HY370

Ασκήσεις 20/11/2020

Άσκηση 1.

Έστω S_1 ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h_1[n]$ και απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$. Η είσοδος $x[n]$ και η έξοδος $y[n]$ για το S_1 σχετίζονται με την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \qquad (1)$$

$$\xleftrightarrow{Z} Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

i. Αν ένα ΓΧΑ σύστημα S_2 έχει απόκριση συχνότητας $H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega})$, πώς θα χαρακτηρίζατε το δεύτερο σύστημα ως προς την "περατότητά" του; Χαμηλοπερατό, ζωνοπερατό, ή υψιπερατό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ii. Έσω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S_3 με απόκριση συχνότητας $H_3(e^{j\omega})$ με την ιδιότητα

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1 \qquad (2)$$

Είναι το S_3 ελάχιστης φάσης; Μπορεί το S_3 να είναι ένα εκ των τεσσάρων Τύπων φίλτρων γραμμικής φάσης που γνωρίζετε; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

$$Y(z)\cdot\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right) = X(z) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

Είναι το S_3 ελάχιστης φάσης; Μπορεί το S_3 να είναι ένα εκ των τεσσάρων Τύπων φίλτρων γραμμικής φάσης που γνωρίζετε; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

$$Y(z)\cdot\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right) = X(z) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

(i) $\boxed{H_2(z) = H_1(-z) \text{ δίνεται}}$

$$H_1(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

έχει 1 πόλο 2ης τάξης στη θέση $z = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\pi}$ άρα ενισχύονται οι συχνότητες γύρω από την $\omega = \pi$ οπότε το φίλτρο είναι υψιπεράτο.

Άσκηση 1.

Έστω S_1 ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h_1[n]$ και απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$. Η είσοδος $x[n]$ και η έξοδος $y[n]$ για το S_1 σχετίζονται με την εξίσωση διαφορών

$$H_1(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \tag{1}$$

i. Αν ένα ΓΧΑ σύστημα S_2 έχει απόκριση συχνότητας $H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega})$, πώς θα χαρακτηρίζατε το δεύτερο σύστημα ως προς την "περατότητά" του; Χαμηλοπερατό, ζωνοπερατό, ή υψιπερατό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ii. Έσω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S_3 με απόκριση συχνότητας $H_3(e^{j\omega})$ με την ιδιότητα

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1 \tag{2}$$

$$H_3(z)\cdot H_1(z) = 1$$

Είναι το S_3 ελάχιστης φάσης; Μπορεί το S_3 να είναι ένα εκ των τεσσάρων Τύπων φίλτρων γραμμικής φάσης που γνωρίζετε; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

άρα $H_3(z) = \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2$

άρα έχει μηδενικό στη θέση $z = 1/2$, $\frac{1}{2}\cdot e^{j0}$

δηλ. καταστέλει μερικώς τις συχνότητες γυρω από το $\omega = 0$. (υψιπεράτό)

ii. Έσω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S_3 με απόκριση συχνότητας $H_3(e^{j\omega})$ με την ιδιότητα

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1 \qquad H_3(z)\cdot H_1(z) = 1 \quad (2)$$

Είναι το S_3 ελάχιστης φάσης; Μπορεί το S_3 να είναι ένα εκ των τεσσάρων Τύπων φίλτρων γραμμικής φάσης που γνωρίζετε; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

άρα $H_3(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2$

άρα έχει μηδενικό στη θέση $z = 1/2$, $\frac{1}{2}\cdot e^{j0}$

δηλ. καταστέλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από το $\omega = 0$. (υψιπεράτο)

το S_3 είναι ελάχιστης φάσης αφού πόλοι και μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

ΔΕΝ είναι γραμμικής φάσης (αφού τα μηδενικά δε βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη.)

άρα $H_3(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2$

άρα έχει μηδενικό στη θέση $z = 1/2$, $\frac{1}{2} \cdot e^{j0}$

δηλ. καταστέλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από το $\omega = 0$. (υψιπεράτο)

$1 + \frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1}$

το S_3 είναι ελάχιστης φάσης αφού πόλοι και μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

ΔΕΝ είναι γραμμικής φάσης (αφού τα μηδενικά δε βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη.)

