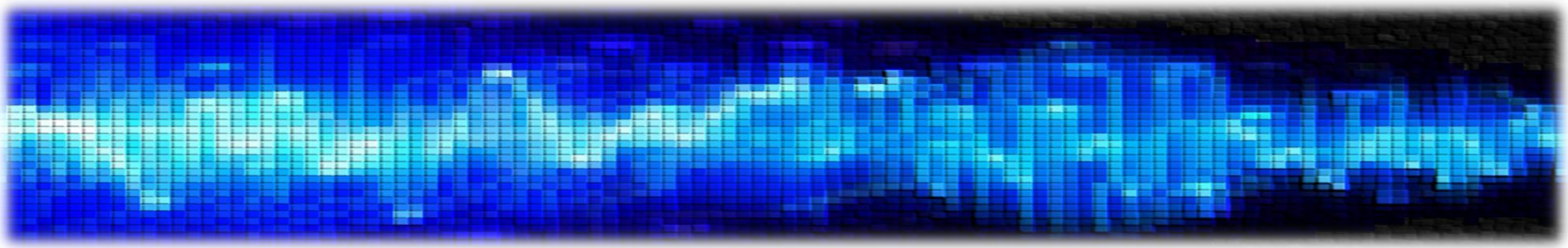
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 17Η



- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα (επανάληψη…)**

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

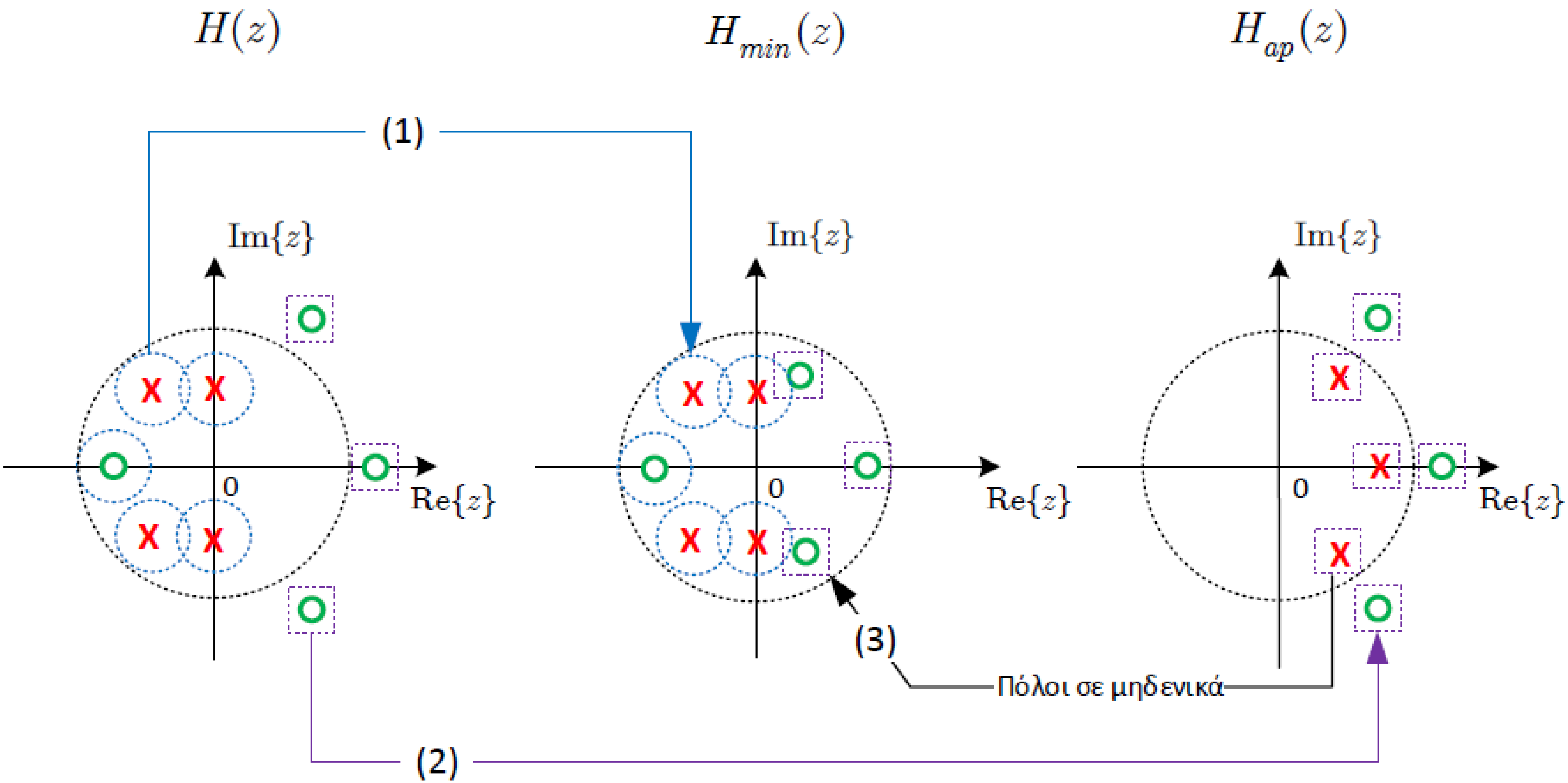
Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρισκονται εκτος του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει ειναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.

2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτριζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.

3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα (επανάληψη…)**



- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Συστήματα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου

- Εναλλακτικά, συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα

- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ελάχιστης φάσης?

- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους

- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right) \leq 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

  τότε **το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές** από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Κατά συνέπεια

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = \mathrm{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] > 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] > \mathrm{grd}[H_{min}(e^{j\omega})]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Μπορεί να δειχθεί ότι η κρουστική απόκριση $h_{min}[n]$ ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση ***μερικής ενέργειας***

$$E(n) \leq E_{min}(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |h_{min}[k]|^2$$

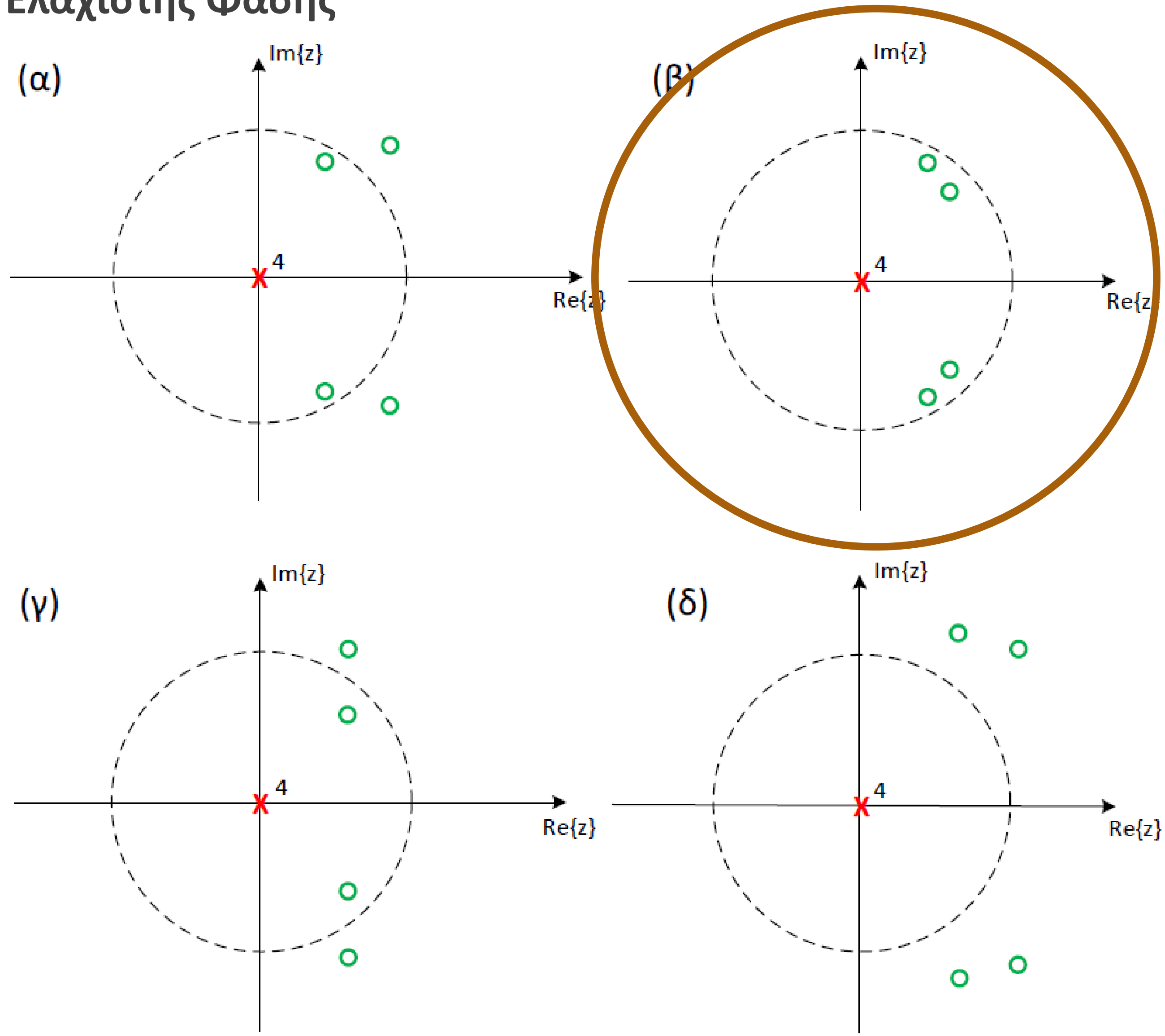
- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ***ενέργεια του*** **συστήματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης**

- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανεμημένη και πιο «διάσπαρτη»

- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
  - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
    - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval

- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**



- Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n=0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n=1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n=2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n=3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n=4$	13.71	13.71	13.71	13.71

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης**

- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική

- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
  - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
  - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου

- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\overbrace{(a\omega+\beta)}^{\measuredangle H(e^{j\omega})}}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$

- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
  - …τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR ☺

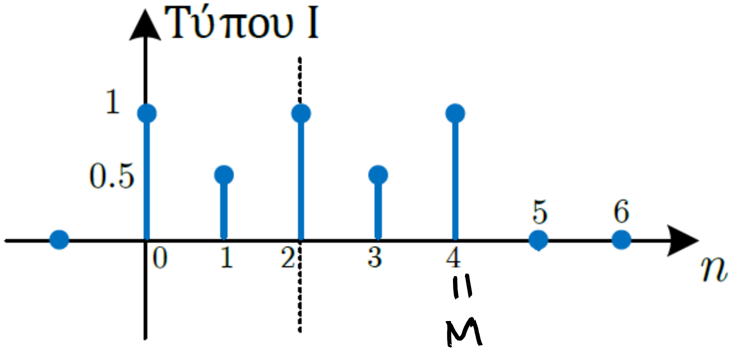
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση

- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
  - …ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης

- **Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV**

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου Ι έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$



- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n]e^{-j\omega(M-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{-j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-n\right]\cos(\omega n) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I**

