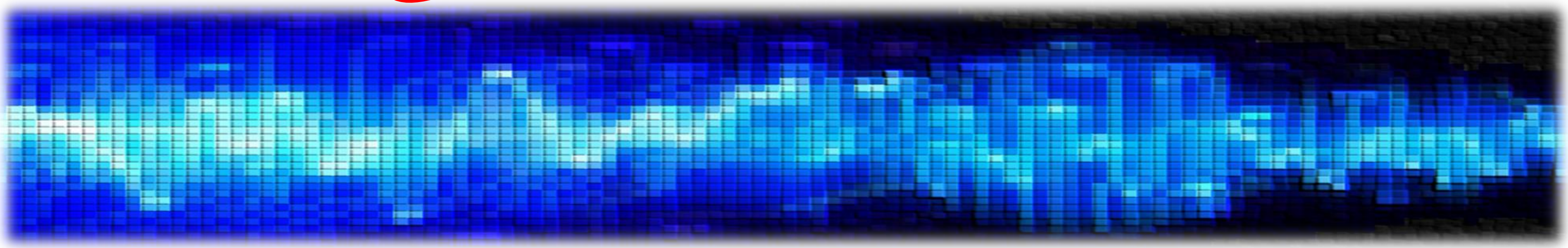
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η



- Δειγματοληψία (reminder)
- Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- ***Ως τώρα… (από HY215)***
- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \boxed{e^{j2\pi k f_0 t}}$$

$x(t) = x(t+T_0)$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$T_0 \to \infty$

μη περιοδικά

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$s = \sigma + j2\pi f$

$e^{-\sigma t}$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$


$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

Ακριβής και ~~τέλεια ανακατασκε~~υή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \qquad |f| > f_{max}$$

$-f_{max} \leq f \leq f_{max}$

με $f_{max}$ τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

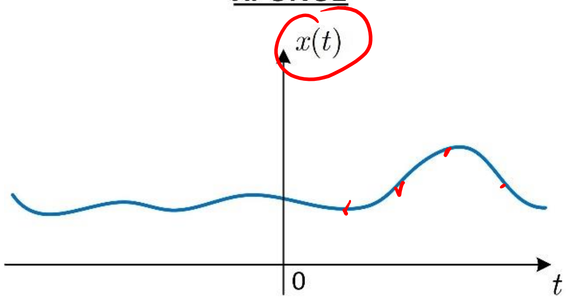
2. Η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s$ πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα $f_{max}$

$$\boxed{f_s > 2f_{max}}$$

- Η συχνότητα $f_{max}$ ονομάζεται **συχνότητα Nyqu**ist και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**

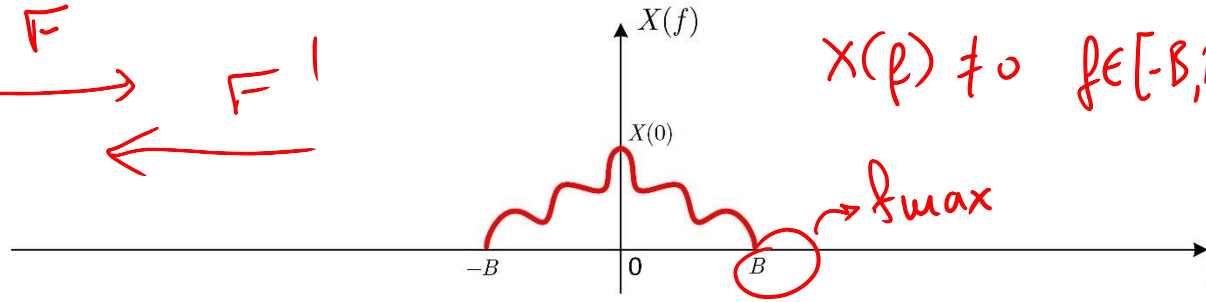
- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά $f_s$ Hz στο πεδίο της συχνότητας

**ΧΡΟΝΟΣ** | **ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**




$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

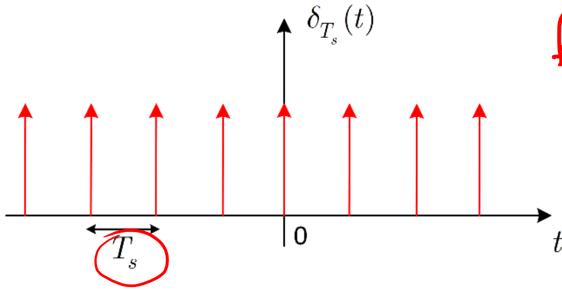
$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$