Άλλος τρόπος:

$$h_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

<u>δεν</u> παρατηρούμε κάποια συμμετρία των FIR φίλτρων γραμμ. φάσης.

Άσκηση 2.

Έστω τρια ΓΧΑ συστήματα που είναι *αιτιατά και πραγματικά*. Σας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες για τα συστήματα αυτά και καλείστε να βρείτε όσο γίνετε περισσότερα στοιχεία για (α) τους πόλους και τα μηδενικά των συστημάτων, και (β) τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης.

i. Το $H_1(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.9e^{j\pi/3}$, και όταν $x[n] = u[n]$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} y[n] = 0$.

ii. Το $H_2(z)$ έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$, έχει γραμμική φάση με $\angle H_2(e^{j\omega}) = -2.5\omega$, και $|H_2(e^{j0})| = 0$.

iii. Το $H_3(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$ και $|H_3(e^{j\omega})| = 1$ για κάθε ω.

$$u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

με $|z|>1$

Τα συστήματα είναι πραγματικά άρα έχουν συζυγή ζεύγη μηδενικών και πόλων ή κάποιοι πόλοι ή μηδενικά είναι πραγματικά.

Τα συστήματα είναι αιτιατά, άρα δεν έχουν πόλο στο άπειρο.

(i) Θα έχει και το συζυγή πόλο στη θέση $z=0{,}9e^{-j\frac{\pi}{3}}$,

$x[n] = u[n]$ τότε

$$Y(z) = H_1(z)\cdot X(z) \quad \text{άρα} \quad Y(z) = \frac{H_1(z)}{1-z^{-1}}$$

ii) $z_1 = 0,8e^{j\pi/4}$ ← μηδενικό και η φάση είναι γραμμική

$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_1^*}, z_1^*$ και η κρουστική απόκριση είναι πραγματική.

(τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή και αμοιβαία ζεύγη).

Αφού το $h_2[n]$ είναι και αιτιατό και γραμμ. φάσης θα είναι ένα από τα FIR I, II, III, IV.

Οι πόλοι είναι στη θέση $z=0$.

και $\measuredangle H_2(e^{j\omega}) = -2,5\omega$

το σύστημα θα είναι τύπου II ή (IV)

Η κρουστική απόκριση θα είναι διάρκειας 6 δειγμάτων

το σύστημα θα είναι τύπου II ή (IV) (*)

Η κρουστική απόκριση θα είναι διάρκειας 6 δειγμάτων

Συνολικά έχουμε 5 μηδενικά και 5 πόλους στο $(z=0)$

$|H_2(e^{j0})| = 0$, $\quad e^{j0} = 1$, $\quad |H_2(1)| = 0$ άρα υπάρχει μηδενικό στη $z=1$

Άρα

$$H_2(z) = A\,(1-z^{-1})(1-z_1)\cdot(1-z_1^*)\cdot\left(1-\frac{1}{z_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{z_1^*}\right)$$

Σημείωση: δείτε διάλεξη 17. ... όταν $\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\frac{\omega M}{2}$

(*)

$\frac{M}{2} = 2{,}5 \Rightarrow M = 5$

διάρκεια κρουστικής απόκρισης $N = M+1 = 5+1 = 6$

Άσκηση 2.

Έστω τρια ΓΧΑ συστήματα που είναι *αιτιατά και πραγματικά*. Σας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες για τα συστήματα αυτά και καλείστε να βρείτε όσο γίνετε περισσότερα στοιχεία για (α) τους πόλους και τα μηδενικά των συστημάτων, και (β) τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης.

i. Το $H_1(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.9e^{j\pi/3}$, και όταν $x[n] = u[n]$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} y[n] = 0$.

ii. Το $H_2(z)$ έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$, έχει γραμμική φάση με $\angle H_2(e^{j\omega}) = -2.5\omega$, και $|H_2(e^{j0})| = 0$.

iii. Το $H_3(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$ και $|H_3(e^{j\omega})| = 1$ για κάθε ω.