- Οπότε συνολικά

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**

- Παράδειγμα:

  ○ Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 2, 3, 2, 1]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} h[n] e^{-j\omega n} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega}$$

Επειδή $h[1] = h[3]$, $h[0] = h[4]$, έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[1]e^{-j3\omega} + h[0]e^{-j4\omega}$$

$$= h[0]\left(1 + e^{-j4\omega}\right) + h[1]\left(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}\right) + \underline{h[2]e^{-j2\omega}}$$

$$= h[0]e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) + h[1]e^{-j2\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) +$$

$$= h[0]e^{-j2\omega} \cdot 2\cos(2\omega) + h[1]e^{-j2\omega}\left(2\cos(\omega)\right) + h[2]e^{-j2\omega}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**

- Παράδειγμα:

$$= e^{-j2\omega}\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2] \right)$$

Για $M = 4$

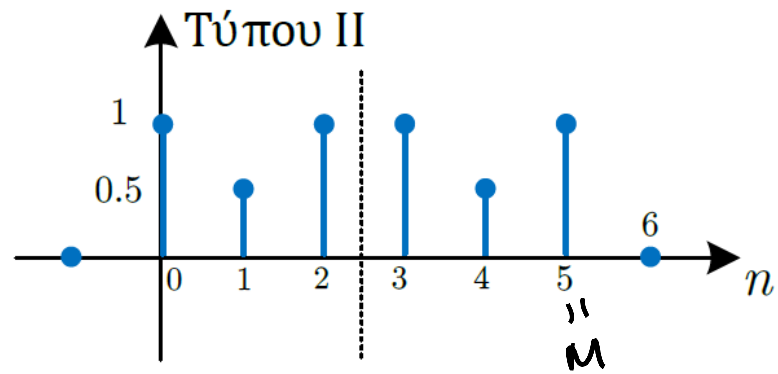
$$= e^{-j2\omega}\left(\sum_{k=1}^{2} 2h[2-k]\cos(k\omega) + h[2] \right)$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙ**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙ έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \;\; 0 \leq n \leq M, \;\; \boldsymbol{M} \textbf{ περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

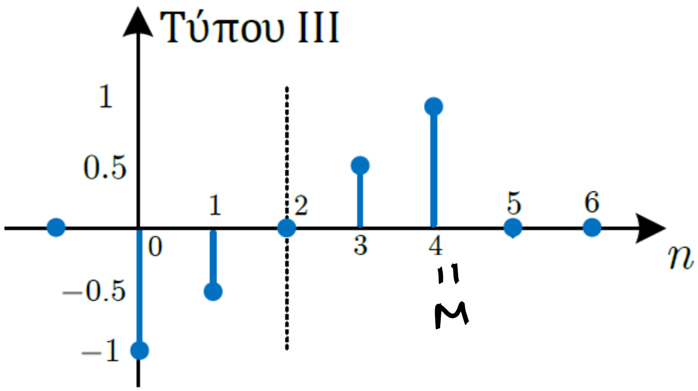
$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

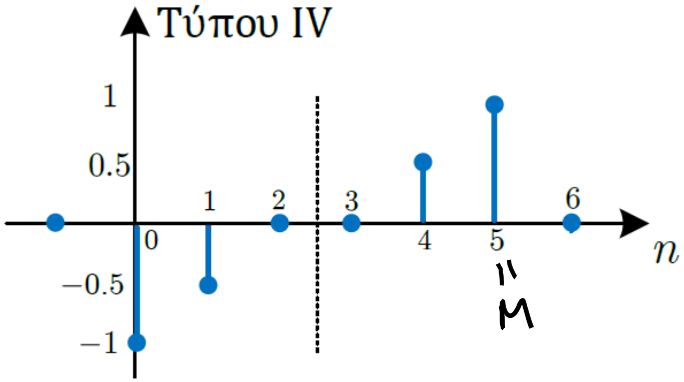
με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

