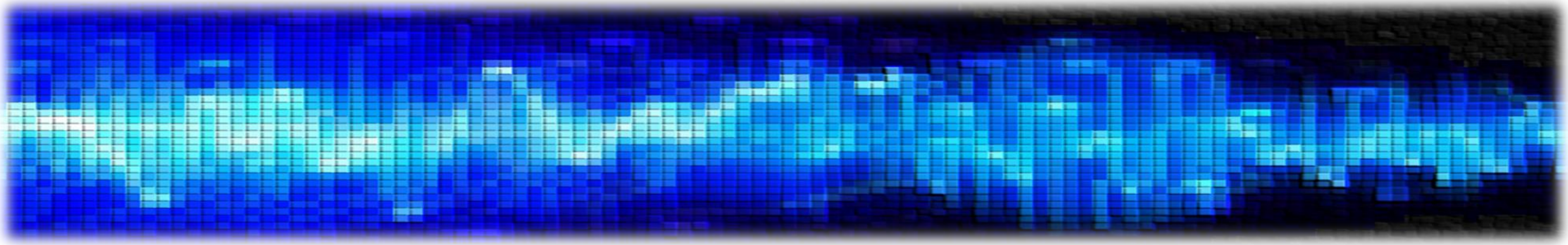
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης

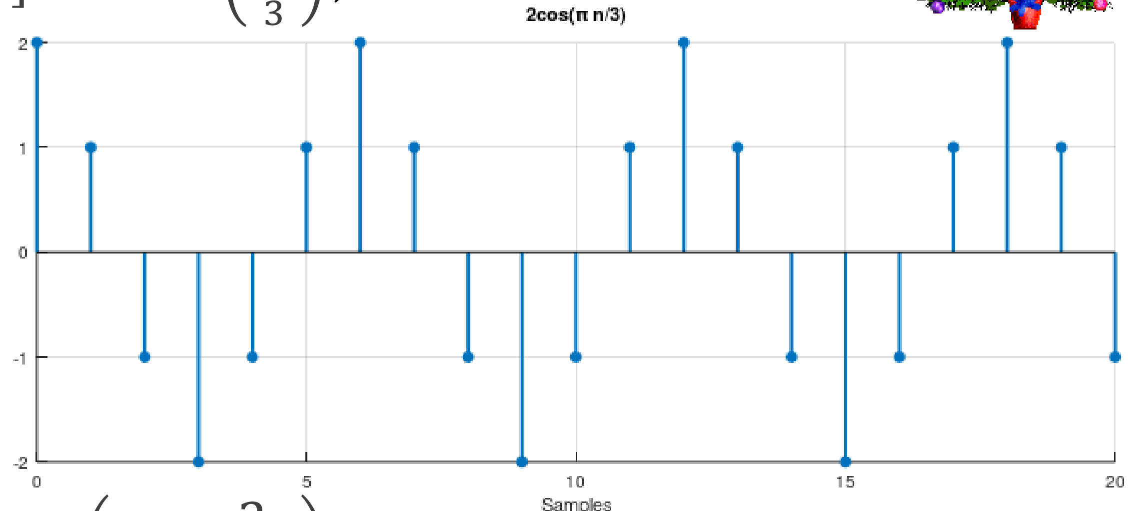
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η

- Φάση

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Έστω ένα ημίτονο της μορφής $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, $\quad -\infty < n < +\infty$

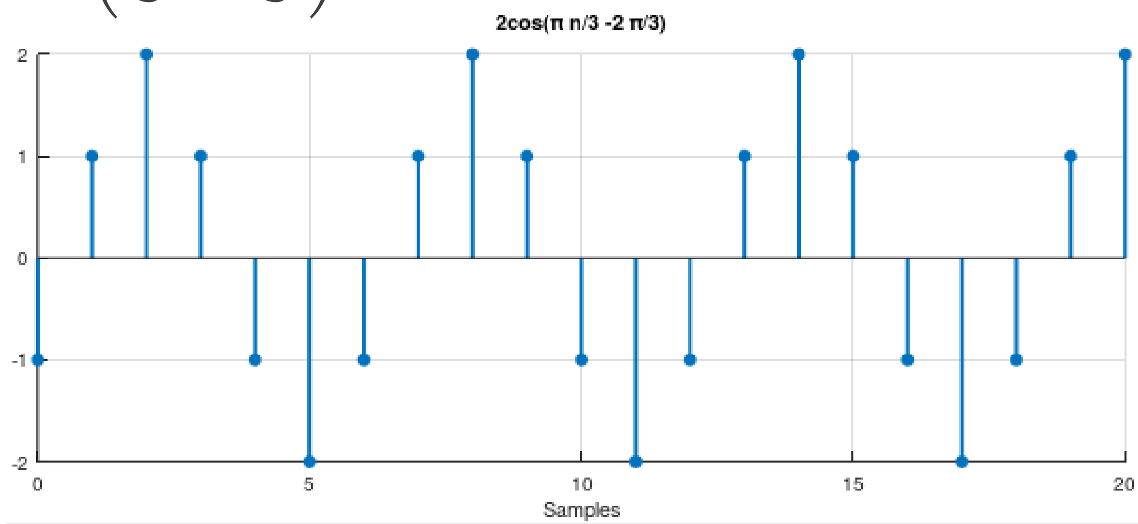


- Ας το καθυστερήσουμε κατά 2 δείγματα, δηλ. ας θέσουμε

$$n \coloneqq n - 2$$

- Θα έχουμε το σήμα

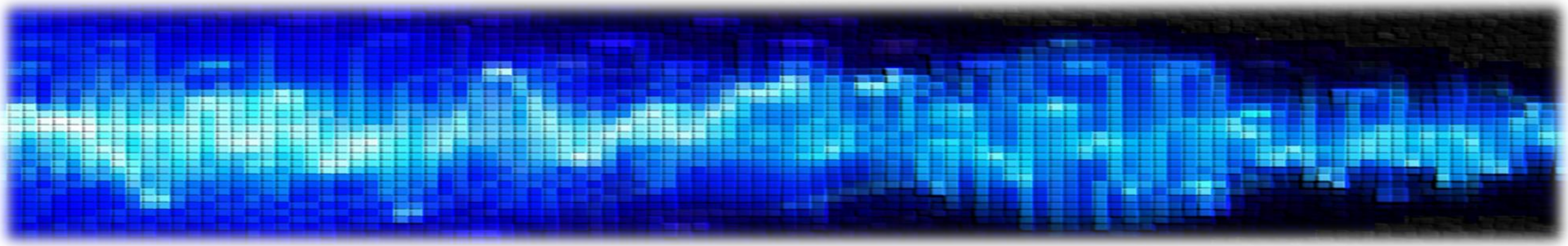
$$x[n-2] = 2\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right), \quad -\infty < n < +\infty$$



