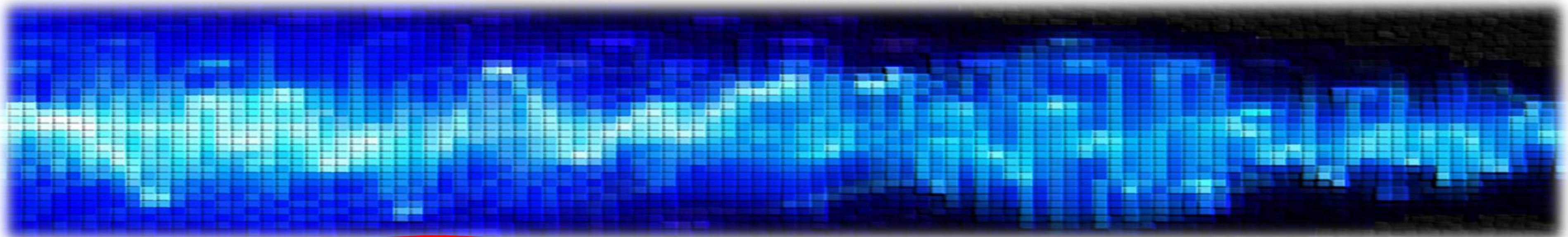
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η



- Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Σήματα

$x[n]$

$\delta[n], u[n], \ldots$

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

Συστήματα

$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n] = T\{x[n]\}$

$h[n]$

$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n] = h[n]$

Αιτιατότητα $\quad h[n] = 0, \; n < 0$

Ευστάθεια $\quad \sum_n |h[n]|^2 < \infty$

ΓΧΑ $\quad$ Σ.Α.Η.

$y[n] = h[n] * x[n]$

$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] \cdot e^{-j\omega n}$

$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n}$

Διάλεξη 7

- **Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου…**

  - Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
    - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$
    - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$

  - Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν δεν έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος

  - Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
    - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα

  - Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! ☺

  - Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! ☺ – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου

- Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό

- Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

DTFT → DFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{x[n]} e^{-j\omega n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους (Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης (Phase Spectrum)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi, \pi]$, και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.

2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών *όλων* των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_x(e^{j\omega})}$$

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega \iff x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη**

  - Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

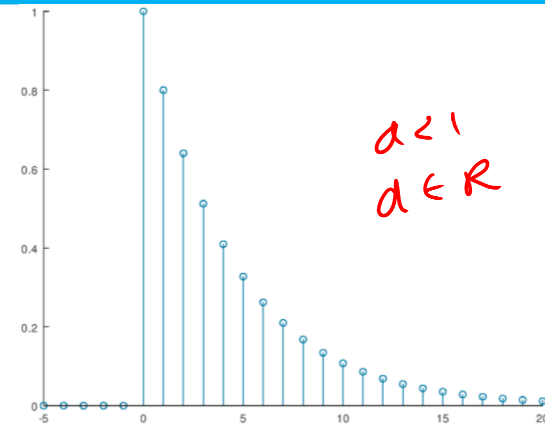
  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

  - Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty}$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$.



$a < 1$

$a \in R$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}},$$ εφόσον $|a e^{-j\omega}| < 1 \Rightarrow |a| \cdot \cancel{|e^{-j\omega}|}^{1} < 1 \Rightarrow |a| < 1$

$$x[n] = a^n u[n], \ |a| < 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$a^n u[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \cdot e^{j\omega n} \, d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{1 - a e^{j\omega}}{|1 - a e^{-j\omega}|^2} = \underbrace{\boxed{\frac{1 - a\cos\omega}{|1 - a e^{-j\omega}|^2}}}_{X_R(e^{j\omega})} + j \underbrace{\boxed{\frac{(-a\sin\omega)}{|1 - a e^{-j\omega}|^2}}}_{X_I(e^{j\omega})}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$ όταν $|a| < 1$

$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$

$z \cdot z^* = |z|^2$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|<1$$

Φάσμα πλάτους:

$$|X(e^{j\omega})|=\frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|}=\frac{1}{|\underbrace{1-a\cos\omega}_{Re}+j\underbrace{a\sin\omega}_{Im}|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2+a^2\sin^2\omega}}=\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_R(e^{j\omega})&=\frac{1-a\cos\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2} \\ X_I(e^{j\omega})&=\frac{-a\sin\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2}\end{aligned}}$$

Φάσμα φάσης:

$$\varphi_x(e^{j\omega})=\tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_x(e^{j\omega})=\tan^{-1}\frac{-a\sin\omega}{1-a\cos\omega}=-\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$x[n] = a^n u[n]$

