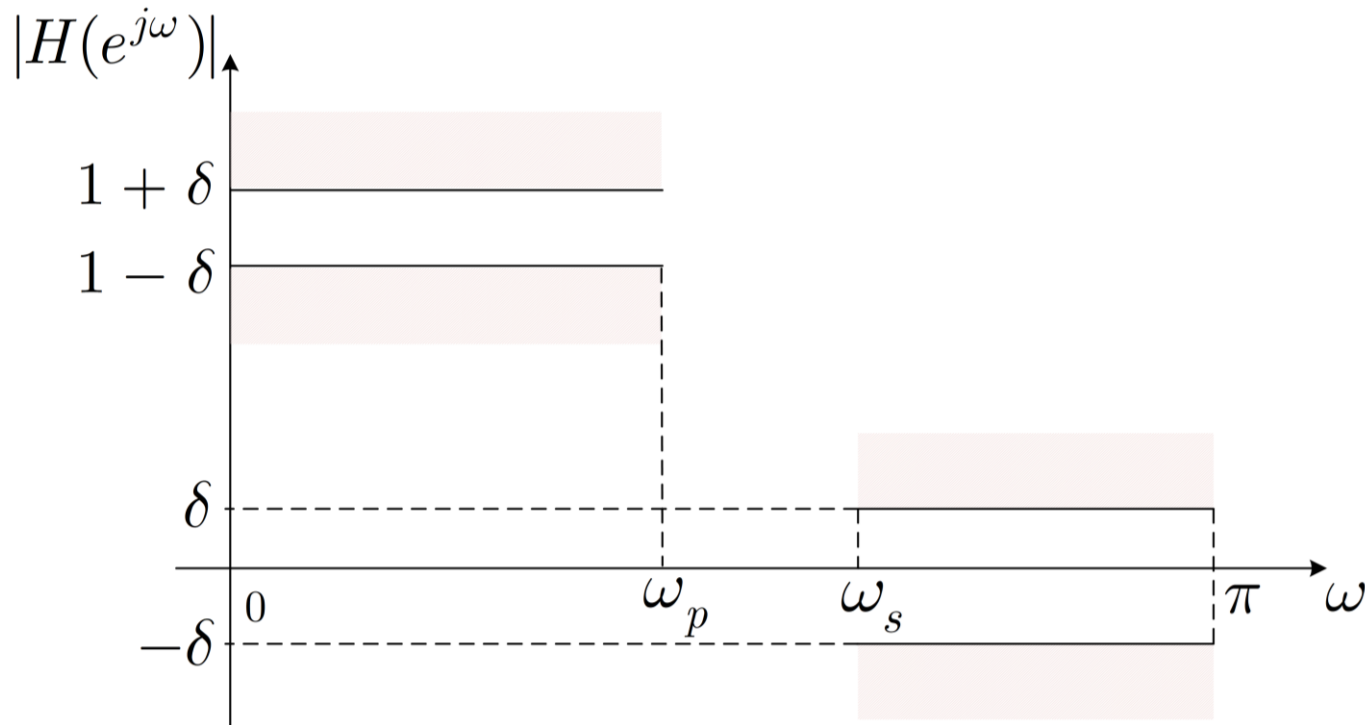


Magnitude Response (dB)



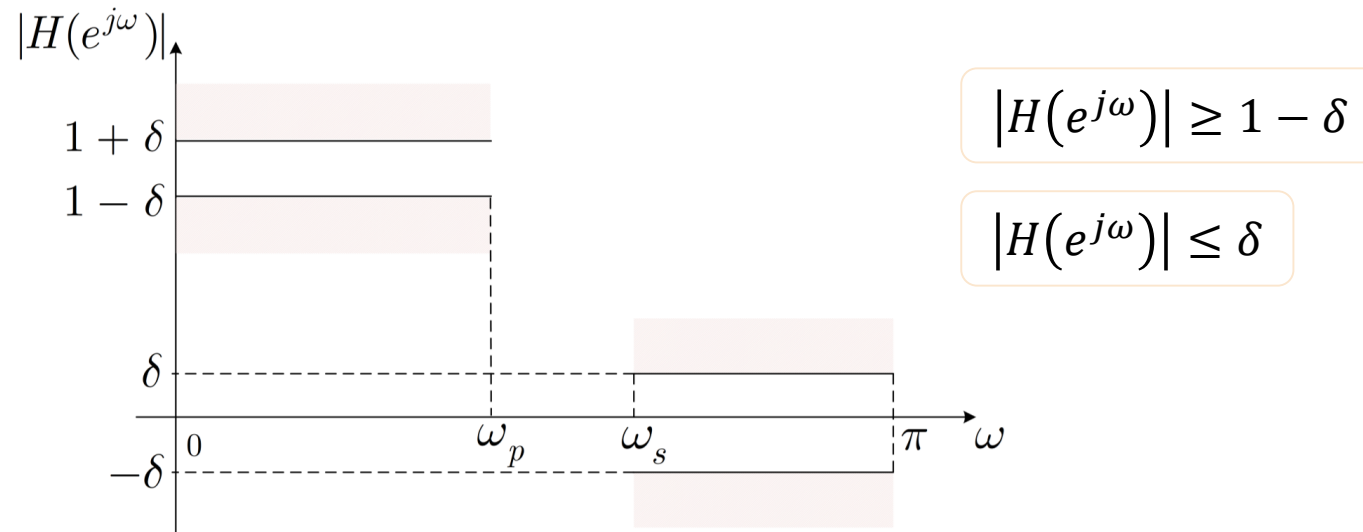
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Ο Kaiser έκανε εκτενή πειράματα και κατέληξε σε κλειστούς τύπους που επιτρέπουν στο σχεδιαστή να προβλέψει τις τιμές των M, β που απαιτούνται για συγκεκριμένες προδιαγραφές ενός φίλτρου επιλογής συχνοτήτων
- Έστω δ η προδιαγραφή του παρακάτω χαμηλοπερατού φίλτρου (δεδομένη)



- Τότε η ω_p ορίζεται ως η μέγιστη συχνότητα που ικανοποιεί: $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$
- Τότε η ω_s ορίζεται ως η μικρότερη συχνότητα που ικανοποιεί: $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$

• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Το εύρος ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$
- Αν $A = -20 \log_{10} \delta$, τότε ο Kaiser βρήκε την τιμή του β για δεδομένες τιμές του A

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

- Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega}$$

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα σχεδίασης lowpass φίλτρου γραμμικής φάσης με συχνότητα αποκοπής $\frac{\pi}{2}$ με παράθυρο Kaiser

- **Βήμα 1:** Ορίζουμε τις προδιαγραφές

$$\omega_p = 0.4\pi, \quad \omega_s = 0.6\pi, \quad \delta = 0.001$$

- **Βήμα 2:** Βρίσκουμε τη συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{(\omega_p + \omega_s)}{2} = 0.5\pi$

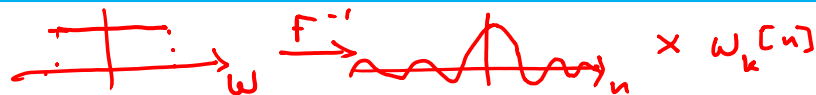
- **Βήμα 3:** $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$, $A = -20 \log_{10} \delta = 60$

- **Βήμα 4:** $\beta = 0.1102(A - 8.7) = 5.653$

- **Βήμα 5:** Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega} = 36.21 \rightarrow M = 37$$

- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- **Βήμα 6:** Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου μας, πολλαπλασιάζοντας το παράθυρο με την κρουστική απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου γραμμικής φάσης

- Μπορείτε να δείξετε ότι το ιδανικό φίλτρο γραμμικής φάσης της μορφής

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{j\omega M}{2}}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

έχει κρουστική απόκριση

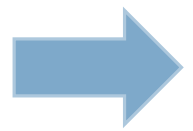
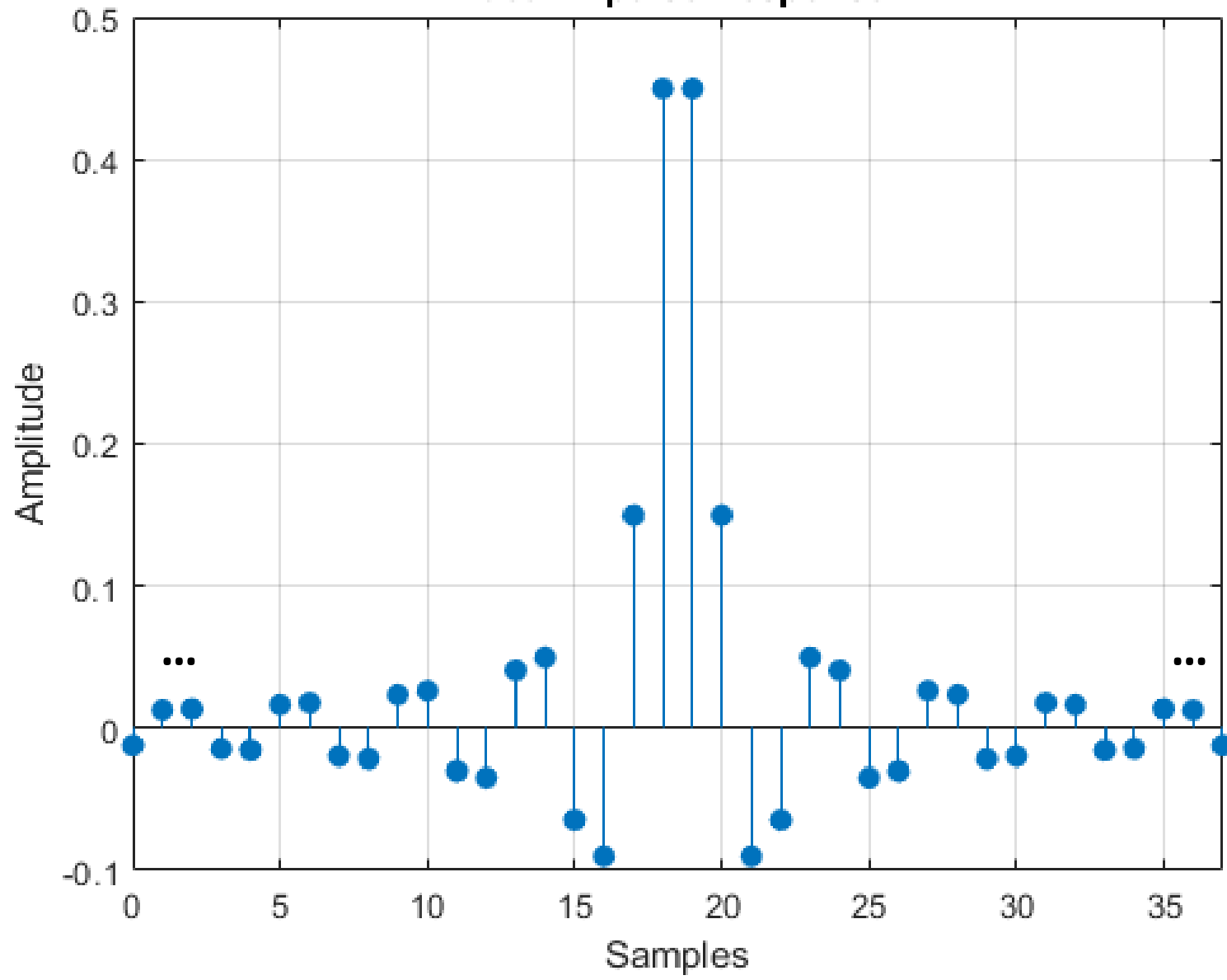
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\left(\omega_c\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

- Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left(0.5\pi\left(n - \frac{37}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{37}{2}\right)} I_0\left(5.653 \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{37}{2}}{\frac{37}{2}}\right]^2}\right) & 0 \leq n \leq 37 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

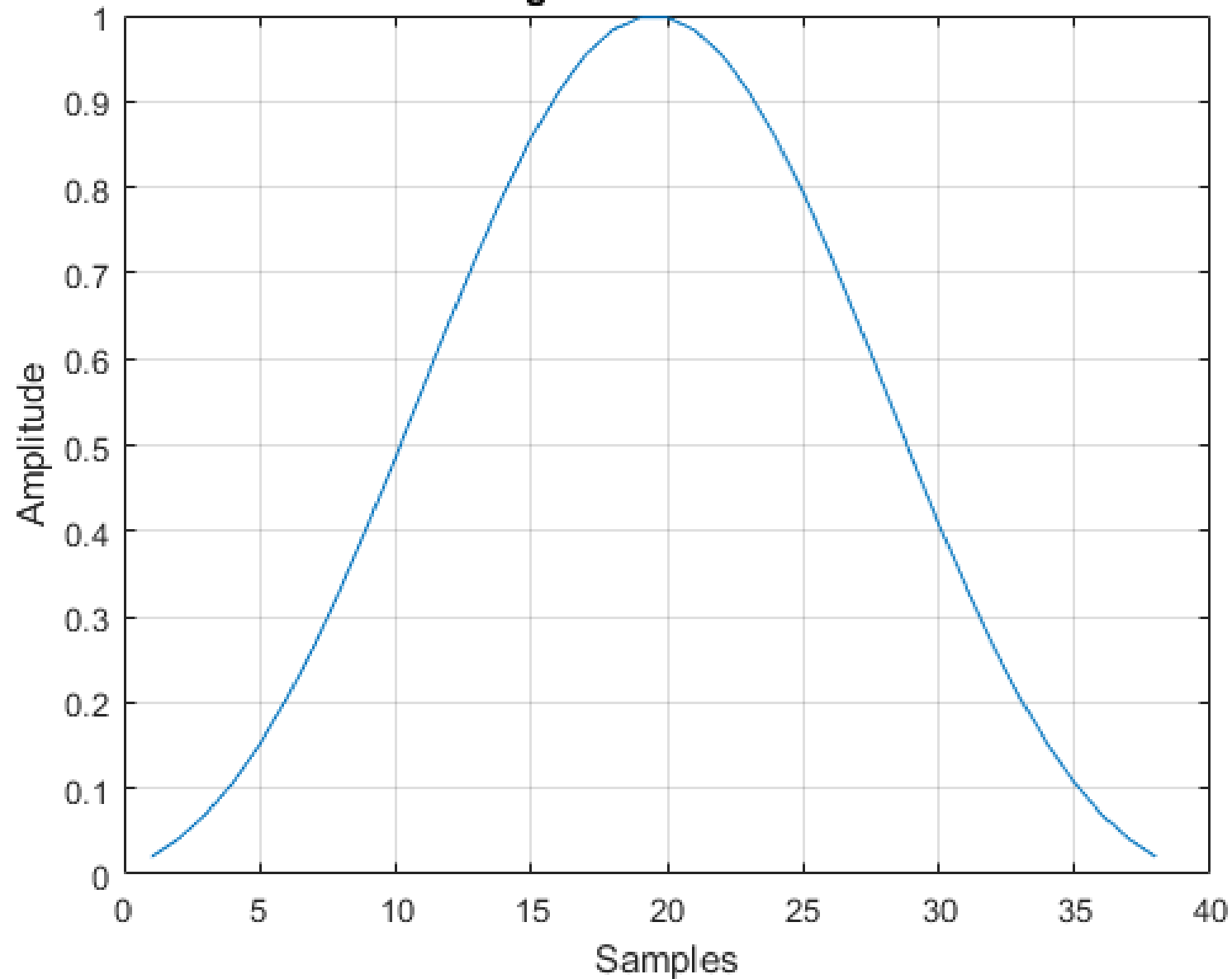
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Ideal Impulse Response