$X(f) \neq 0 \quad f \in [-B, B]$

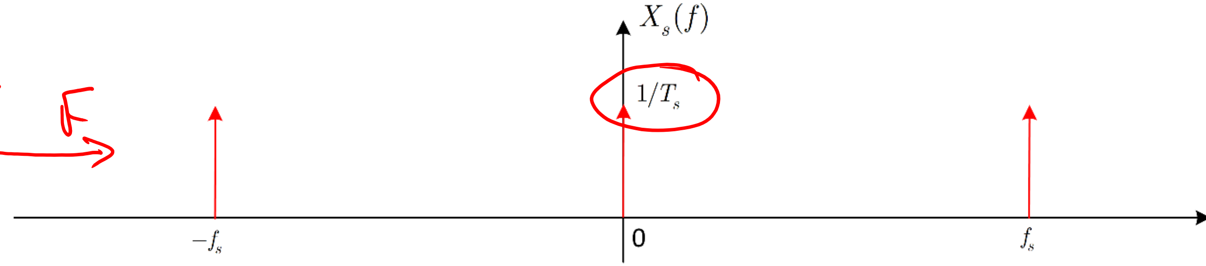
$\rightarrow f_{max}$

$\bullet$ | $\bigstar$ (Συνέλιξη)




$f_s = \frac{1}{T_s}$

$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

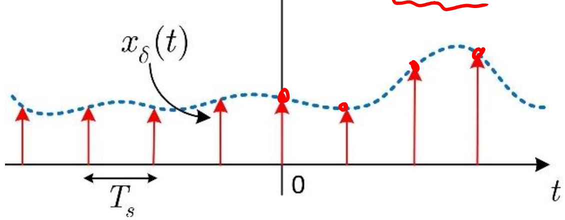


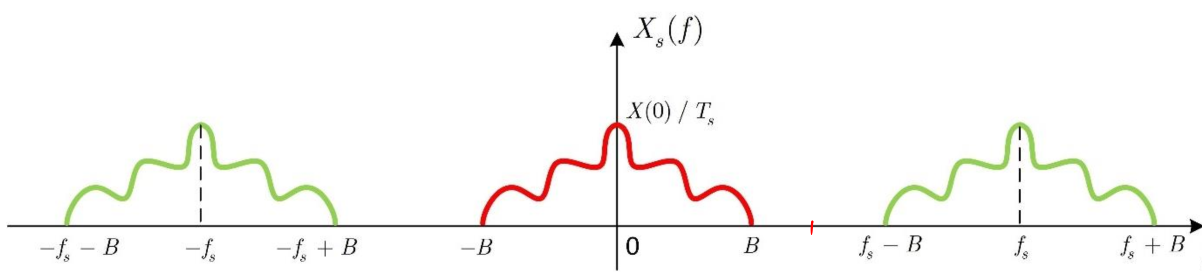

= | =

$t = nT_s$

$n \in \mathbb{Z}$

$x_s(t) = x[nT_s] = x[n]$



- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

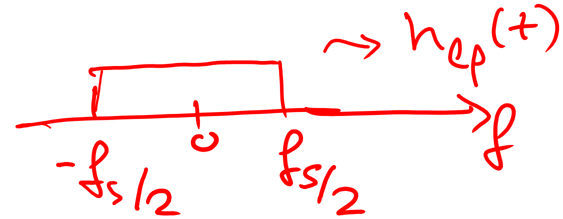
Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_s(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

   f

$$H_{lp}(f) = T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

low pass




δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_s(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφά» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\mathrm{sinc}(.)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

   f

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

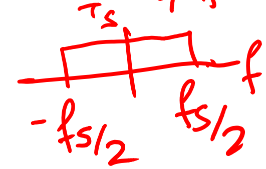
- Δηλαδή:

$X_s(f)$

$\updownarrow F$

$$x_{rec}(t) = x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \rightarrow H_{lp}(f)$$

