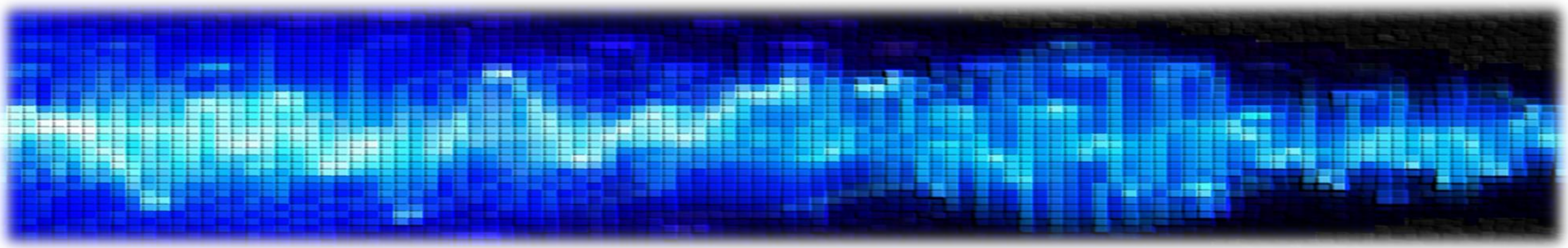
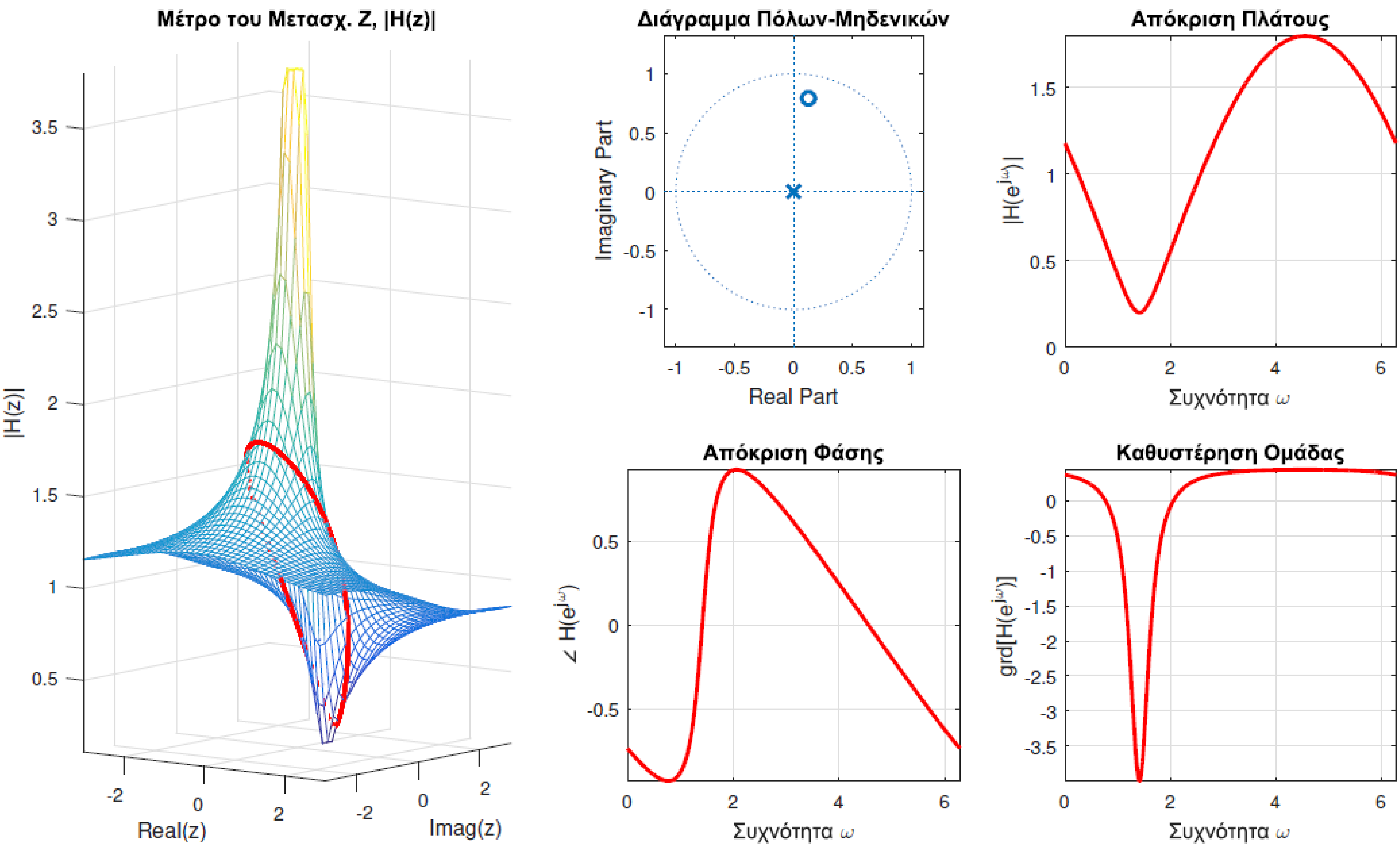
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

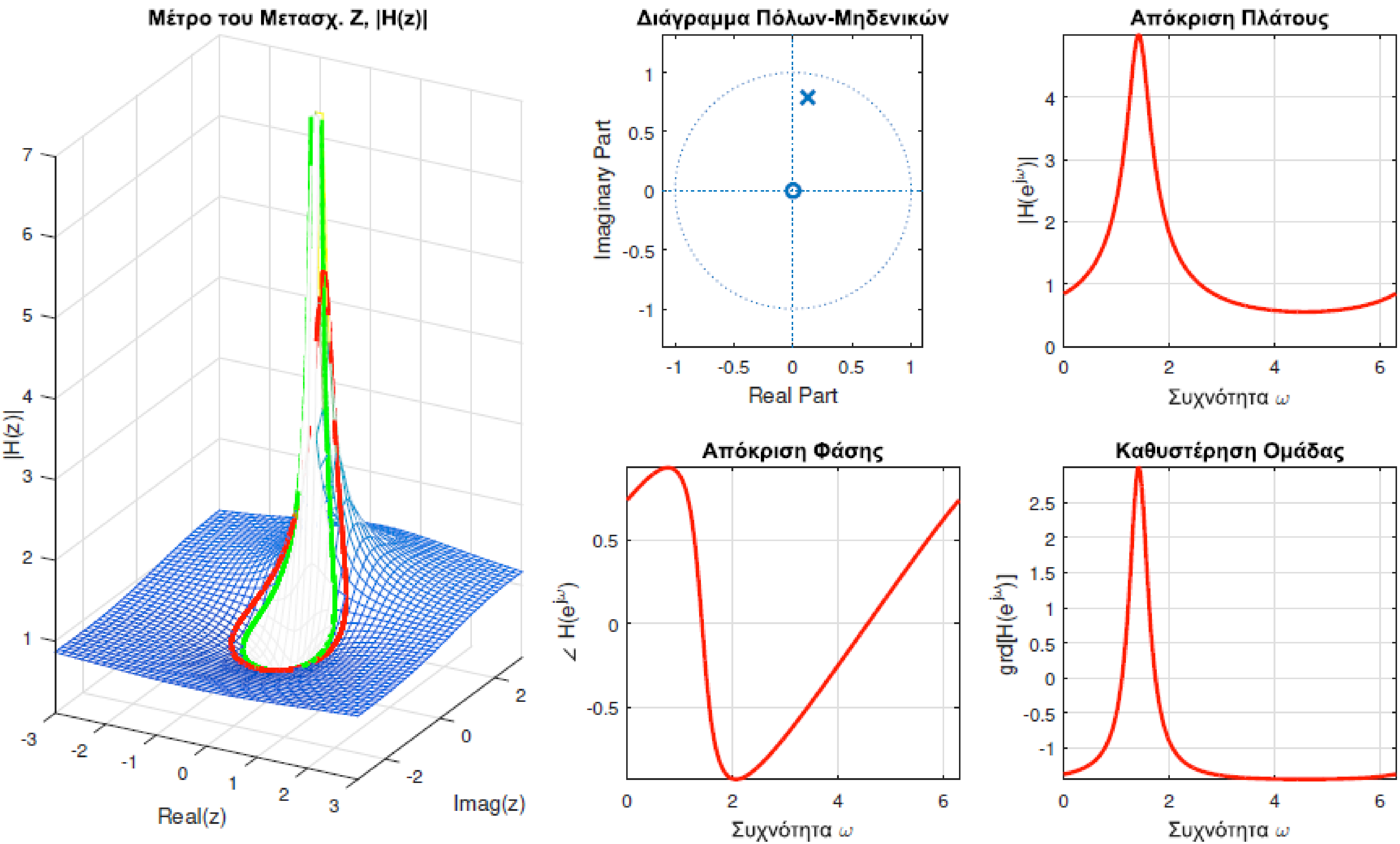


- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης
- Συστήματα All-Pass
- Διάσπαση σε ελάχιστης φάσης και all-pass