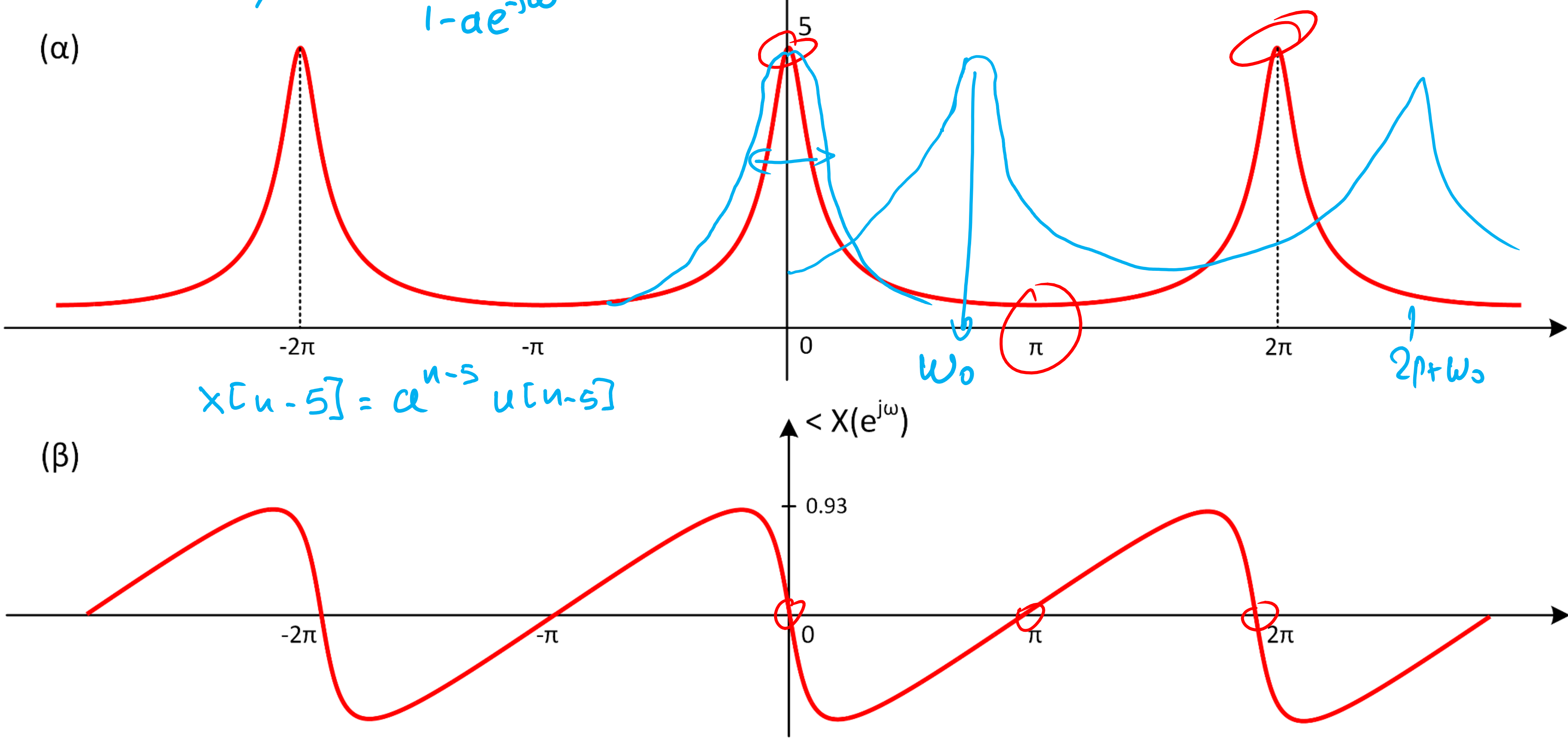
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$x[n] \cdot e^{j\omega_0 n} = a^n e^{j\omega_0 n} u[n]$