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

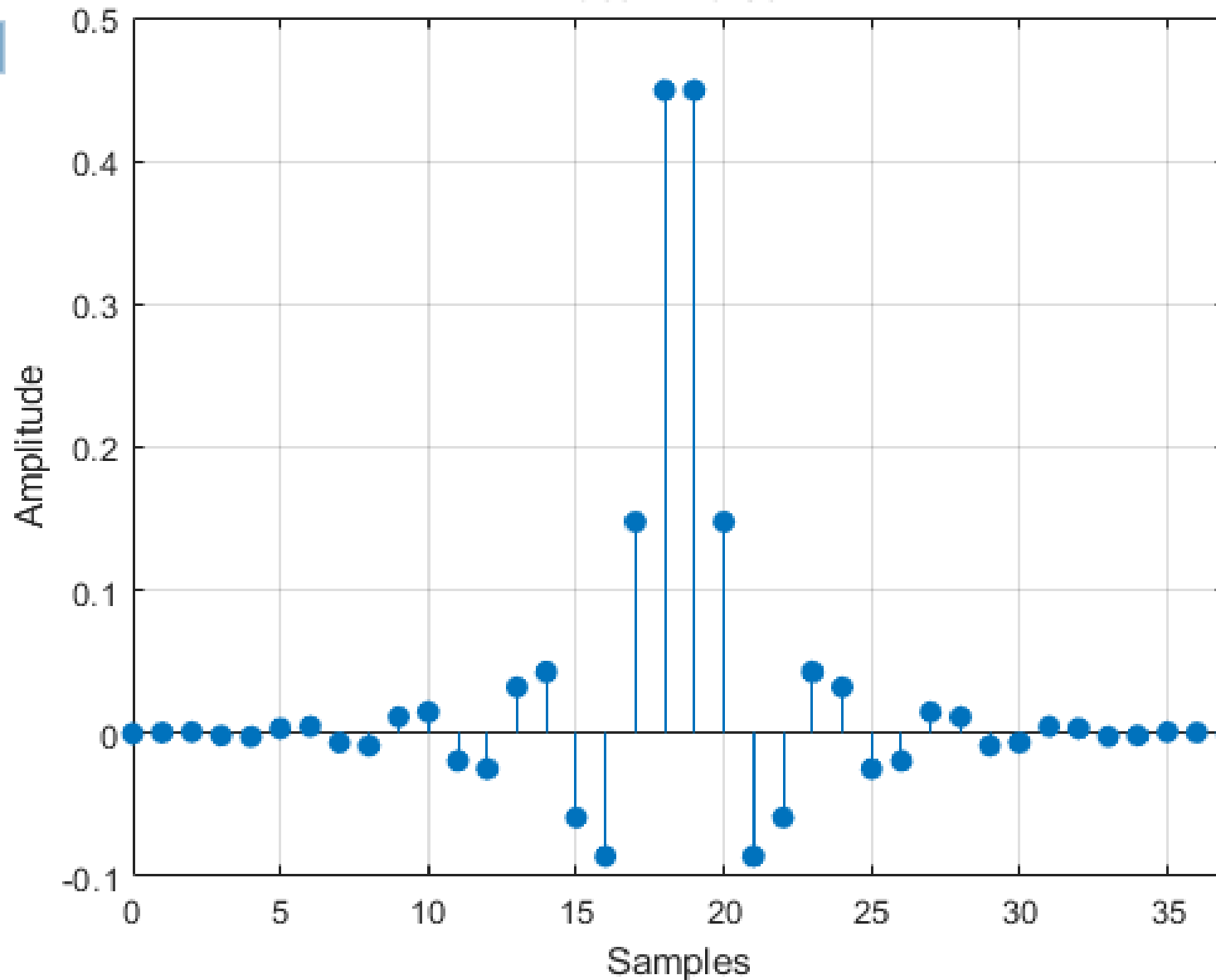
Designed Kaiser Window



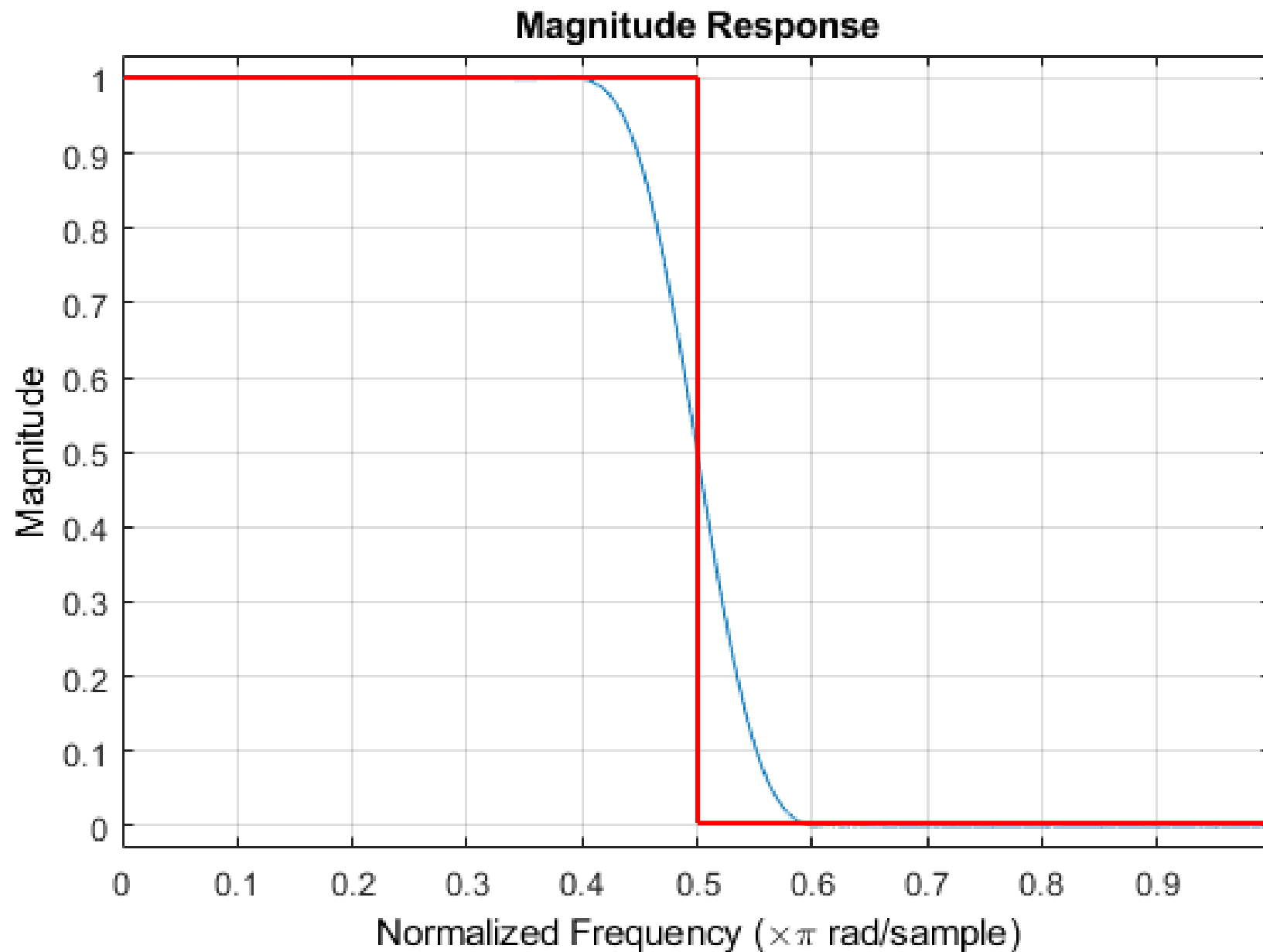
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