$X_s(f)$ $H_{lp}(f)$

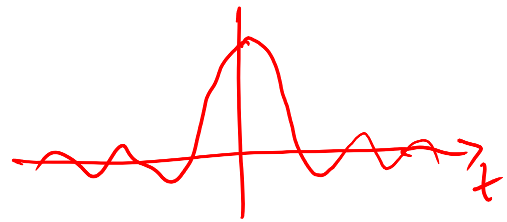


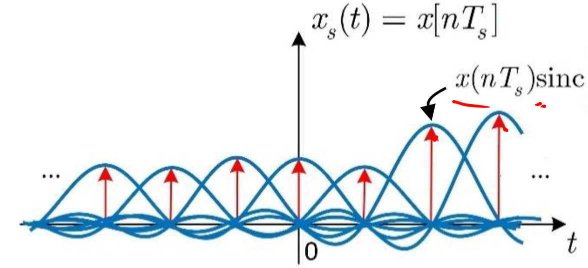

$F^{-1}$ $\rightarrow$

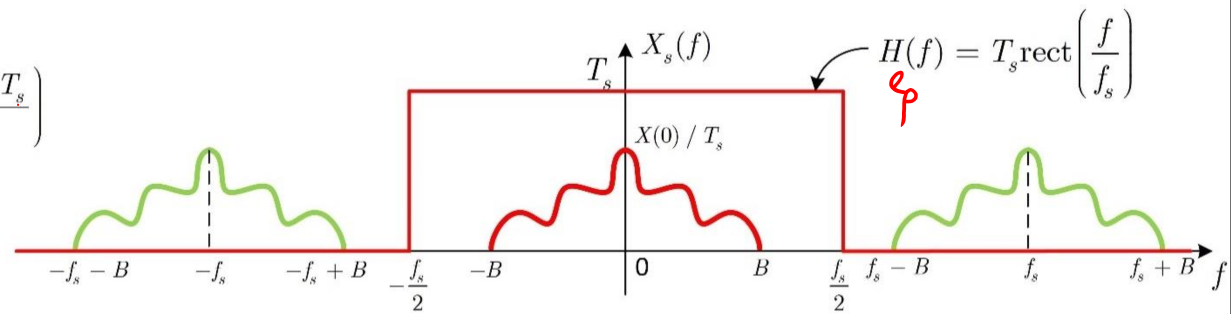
$\rightarrow \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$

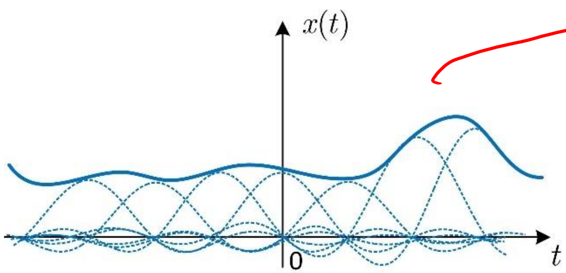
$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

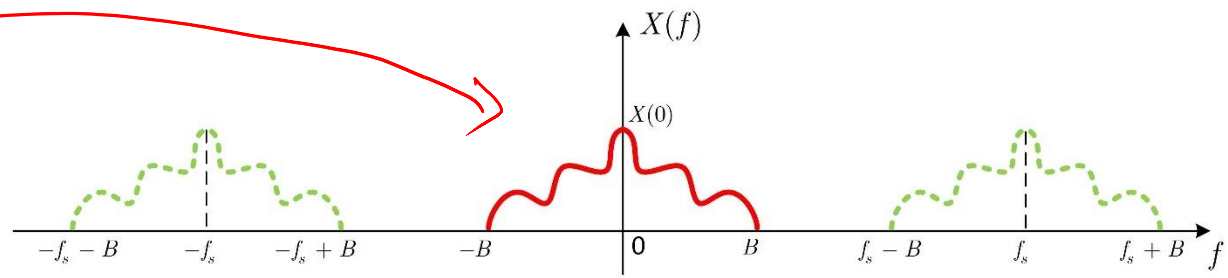
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$