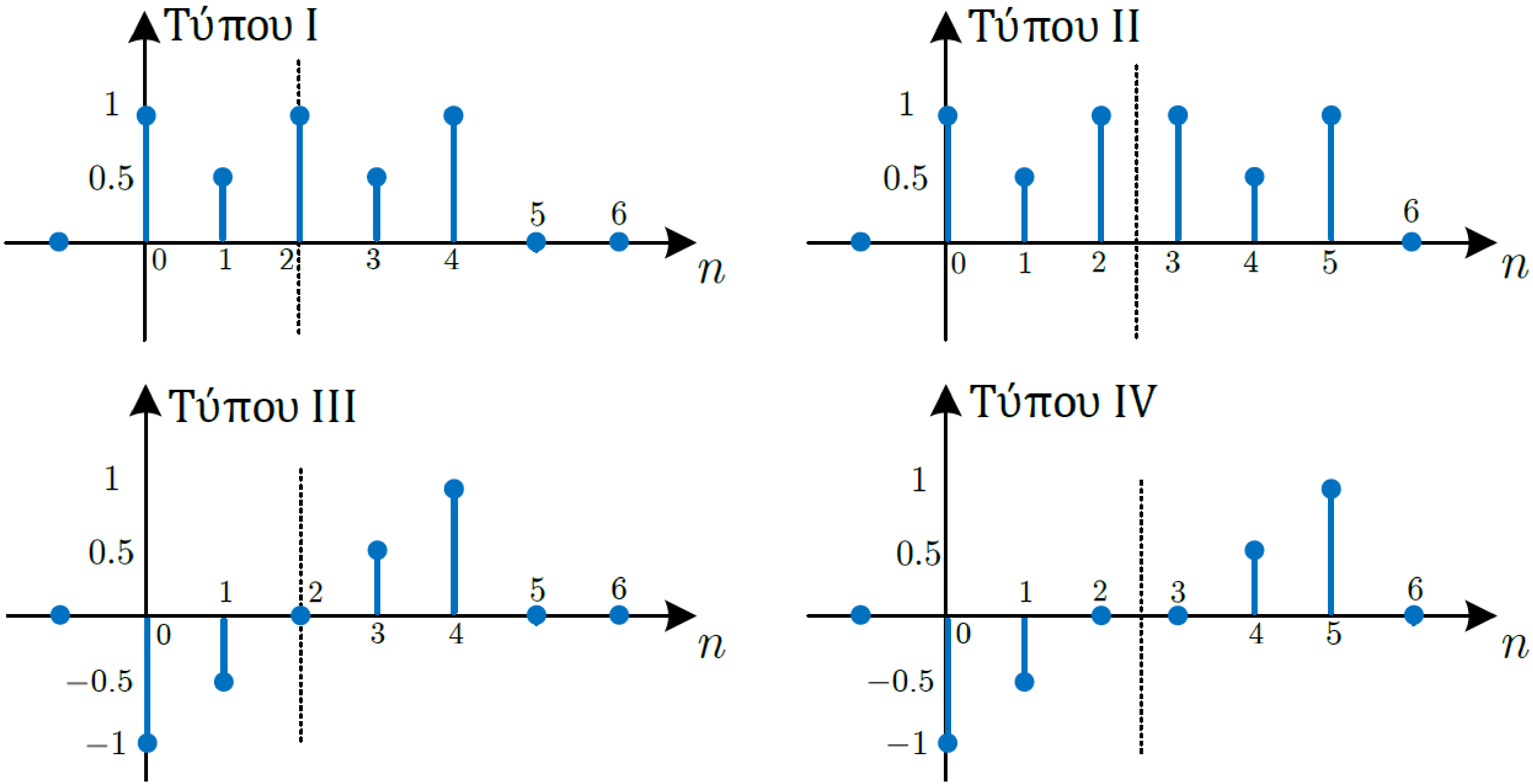
Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**
- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A(e^{j\omega})$$

- Το $A(e^{j\omega})$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
  - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$
- Για $0 \le \omega \le \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ γράφεται

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2}, & \text{τύπου I, II,} \quad A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II,} \quad A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}(\mathrm{e}^{j\omega}) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}(\mathrm{e}^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Ζ για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Τύπου I, II: $h[n] = h[M-n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$
- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M-n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

❑ Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος $\rightsquigarrow H(z_0) = 0 = \pm H(z_0^{-1}) z_0^{-M} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{H(z_0^{-1})}{z_0^{M}} = 0 \longrightarrow H(z_0^{-1}) = 0$

$\Longrightarrow z_0^{-1}$ είναι μηδενικό του συστήματος

❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0}\right)$ λέγεται αμοιβαίο

❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0^*}\right)$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

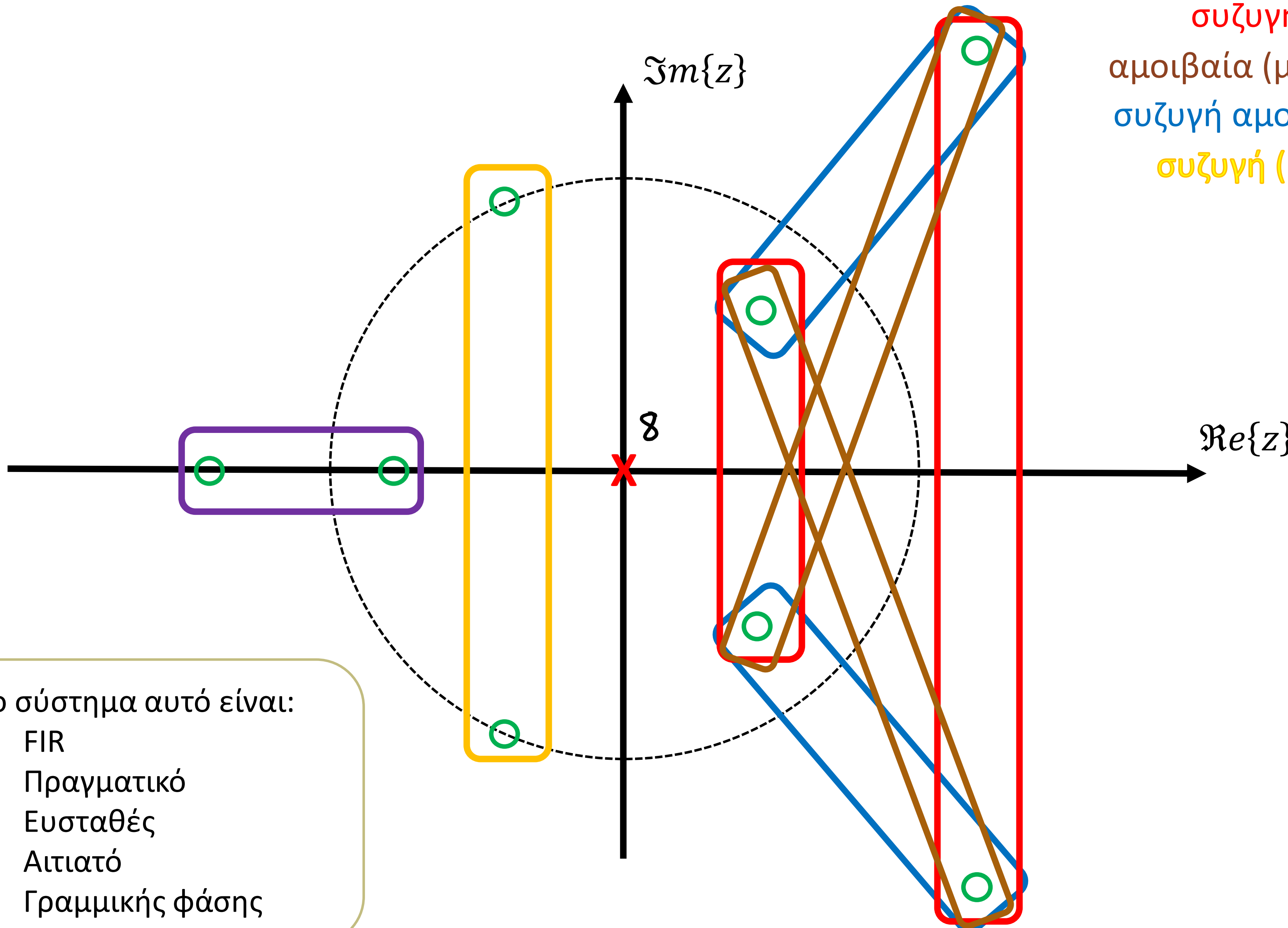
  - Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:
    - συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$
    - αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$
    - αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