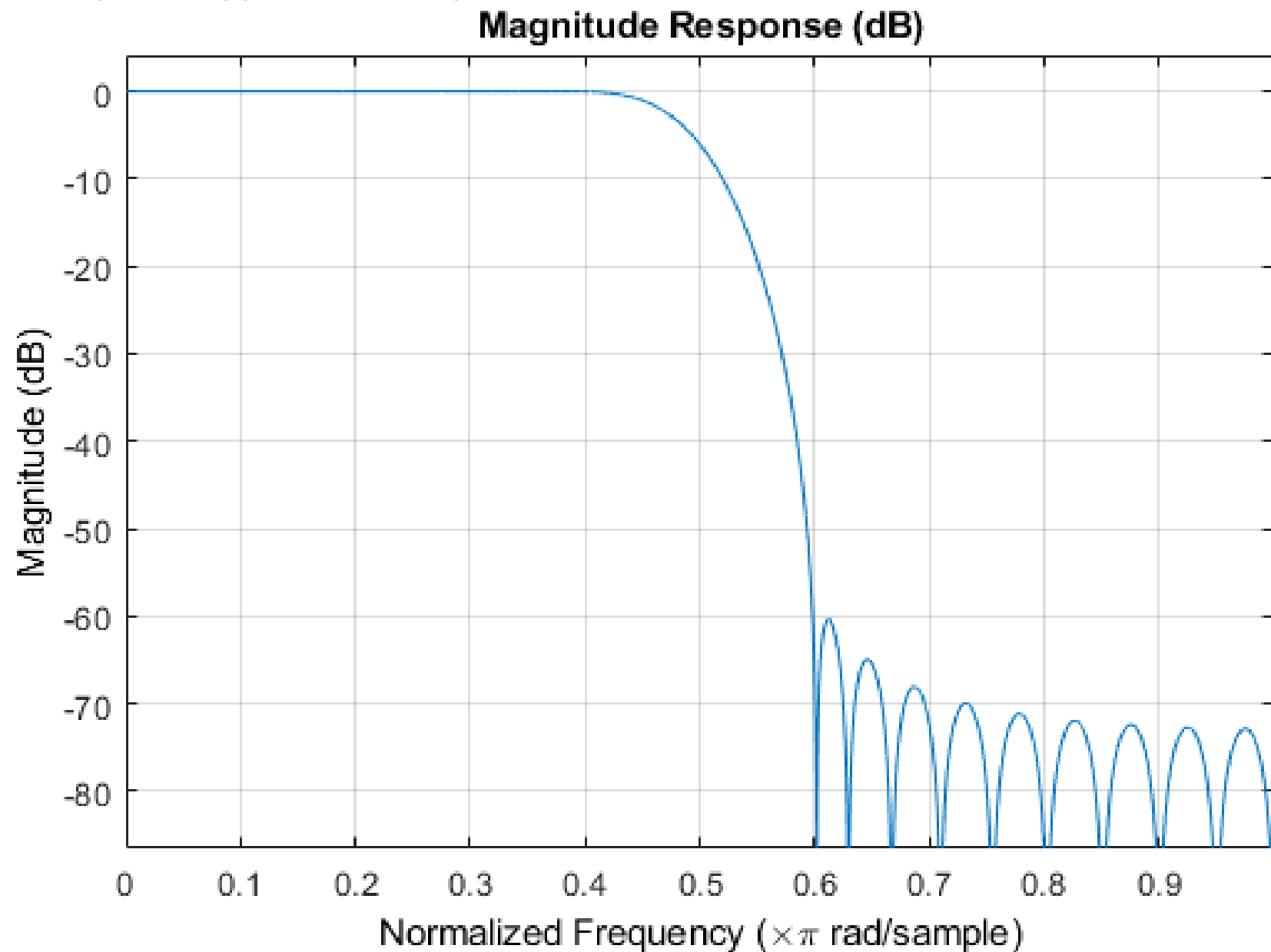
Ideal * Kaiser



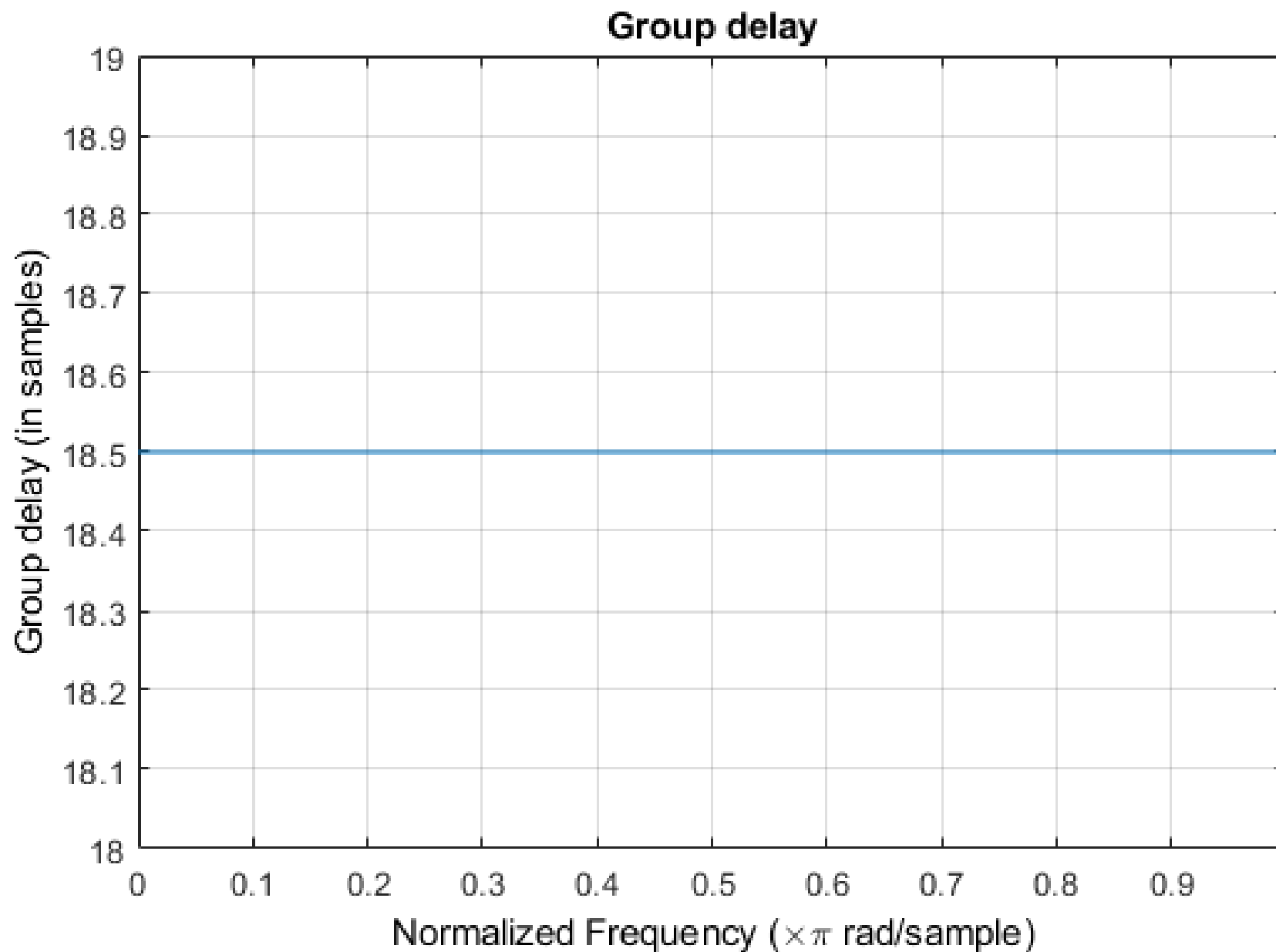
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



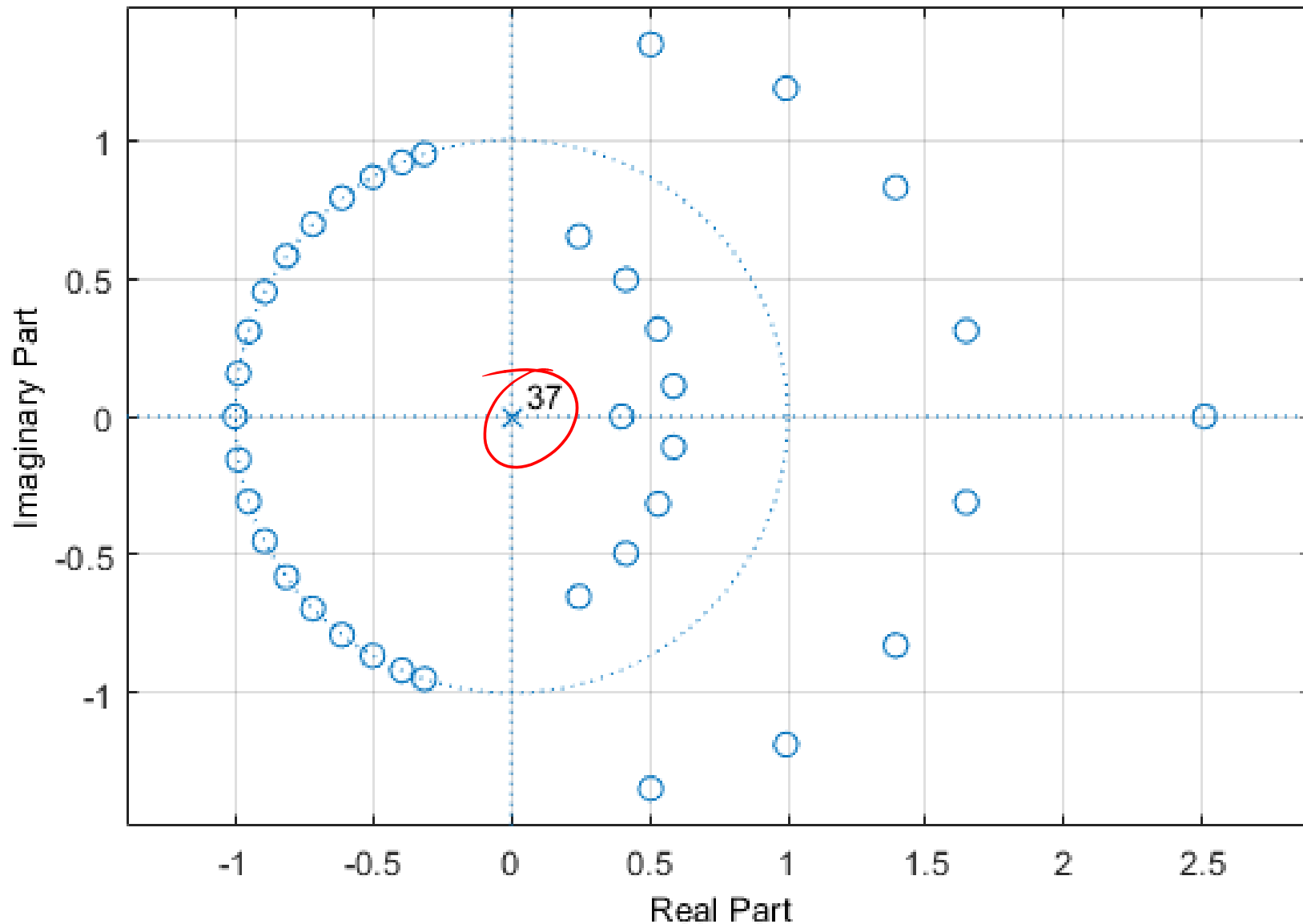
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

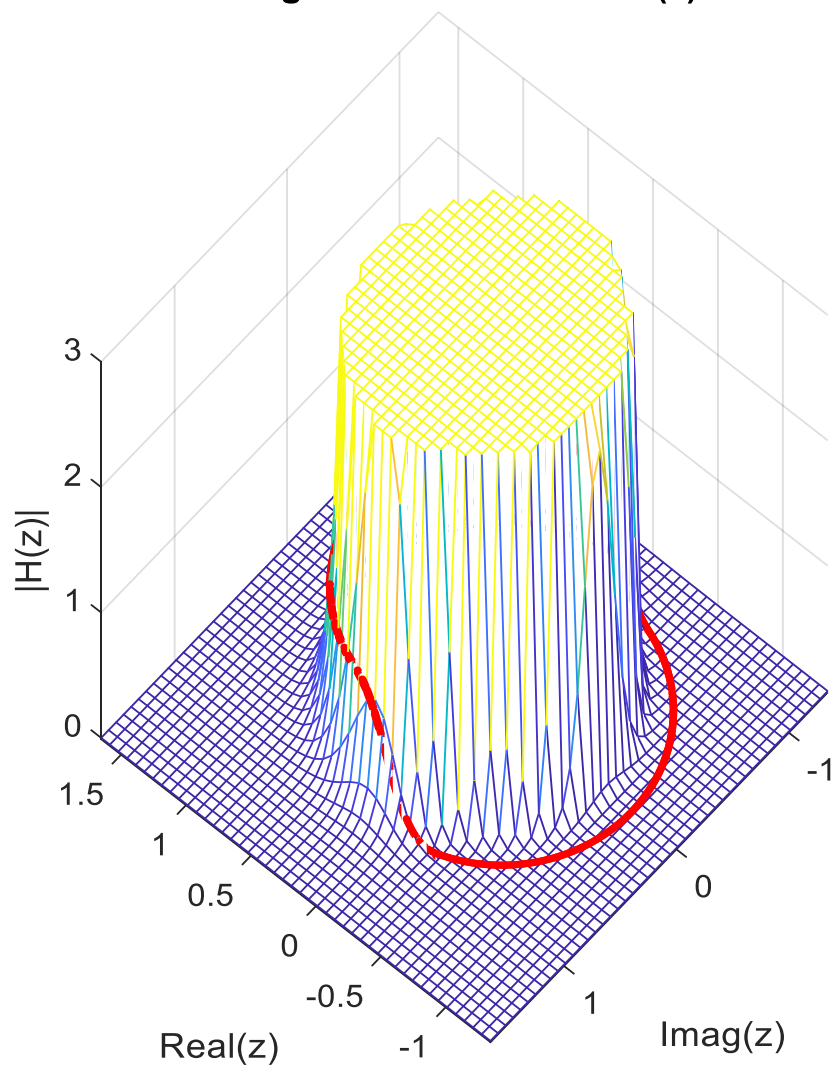
FIR

Pole/Zero Plot

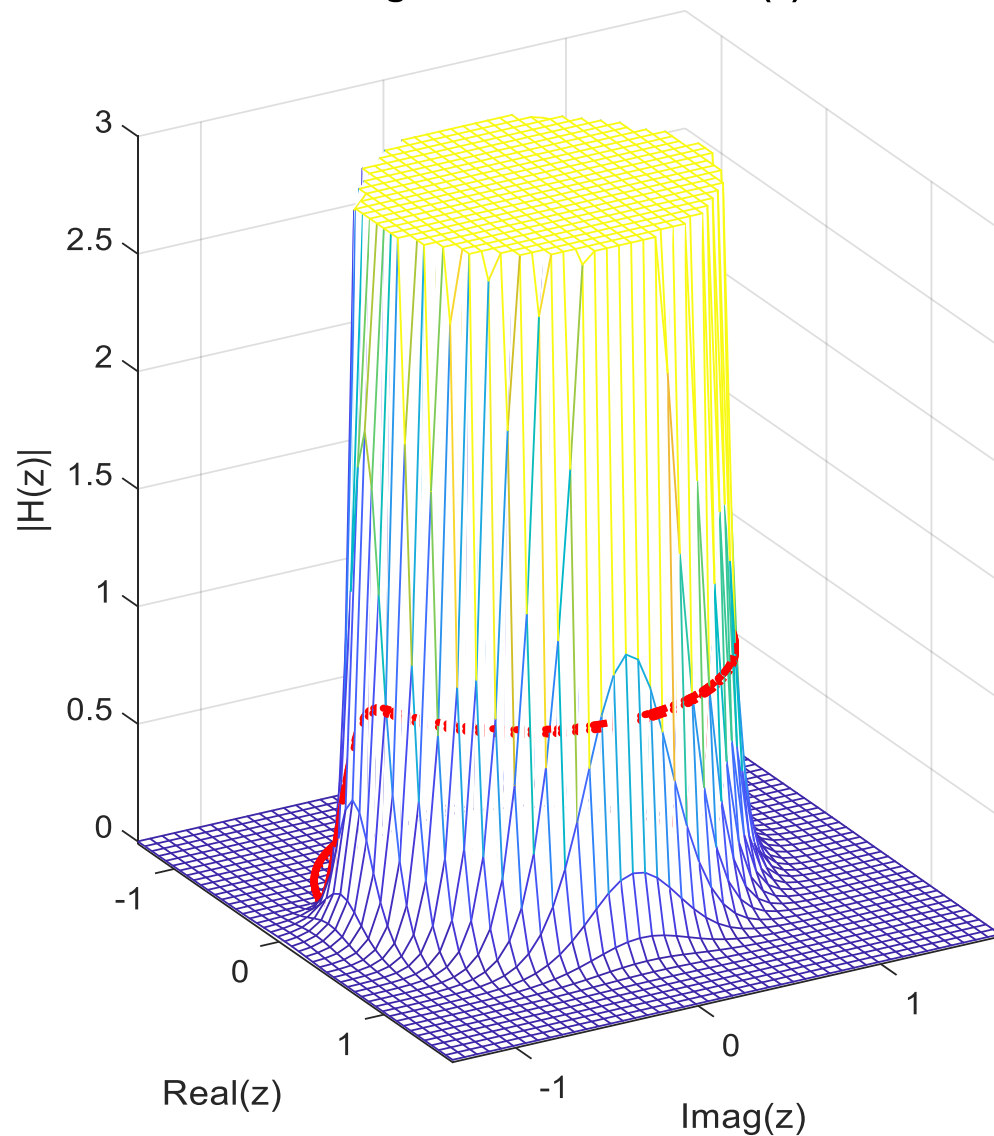


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Magnitude of function $H(z)$



Magnitude of function $H(z)$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 23^H

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{F} X(\omega) \\ (x[n]) &\xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\omega) |_{2\pi} \\ x[n]_N &\xrightarrow{\text{DFT}} X[\omega_k]_{2\pi} \\ \omega_k &= \frac{2\pi}{N} k \end{aligned}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Ο Η/Υ είναι μια μηχανή που αποθηκεύει διακριτές τιμές

- Ιδανικά θα θέλαμε να μπορούμε να επεξεργαστούμε όχι μόνο το πεδίο του χρόνου αλλά και το πεδίο της συχνότητας!

- Όμως η τελευταία είναι συνεχής μεταβλητή (ω) και μπορούμε μόνο αριθμητικά να την προσεγγίσουμε

- ...όπως κάναμε στα παραδείγματα Octave του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου

- **Ερώτημα:** τι θα συμβεί άραγε αν δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$?

- Ξέρουμε από το θεώρημα της Δειγματοληψίας του Shannon ότι δειγματοληψία στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε περιοδικότητα στον άλλο χώρο (συχνότητα)

- Γνωρίζουμε επίσης από τη θεωρία Fourier συνεχούς χρόνου ότι περιοδικότητα στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε «δειγματοληψία» στον άλλο (διακριτές συχνότητες)

- Αν τώρα δειγματοληπτήσουμε το χώρο της συχνότητας (ο οποίος είναι από τη φύση του περιοδικός!), λογικά θα πρέπει να λάβουμε ένα περιοδικό σήμα στο χώρο του χρόνου (ο οποίος είναι διακριτός)!