- Βλέπετε ότι η αρχική φάση $-\frac{2\pi}{3}$ “κρύβει” μέσα της την καθυστέρηση του σήματος
  - … η οποία είναι 2 δείγματα
  - … και σχετίζεται με τη μετατόπιση από ένα σημείο αναφοράς
    - Το $(0,0)$!

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- Καθυστέρηση Φάσης και Καθυστέρηση Ομάδας

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Έστω ένα ημίτονο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)\,, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Μπορούμε από την αρχική φάση του να βρούμε την καθυστέρηση του σε δείγματα ως

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi}{\omega_0}\right)\right)$$

- Η ποσότητα $-\frac{\phi}{\omega_0}$ ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης** (**phase delay**)
  - … και σημαίνει ακριβώς πόσα δείγματα καθυστέρησε ένα σήμα σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς

- Μπορούμε να ορίσουμε την καθυστέρηση φάσης ως συνάρτηση του ω, δηλ.

$$\tau_p\left(e^{j\omega)}\right) = -\frac{\phi\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

- Η συνάρτηση αυτή δεν έχει νόημα για ένα ημίτονο όπως το παραπάνω – το οποίο θα έχει μια μόνο αρχική φάση – αλλά θα τη χρησιμοποιήσουμε αλλού…

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{\boxed{|H(e^{j\omega})|}}_{\text{Απόκριση πλάτους}} e^{j \underbrace{\boxed{\phi_H(e^{j\omega})}}_{\text{Απόκριση φάσης}}}$$

- Ένα σήμα εισόδου $x[n]$ μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\boxed{|X(e^{j\omega})|}}_{\text{Φάσμα πλάτους εισόδου}} e^{j \underbrace{\boxed{\phi_X(e^{j\omega})}}_{\text{Φάσμα φάσης εισόδου}}}$$

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = \underbrace{\boxed{|H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|}}_{\text{Φάσμα πλάτους εξόδου}} e^{j \underbrace{\boxed{\left(\phi_X(e^{j\omega}) + \phi_H(e^{j\omega})\right)}}_{\text{Φάσμα φάσης εξόδου}}}$$

- Ας παραμείνουμε στην ημιτονοειδή μορφή εισόδου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi_x)$$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η επίδραση της απόκρισης πλάτους είναι προφανής
  - Διαμορφώνει **πολλαπλασιαστικά** το φάσμα εισόδου και παραδίδει ένα φάσμα εξόδου

- Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι όμως ότι η απόκριση φάσης δρα **αθροιστικά** επάνω στο φάσμα φάσης της εισόδου

- Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης γνωρίζουμε ότι

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \phi_x + \phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η αρχική φάση του ημιτόνου άλλαξε στην έξοδο!
  - Προστέθηκε μια φάση $\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)$
  - …η οποία σχετίζεται με το ΓΧΑ σύστημα και με τη συχνότητα ω_0 της εισόδου
    - Δηλ. εν γένει για διαφορετική συχνότητα εισόδου, θα προστεθεί διαφορετική φάση στην ήδη υπάρχουσα

- Η έξοδος μπορεί κι αυτή να γραφεί ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια επιπλέον καθυστέρηση φάσης!
- Αριθμητικά, αν για ένα σήμα εισόδου $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$, η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής $\phi_H\left(e^{j\omega}\right) = -2\omega$, τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H\left(e^{j\pi/3}\right) = -2\omega\Big]_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η καθυστέρηση φάσης του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