$\hookrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

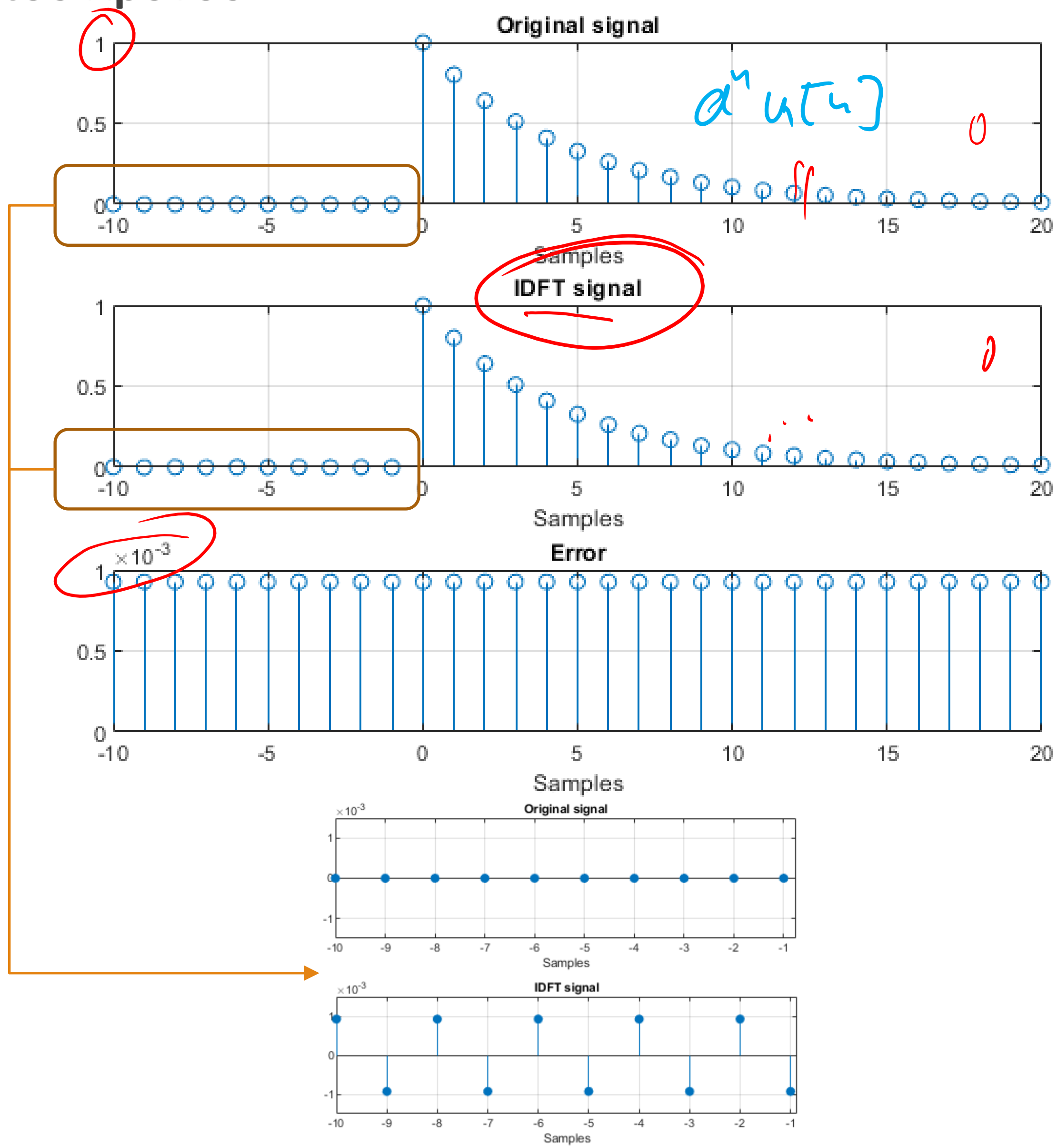
$a = \frac{4}{5}$ ✓

$x[n-5] = a^{n-5} u[n-5]$

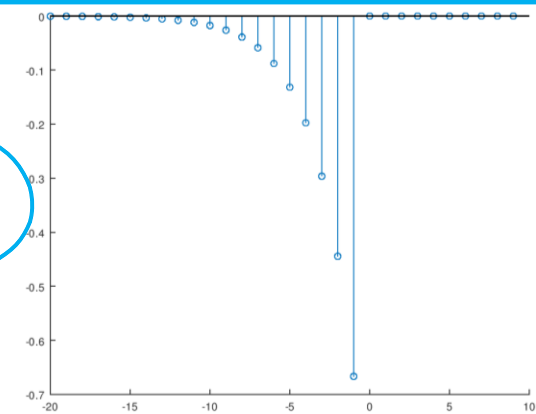


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $|a| > 1$.



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\ n \le -1} e^{-j\omega n} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a \cdot e^{-j\omega})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a e^{-j\omega})^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} \cdot e^{j\omega})^n =$$

$\{n \to -n\}$

$$|a^{-1} e^{j\omega n}| < 1 \Rightarrow |a^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} < 1 \Rightarrow \boxed{|a| > 1}$$

$$\boxed{\sum_{n=N_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{1-a}, \quad |a| < 1}$$

$$= -\frac{(a^{-1} e^{j\omega})^1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} = -\frac{1}{a e^{-j\omega} - 1} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a| > 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x[n] = -a^n u[-n-1], \quad |a| > 1 \\ &X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \\ &X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \end{aligned}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$x[n] = -a^n u[-n-1], \quad |a|>1$$