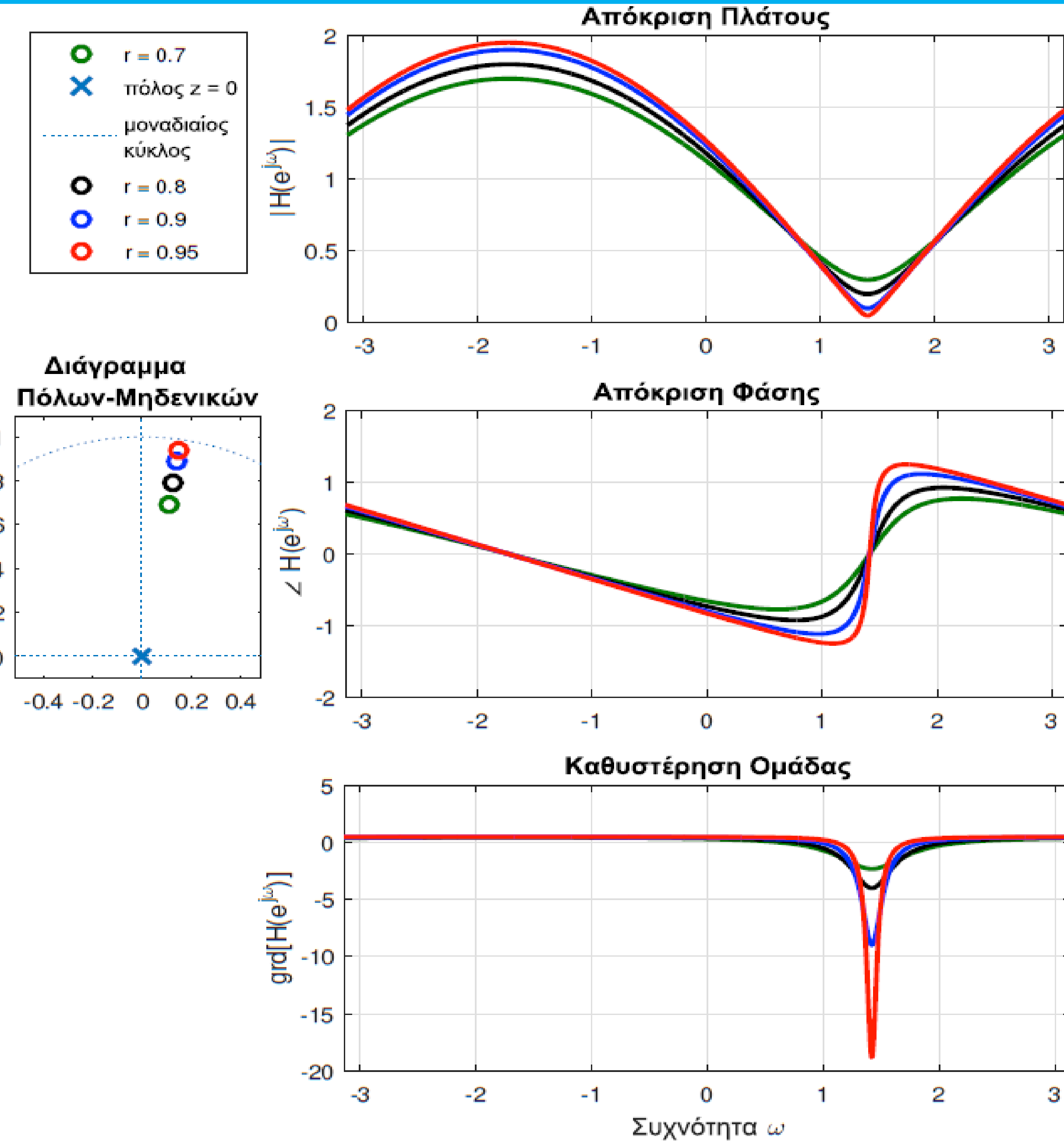
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



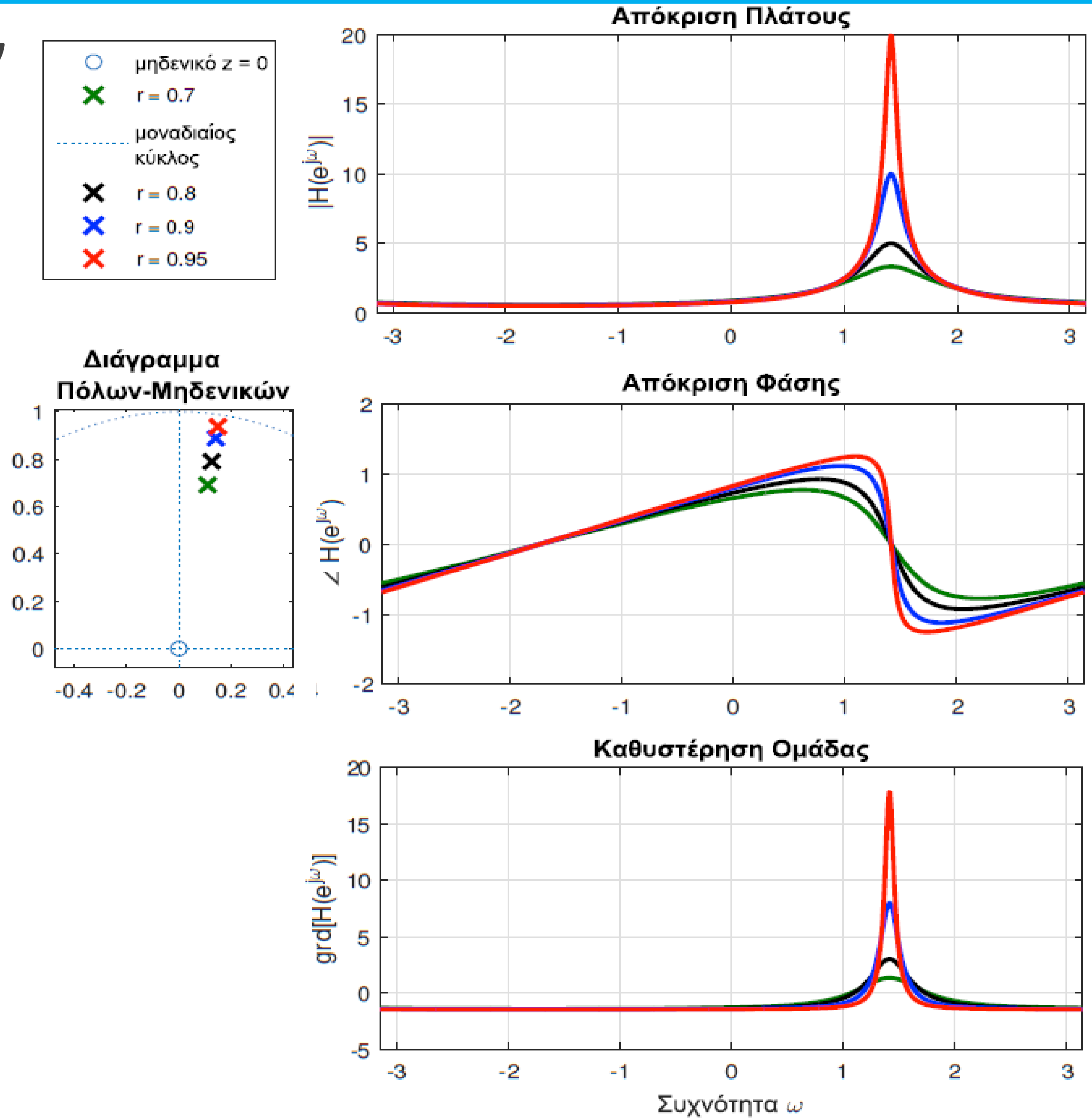
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- **Ερώτημα:** υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αποκρίσεων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται ως ρητή συνάρτηση μεταφοράς?

- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει την απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους? Αν ναι, πότε?

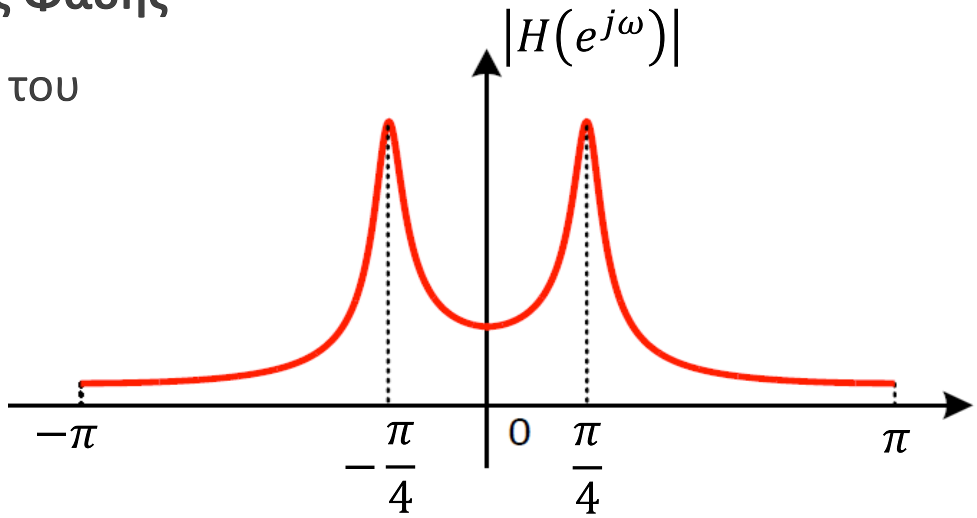
- **Πρακτικότερη διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$?

- Η τελευταία διατύπωση προφανώς μας λέει ότι αν είναι εφικτός αυτός ο υπολογισμός, τότε μπορούμε από τη συνάρτηση μεταφοράς να βρούμε τα πάντα για ένα δεδομένο ΓΧΑ σύστημα

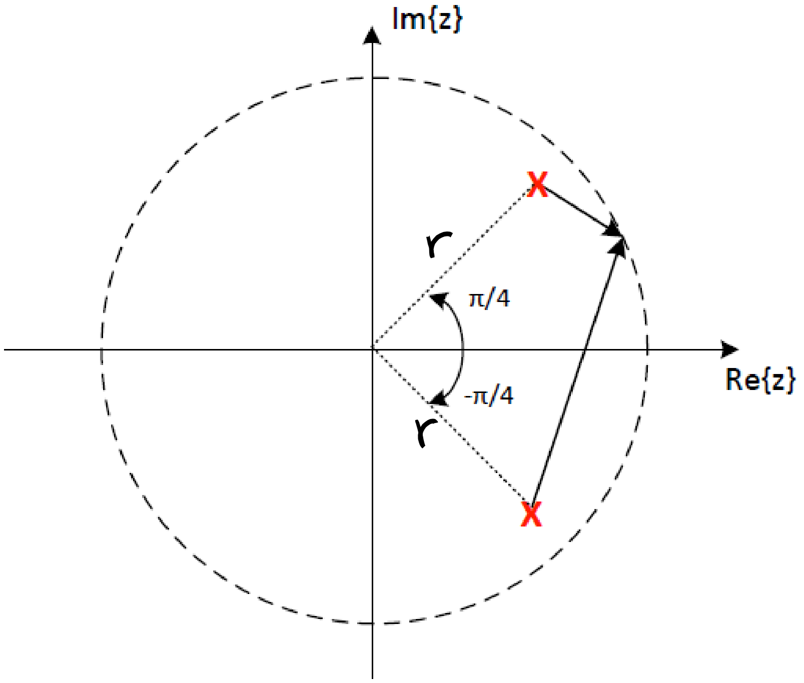
- **Το ερώτημα λοιπόν μπορεί να επαναδιατυπωθεί (για τελευταία φορά ☺) ως:** *Μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς* $H(z)$ *από την απόκριση πλάτους* $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$*?*

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του σχήματος



- Μπορούμε με κάποια ασφάλεια να υποθέσουμε ότι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που «γεννά» αυτή την απόκριση πλάτους φαίνεται παρακάτω



- Μπορούμε να πούμε ότι

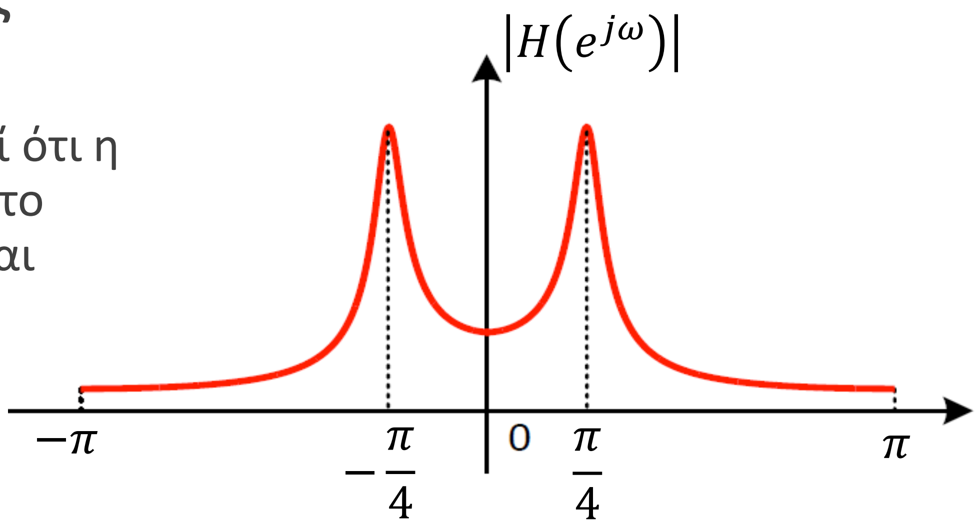
$$H_1(z) = \frac{A}{\left(1 - re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

δηλ.

$$\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{|A|}{\left|e^{j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|}$$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Όμως θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δεδομένη απόκριση πλάτους δίνεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται παρακάτω

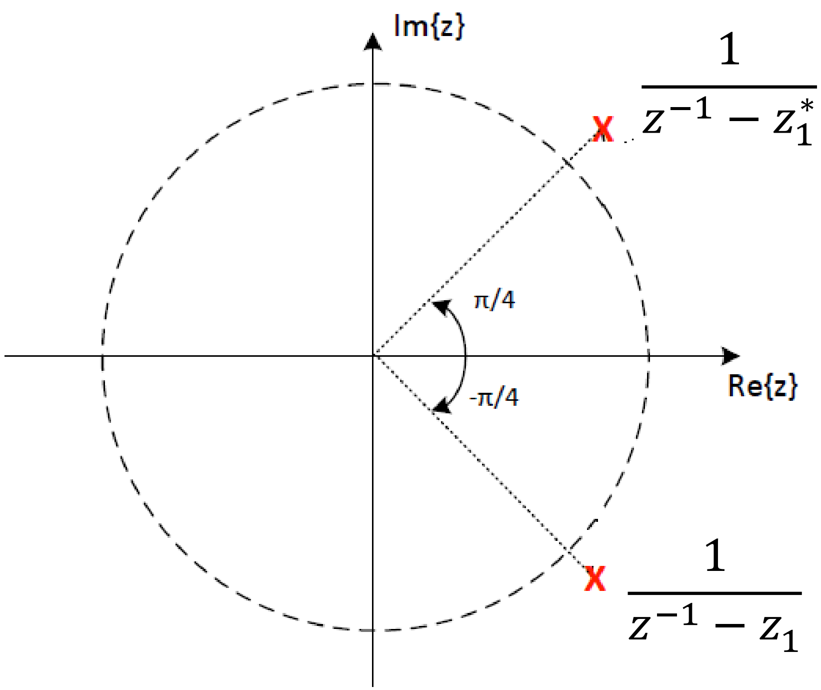


- Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$H_2(z) = \frac{A}{\left(z^{-1} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z^{-1} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

δηλ.