- Ας μιλήσουμε για όλα αυτά με περισσότερη λεπτομέρεια 😊

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Δειγματοληπτούμε N
φορές μέσα σε μια
περίοδο 2π

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία διακριτών τιμών $X[k]$ του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, δειγματοληπτώντας τον σε συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$, με $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Λόγω της περιοδικότητας του $X(e^{j\omega})$, και τα δείγματα του, $X[k]$, θα επαναλαμβάνονται κι αυτά ανά N
- Άρα έχουμε ένα **περιοδικό διακριτό φάσμα** $X[k] = X[k + N]$
 - Επιβεβαιώστε το!

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
- Τέτοια φάσματα αντιστοιχούν σε **περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου**

$$x[n] = x[n + N]$$

- Είναι λογικό, καθώς πήραμε (δειγματοληπτήσαμε σε) πεπερασμένες συχνότητες οι οποίες είναι όλες ακέραια πολλαπλάσια της $2\pi/N$
- Άρα θα υπάρχει κάποιο περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου που θα έχει ως φάσμα την περιοδική ακολουθία τιμών $X[k]$
- Ας βρούμε ποιο είναι αυτό το περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

• Η περιγραφή περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου μπορεί να περιγραφεί μέσω των Σειρών Fourier Διακριτού Χρόνου

• Θα κάνουμε μια παράκαμψη ☺

• Δεδομένου ότι θέλουμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα στο χρόνο μόνο από N δείγματα, το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου θα μετατραπεί ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \rightarrow \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \frac{2\pi}{N}$$

• Έτσι, το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτές τις N , το πλήθος, συχνότητες γράφεται ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

• Το παραπάνω αποτελεί το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου (αλλά ας κάνουμε ότι δεν το ξέρουμε ☺)

• Παρατηρήστε ότι $\hat{x}[n] = \hat{x}[n + N]$

• Πράγματι το σήμα μας είναι **περιοδικό στο χρόνο!**

• Θα το συμβολίζουμε με $x_p[n]$ ($\hat{x}[n] = x_p[n]$)

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Έστω λοιπόν

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

με $k = 0, \dots, N - 1$

- Αντικαθιστώντας το $X[k]$:

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] e^{-\frac{j2\pi kl}{N}} \right) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi k(n-l)}{N}} \right]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] d_p[n-l] \longrightarrow x[n] * d_p[n]$$

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi kn}{N}} = \begin{cases} 1, & n = lN \\ 0, & n \neq lN \end{cases}$$

- Το παραπάνω σήμα γράφεται με χρήση συναρτήσεων Δέλτα, ως

$$d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta[n - lN]$$

- Άρα το περιοδικό σήμα γράφεται ως

$$x_p[n] = x[n] * d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n - lN]$$

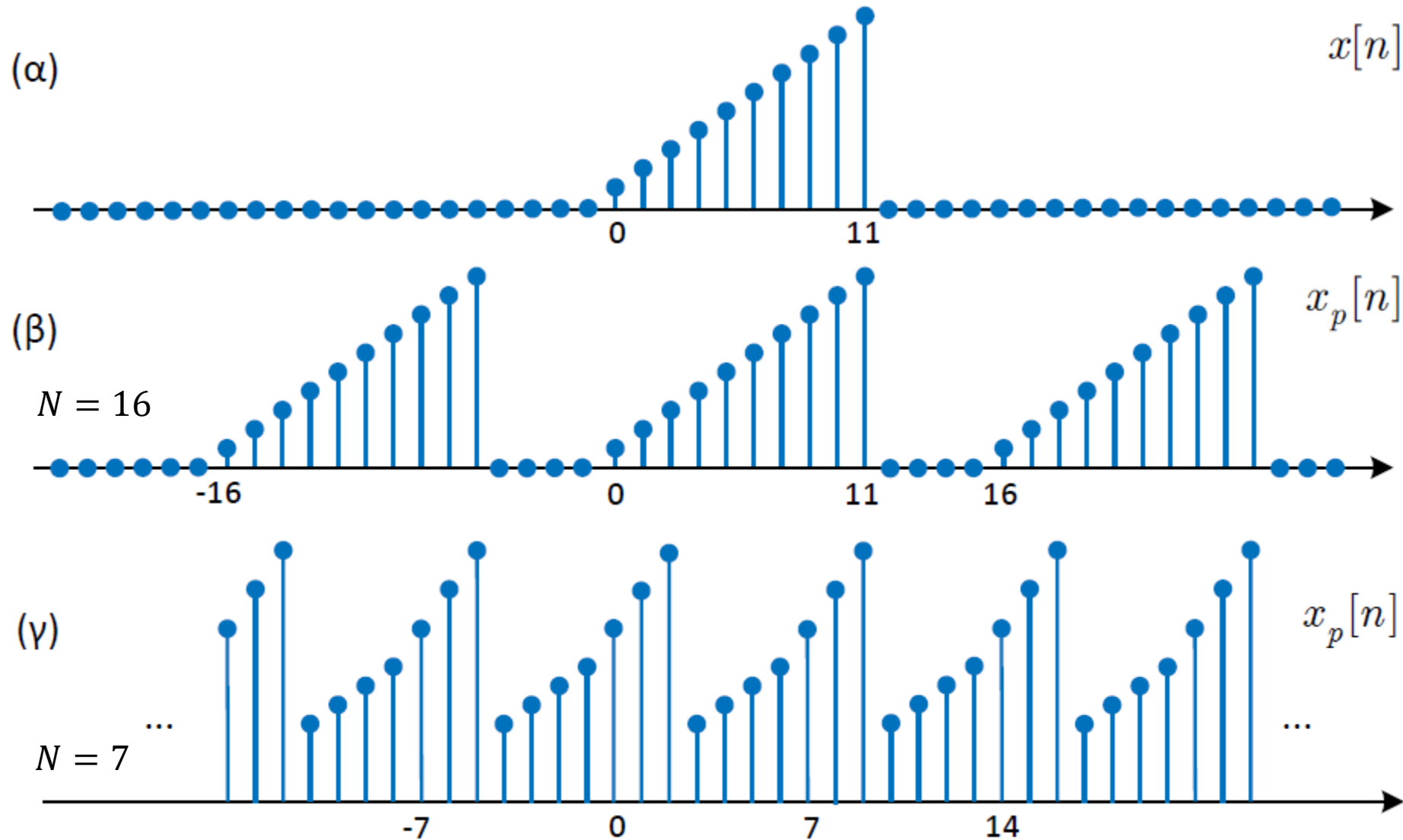
- Ξεκάθαρα 😊 βλέπουμε ότι το περιοδικό σήμα μας είναι μια επανάληψη του απεριοδικού σήματος $x[n]$ (του οποίου το μετασχ. Fourier δειγματοληπτήσαμε σε N σημεία) ανά N δείγματα, με N να αποτελεί την περίοδο του περιοδικού σήματος **αλλά και** την περίοδο δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου!! 😊

- Μπορείτε να φανταστείτε τι συμβαίνει για διάφορες τιμές του N ?

- Δηλ. ποιο περιοδικό σήμα στο χρόνο συνθέτουμε για διάφορες τιμές του N ?

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

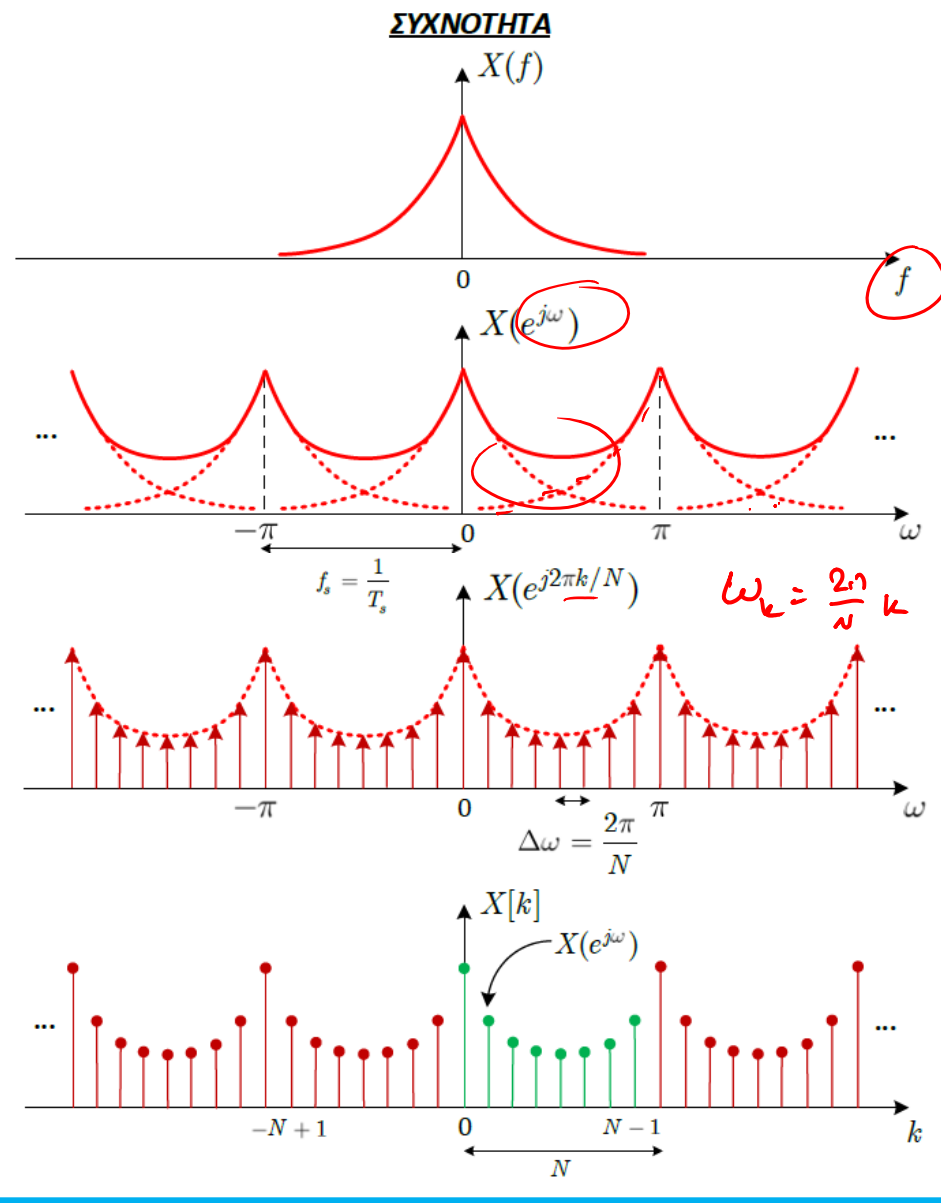
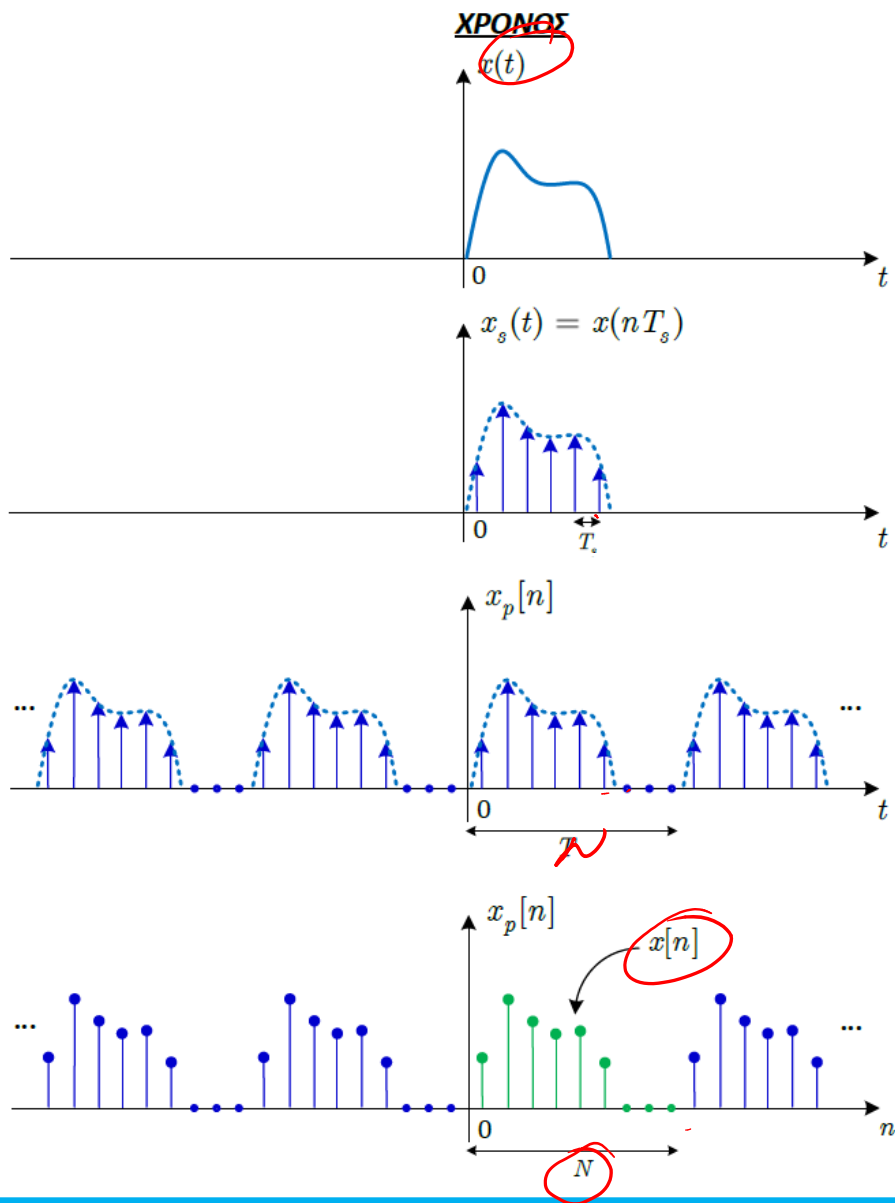
- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