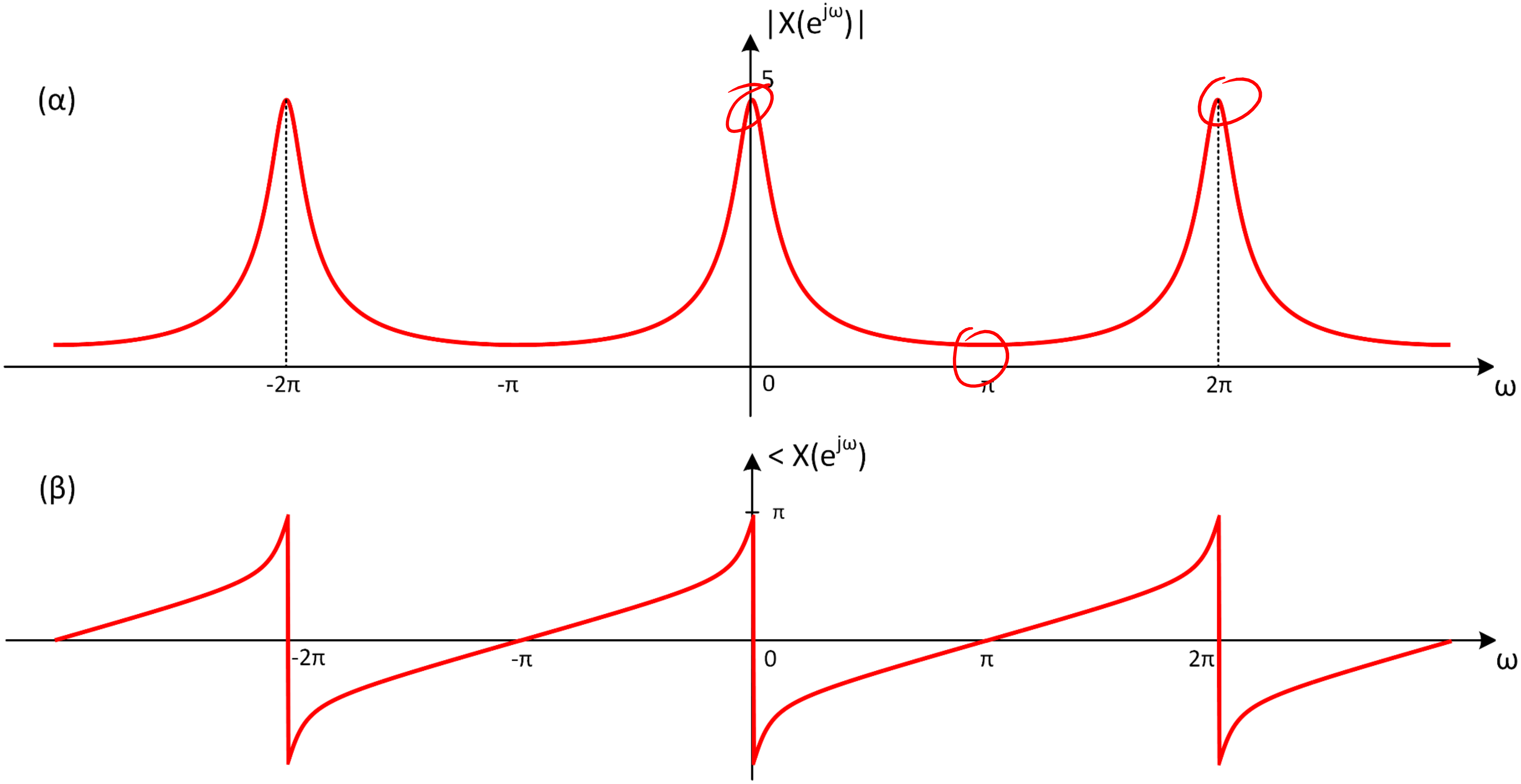
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}, \quad |a|>1$$

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1$$

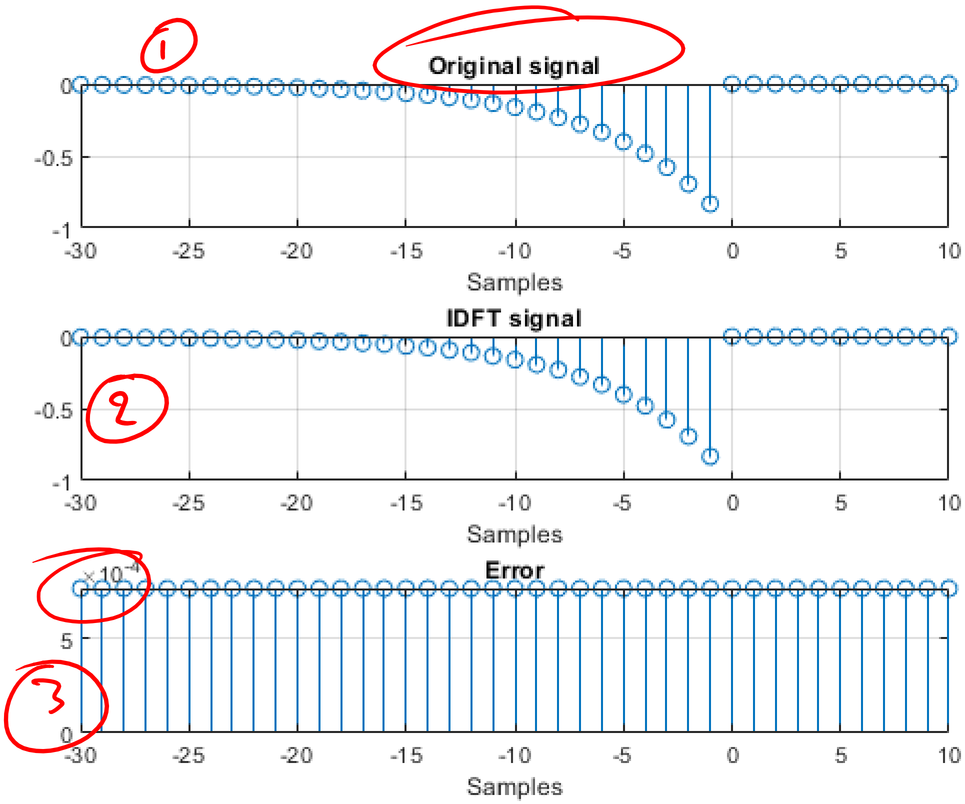
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = \frac{6}{5}$