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \frac{|A|}{\left|e^{-j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{-j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|}$$



- Γιατί ισχύει ότι

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \left|H_2(e^{j\omega})\right| ?????$$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Παρατηρήστε ότι όροι της μορφής $\frac{1}{1-z_1 z^{-1}}$ και $\frac{1}{z^{-1}-z_1^*}$ έχουν το ίδιο μέτρο για $z = e^{j\omega}$:

$$\frac{1}{|1-z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{-j\omega}(e^{j\omega}-z_1)|} = \frac{1}{|e^{j\omega}-z_1|} \quad \text{και} \quad \frac{1}{|e^{-j\omega}-z_1^*|}$$

αφού οι όροι εντός του μέτρου είναι συζυγείς!

- Έτσι, πράγματι τα δυο συστήματα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους!
- Αφού όμως $H_1(z) \neq H_2(z)$ προφανώς δε θα έχουν την ίδια απόκριση φάσης
- Το δεύτερο σύστημα έχει τους πόλους του στις **συζυγείς αμοιβαίες θέσεις** των πόλων του πρώτου συστήματος
- Οι πόλοι του πρώτου συστήματος βρίσκονται στις θέσεις (a, a^*) και του δεύτερου συστήματος στις θέσεις $\left(\frac{1}{a^*}, \frac{1}{a}\right)$
  - Το σύστημα εξακολουθεί να είναι πραγματικό και στις δυο περιπτώσεις

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Άρα υπάρχουν **<u>δυο</u>** συστήματα $H(z)$ με τη δεδομένη απόκριση πλάτους, τα οποία διαφέρουν ασφαλώς στην απόκριση φάσης, σωστά?
- Λάθος! ☺
- Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμα συστήματα τα οποία θα έχουν τον έναν πόλο εντός και τον άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και τα οποία θα έχουν κι αυτά την ίδια απόκριση πλάτους!
  - …αν χαλαρώσουμε την απαίτηση να ανταποκρίνονται σε πραγματικά συστήματα ☺
- Είναι λοιπόν σαφές ότι η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς δε μας εξασφαλίζει τη μονοσήμαντη γνώση της συνάρτησης μεταφοράς
  - …και κατά συνέπεια της απόκρισης φάσης
- Ας θέσουμε οπότε εκ νέου το ερώτημα: ***τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις **θέσεις** των πόλων-μηδενικών!

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- ***Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Η γνώση του πλήθους και των σχετικών **θέσεων** (εντός/εκτός μον. κύκλου, κλπ) των πόλων και των μηδενικών, καθώς και της απόκρισης πλάτους ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση μεταφοράς
- Για ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό που να έχει και ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο, όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου : σύστημα **ελάχιστης φάσης**
- Κάτι τελευταίο…
- Το πλήθος πόλων-μηδενικών είναι απαραίτητη γνώση, μαζί με την απόκριση πλάτους;
- ***Ναι!*** Ο λόγος είναι ότι μπορεί κανείς να προσθέσει *άπειρους* πόλους και μηδενικά χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την απόκριση πλάτους!!
  - Πώς? Πολλαπλασιάζοντας τα τέσσερα $H(z)$ που είδαμε με όρους της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

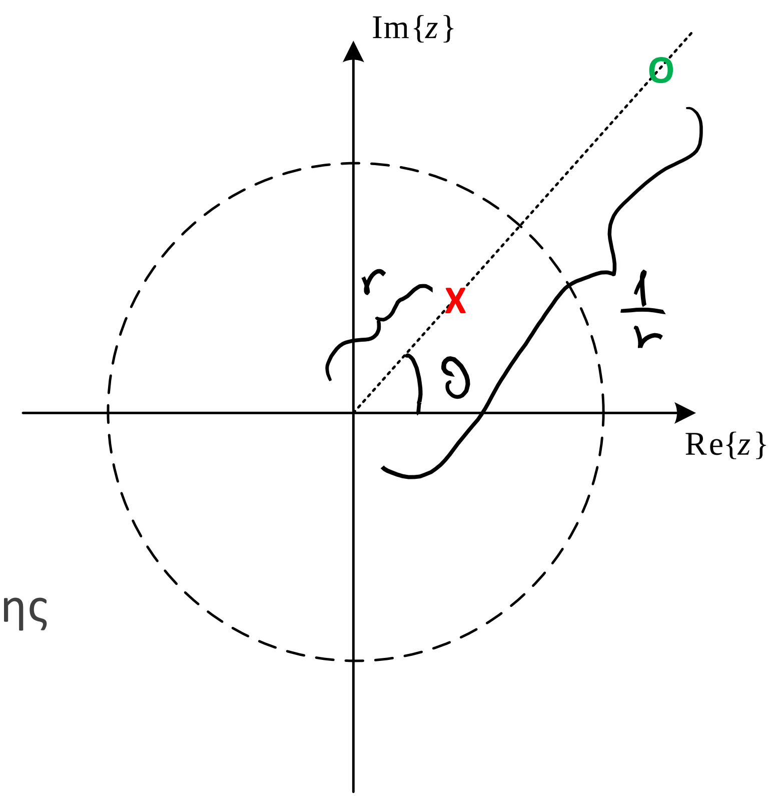
- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

- Τι συνεισφέρει ο παραπάνω όρος στην απόκριση πλάτους?

$$\left|\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\right|\Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \left|\frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{e^{-j\omega}(1 - a^* e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = 1$$

- (Μηδενικό, πόλος) = $\left(\frac{1}{a^*}, a\right)$, $a = re^{j\theta}$
- Άπειρα τέτοια ζεύγη πόλων-μηδενικών δεν αλλοιώνουν την απόκριση πλάτους!
- Αλλοιώνουν ασφαλώς την απόκριση φάσης
- Τέτοια συστήματα ονομάζονται **all-pass συστήματα**
  - Θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια



- Πολλές φορές μας δίνεται το τετράγωνο της απόκρισης ~~σε συχνότητα~~ $|H(e^{j\omega})|^2$
- Μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες από αυτό?

