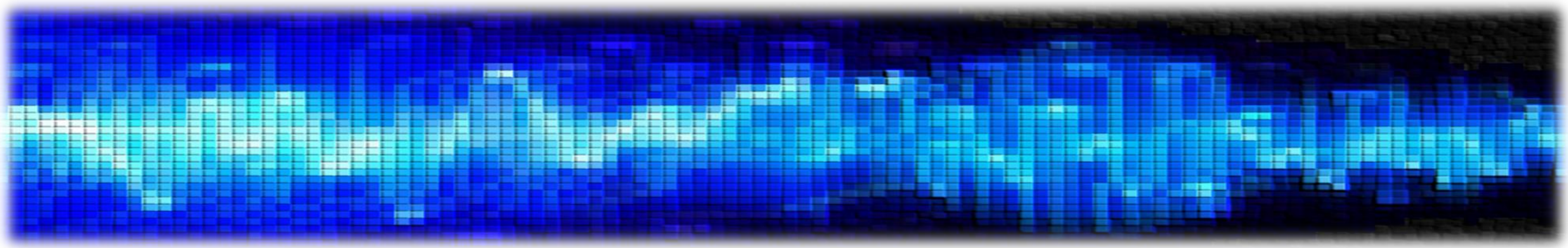
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η



- Μετασχηματισμός Ζ
- Ιδιότητες & Ζεύγη
- Πεδίο Σύγκλισης

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} \xrightarrow[z=e^{j\omega}]{} X(e^{j\omega})$$

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad \xleftarrow{z=e^{j\omega}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$ $(a=1)$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

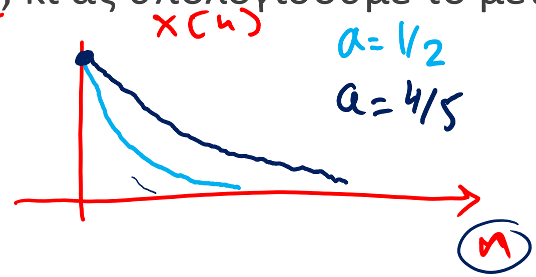
Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

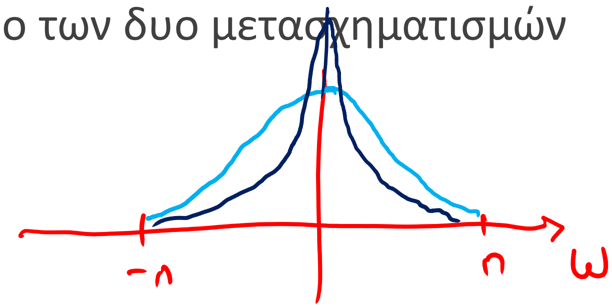
- Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

- Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$



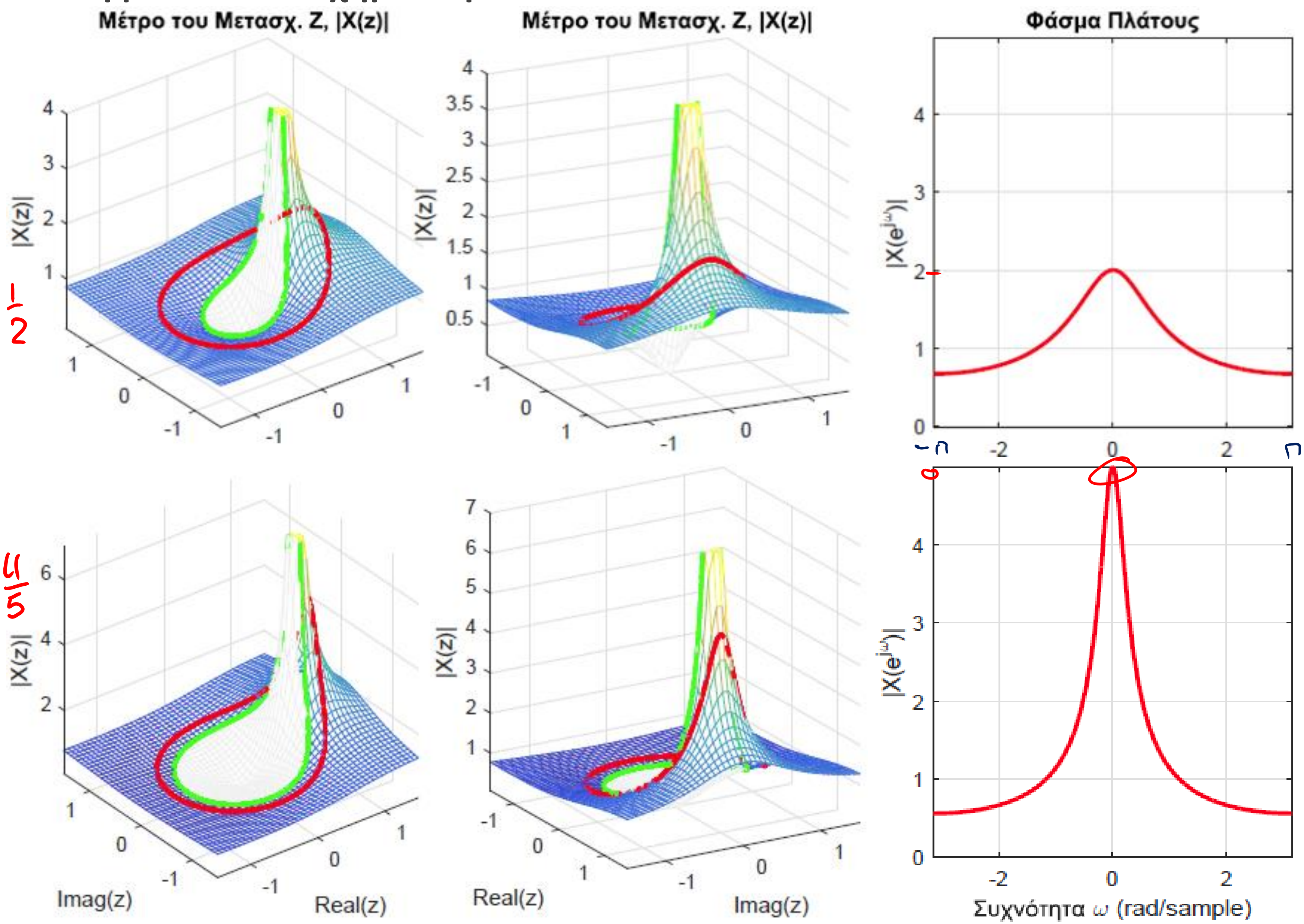


- Δείτε τι συμβαίνει...