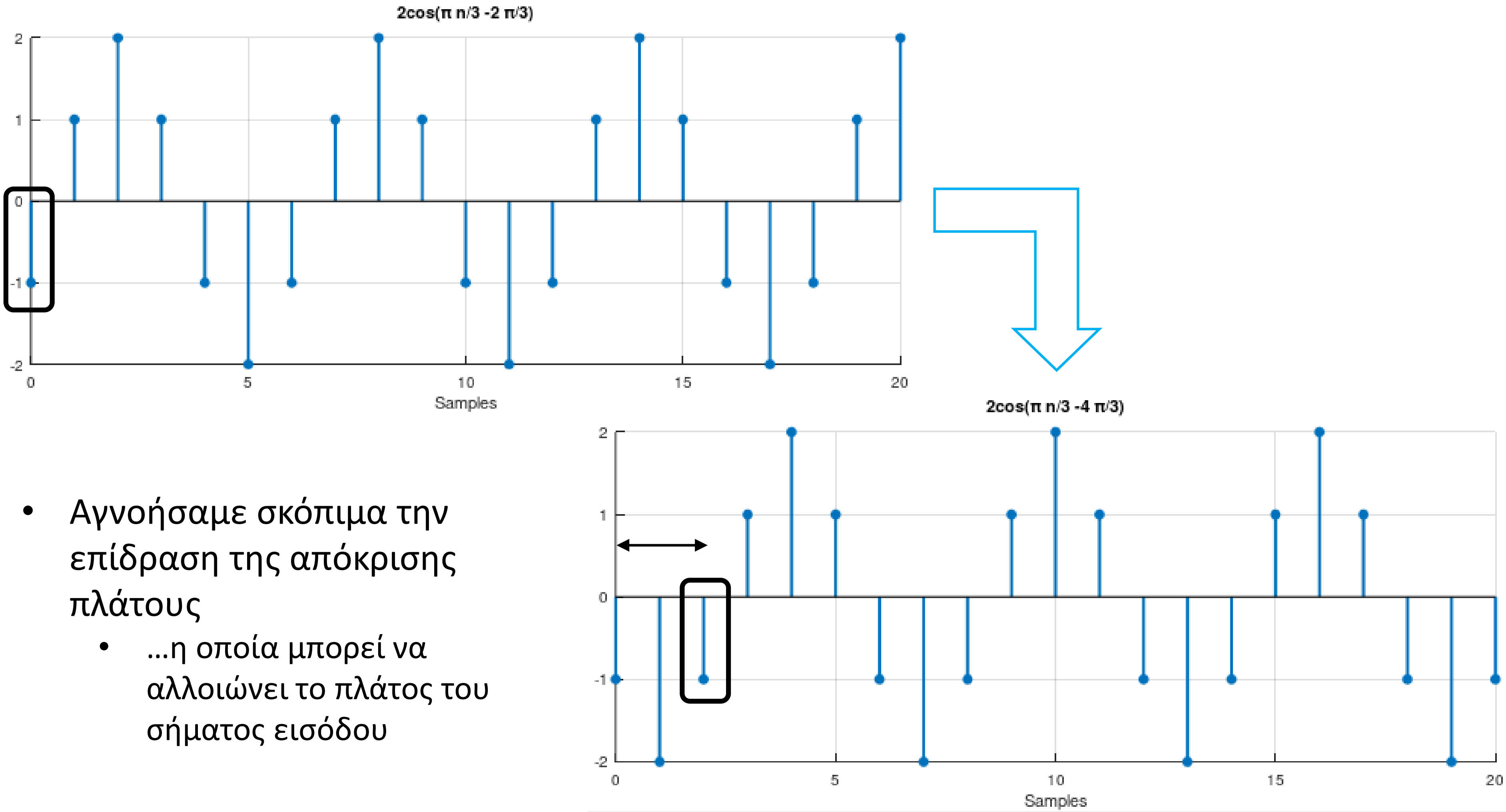
$$\tau_p\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

- Άρα η έξοδος καθυστέρησε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο
  - … που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς $(0,0)$☺
- Επιβεβαίωση:

$$y[n] = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-4)\right)$$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα άπειρης διάρκειας ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα



- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
    - …η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?
  - Έστω το σήμα

$$x[n] = A\overbrace{\boxed{\cos(\omega_0 n)}}^{\text{περιβάλλουσα}}\underbrace{\boxed{\cos(\omega_c n)}}_{\text{φέρον σήμα}} = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n)$$

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

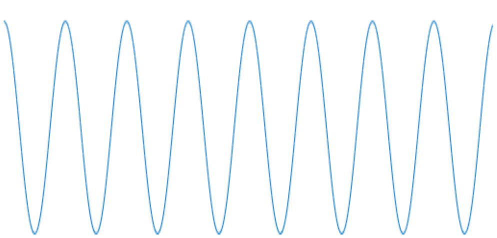
και

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

με

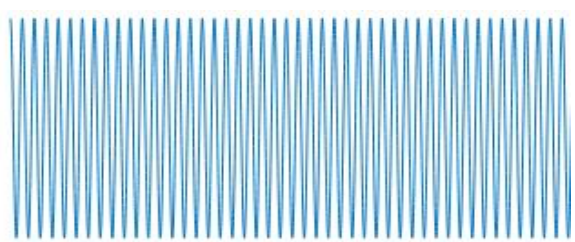
$$\omega_c \gg \omega_0$$

περιβάλλουσα



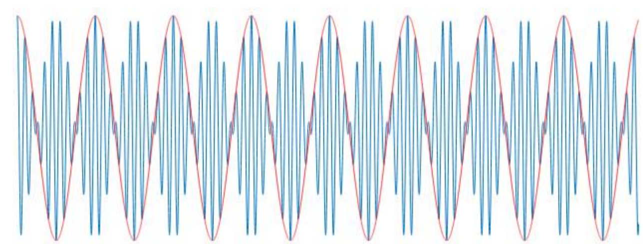
$\times$

φέρον σήμα



$=$

$x[n]$



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\phi_h\left(e^{j\omega}\right)}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A\left|H\left(e^{j\omega_l}\right)\right|}{2}\cos\left(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)\right) + \frac{A\left|H\left(e^{j\omega_u}\right)\right|}{2}\cos\left(\omega_u n + \phi_h(\omega_u)\right)$$

- Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή) γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n] = \frac{A}{2}\cos\left(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)\right) + \frac{A}{2}\cos\left(\omega_u n + \phi_h(\omega_u)\right)$$

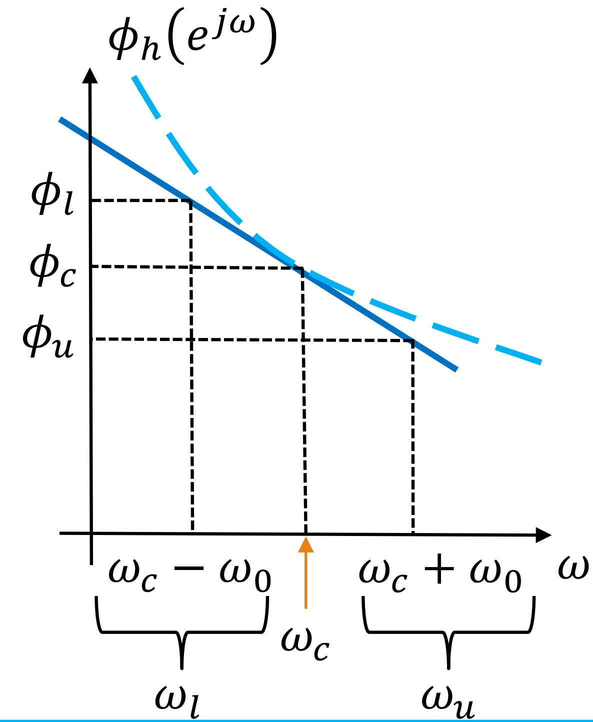
$$= A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