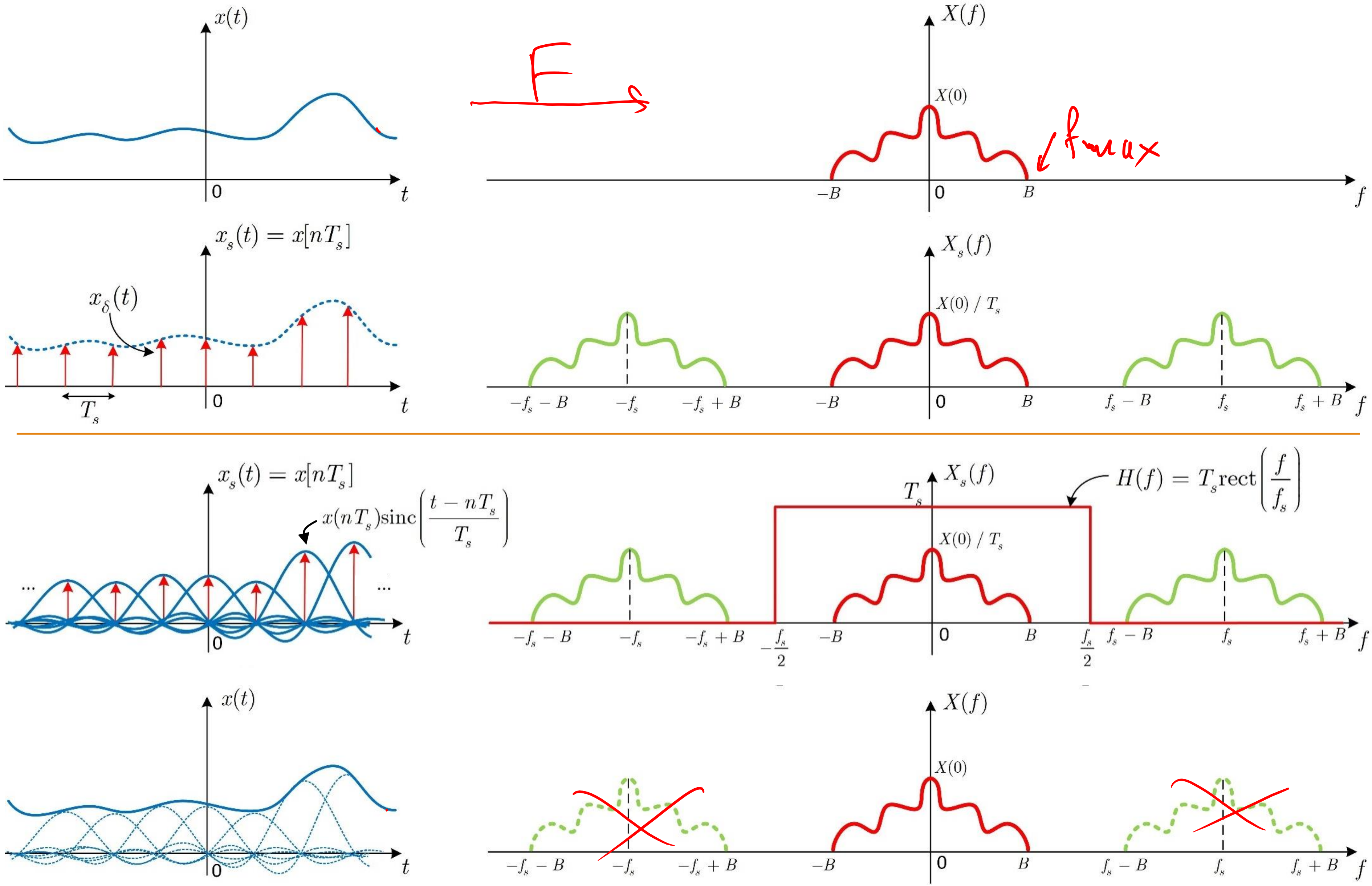



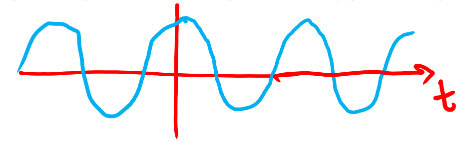



**ΧΡΟΝΟΣ** **ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**



- **Παράδειγμα**:
  - Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s$ και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.




$f_s = \frac{1}{T_s} \Rightarrow T_s = \frac{1}{f_s}$ $\qquad t = nT_s$

$n \in \mathbb{Z}$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \underset{t=nT_s}{\Rightarrow} x(nT_s) = A\cos(2\pi f_0 \cdot nT_s) = A\cos\Big(\overbrace{2\pi \frac{f_0}{f_s}}^{\omega_0} n\Big) = x[n]$$

$T_s = \frac{1}{f_s}$

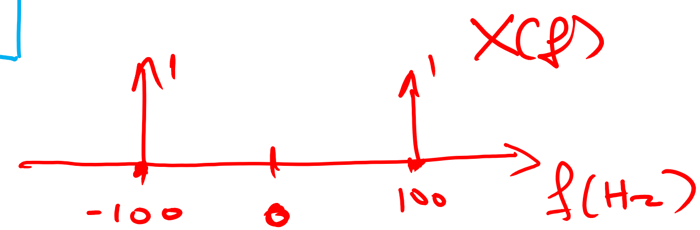
Δηλ $x[n] = A\cos(\omega_0 n)$ $\qquad \boxed{\omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s}}$

Παράδειγμα

$x(t) = 2\cos(2\pi\, 100 t)$

$A = 2$

$f_0 = 100$ (Hz)



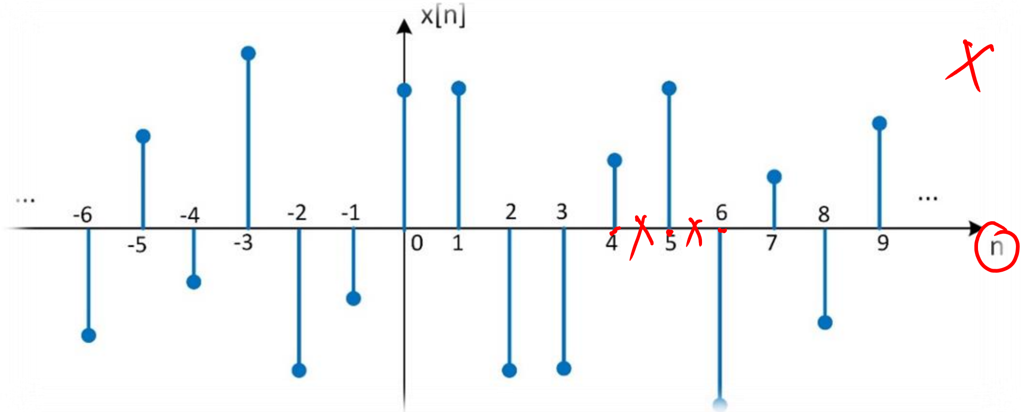

$f_s = 8000$ Hz

$$x[n] = 2\cos\left(2\pi \frac{100}{8000} n\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{40} n\right)$$