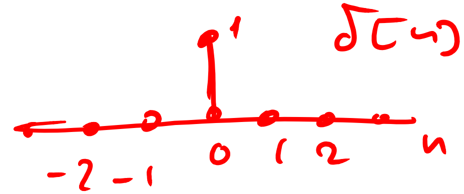


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```

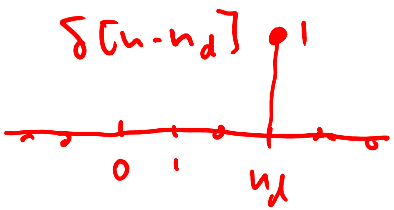


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

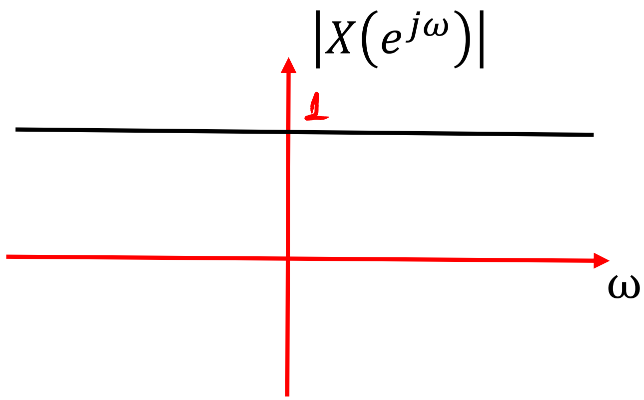


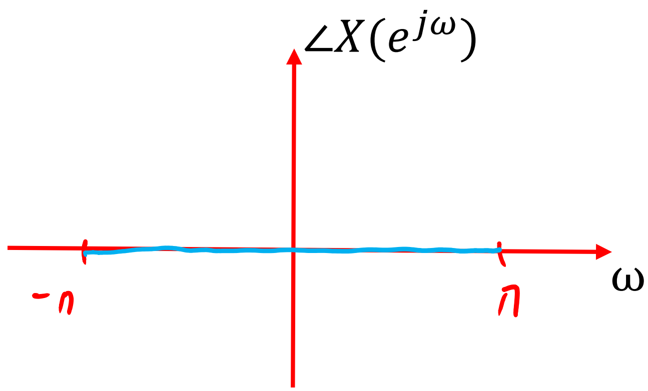
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\cdot e^{-j\omega n} = \delta[0] e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega n}) = 1 \quad \forall \omega$$



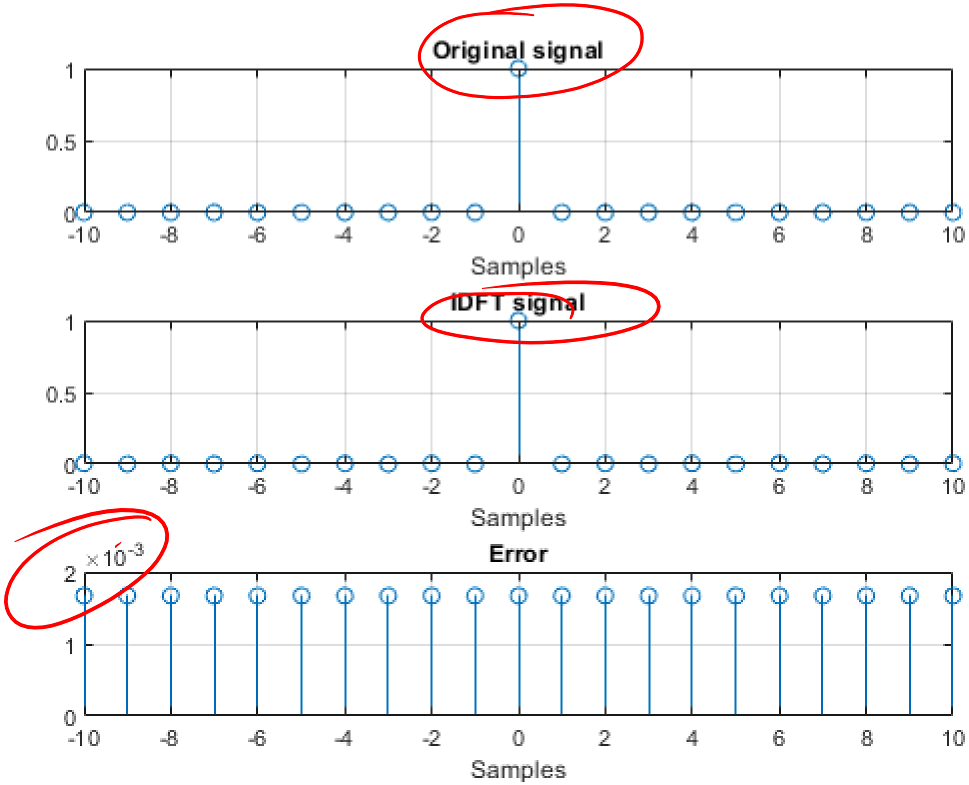
$$x_1[n] = \delta[n-n_d] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega n}) = e^{-j\omega n_d}$$