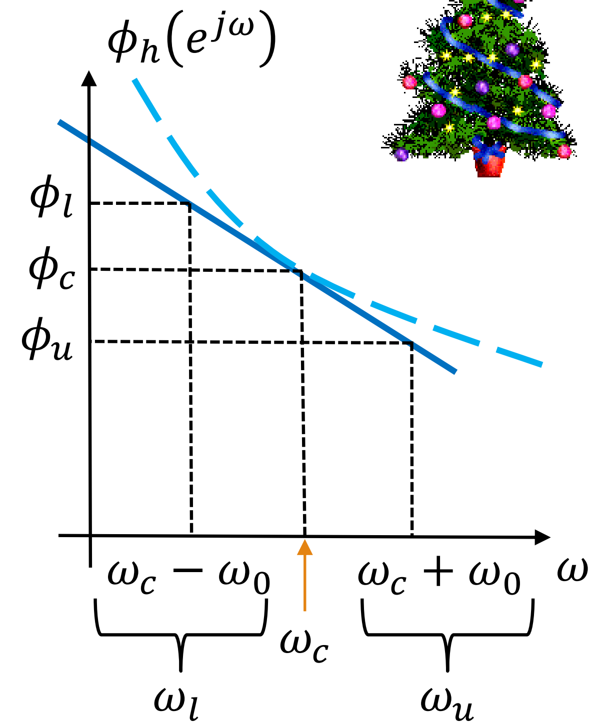
$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η απόκριση φάσης είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το ω_c
- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας συμβολίσουμε *για ευκολία*:
  - $\phi_l = \phi_h\left(e^{j(\omega_c - \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)$
  - $\phi_u = \phi_h\left(e^{j(\omega_c + \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)$
  - $\phi_c = \phi_h\left(e^{j\omega_c}\right)$



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$



- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{2\phi_c}{2\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

- Για τον πρώτο όρο

$$-\frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u - \phi_l}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega_c})$$

που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** $\tau_g(e^{j\omega_c})$ στη συχνότητα ω_c

- Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται ως

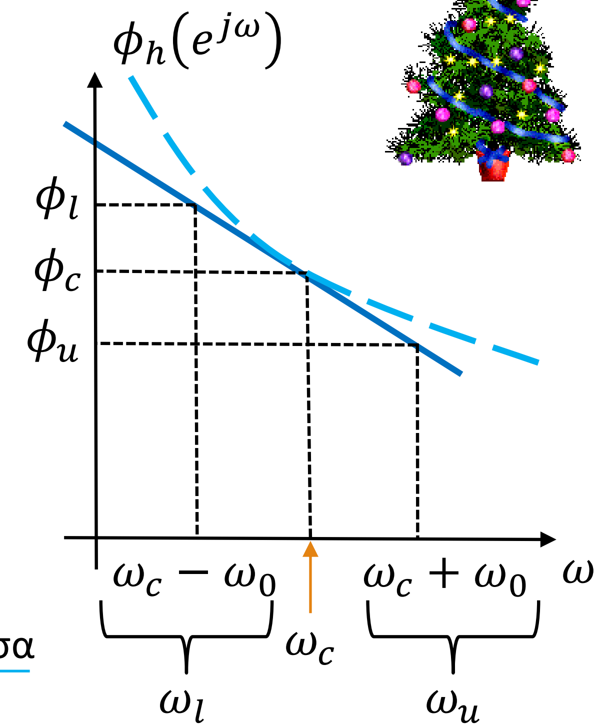
$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega})$$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$

- Έτσι το σήμα γράφεται ως

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0}\right)\right)\cos\left(\omega_c\left(n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c}\right)\right)$$



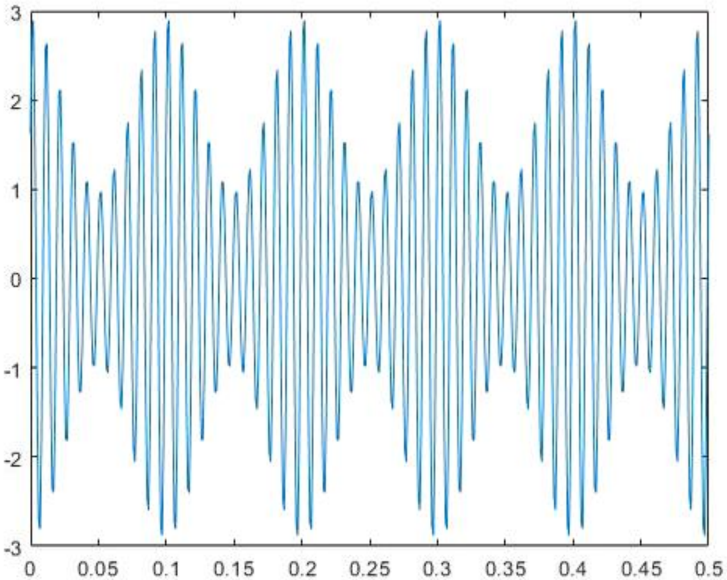
και με βάση τα παραπάνω

$$y[n] \approx A\overbrace{\boxed{\cos(\omega_0(n - \boldsymbol{\tau_g}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega_c}})))}}^{\text{περιβάλλουσα}}\underbrace{\boxed{\cos(\omega_c(n - \boldsymbol{\tau_p}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega_c}})))}}_{\text{φέρον σήμα}}$$