  - Αν επιπλέον το $H(z)$ αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ($h[n] \in \mathbb{R}$), τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρνει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

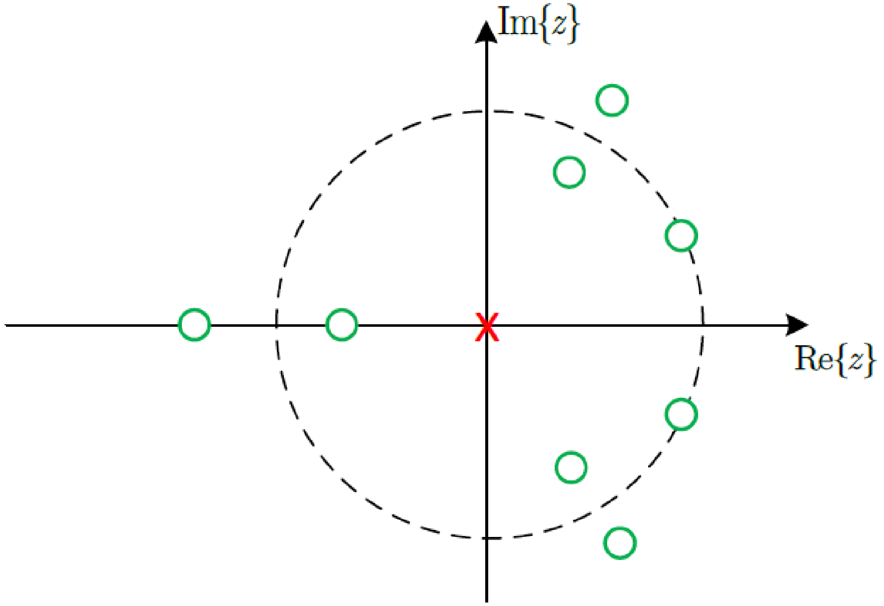
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

αμοιβαία (πραγμ.)
συζυγή
αμοιβαία (μιγαδ.)
συζυγή αμοιβαία
συζυγή (uc)



Το σύστημα αυτό είναι:
- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
- Τύπου Ι : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}, M$ άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα
- Τύπου Ι : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

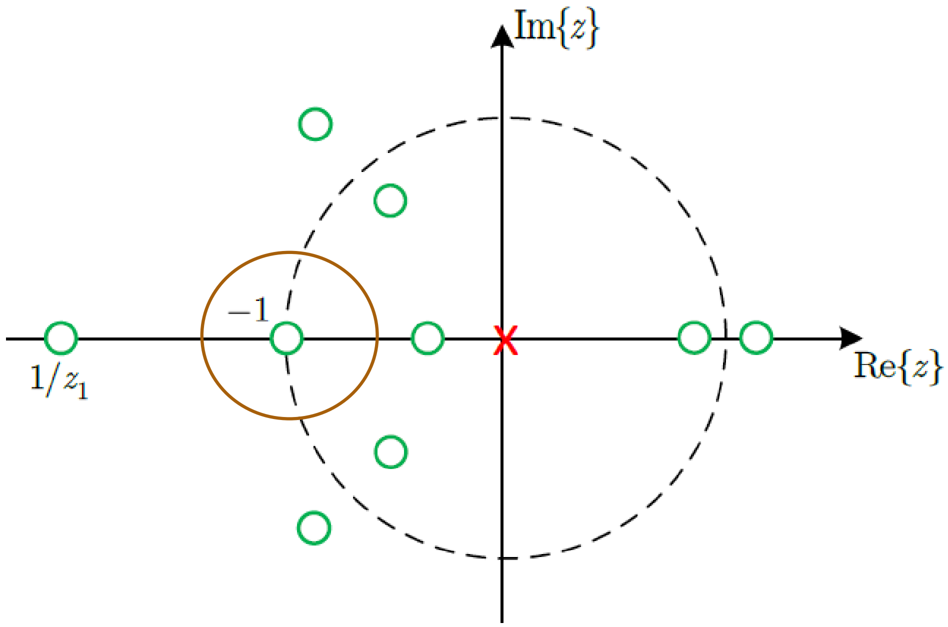
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$

- Τύπου ΙΙ : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

- Τύπου ΙΙ : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}(e^{j\pi}) = 0$!