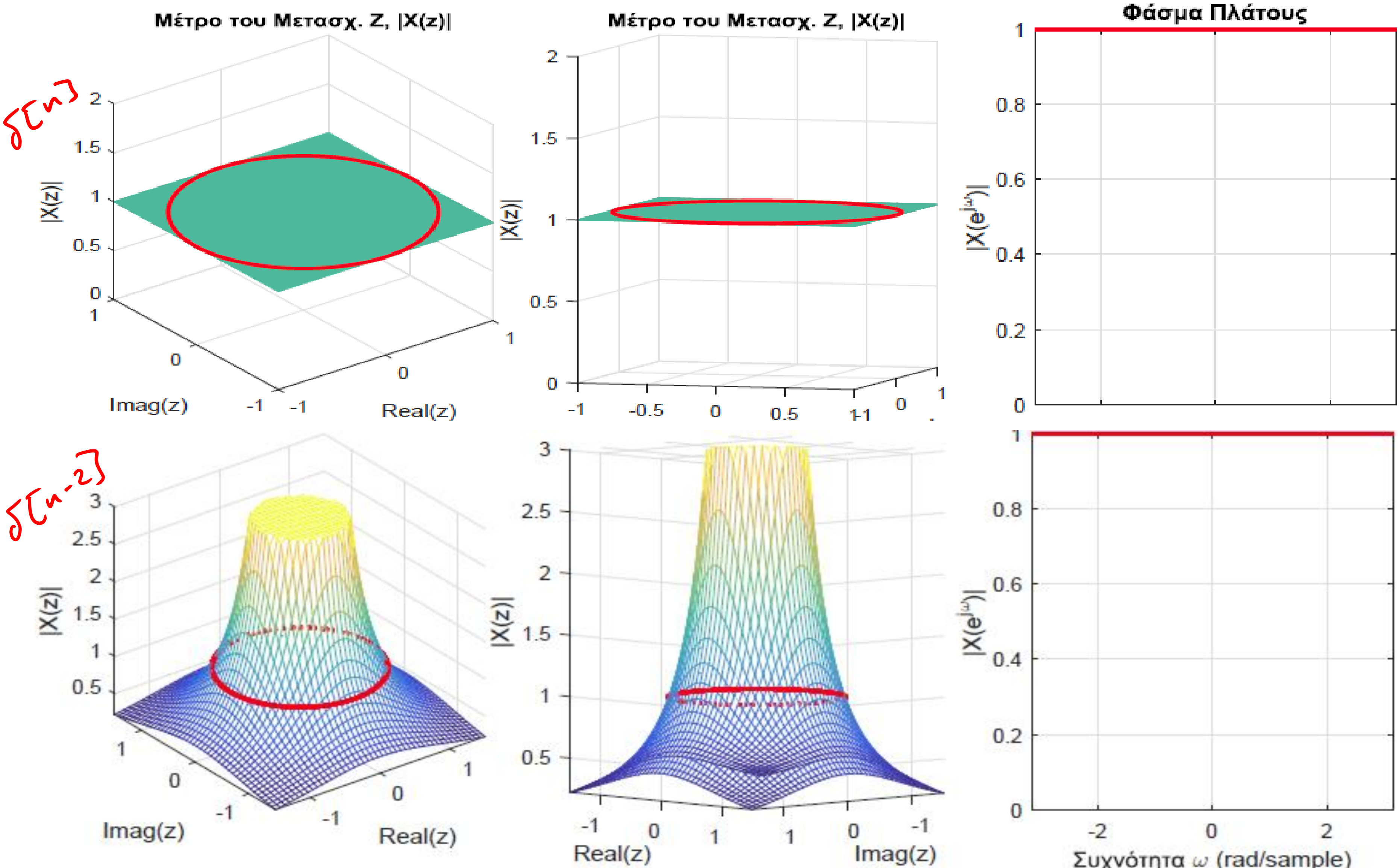
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

$a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{4}{5}$



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?



- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη ως τώρα)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

ROC

- Ζεύγη:

Σήμα στο χρόνο	Μετασχηματισμός Z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\delta[n]$	$1, \forall z$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert > 0$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 < 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert < \infty$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier (επανάληψη ως τώρα)

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Επιτρέπεται μόνον όταν ο τελευταίος εμπεριέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier (επανάληψη ως τώρα)

Σχέση Μετασχ. Ζ και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Ζ $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Ζ στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες ” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n =$$

$u[n]=0 \ , \ n<0$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} \ , \quad |z^{-1}| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow \underline{|z| > 1}$$

$$x[n] = u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \ , \quad |z| > 1$$

Πόλοι & μηδενικά

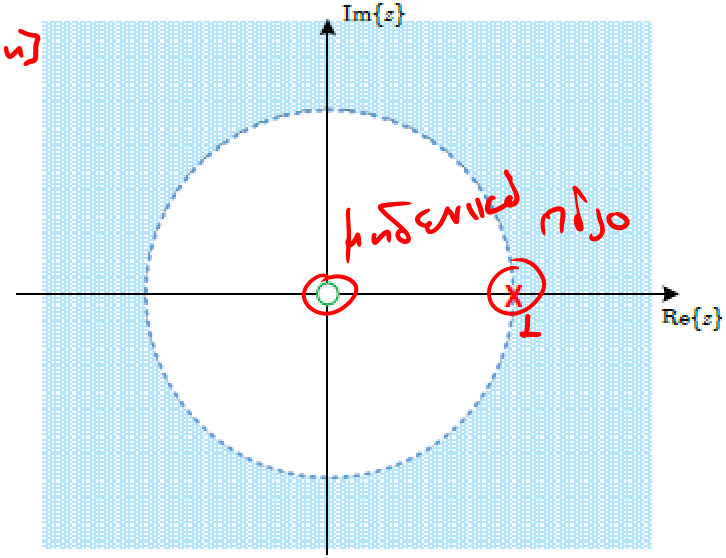
$$X(z) = \frac{1}{z^{-1}(z-1)} = \frac{z}{z-1}$$