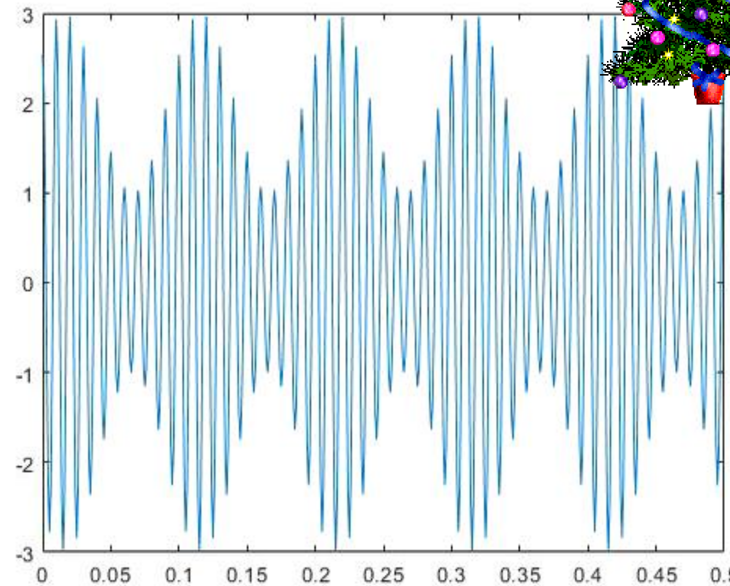
- Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρον σήμα!

- Κάναμε **δυο** υποθέσεις:
  1. Το φάσμα πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερό γύρω από τη συχνότητα ω_c
  2. Η απόκριση φάσης (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα ω_c

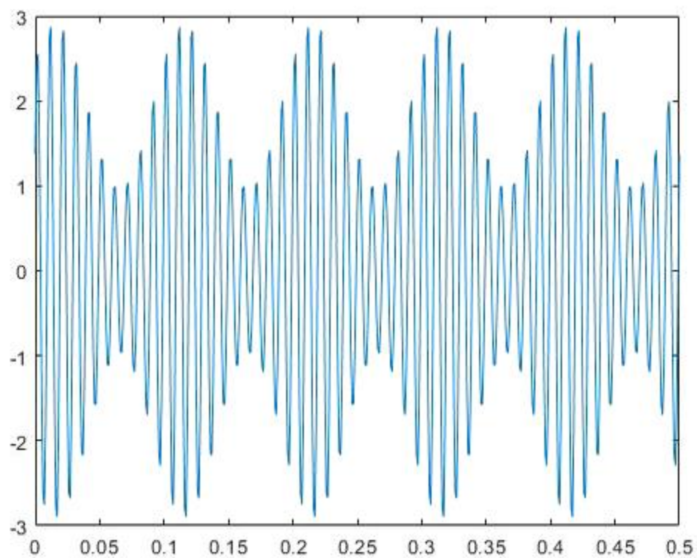
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



Phase Delay



Group Delay



Phase & Group Delay

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα group (ομάδα) δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω** από μια:
  - Την $\omega = \omega_c$ (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)

- Η ομάδα αποτελούνταν από τις $\omega_c \pm \omega_0$
  - Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα ω_c, δηλ. από την καθυστέρηση που έλαβαν οι δυο αυτές συχνότητες, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε

- Όλα τα παραπάνω είχαν μια υπόθεση: $-\infty < n < +\infty$

- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
  - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα

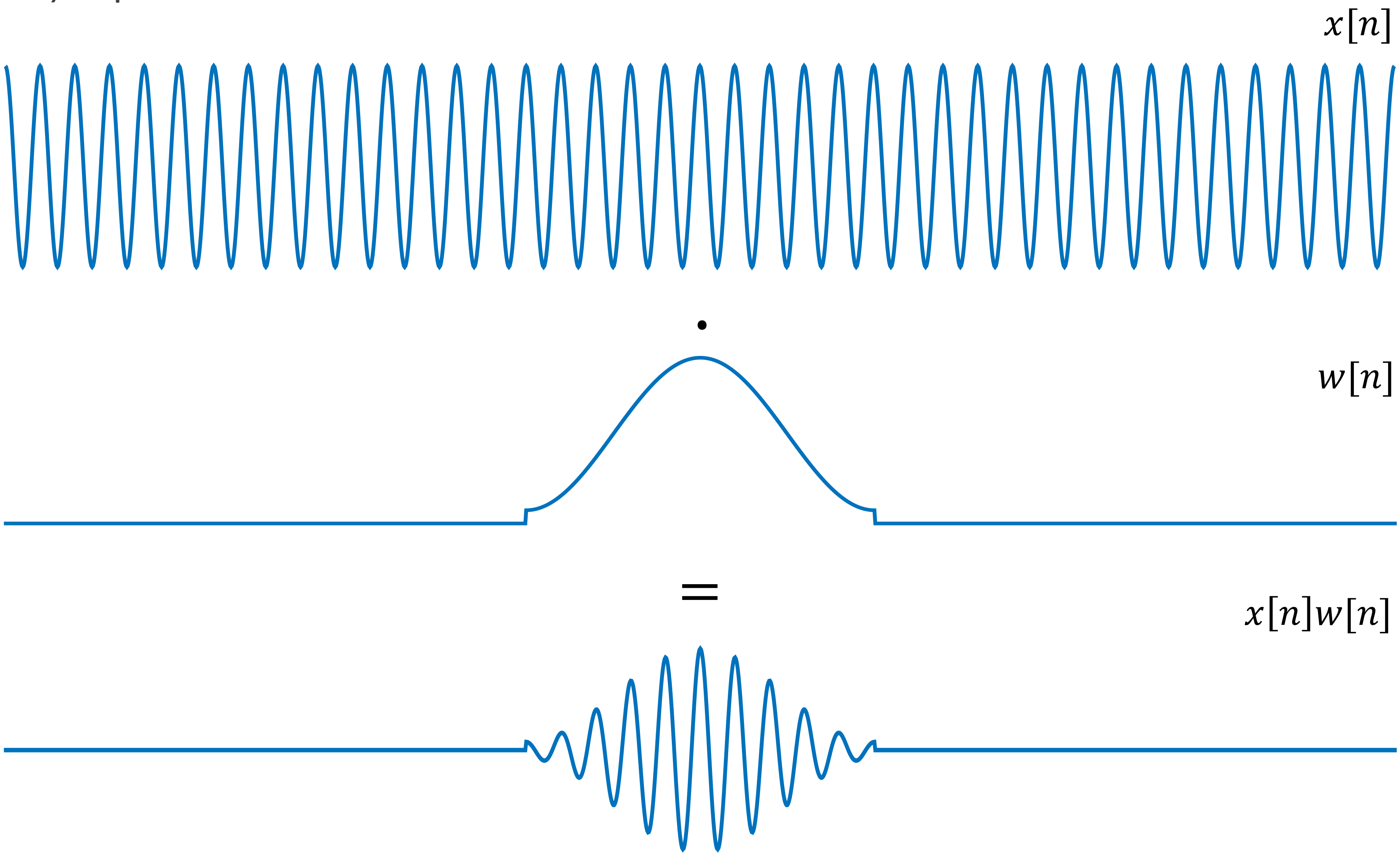
- Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα πολλαπλασιασμένο με ένα παράθυρο