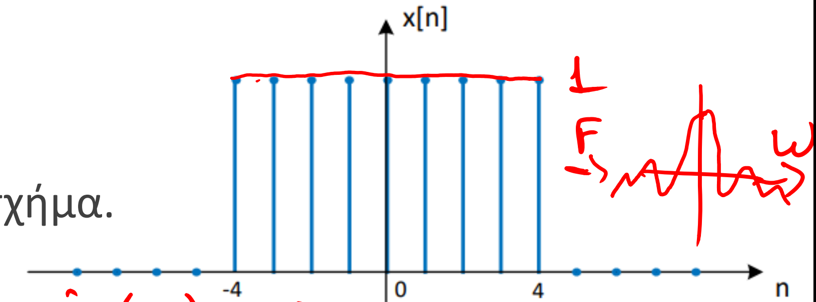


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

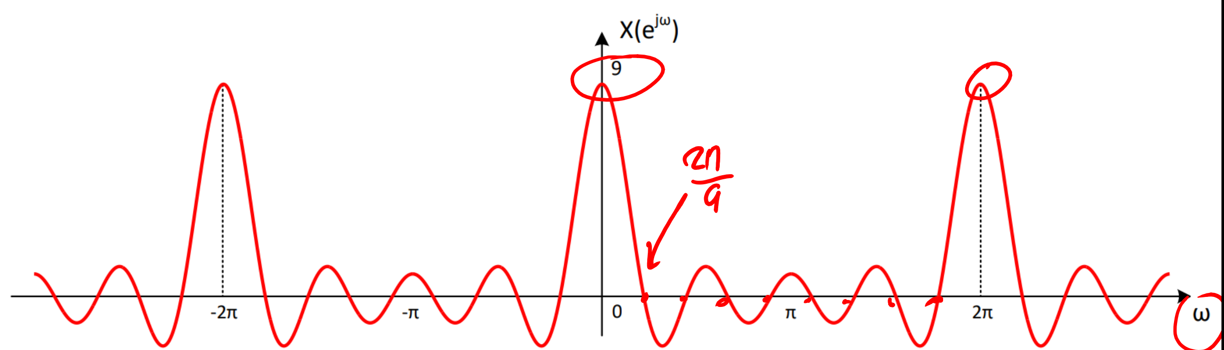


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega(-4)} - e^{-j\omega 5}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1}-a^{N_2+1}}{1-a}$$

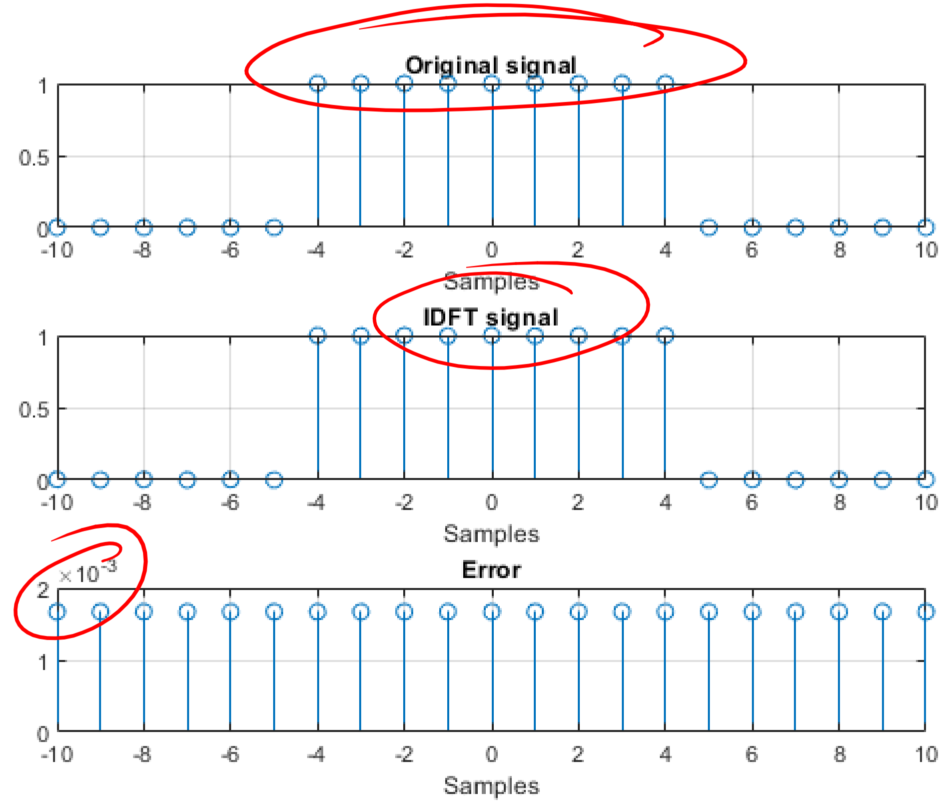
$$= \frac{e^{j4\omega}-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\cancel{e^{-j\omega/2}}}{\cancel{e^{-j\omega/2}}}\,\frac{e^{j9\omega/2}-e^{-j9\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}} = \frac{\cancel{2j}\sin(9\omega/2)}{\cancel{2j}\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(9\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{9\omega_k}{2} = k\pi \Rightarrow \omega_k = k\frac{2\pi}{9}$$