μηδενικό στο $z=0$

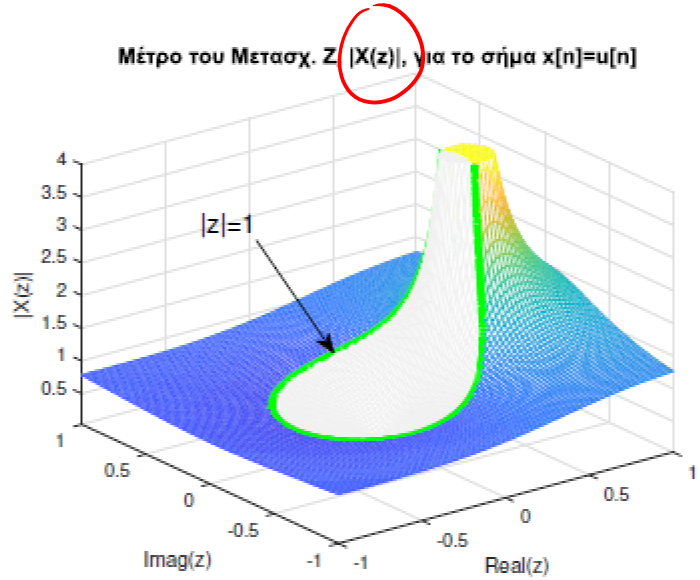
πόλος στο $z=1$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

x[n]=u[n]



(α′) Περιοχή σύγκλισης.



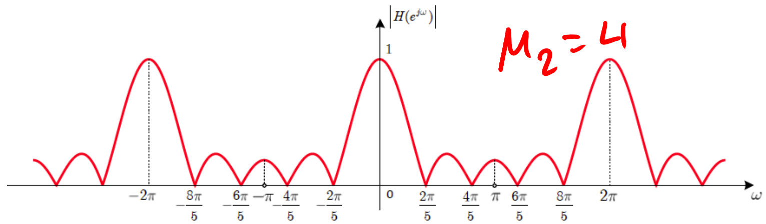
(β′) Μέτρο μετασχ. Ζ σήματος $x[n] = u[n]$.

Z

$X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$M_2 = 4$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} (z^{-1})^n =$$

$$\boxed{\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1 - z^{-(M_2+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{M_2+1} \frac{z^{-(M_2+1)}}{z^{-1}} \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1}{z^{M_2}} \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1}$$

Πόλοι: $z = 1$ 1 πόλος

$z^{M_2} = 0 \Rightarrow M_2$ πόλοι στο $z = 0$

M_2+1 πόλους

M_2+1 μηδενικά

Μηδενικά: $z^{M_2+1} - 1 = 0 \Rightarrow z^{M_2+1} = 1 \Rightarrow z^{M_2+1} = e^{j2\pi k} \Rightarrow z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M_2+1}}, \ k = 0, 1, \ldots M_2$

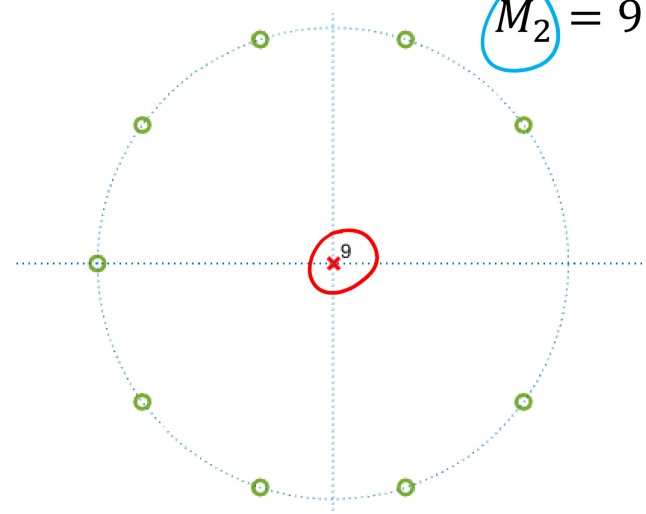
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

$M_2 = 9$

M_2+1 Πόλους | $z=1$, $z=0$ M_2

Μηδενικά M_2+1 | $z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M_2+1}}, k=0,\dots,M_2$