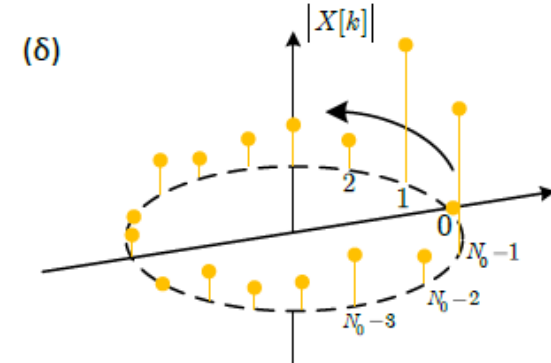
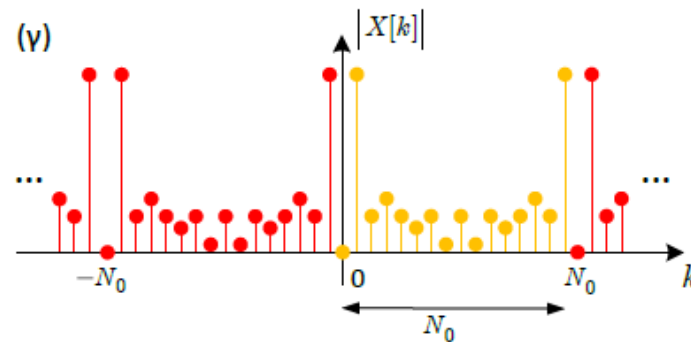
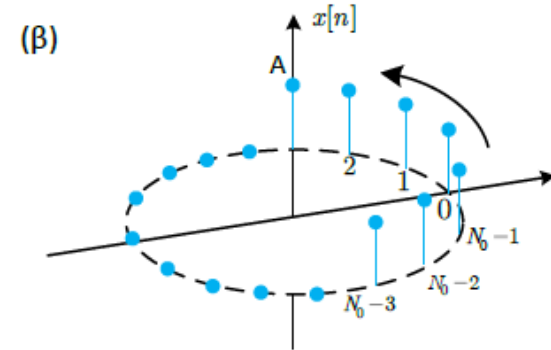
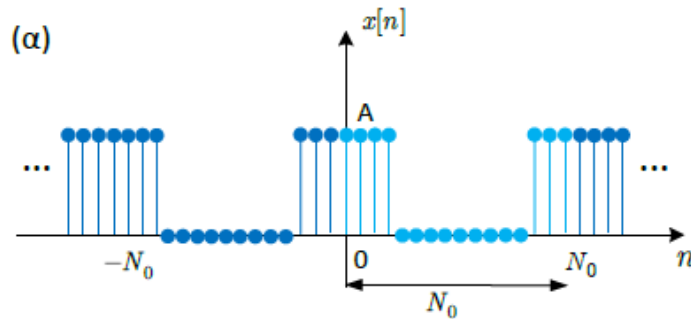
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Καταλαβαίνετε ότι μια «κακή» επιλογή του N μπορεί να οδηγήσει σε **time-aliasing**
 - ... που είναι το ακριβώς αντίστοιχο του frequency aliasing που γνωρίζετε από το θεώρημα της δειγματοληψίας
 - Επικάλυψη των γειτονικών επαναλήψεων του $x[n]$
- Μπορούμε να αποφύγουμε το time-aliasing μόνο στην περίπτωση που το σήμα $x[n]$ έχει πεπερασμένη διάρκεια
- Αν το σήμα έχει διάρκεια N_L τότε αρκεί να επιλέξουμε N τέτοιο ώστε
$$N \geq N_L$$
- Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο αυτό αν θέλουμε να συσχετίσουμε το απεριοδικό σήμα $x[n]$ με τους συντελεστές $X[k]$
- Πως το συσχετίζουμε? Απομονώνοντας μια περίοδο από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$
 - Η διάρκεια της θα είναι N
- Ας συνοψίσουμε...

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



• Διακριτός Μετασχ. Fourier:

DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$N_L \leq N$
 \uparrow
 μήκος του
 σήματος και
 σε δείγματα

• Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Είναι εμφανές ότι μπορούμε να πάρουμε το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ από τα δείγματα $X[k]$ του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier
 - Η διαδικασία μοιάζει πολύ με την ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματα του (θεώρημα δειγματοληψίας)

- Η αποκοπή μιας περιόδου από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$ το οποίο έχει τους συντελεστές Fourier $X[k]$ ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του με ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας N :

$$x[n] = x_p[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Ο μετασχ. Fourier του γινομένου ισοδυναμεί με συνέλιξη των μετασχ. Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})]$$

- Γνωρίζουμε ότι

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})]$$

με

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

- Ποιος είναι ο μετασχ. Fourier $X_p(e^{j\omega})$ του περιοδικού σήματος $x_p[n]$?
- Έχουμε ήδη εκφράσει το περιοδικό σήμα σε ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου, οπότε:

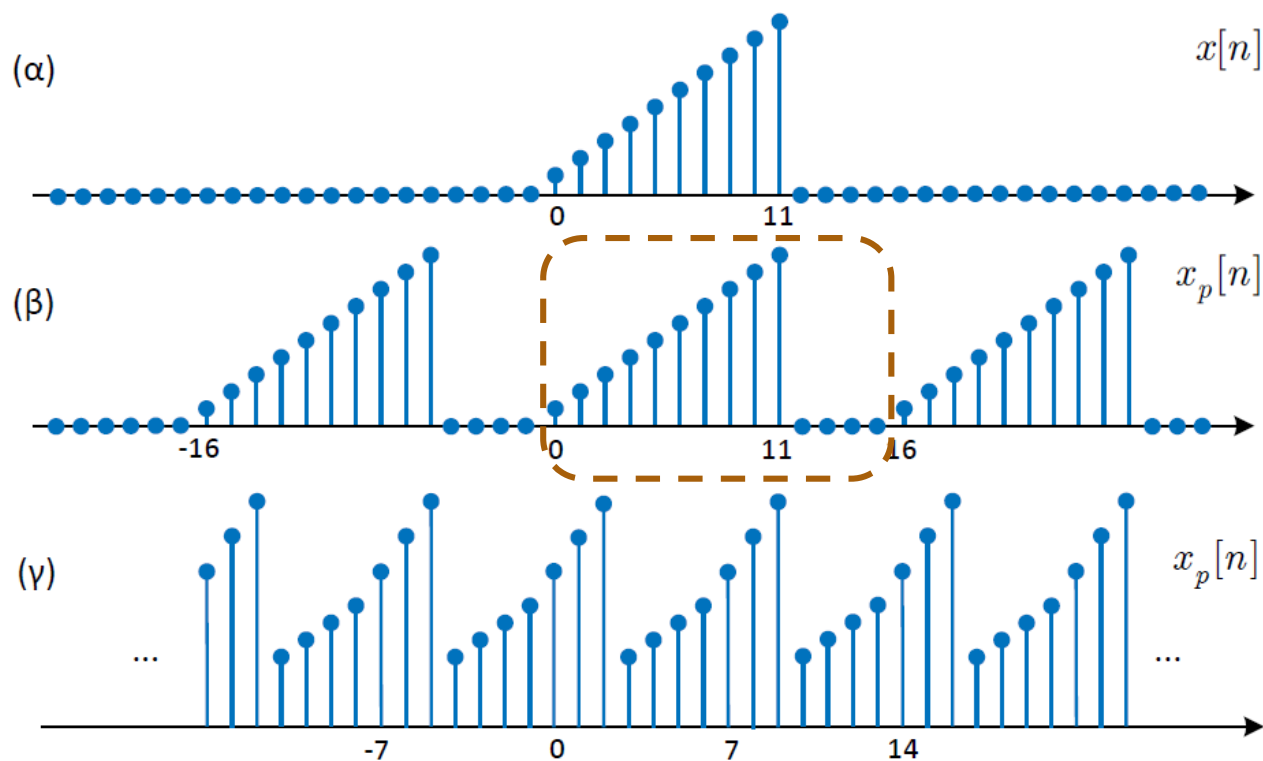
$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \leftrightarrow X_p(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

- Συνολικά:

$$\text{DTFT } X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{DFT } X[k] \frac{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2N}\right)} e^{-\frac{j(\omega - \frac{2\pi k}{N})(N-1)}{2}}$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Δεδομένου ότι τηρούμε τον περιορισμό για $N \geq N_L$, ίσως σκεφτείτε ότι για αρκετά μεγάλη επιλογή του N , τα δείγματα του Διακριτού Μετασχ. Fourier θα είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που θα μπορούμε να έχουμε μια καλή προσέγγιση του φάσματος του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου
- Αυτό είναι προφανώς σωστή σκέψη! Αλλά σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο Διακριτός Μετασχ. Fourier με τα «παραπανίσια» δείγματα?



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Εύκολα μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι για $N > N_L$, έχουμε το περίφημο **zero-padding** στο πεδίο του χρόνου
 - Εμφανίζονται μηδενικά μετά το τέλος του σήματος. Πόσα όμως?
 - Όσα και τα «παραπανίσια» δείγματα (σε σχέση με τη διάρκεια του αperiοδικού σήματος) που πήραμε κατά τη δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας
- Το zero-padding στο χρόνο προσφέρει απλώς ένα Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier που είναι πιο «ευπαρουσίαστος» (πλησιάζει περισσότερο σαν γραφική παράσταση στο Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου)
- Το zero-padding **ΔΕΝ** προσθέτει καμιά επιπλέον πληροφορία για το σήμα
 - Άλλωστε απλώς βάζουμε μηδενικά στο τέλος του...
- Είναι κοινό λάθος να θεωρείται πως το zero-padding «βελτιώνει την ανάλυση του Διακριτού Μετασχ. Fourier»
- Ανάλυση σημαίνει διακριτική ικανότητα, κάτι που δε συμβαίνει με το zero-padding
- Ο λόγος αυτής της παρανόησης οφείλεται εν πολλοίς σε παραδείγματα όπως το παρακάτω

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Έστω ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \leftrightarrow \underline{W(e^{j\omega})} = \frac{\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j3\omega}{2}}$$

- Ας υπολογίσουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier για διάφορες τιμές του N και ας συγκρίνουμε με το φάσμα (πλάτους και φάσης) του $W(e^{j\omega})$

- Ενδεικτικός κώδικας:

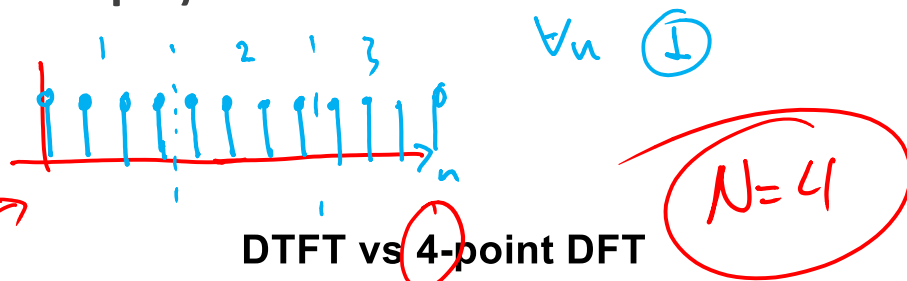
```
x = ones(1,4); → ω
% N-point FFTs
X1 = fft(x, 4); N = NL
X2 = fft(x, 8); N > NL
X3 = fft(x, 64);
k1 = (0:3)*2*pi/4;
k2 = (0:7)*2*pi/8;
k3 = (0:63)*2*pi/64;
% DTFT
w = linspace(0, 2*pi, 1200);
DTFT = (sin(2*w) ./ sin(w/2)) .* exp(-1i*3*w/2);
% Magnitudes
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k1, abs(X1), 'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k2, abs(X2), 'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k3, abs(X3), 'r');
% Phases
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k1, angle(X1), 'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k2, angle(X2), 'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k3, angle(X3), 'r');
```