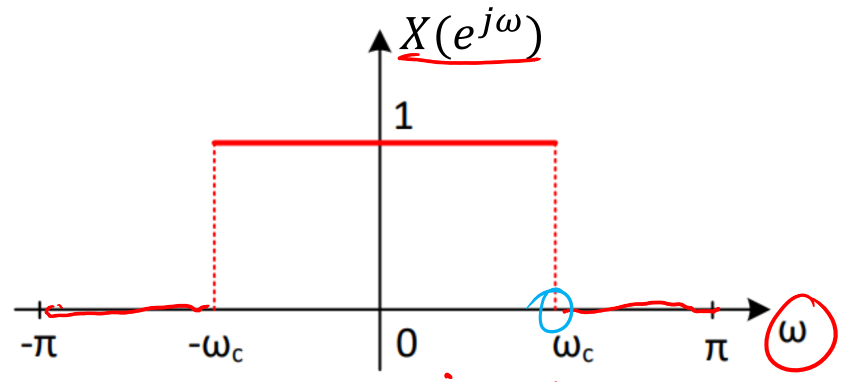


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9ω/2)/sin(ω/2)
% για κάθε ω
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

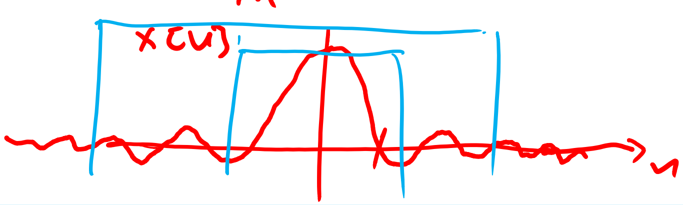


$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$

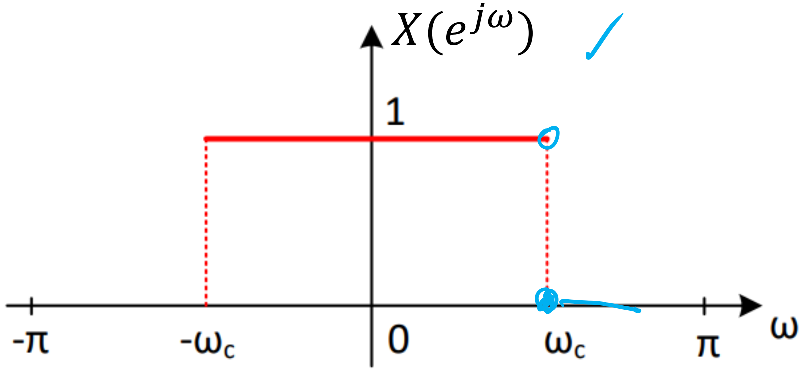
$$= \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\cancel{2j}\,\pi n}\,\cancel{2j}\sin(\omega_c n) \Rightarrow$$