- Ξέρουμε ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
  - Αυτό είναι το group συχνοτήτων μας! ☺

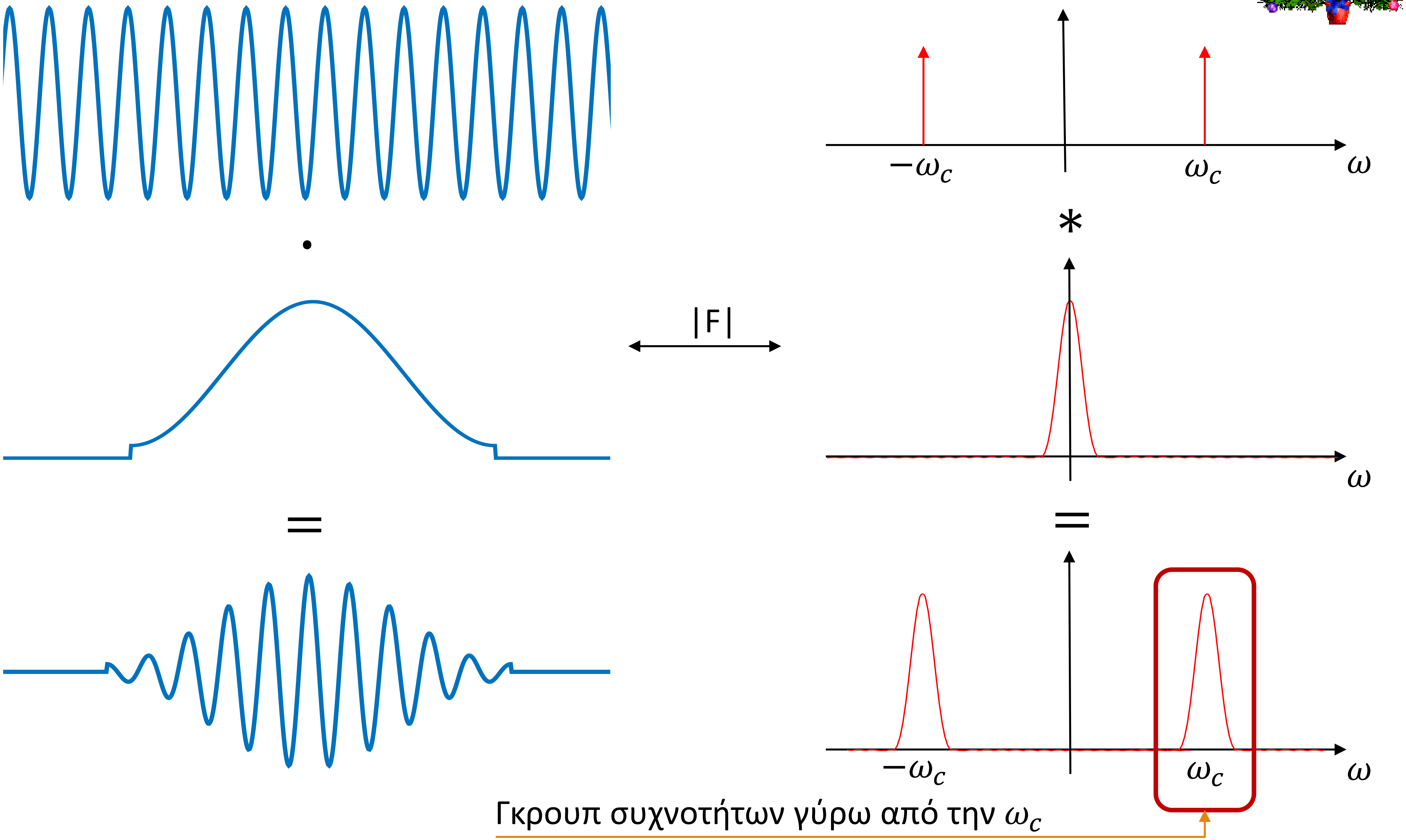
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει…

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

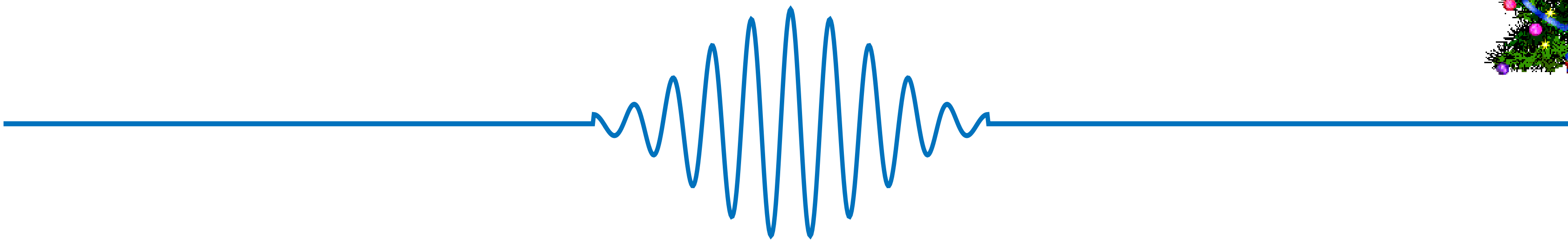
- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