$\omega_0 = \frac{\pi}{40}$ (rad)

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου




- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\mathrm{Im}\{x[n]\}$$

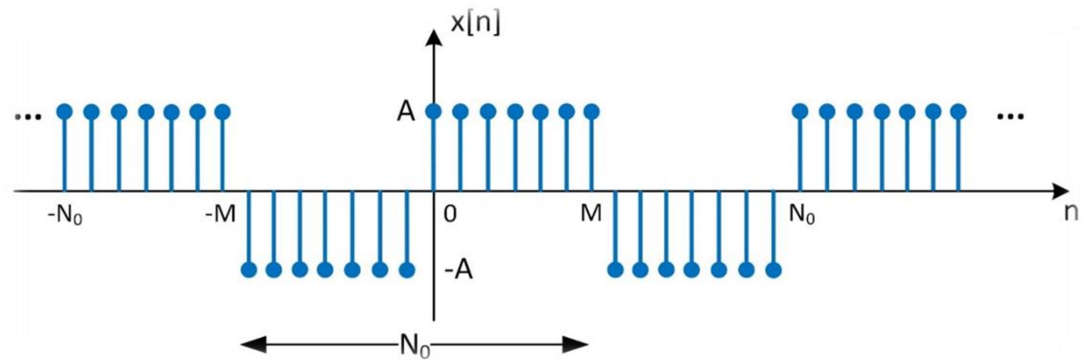
$$= |x[n]|\, e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{x[n]\} + \mathrm{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{x[n]\}}{\mathrm{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα




- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός *ακέραιος* $N$ τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n+N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός $N$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται ***περίοδος*** του σήματος.

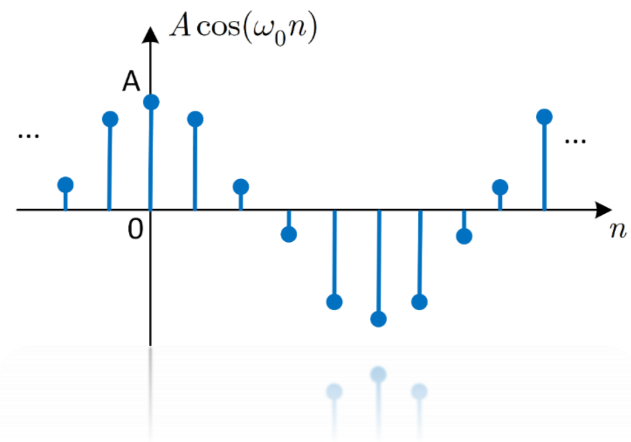
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους $N_1, N_2$, τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

6, 12

$$\frac{\cancel{6}\cdot 12}{\cancel{6}} = 12$$

- **<u>Ημίτονα</u>**
- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος $N$, τότε θα ικανοποιεί τη σχέση




$$\boxed{x[n] = x[n+N]}$$

- Άρα

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0(n+N)) = x[n+N]$$
$$A\cos(\underbrace{\omega_0 n}) = A\cos(\underbrace{\omega_0 n + \omega_0 N}) \;?$$

- Πρέπει να ισχύει

$$\boxed{\omega_0 N = 2\pi k,} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2\pi k}{\omega_0},} \qquad N, k \in \mathbb{Z}$$

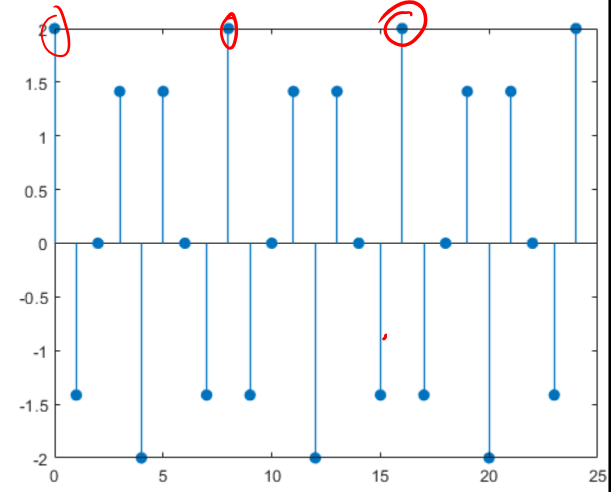
Θέλουμε το <u>μικρότερο</u> $k$ που να δίνει ακέραιο $N$!