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Έχουμε $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = |H(z)|^2{}_{z=e^{j\omega}} = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$
- Άρα αν

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})} \Longrightarrow H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k^* z)}$$

τότε

$$|H(z)|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}$$

$$|H(z)|^2\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N} 1 + |b_k|^2 - 2|b_k|\cos(\omega - \angle b_k)}{\prod_{k=1}^{M} 1 + |c_k|^2 - 2|c_k|\cos(\omega - \angle c_k)} \quad 1$$

- Για κάθε πόλο $z = c_k$ του συστήματος $H(z)$, υπάρχει ένας ακόμη πόλος $z = \frac{1}{c_k^*}$ στο $|H(z)|^2$ και για κάθε μηδενικό $z = b_k$ του συστήματος $H(z)$ υπάρχει ένα ακόμη μηδενικό $z = \frac{1}{b_k^*}$ στο $|H(z)|^2$
- Το $|H(z)|^2$ διαθέτει συζυγή αμοιβαία ζεύγη πόλων-μηδενικών
- Το ένα στοιχείο του κάθε ζεύγους σχετίζεται με το $H(z)$ και το άλλο στοιχείο με το $H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ για το οποίο ισχύει

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

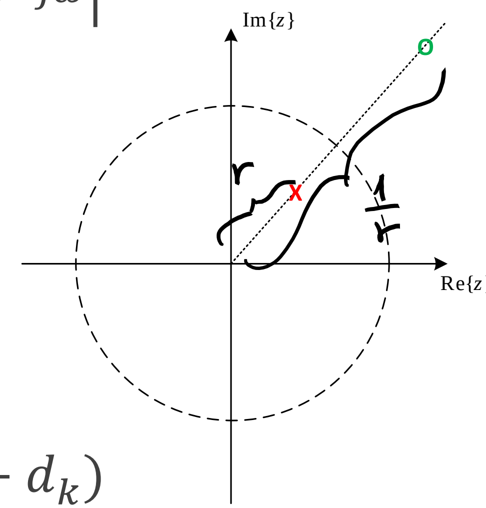
$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{4} = 1 + |c_1|^2 \Rightarrow |c_1|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |c_1| = \frac{1}{2} = |c_1^*| \\ -\measuredangle c_1 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \measuredangle c_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \measuredangle c_1^* = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad c_2 = c_1^* = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$ Άρα

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- **All-pass Συστήματα**

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = \prod_{k=1}^{N} \frac{\left|e^{-j\omega} - a_k^*\right|}{\left|1 - a_k e^{-j\omega}\right|} = 1$$



- Πόλοι-μηδενικά: $\left(a_k, \frac{1}{a_k^*}\right) = \left(r_k e^{j\theta_k}, \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}\right)$
- Για πραγματική κρουστική απόκριση

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k^*}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

- Για σύστημα πρώτης τάξης, μπορεί να δειχθεί ότι η απόκριση φάσης είναι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega - 2\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

- **All-pass Συστήματα**

- Καθυστέρηση ομάδας

$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)}$$, $a = re^{j\theta}$

- Αν $H(z)$ ευσταθές και αιτιατό ($r < 1$) τότε $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0$

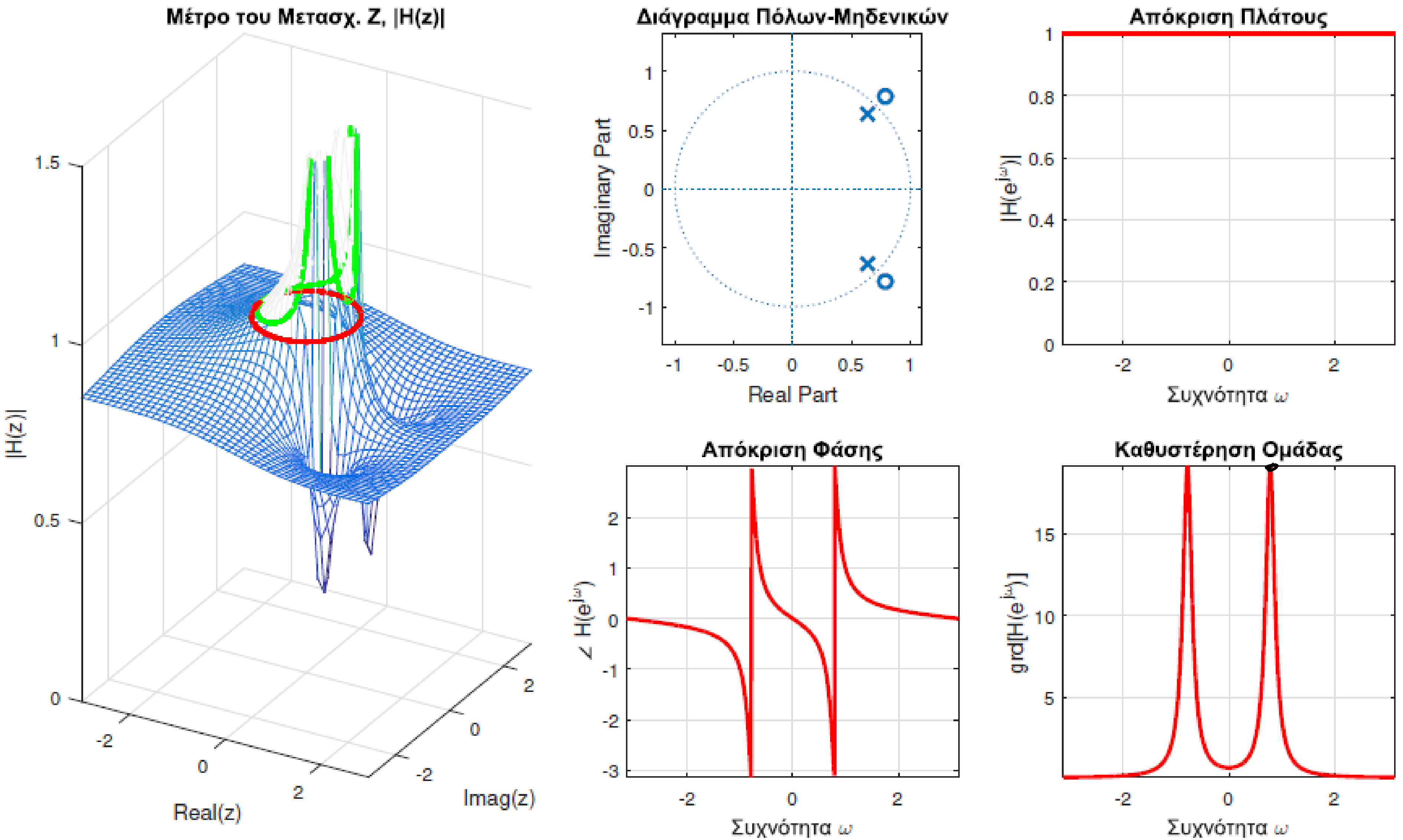
- Αν $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0 \Rightarrow \angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi$
  - Απόκριση φάσης μη-θετική!

- **Αιτιατά** all-pass συστήματα έχουν **πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας**!

- Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να καθυστερήσουν συνιστώσες στενής ζώνης της εισόδου τους χωρίς να επηρεάσουν το πλάτος τους!

- Που είχαμε δει κάτι παρόμοιο;
  - Στην πρώτη μας συζήτηση για την καθυστέρηση ομάδας!

- **All-pass Συστήματα**



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα **ελάχιστης φάσης**
  - Είναι αιτιατά και ευσταθή, κι έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα

- Ένα οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης με ένα all-pass σύστημα

- Με άλλα λόγια, από ένα δεδομένο σύστημα μπορούμε πάντα να εξάγουμε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης
  - Δηλ. ένα σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους, που να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου!
  - Για την απόκριση φάσης θα μιλήσουμε αργότερα… ☺

- Θα μείνουμε κυρίως στα ευσταθή και αιτιατά ΓΧΑ συστήματα…
  - … αν και το συμπέρασμα ισχύει για κάθε σύστημα με ρητή $H(z)$