$N_L = 4$
 $N = 8$
 $N = 64$

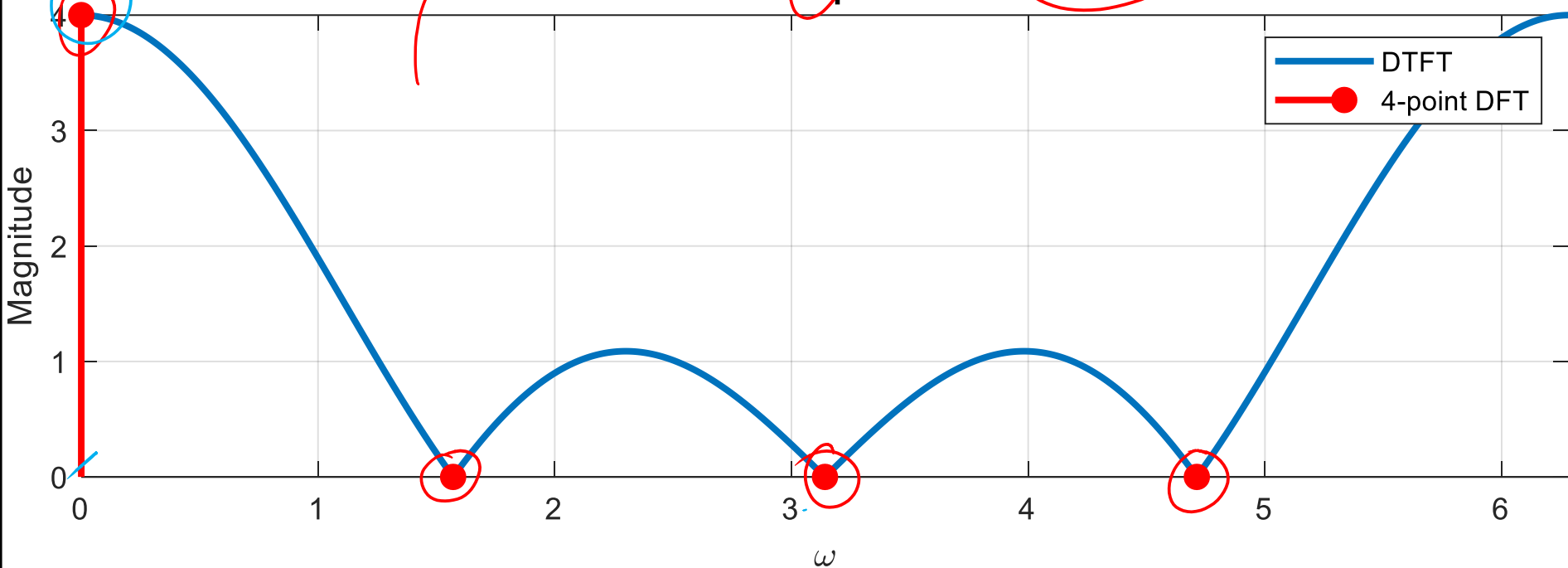
\rightarrow DFT

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα πλάτους

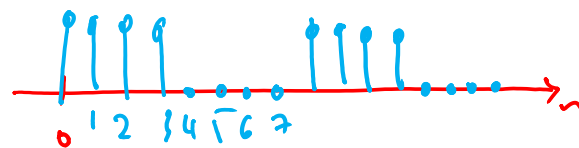


DTFT vs 4-point DFT

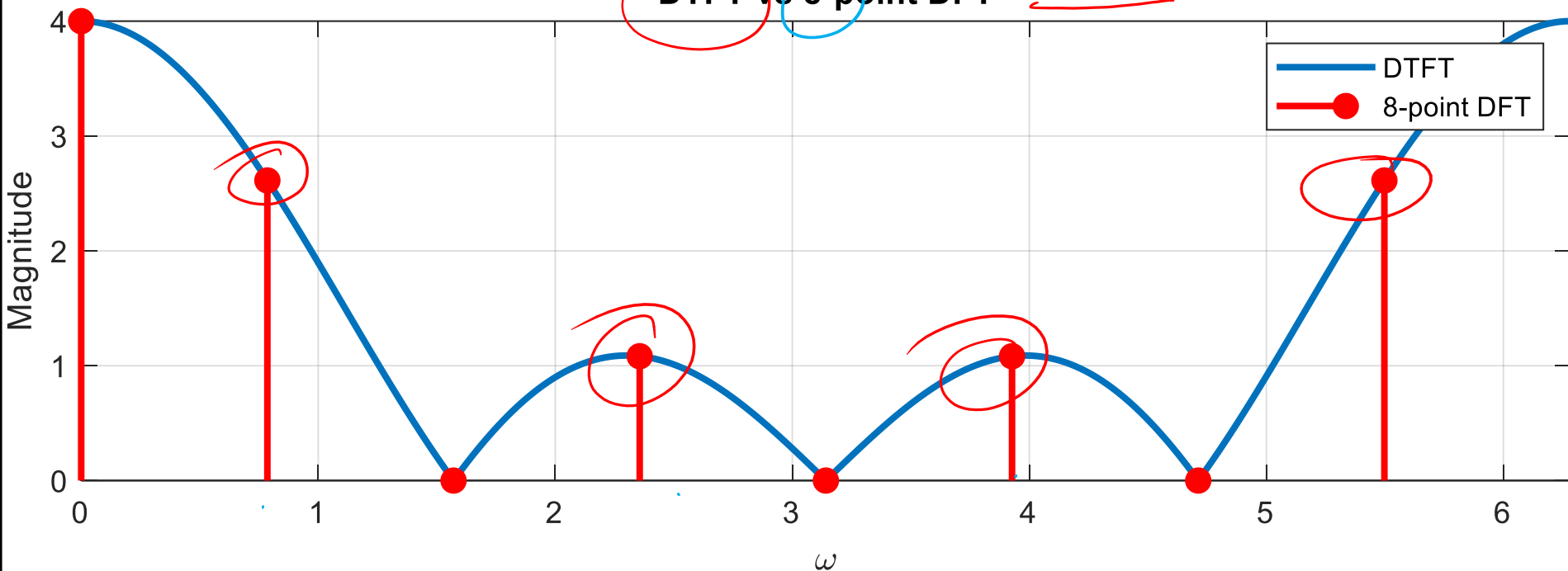


- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα πλάτους

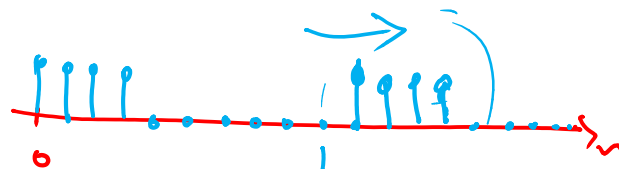


DTFT vs 8-point DFT

 $N=8$ 

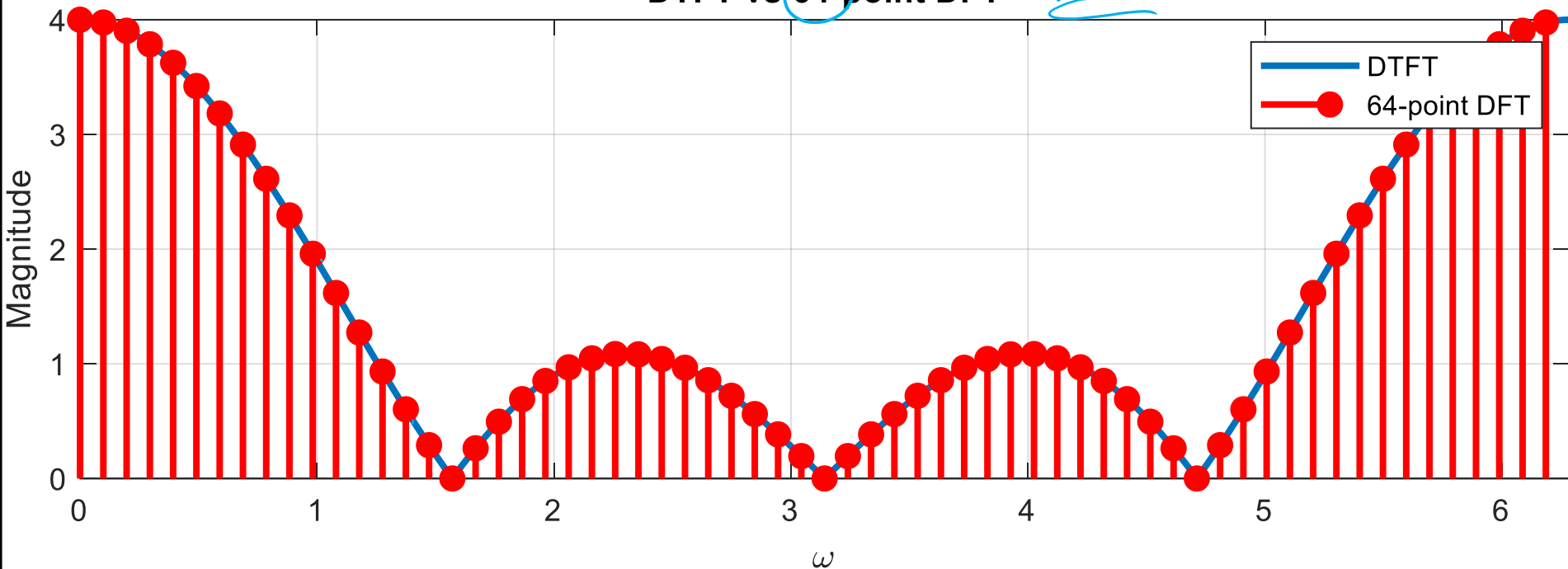
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα πλάτους