- **Ημίτονα**
- Παραδείγματα:
  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

Είναι περιοδικό

$\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$ $N = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\cancel{\pi}}{\frac{3\cancel{\pi}}{4}}k = \frac{8}{3}k$

μικρότερο k | $k=3 \Rightarrow \boxed{N=8}$

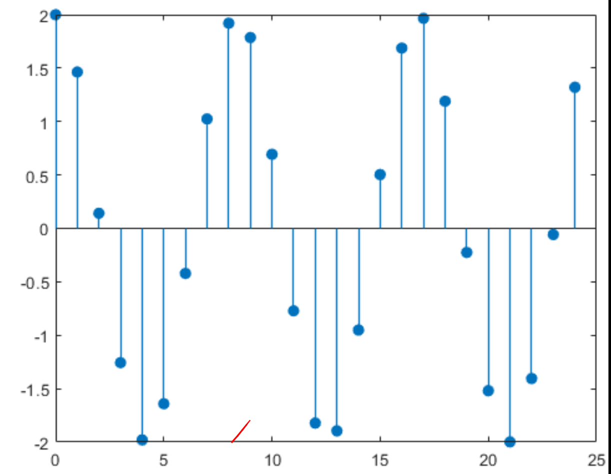


  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3}{4}n\right)$

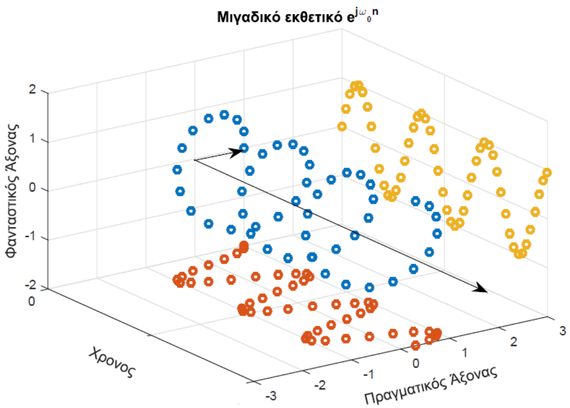
Δεν είναι περιοδικό

$\omega_0 = \frac{3}{4}$ , $N = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}}k = \frac{8\pi}{3}k$

$N \notin \mathbb{Z}$



- **Ημίτονα**




- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$\lambda, n \in \mathbb{Z}$

$k = \lambda \cdot n$

$e^{j2\pi k} = 1 \ \forall k$

- Στο διακριτό χρόνο

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = \underline{e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n}}$$

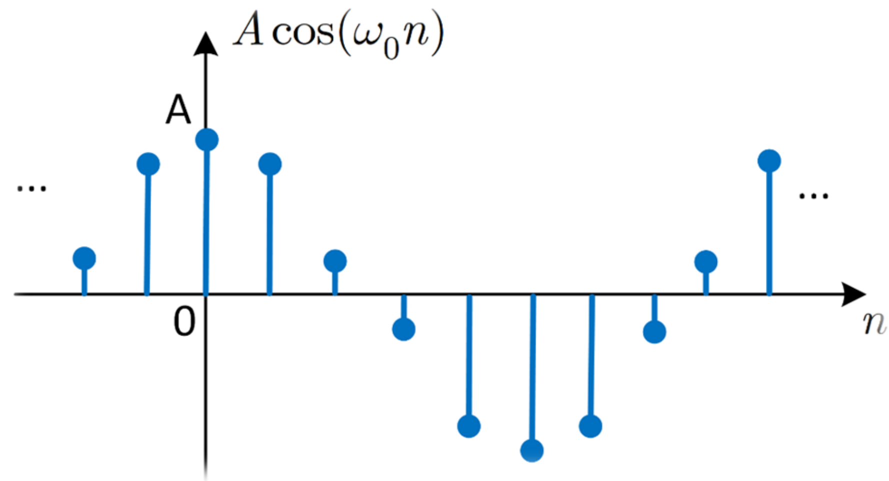
$n, \lambda \in \mathbb{Z}$

- Αν $\varphi = \underline{2\pi\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \qquad (!!!!!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με $2\pi$!!
  - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

- **<u>Ημίτονα</u>**
- Σύνοψη:




ΧΡΟΝΟΣ ⟷ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

**Περιοδικό?**
Εξαρτάται από το $\omega_0$!

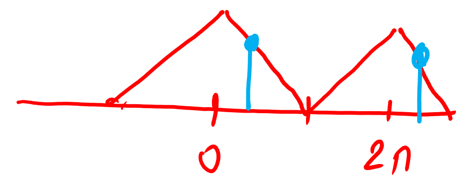
**Περιοδικό?**
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με $2\pi$ (rad)