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

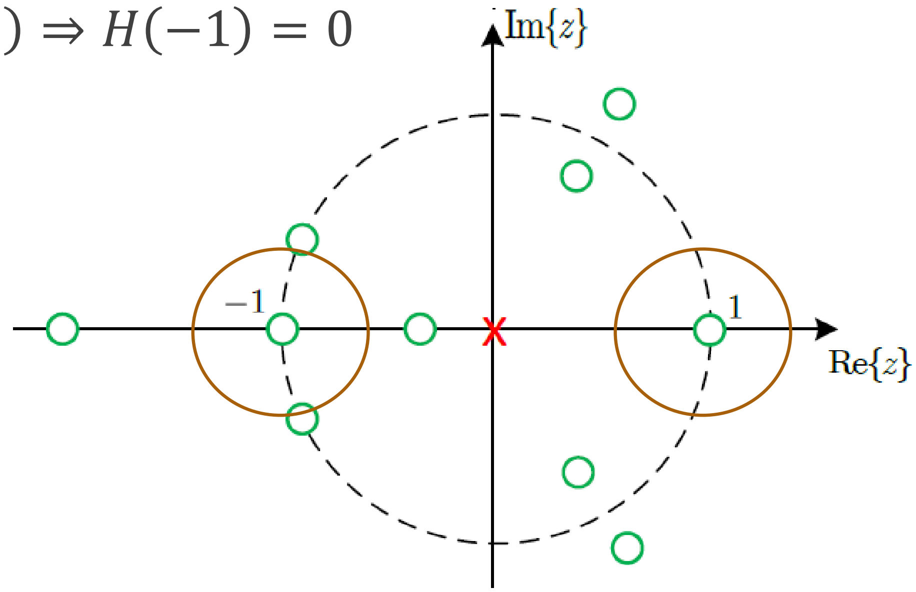
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0!$

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0!$



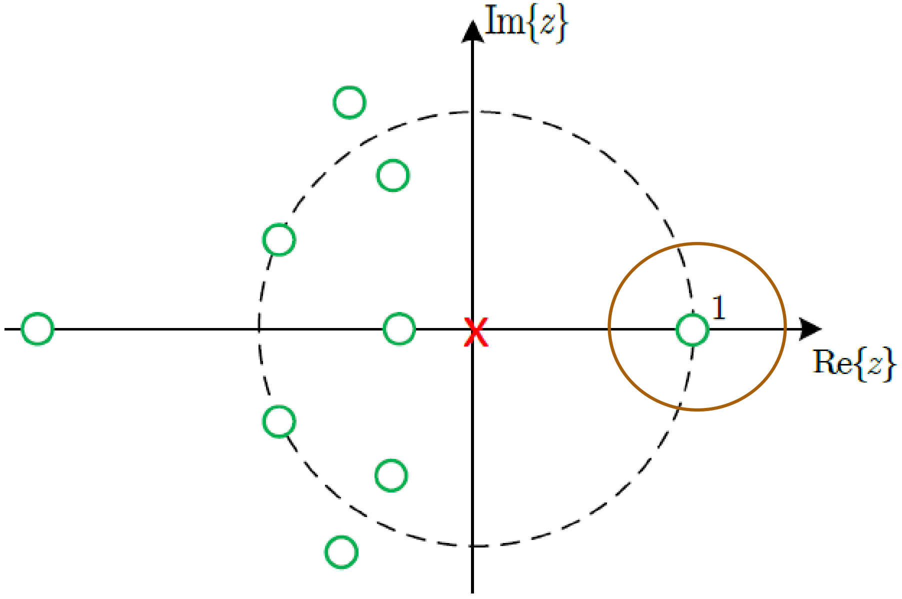
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$!