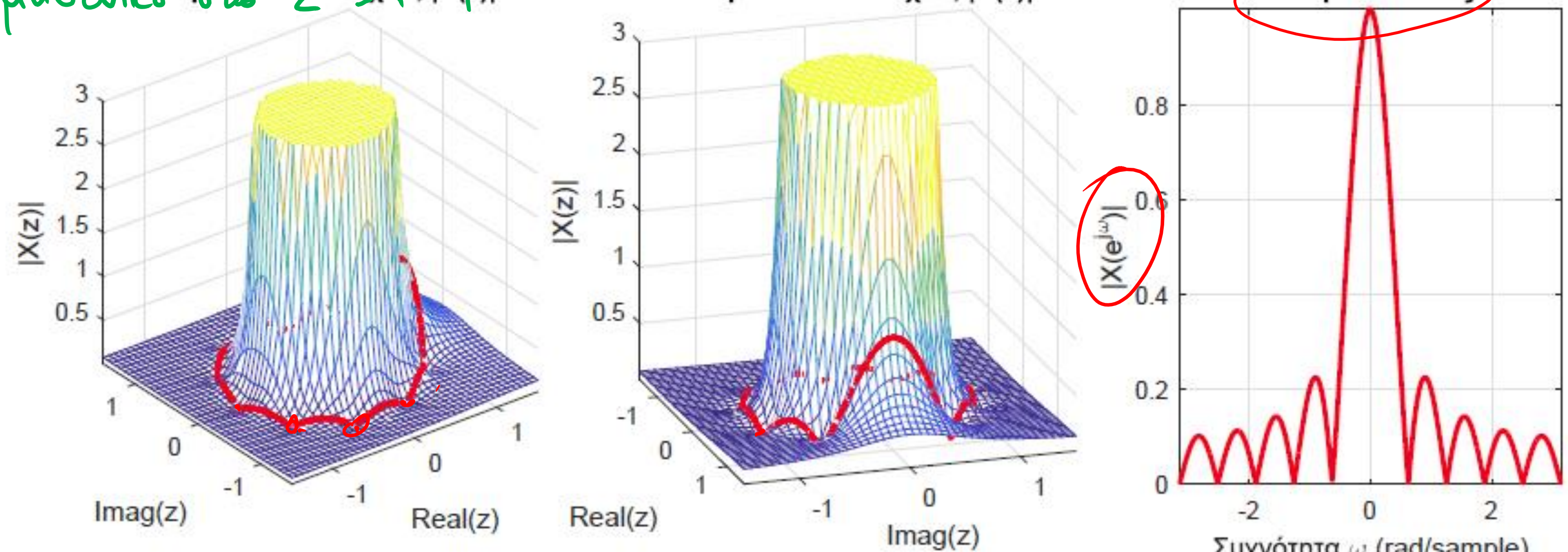
$k=0$ $z_0 = 1$



Πόλος στο $z=1$

Μηδενικό στο $z=1$

Αλληλοεξουδετερώνονται

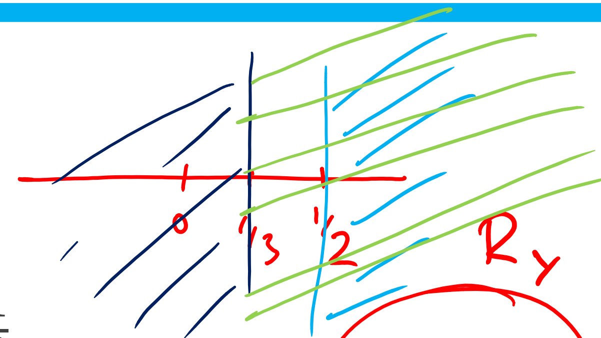


• Ιδιότητες Μετασχ. Ζ

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Ζ	Πεδιο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n-n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Ζ	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Z του σήματος



$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad R_x \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1/2$$

$$W(z) = \frac{3/2}{1 - 1/2\, z^{-1}} - \frac{1/2}{(1 - 1/2\, z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} = \frac{(1 - \frac{1}{3} z^{-1})\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} =$$

$$= \frac{\cancel{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}}{\cancel{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

$$\rightarrow |z| > \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow |z| < \frac{1}{3},$$

Συνεχίζεται... ☺