$f_s$ (Hz)

- **Ημίτονα**

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις

- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
  - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας




- Όμως…

$$x_1[n] = 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{4\pi n}{3} = \frac{6\pi n}{3} - \frac{2\pi n}{3} = 2\pi n - \frac{2\pi n}{3}$$

$$x_2[n] = 4\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$\boxed{\omega_2 = 2\omega_0} \; ?$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!)}$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
  - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

- **Ημίτονα**

$\omega_0 = 0$

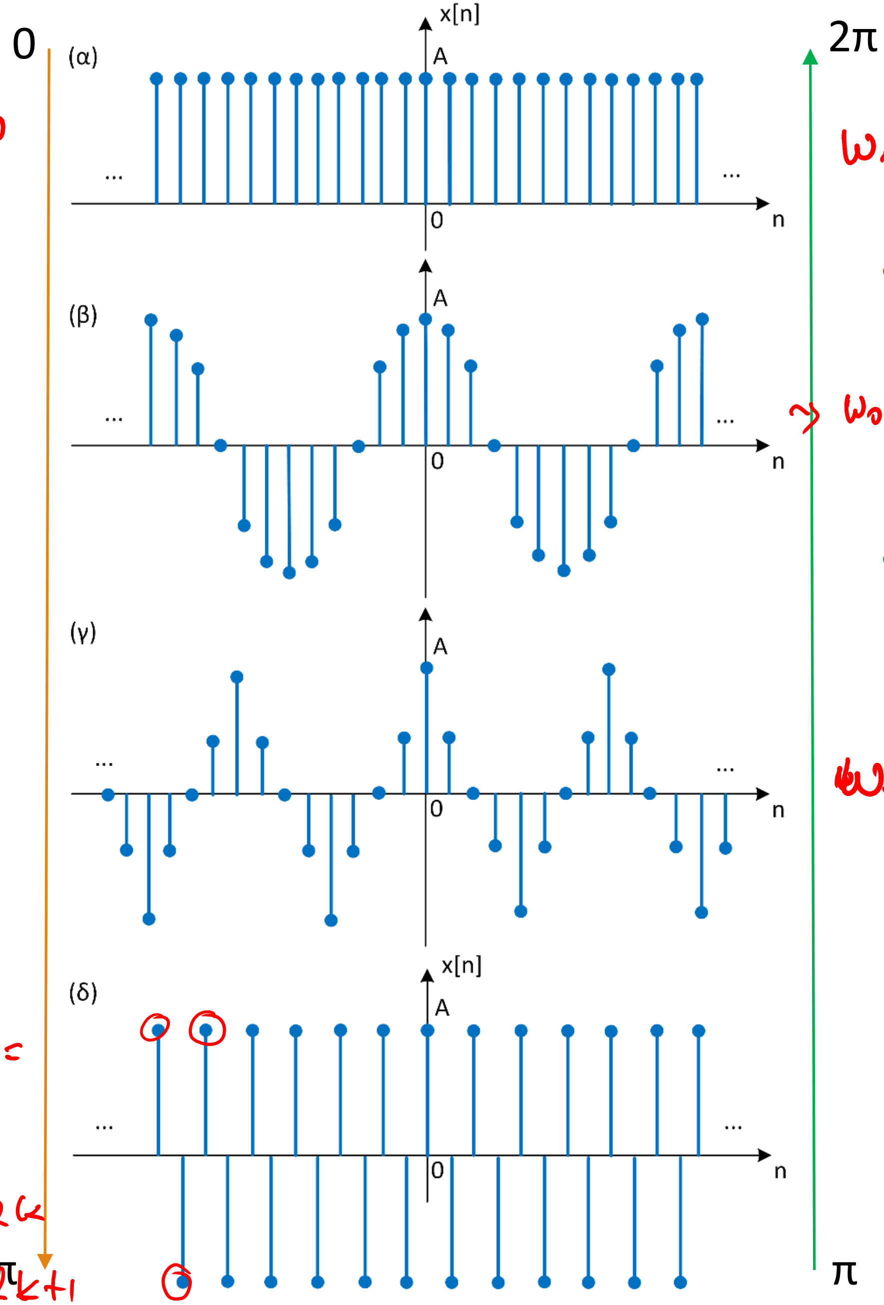
$\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$x[n] = A\cos(\pi n) =$

$\omega_0 = \pi$

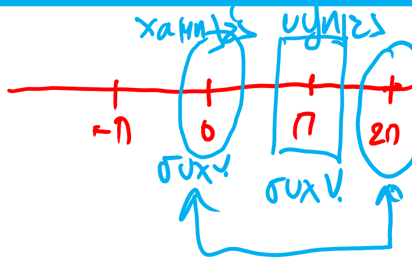
$= \begin{cases} A & n = 2k \\ -A & n = 2k+1 \end{cases}$