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

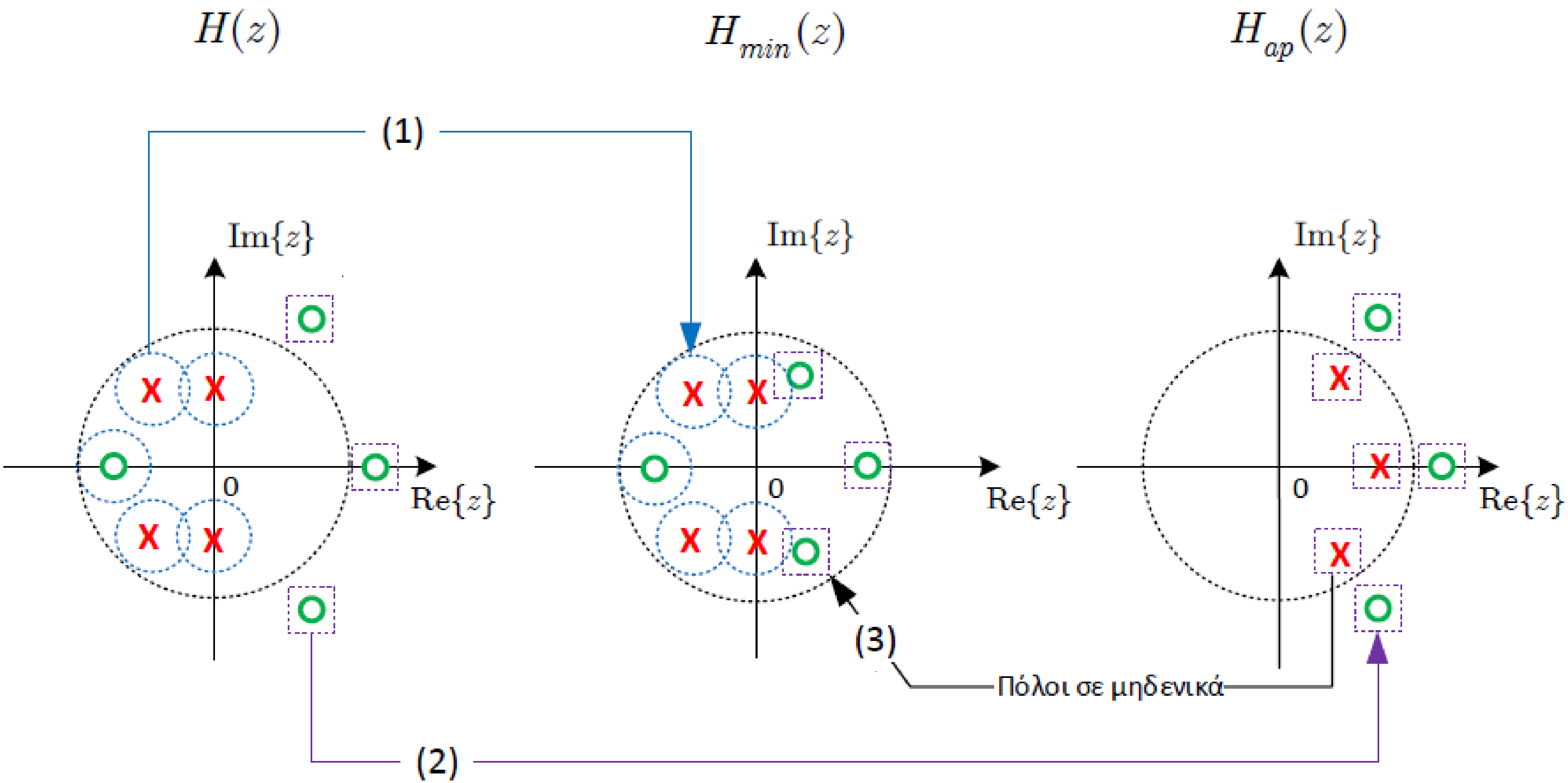
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|\cancelto{1}{\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|} = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρισκονται εκτος του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει ειναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.
2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτριζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.
3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

• **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

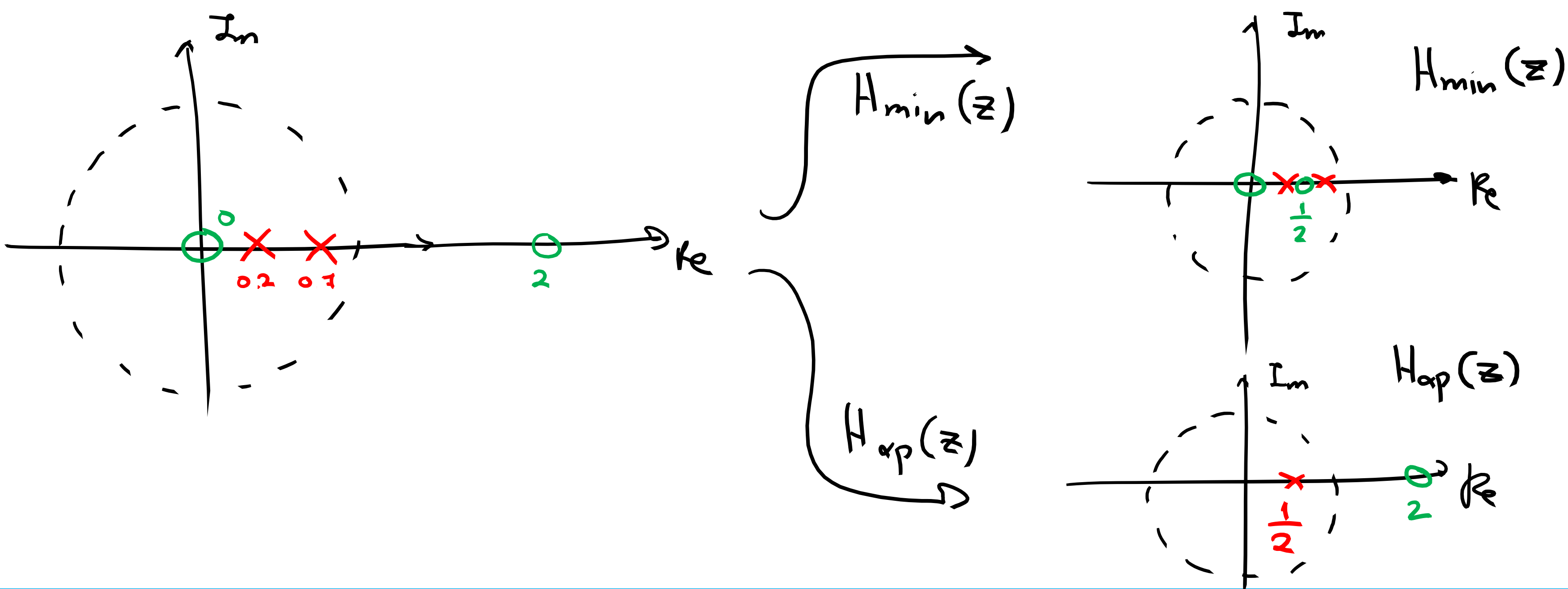
  - Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

$$= \frac{z(z-2)}{(z-0.2)(z-0.7)}$$

⟶ Μηδ.: $z=0$, $z=2$

⟶ Πόλοι: $z=0.2$, $z=0.7$



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \left(H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right)$$

$$H_{ap}(z) = \frac{-2\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = (-2)\,\frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

Η σταθερά -2 πρέπει να μεταφερθεί στο $H_{min}(z)$. Άρα $H_{ap}(z) = \dfrac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \; |z| > \frac{1}{2}$