DTFT vs 64-point DFT

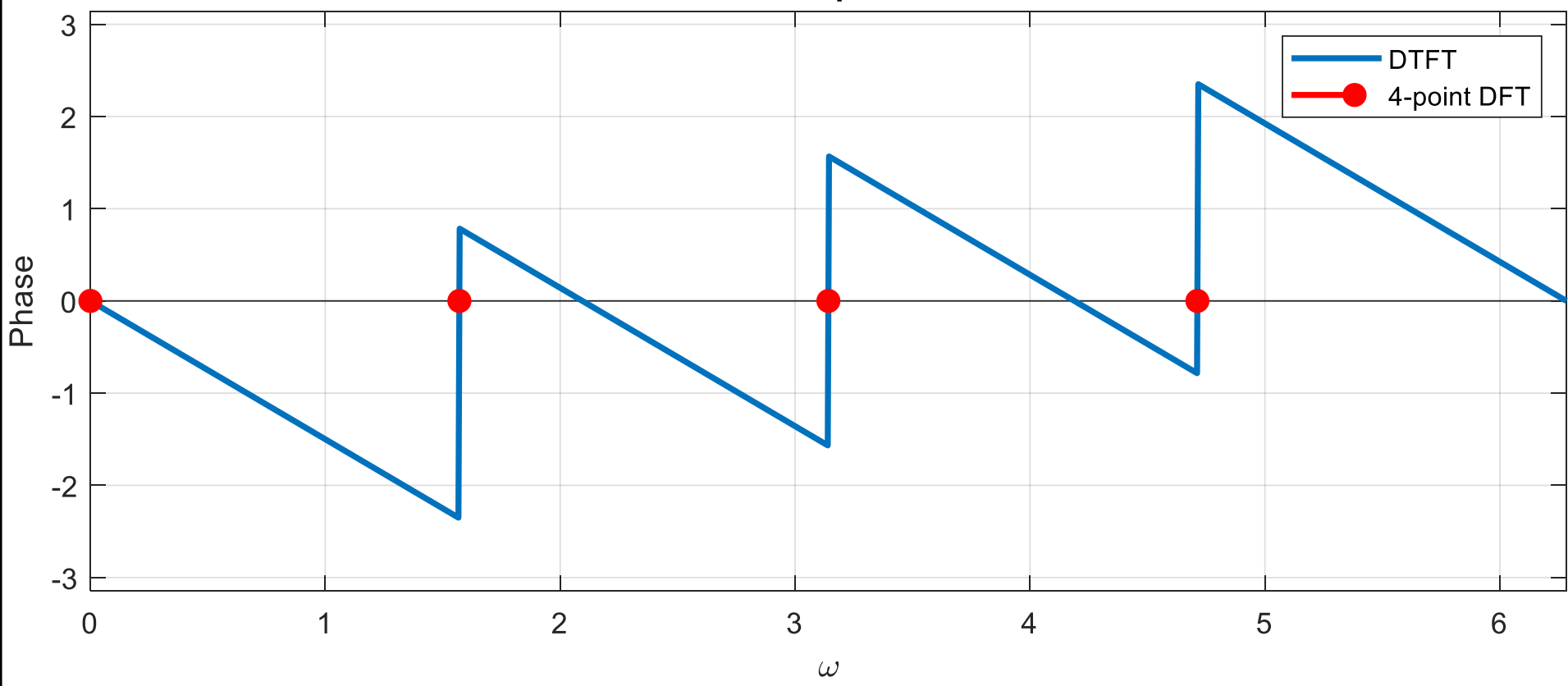
$N=64$



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα φάσης

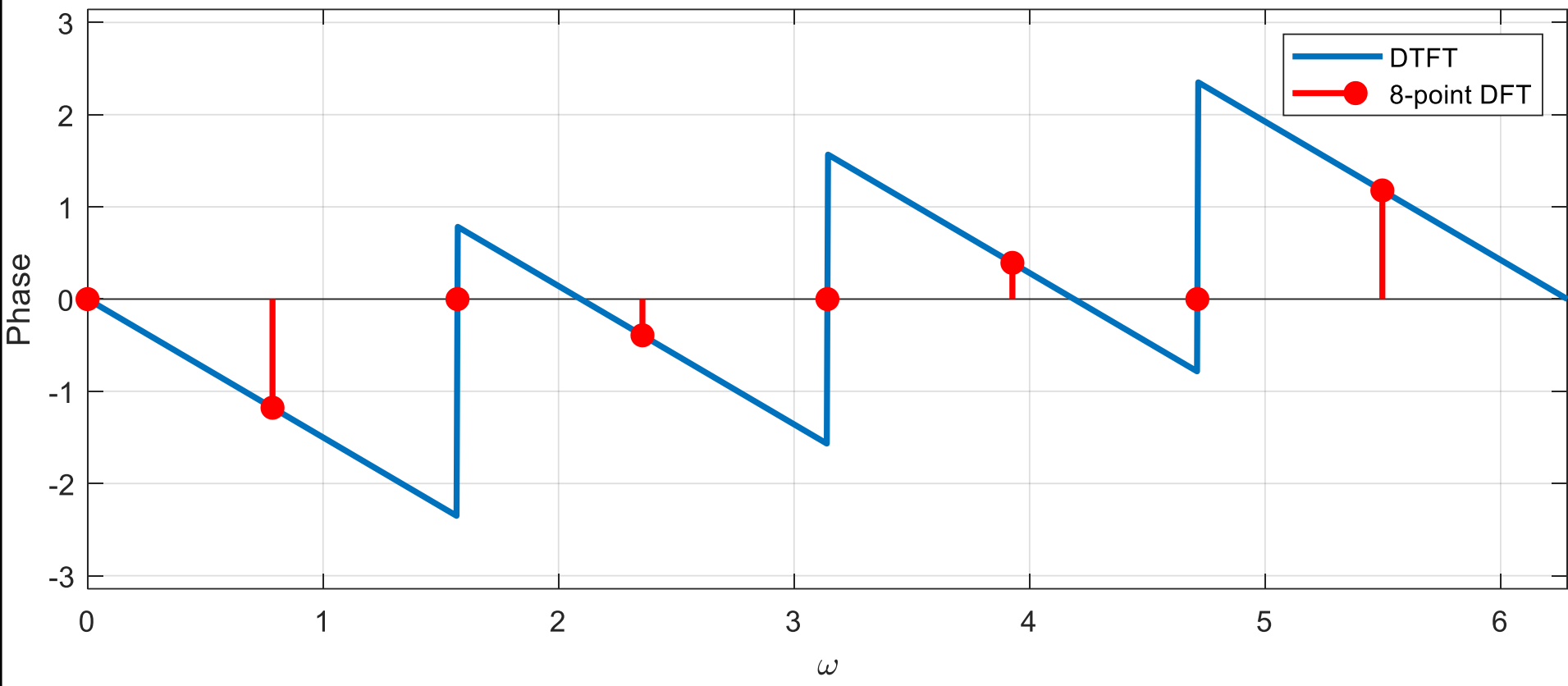
DTFT vs 4-point DFT



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα φάσης

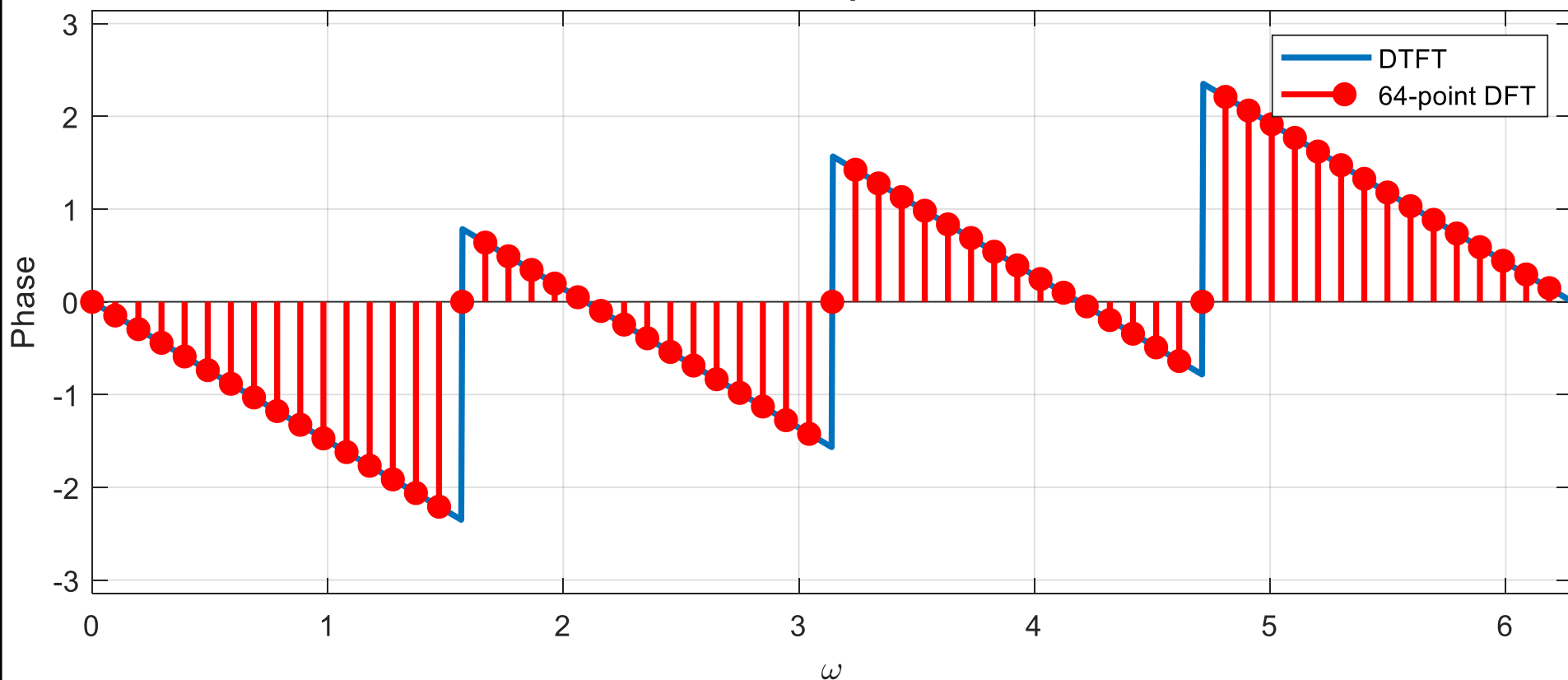
DTFT vs 8-point DFT



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

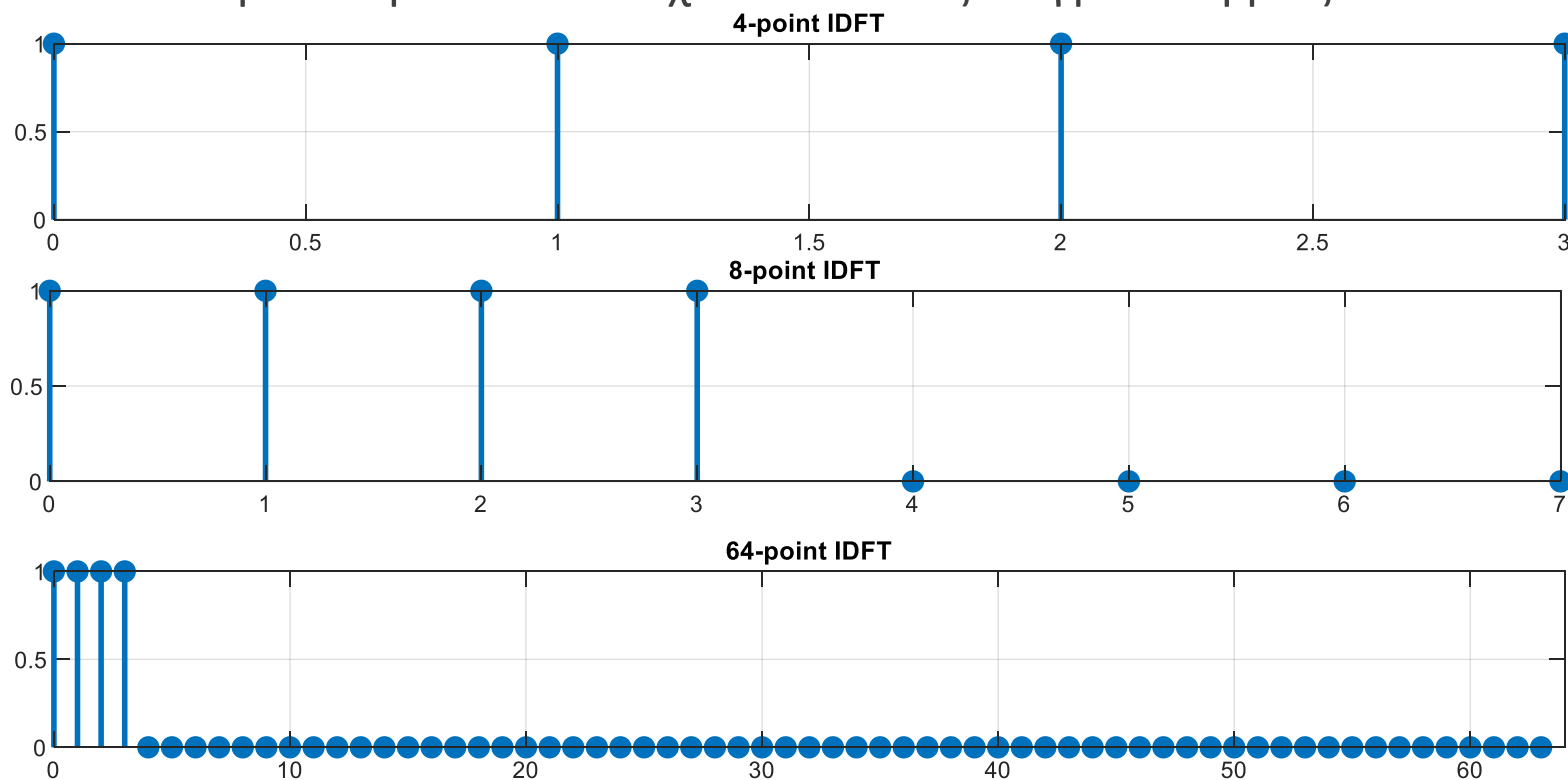
Φάσμα φάσης

DTFT vs 64-point DFT



• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Παρατηρήσατε ότι τα περισσότερα σημεία του Διακριτού Μετασχ. Fourier μας δίνουν πράγματι καλύτερη εικόνα για το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου
- Έχουμε δηλ. πιο **πυκνή** δειγματοληψία του $X(e^{j\omega})$ για μεγάλα N
- Ποια σήματα στο χρόνο (**βασικές περιόδους** του περιοδικού σήματος) αντιστοιχούν μέσω του Αντίστρ. Διακριτού Μετασχ. Fourier στις δειγματοληψίες που είδατε πριν?



- Θα επανέλθουμε αργότερα στο θέμα της ανάλυσης (διακριτικής ικανότητας)

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Η εγγενής περιοδικότητα του Διακριτού Μετασχ. Fourier οδηγεί σε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά το σήμα στο χρόνο αλλά και στη συχνότητα

Ιδιότητες Διακριτού Μετασχ. Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Διακριτός Μετασχ. Fourier
	$x[n]$ με διάρκεια N $y[n]$ με διάρκεια N	$X[k]$ $Y[k]$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX[k] + BY[k]$
Χρονική μετατόπιση	$x[((n - n_0))_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi Mn/N} x[n]$	$X[(k - M)_N]$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[(-n)_N]$	$X^*[(-k)_N]$
Δυϊκότητα	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
Συνέλιξη	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n - m)_N]$	$X[k]Y[k]$
Πολλαπλασιασμός	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X[l]Y[(k - l)_N]$
Συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X[k] = X^*[(-k)_N], \\ \text{Re}\{X[k]\} = \text{Re}\{X[(-k)_N]\}, \\ \text{Im}\{X[k]\} = -\text{Im}\{X[(-k)_N]\}, \\ X[k] = X[(-k)_N] , \\ \angle X[k] = -\angle X[(-k)_N] \end{cases}$
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] ^2$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Η εγγενής περιοδικότητα του Διακριτού Μετασχ. Fourier οδηγεί σε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά το σήμα στο χρόνο αλλά και στη συχνότητα

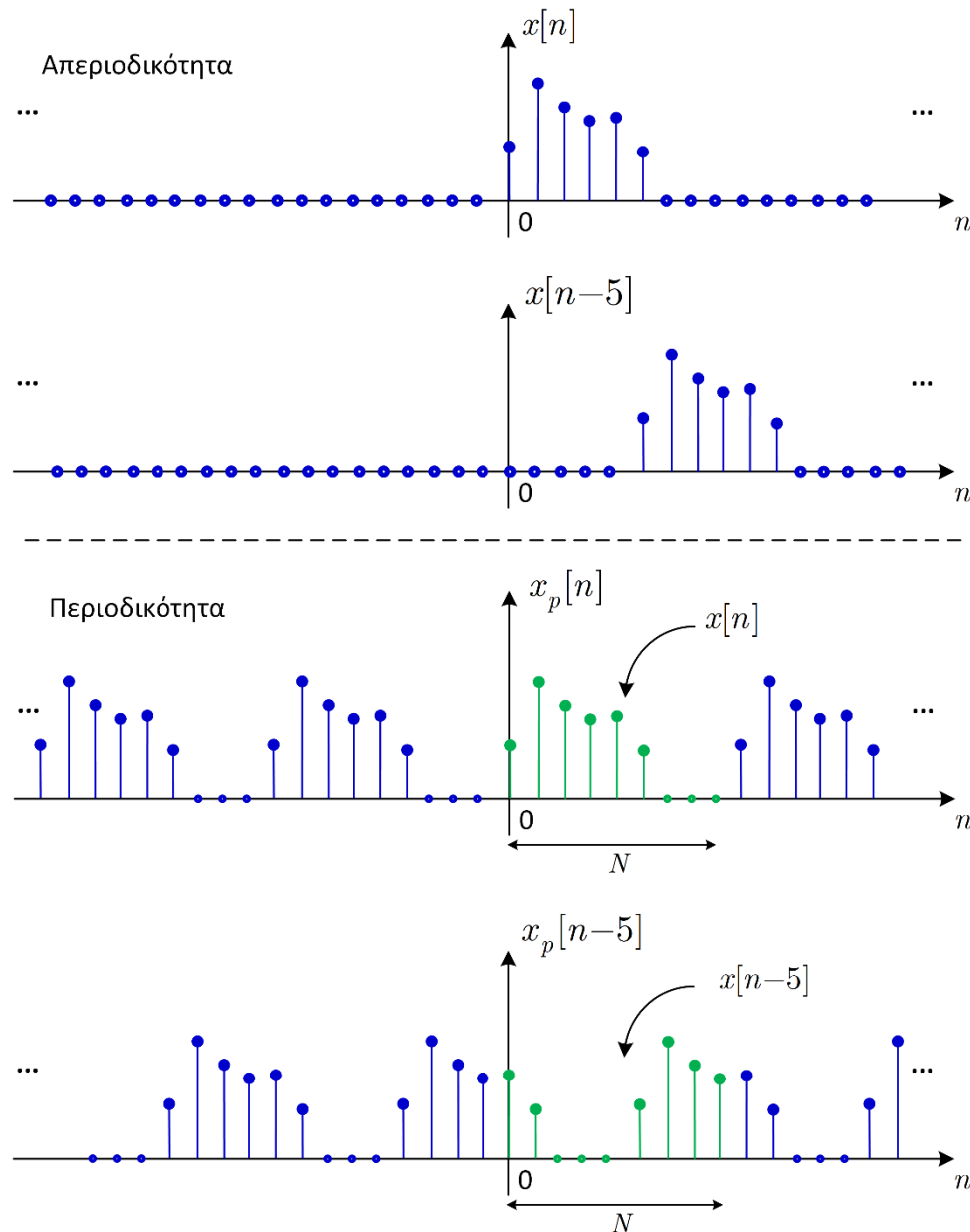
Χρονική μετατόπιση

$$x[((n - n_0))_N]$$



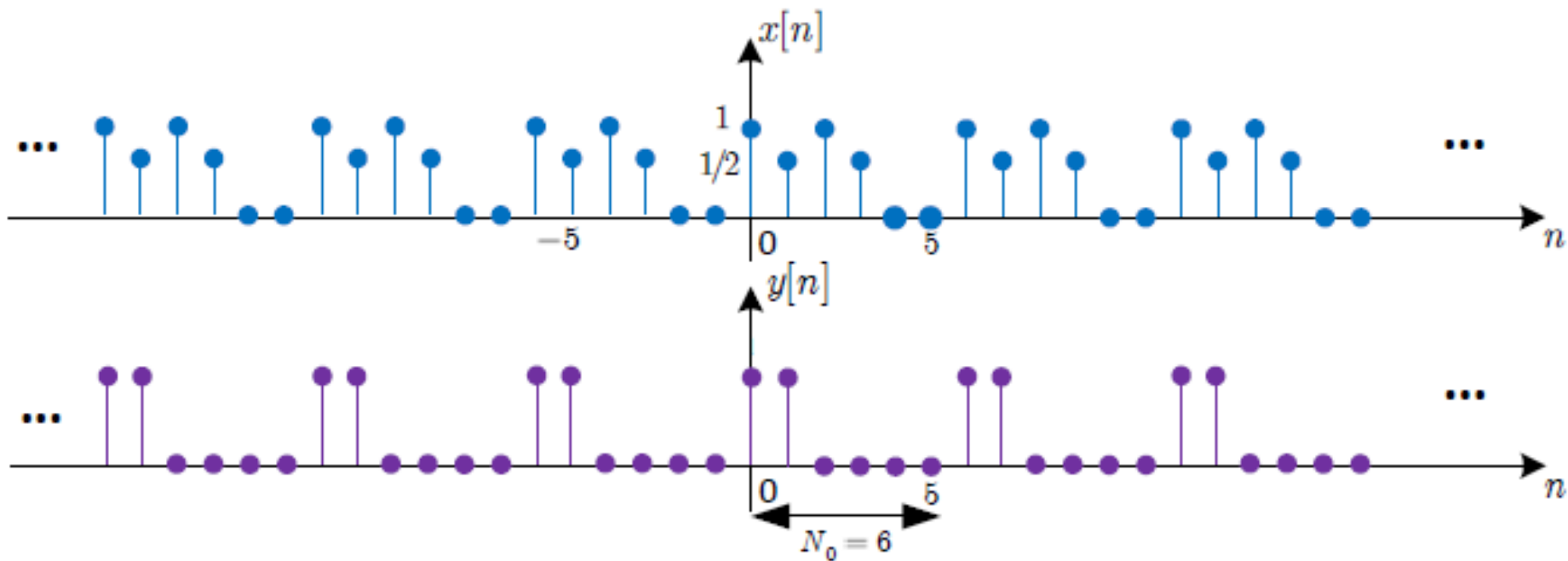
$$X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}$$