$\omega_0 = 2\pi$

$\rightarrow \omega_0 = \frac{5\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$



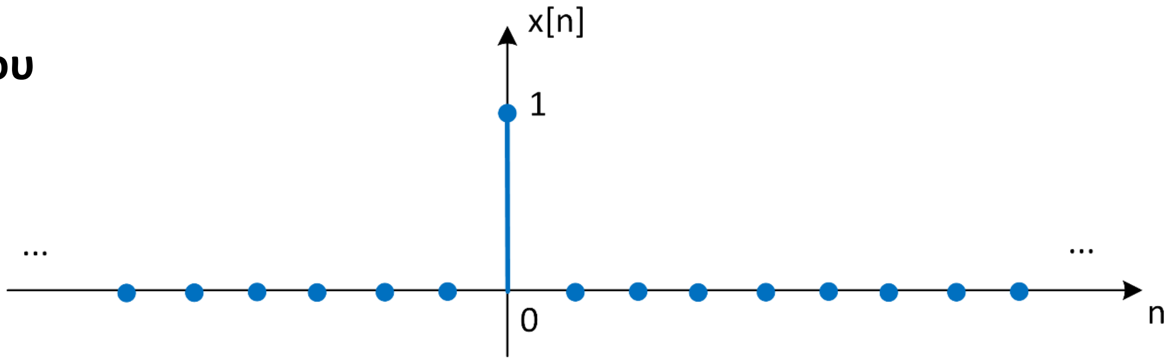

- Στο [0,π], η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το $\omega_0$
- Στο (π, 2π], η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το $\omega_0$!!
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

- **<u>Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου</u>**

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**




Ορισμός:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

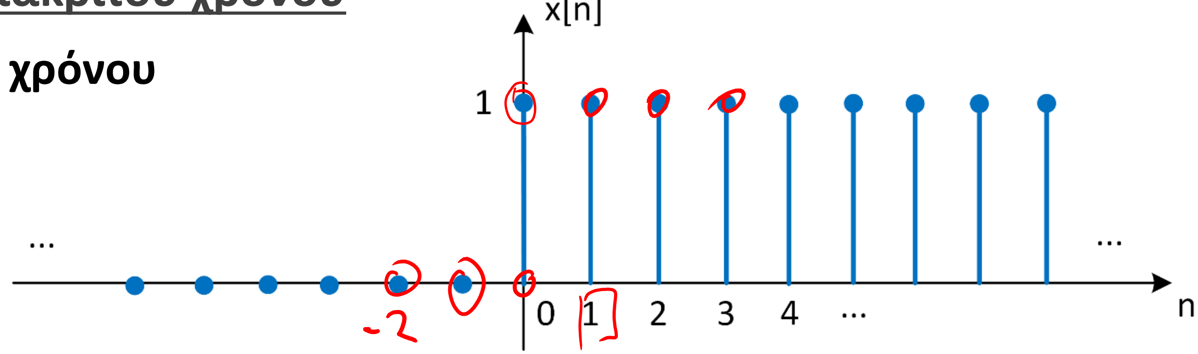
- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1}$$

# Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**




Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

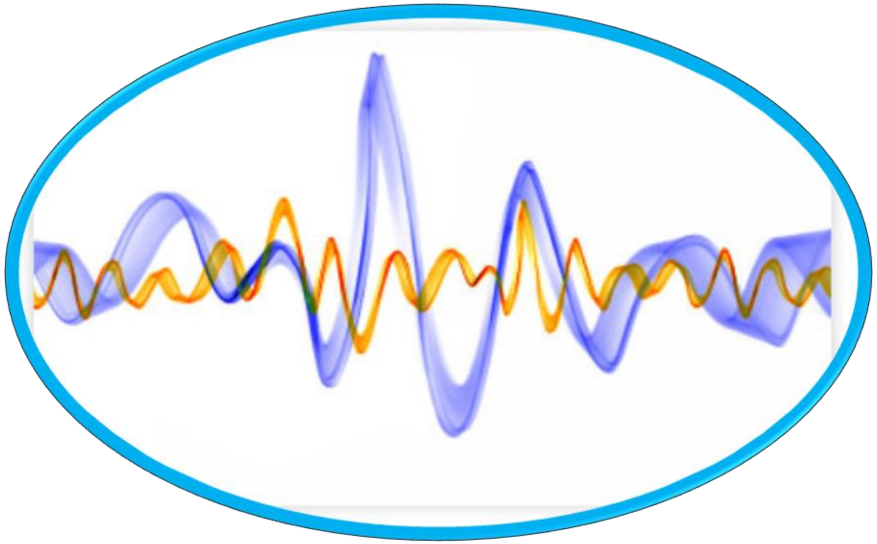
- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



# Σημειώσεις