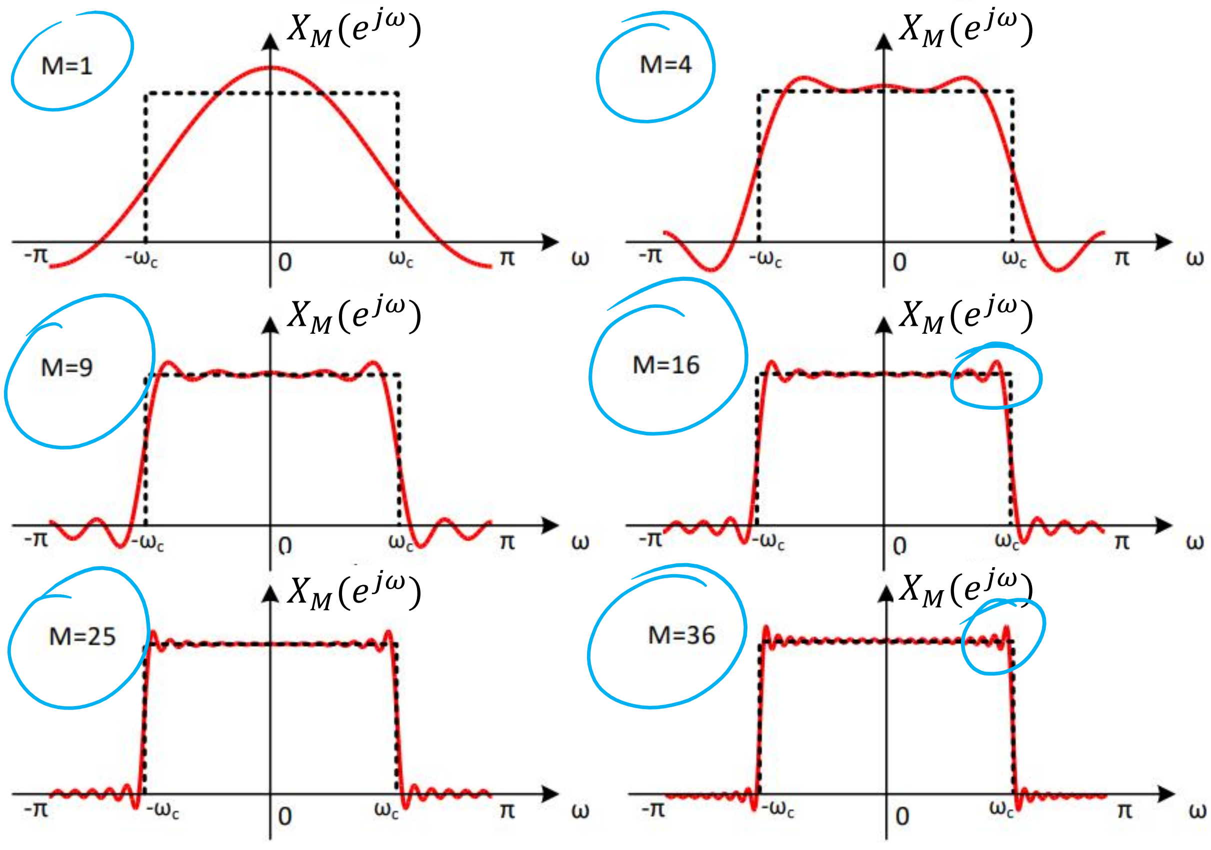
$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n)} \qquad -\infty < n < \infty$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



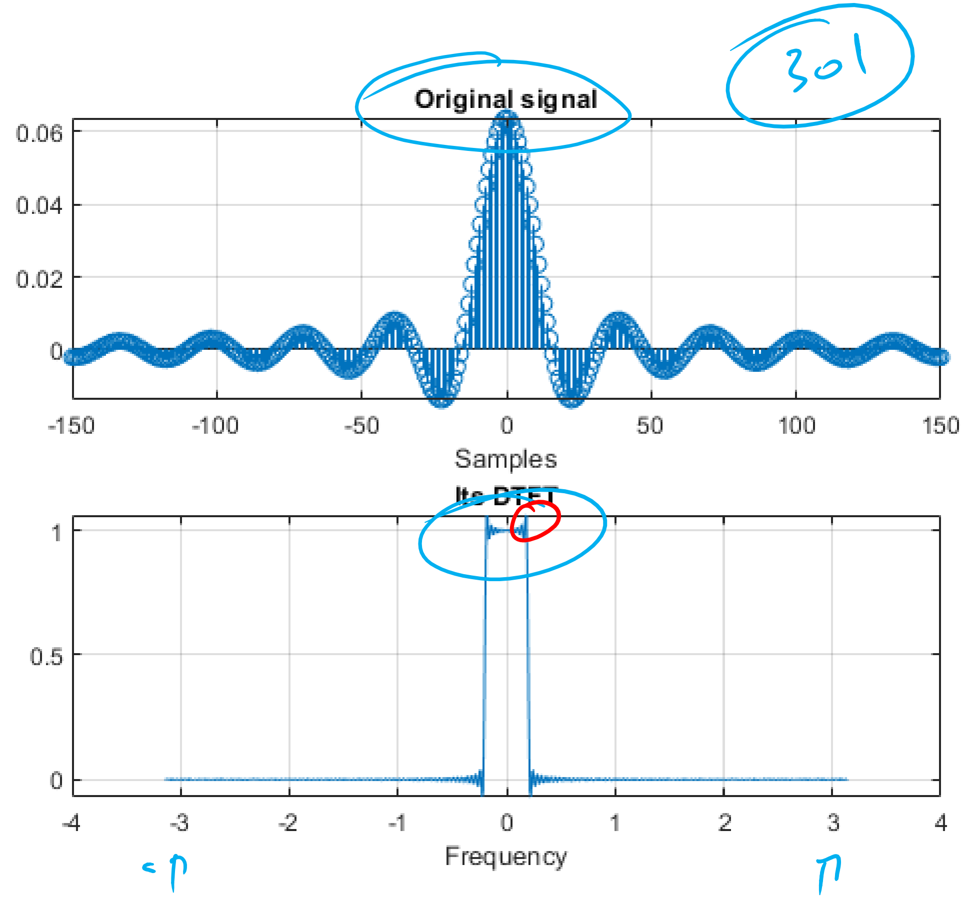
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.





- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



Συνεχίζεται....