- Δείτε πως εννοείται η χρονική μετατόπιση για το Διακριτό Μετασχ. Fourier
- Οι πράξεις γίνονται modulo N !!
- Παρόμοιο συμβαίνει και στη συχνотική μετατόπιση



• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

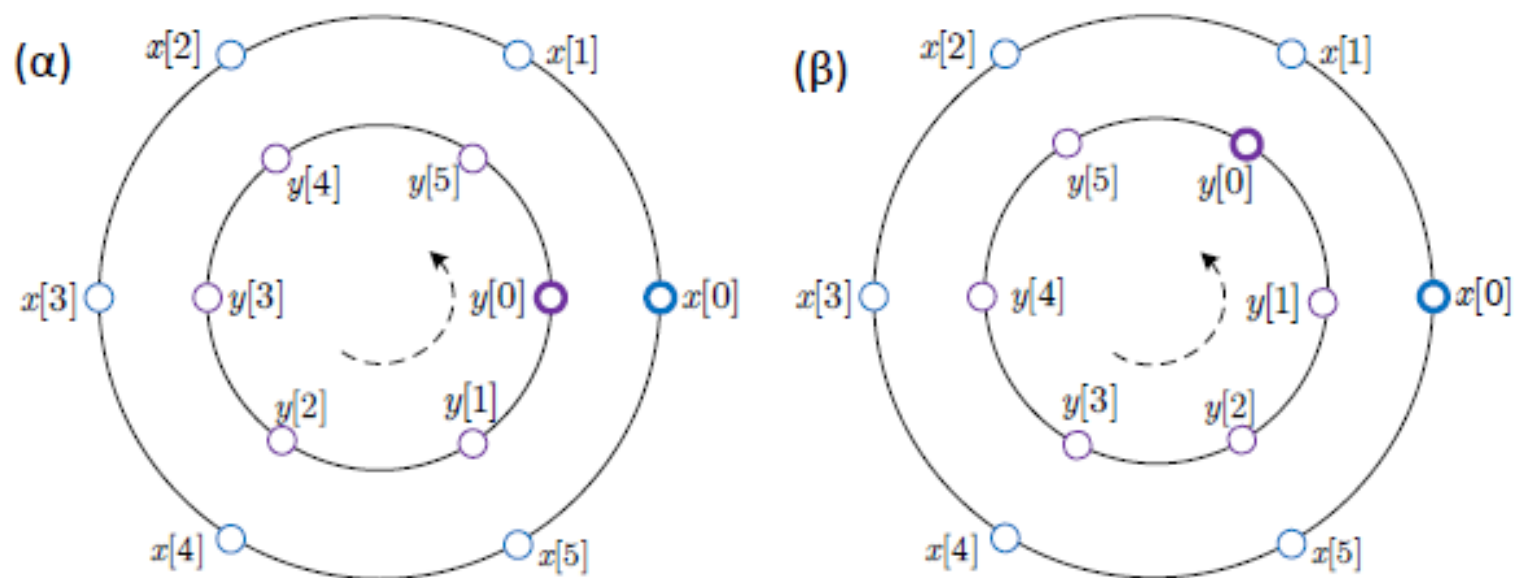
- Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση της **συνέλιξης**, η οποία είναι τεράστιας σημασίας στην ανάλυση Fourier
- Η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο $y[n] = x[n] \circledast h[n]$, ως πράξη αντίστροφου Διακριτού μετασχ. Fourier του γινομένου δυο φασμάτων $Y[k] = X[k]H[k]$, ονομάζεται **κυκλική συνέλιξη**
- Για παράδειγμα, έστω δυο περιοδικά σήματα που θέλουμε να βρούμε την κυκλική συνέλιξη τους, όπως αυτά στο σχήμα



• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$x[n] = \{1, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



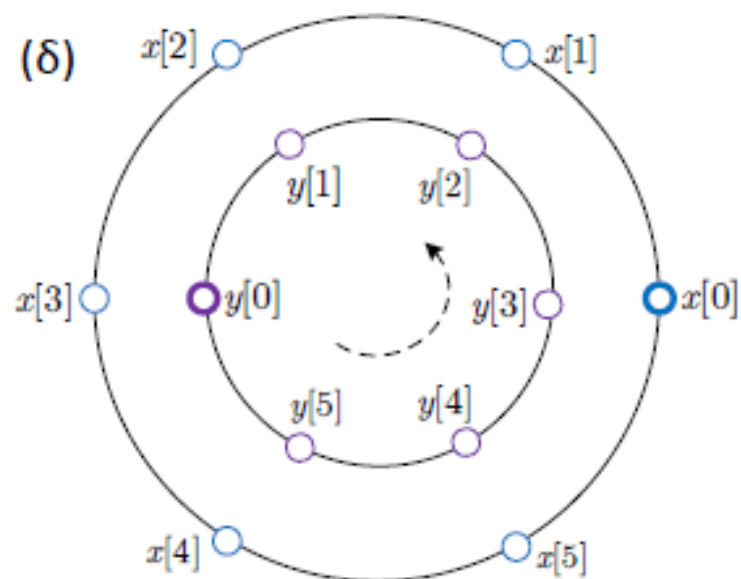
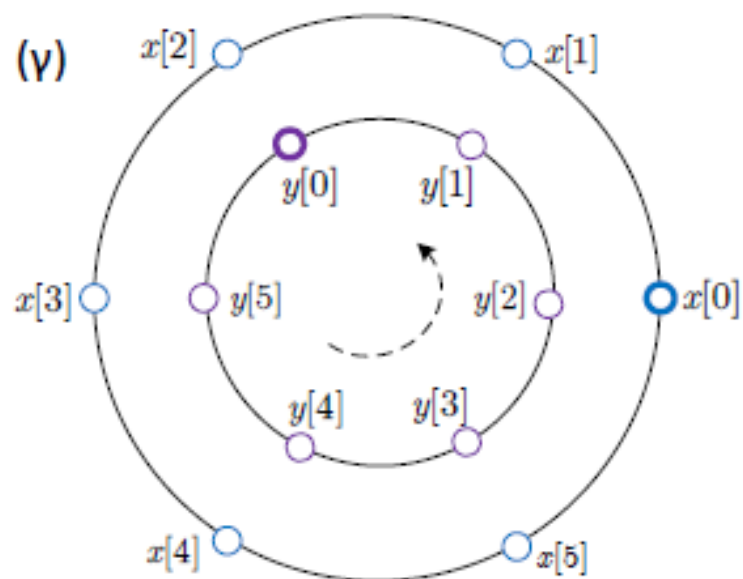
$$(\alpha') \quad z[0] = y[0]x[0] + y[5]x[1] + y[4]x[2] + y[3]x[3] + y[2]x[4] + y[1]x[5] = 1$$

$$(\beta') \quad z[1] = y[1]x[0] + y[0]x[1] + y[5]x[2] + y[4]x[3] + y[3]x[4] + y[2]x[5] = \frac{3}{2}$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$x[n] = \{1, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



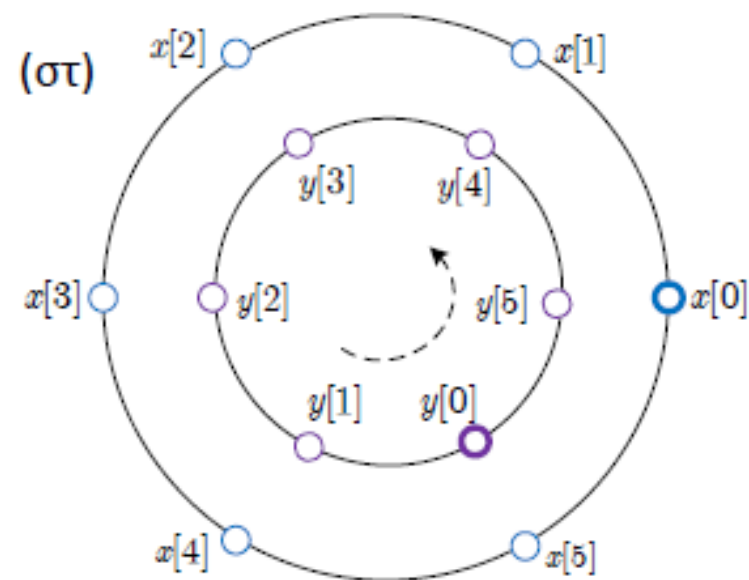
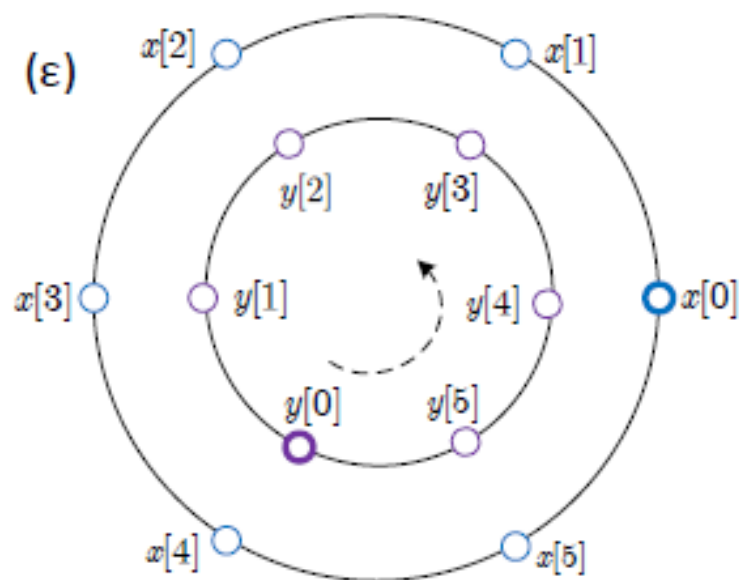
$$(\gamma') \quad z[2] = y[2]x[0] + y[1]x[1] + y[0]x[2] + y[5]x[3] + y[4]x[4] + y[3]x[5] = \frac{3}{2}$$

$$(\delta') \quad z[3] = y[3]x[0] + y[2]x[1] + y[1]x[2] + y[0]x[3] + y[5]x[4] + y[4]x[5] = \frac{3}{2}$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$x[n] = \{1, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



$$(\epsilon') \quad z[4] = y[4]x[0] + y[3]x[1] + y[2]x[2] + y[1]x[3] + y[0]x[4] + y[5]x[5] = \frac{1}{2}$$

$$(\sigma') \quad z[5] = y[5]x[0] + y[4]x[1] + y[3]x[2] + y[2]x[3] + y[1]x[4] + y[0]x[5] = 0$$

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Εμάς όμως μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η απλή (**γραμμική**) συνέλιξη μεταξύ απεριοδικών σημάτων!
- Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη συνέλιξη από την κυκλική συνέλιξη?
- Θυμηθείτε ότι η ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης μας λέει ότι αν ένα απεριοδικό σήμα $x[n]$ έχει «διάρκεια» M δείγματα ($0 \leq n \leq M - 1$), και ένα άλλο απεριοδικό σήμα $y[n]$ έχει «διάρκεια» N δείγματα ($0 \leq n \leq N - 1$), τότε η συνέλιξη τους $c_{xy}[n]$ έχει «διάρκεια» $M + N - 1$ ($0 \leq n \leq M + N - 2$)
- Άρα μπορούμε να απομονώσουμε το αποτέλεσμα της **γραμμικής** συνέλιξης από την κυκλική αν «κόψουμε» το κομμάτι της κυκλικής συνέλιξης στο ($0 \leq n \leq M + N - 2$)!
- Βασική προϋπόθεση για να ισχύει αυτό είναι να έχουμε δειγματοληπτήσει το Μετασχ. Fourier $C_{xy}(e^{j\omega})$ σε $L \geq M + N - 1$ σημεία, δηλ. να έχουμε υπολογίσει το Διακριτό Μετασχ. Fourier **τουλάχιστον** ($M + N - 1$) σημείων!
 - Αποφεύγουμε το time aliasing
- Έτσι, έχουμε έναν έτοιμο και γρήγορο αλγόριθμο για τον υπολογισμό της συνέλιξης δυο απεριοδικών σημάτων μέσω του Διακριτού Μετασχ. Fourier!

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Γραμμική συνέλιξη δυο απεριοδικών σημάτων $x[n]$, $y[n]$ διάρκειας M και N μέσω DFT:

1. Κάνουμε zero padding στα δυο σήματα ώστε να έχουν διάρκεια τουλάχιστον

$$L = M + N - 1$$

2. Εφαρμόζουμε Διακριτό Μετασχ. Fourier L σημείων στα δυο σήματα $\rightarrow X[k], Y[k]$

3. Πολλαπλασιάζουμε τους Διακριτούς μετασχ. Fourier μεταξύ τους: $X[k]Y[k]$

4. Εφαρμόζουμε αντίστροφο Διακριτό Μετασχ. Fourier και κρατάμε L δείγματα του αποτελέσματος

- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Random signals of N = 6
x = randn(1, 6);
h = randn(1, 6);
n = 0:5;
% Plotting
figure;
subplot(211); stem(n, x); subplot(212); stem(n,h);
% Convolution length
ConvLenMin = 11;
```

```
% Zero-padding
xzp = [x zeros(1, ConvLenMin-length(x))];
hzp = [h zeros(1, ConvLenMin-length(h))];
% Taking DFT (default, @ N points)
X = fft(xzp);
H = fft(hzp);
% Multiply
Y = X.*H;
% Inverse DFT (circular convolution)
yzp = ifft(Y);
% Linear Convolution
y = conv(x, h);
% Plotting
figure; subplot(211); stem(0:10, yzp);
subplot(212); stem(0:10, y);
```

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