(*) (δεν αναφέρεται ότι ο πόλος είναι μοναδικός)

(iii) → είναι ένα all pass σύστημα

οπότε οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη

$$H_3(z) = \frac{(z^{-1} - 0{,}8e^{j\pi/4})(z^{-1} - 0{,}8\cdot e^{-j\pi/4})}{(1 - 0{,}8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0{,}8\cdot e^{-j\pi/4}z^{-1})} \cdot H_{ap}(z)$$

όπου $H_{ap}(z)$ είναι all pass με πόλους και μηδενικά σε άλλες θέσεις. (*)

Άσκηση 3.

Τα ΓΧΑ συστήματα $H_1(e^{j\omega})$ και $H_2(e^{j\omega})$ έχουν γενικευμένη γραμμική φάση. Ποιό/ά από τα παρακάτω συστήματα πρέπει να έχει/ουν κι αυτό/ά γενικευμένη γραμμική φάση;

i. $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$

ii. $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

iii. $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta})H_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και αντιπαράδειγμα για να δείξετε τη μη γραμμικότητα).

i) απόκριση φάσης $\measuredangle G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \dfrac{Im\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}{Re\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}$

δεν είναι απαραίτητα γραμμική

Αντιπαράδειγμα:

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1]$$

$$g_1[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1]$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και αντιπαράδειγμα για να δείξετε τη μη γραμμικότητα).

i) απόκριση φάσης $\measuredangle G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \dfrac{Im\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}{Re\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}$

δεν είναι απαραίτητα γραμμική

Αντιπαράδειγμα:

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1]$$

$$g_1[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1]$$

$$\downarrow \quad G_1(e^{j\omega}) = 3 - e^{-j\omega} = 3 - (\cos\omega + j\sin\omega)$$

$$= \underbrace{3 - \cos\omega}\ - j\sin\omega$$

άρα

$$\measuredangle G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} - \frac{\sin\omega}{3 - \cos\omega}$$

(δεν είναι γραμμική η φάση)

Άσκηση 3.

Τα ΓΧΑ συστήματα $H_1(e^{j\omega})$ και $H_2(e^{j\omega})$ έχουν γενικευμένη γραμμική φάση. Ποιό/ά από τα παρακάτω συστήματα πρέπει να έχει/ουν κι αυτό/ά γενικευμένη γραμμική φάση;

i. $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$

ii. $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

iii. $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta})H_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και αντιπαράδειγμα για να δείξετε τη μη γραμμικότητα).

ii) $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$

$\measuredangle G_2(e^{j\omega}) = \measuredangle H_1(e^{j\omega}) + \measuredangle H_2(e^{j\omega})$

Το άθροισμα δυο γραμμικών αποκρίσεων φάσης δίνει γραμμική απόκριση φάσης.

Άσκηση 3.

Τα ΓΧΑ συστήματα $H_1(e^{j\omega})$ και $H_2(e^{j\omega})$ έχουν γενικευμένη γραμμική φάση. Ποιό/ά από τα παρακάτω συστήματα πρέπει να έχει/ουν κι αυτό/ά γενικευμένη γραμμική φάση;

i. $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$

ii. $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

iii. $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta})H_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Από ιδιότητες μεταβλ. Fourier

$$\underbrace{x[n]\cdot y[n]}_{\text{Πολλαπλ. στο χρόνο}} \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\cdot Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και αντιπαράδειγμα για να δείξετε τη μη γραμμικότητα).

έστω .. $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ (Αντιπαράδειγμα)

$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$g_3[n] = h_1[n]\cdot h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

οπότε $G_3(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} = 1 + 2\cos\omega - 2j\sin\omega$

(iii) Αντιπαράδειγμα

έστω $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$.

$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$g_3[n] = h_1[n] \cdot h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

οπότε $G_3(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} = 1 + 2\cos\omega - 2j\sin\omega$

$$\measuredangle G_3(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\sin\omega}{1+2\cos\omega}\right)$$

άρα το σύστημα δεν έχει αναγκαστικά γραμμική φάση.

Thank you!