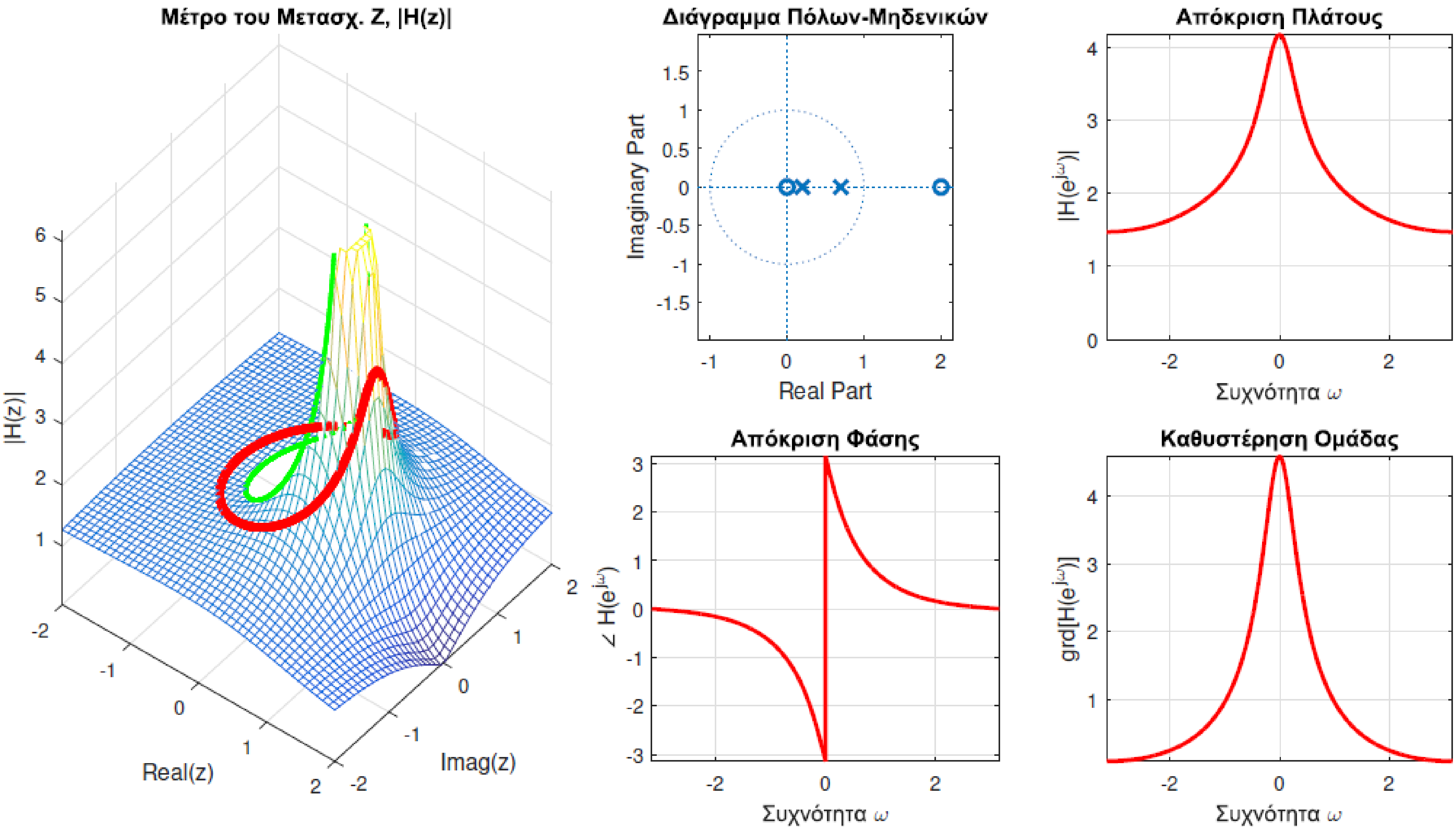
Τέλος.

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}(-2) = \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})},$$