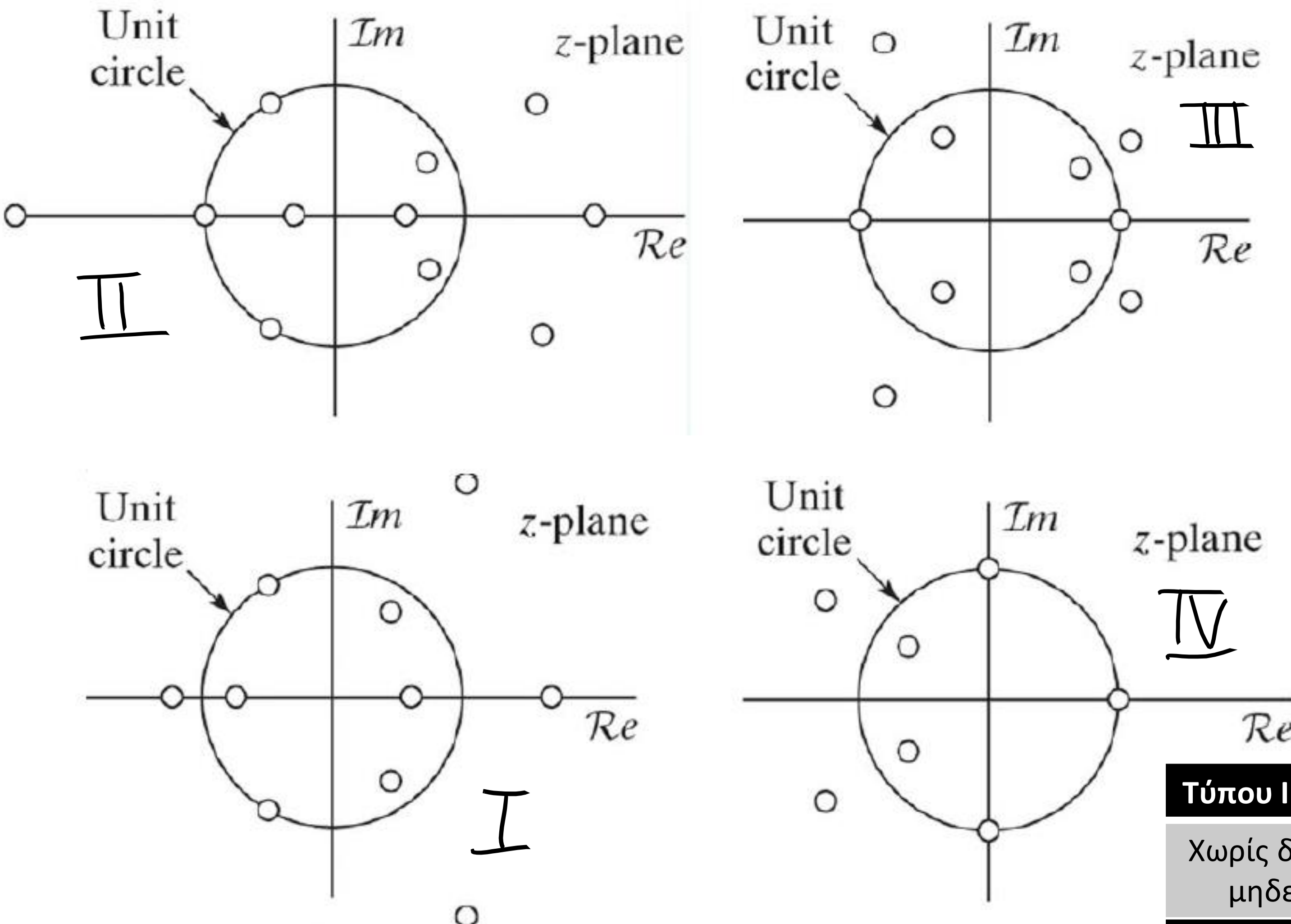
- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H_{III}(e^{j0}) = 0, H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

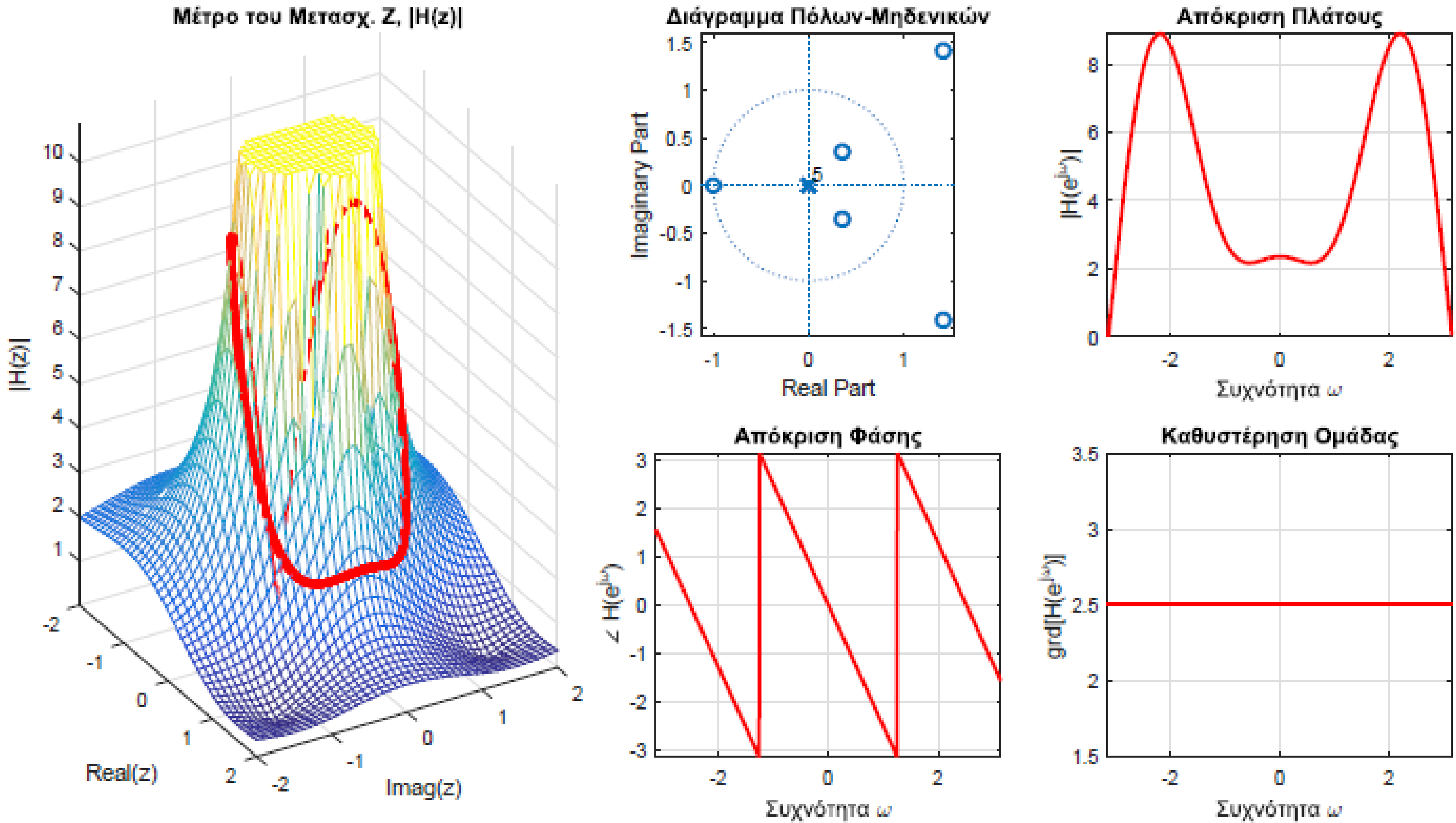


- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	**Τύπου IV**
$H_{III}(e^{j0}) = 0,$ $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