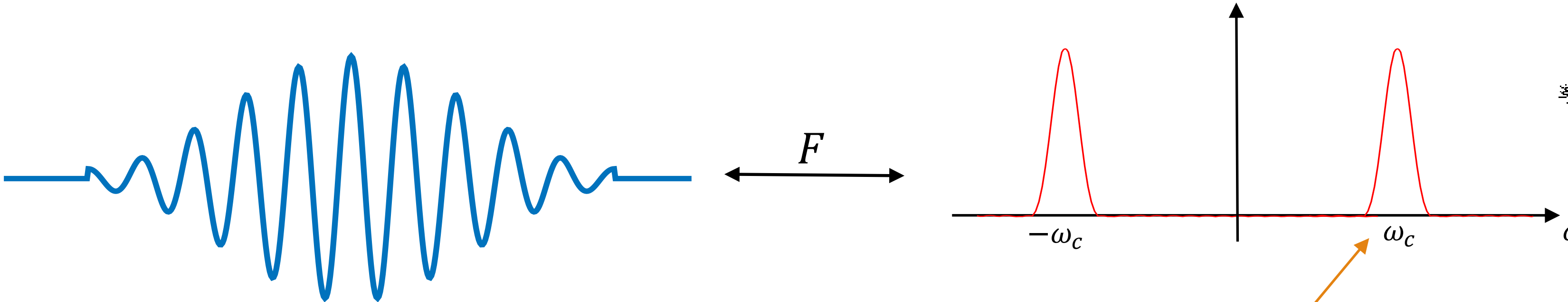
- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_c αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A\cos(\omega_c n) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W\left(e^{j\omega}\right) * \left(A\pi\delta(\omega - \omega_c) + A\pi\delta(\omega + \omega_c)\right)$$

$$\frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega-\omega_c)}\right) + \frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega+\omega_c)}\right)$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
  - Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης**!
    - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια…
      - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης!

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα $w[n]$

- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!

- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε «πακέτο» κάθε συχνότητας θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει διαφορετική στη μορφή της σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα («πακέτα») είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με ω_c τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \qquad N_1 \leq n \leq N_2$$
$$W_k(e^{j\omega}) = 0, \qquad |\omega| > B_k, \qquad B_k \ll \omega_k$$

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega-\omega_k)}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης!

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

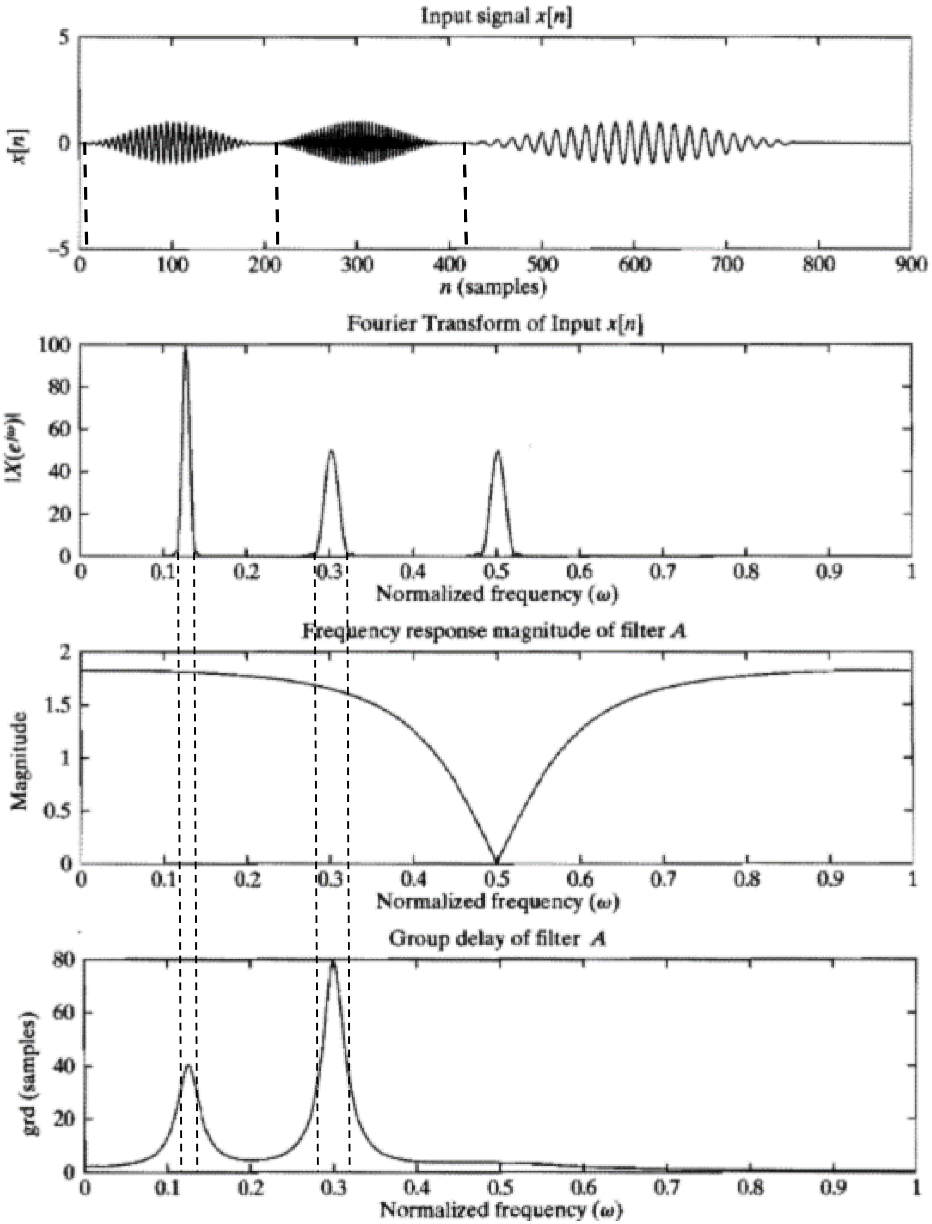
- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