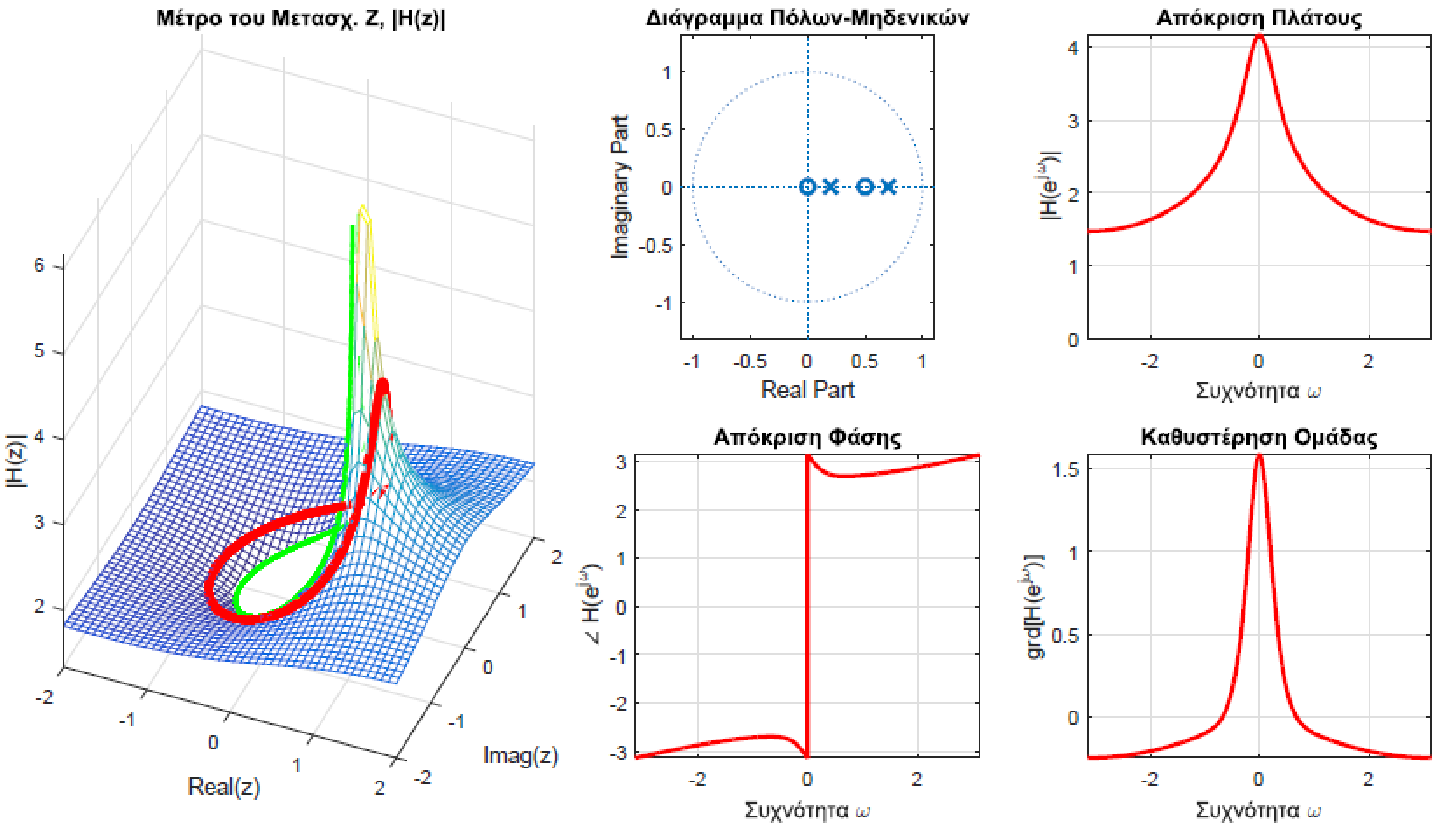
$$|z| > 0.7$$

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

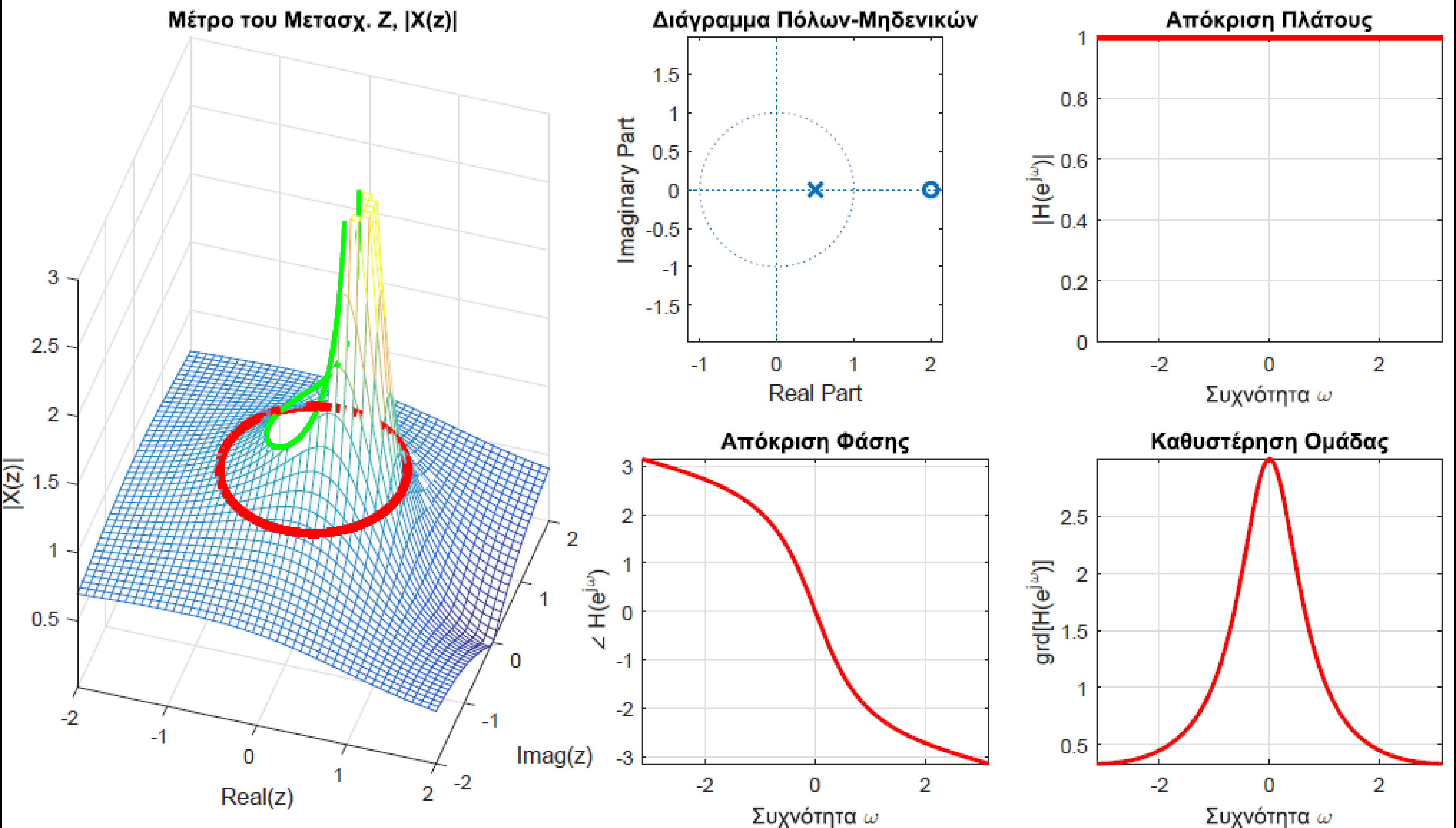


- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Χρειάζεται απαραίτητα κάθε φορά όλη η αυτή (εύκολη μεν, χρονοβόρα δε) διαδικασία για την εύρεση ενός minimum phase συστήματος?

- Όχι! ☺

- Είδαμε νωρίτερα ότι ένας όρος $1 - az^{-1}$ με α **εκτός** μοναδιαίου κύκλου μπορεί να «καθρεπτιστεί» **εντός**, στη συζυγή αμοιβαία θέση, του μοναδιαίου κύκλου με χρήση του όρου $z^{-1} - a^*$

- Μια τέτοια κίνηση ΔΕΝ αλλάζει την απόκριση πλάτους (slide 9)!

- Οπότε για την εύρεση του minimum phase συστήματος αρκεί να αλλάξουμε τους όρους $1 - az^{-1}$ **εκτός** μοναδιαίου κύκλου με όρους $z^{-1} - a^*$ (αναγκαστικά **εντός** μοναδιαίου κύκλου) !!

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1-j3z^{-1})(1+j3z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(z^{-1}-j3)(z^{-1}+j3)}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$

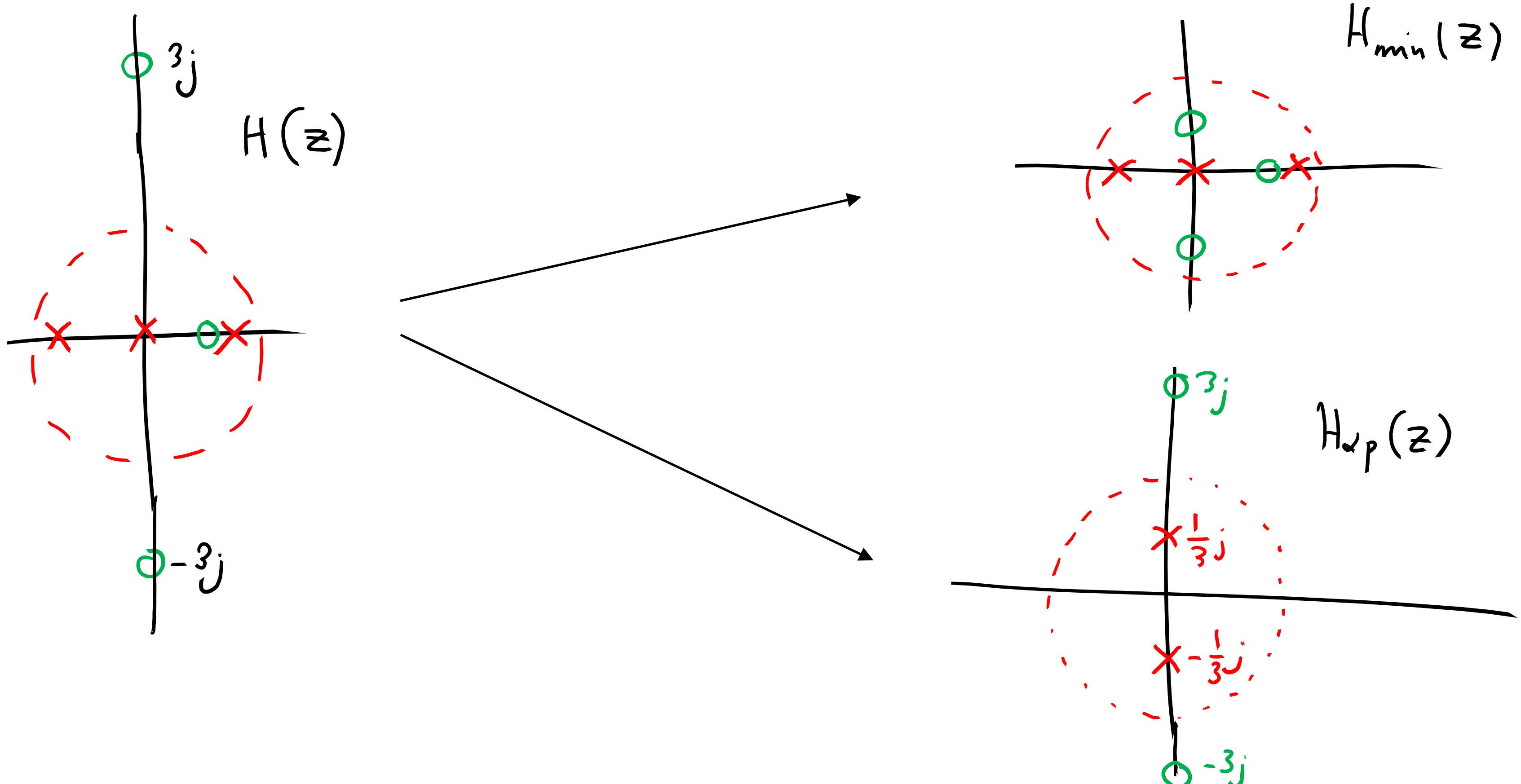
$||$

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

  ○ Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

Το σύστημα $H_{ap}(z)$ είναι: $H_{ap}(z) = \dfrac{(1-3jz^{-1})(1+j3z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})} =$

$$= \frac{(-3j)(3j)(z^{-1}-\frac{1}{3}j)(z^{-1}+\frac{1}{3}j)}{(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})} = g\,\frac{(z^{-1}-\frac{1}{3}j)(z^{-1}+\frac{1}{3}j)}{(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})}, \quad |z|>\frac{1}{3}$$

$$= g\,\frac{z^{-1}-\frac{1}{3}j}{1+\frac{1}{3}jz^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}+\frac{1}{3}j}{1-\frac{1}{3}jz^{-1}}$$

Η σταθερά g θα μπει στο $H_{min}(z)$.

Άρα

$$H_{min}(z) = g\,\frac{(1-0.8z^{-1})(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})} \qquad \left(g=(3j)(-3j)\right)$$

$$= \frac{(1-0.8z^{-1})(z^{-1}+j3)(z^{-1}-j3)}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}, \quad |z|>0.9$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