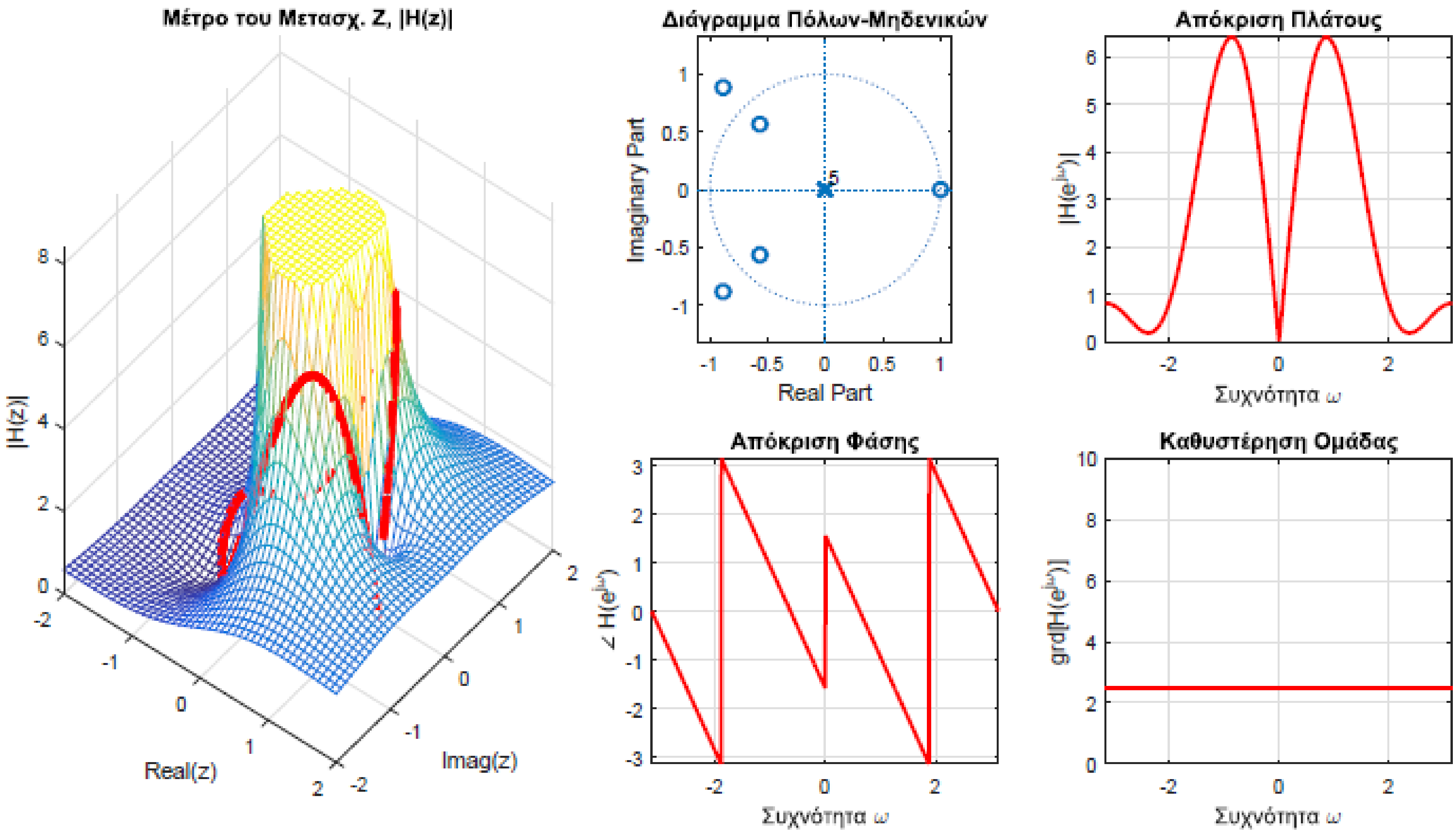
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

II



• **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

IV



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:

○ ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \qquad |c_k| < 1$$

○ ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

○ ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{uc}(z) H_{max}(z)$$

με

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1}) z^{-M_i}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Παράδειγμα:

$\frac{1}{2}$ $\quad -2j \quad$ $2j$

  - Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \qquad |z| > 0.8$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$

Linear phase: μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2j$

Minimum phase: μηδενικό στο $z = \frac{1}{2}$, πόλοι στο $z = 0.8$,
$z = -0.8$
$z = 0$

Για το $H_{linear}(z)$, θα έχουμε επιπλέον μηδενικά στις αμοιβαίες θέσεις: $z = \pm \frac{1}{2}j$

$$H_{linear}(z) = (1+2j\,z^{-1})(1-2j\,z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}j\,z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}j\,z^{-1}\right), \quad |z|>0$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Παράδειγμα:

Στο ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$, θα έχομε πόλους και μηδενικά όπως "έρχονται" από το $H(z)$, <u>και</u> δύο πόλους που ακυρώνουν τα δύο μηδενικά που εισάγαμε στο $H_{linear}(z)$: $z = \pm \frac{1}{2} j$

$$H_{min}(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}{\left(1 + 0.8 z^{-1}\right)\left(1 - 0.8 z^{-1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} j z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2} j z^{-1}\right)}, \quad |z| > 0.8$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