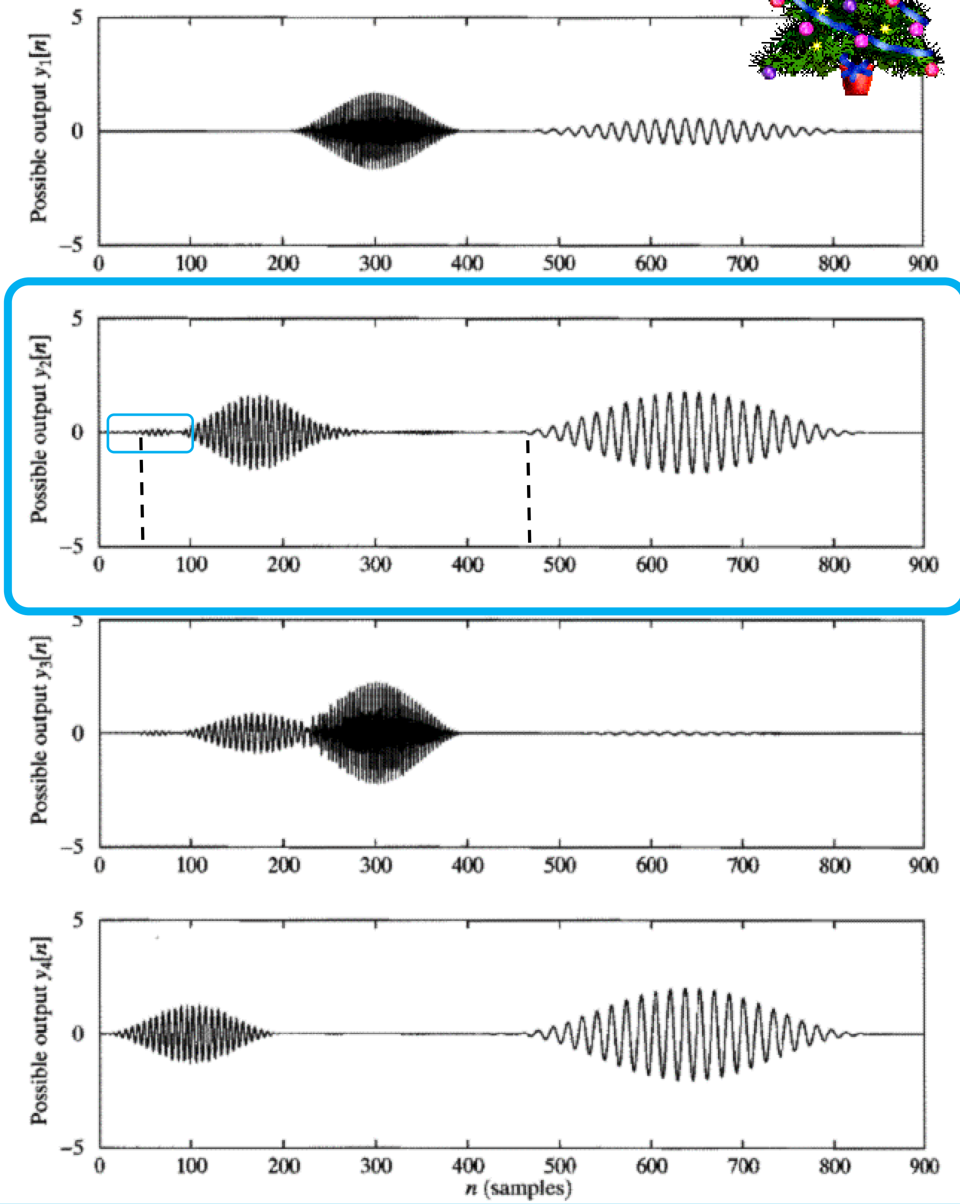
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[n - \tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)\right] \cos\left(\omega_k\left(n - \tau_p\left(e^{j\omega_k}\right)\right) + \theta_k\right)$$

- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)$

- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:
  - ❑ Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
  - ❑ Η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
    - ❑ Δηλ. η απόκριση πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**





Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η

- Μεταβατική και σταθερής κατάστασης απόκριση

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Γνωρίζουμε την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης ενός ΓΧΑ συστήματος για είσοδο της μορφής

$$Ae^{j(\omega n+\theta)}, \qquad -\infty < n < +\infty, \qquad A \in \mathbb{R}_+$$

- Η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = AH\left(e^{j\omega}\right)e^{j(\omega n+\theta)}, \qquad -\infty < n < +\infty,$$

- Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα

- Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη

- Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

- Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα ***αιτιατό*** ΓΧΑ σύστημα
  - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

- Το σήμα αυτό θα είναι (με $A = 1, \theta = 0$) το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

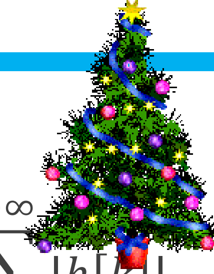
$$y[n] = H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|e^{j\omega(n-k)}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεραίνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$

   τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB ένα γνωστό σας σύστημα για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

- Το ΓΧΑ σύστημα είναι το φίλτρο «κυλιόμενης μέσης τιμής (moving average)», με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

- Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα πρέπει να είναι μηδενική!
  - … αφού στη συχνότητα εισόδου η απόκριση πλάτους μηδενίζεται
  - Σημεία μηδενισμού της απόκρισης πλάτους: $\omega_k = \frac{2\pi k}{M+1} = \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο εισόδου ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

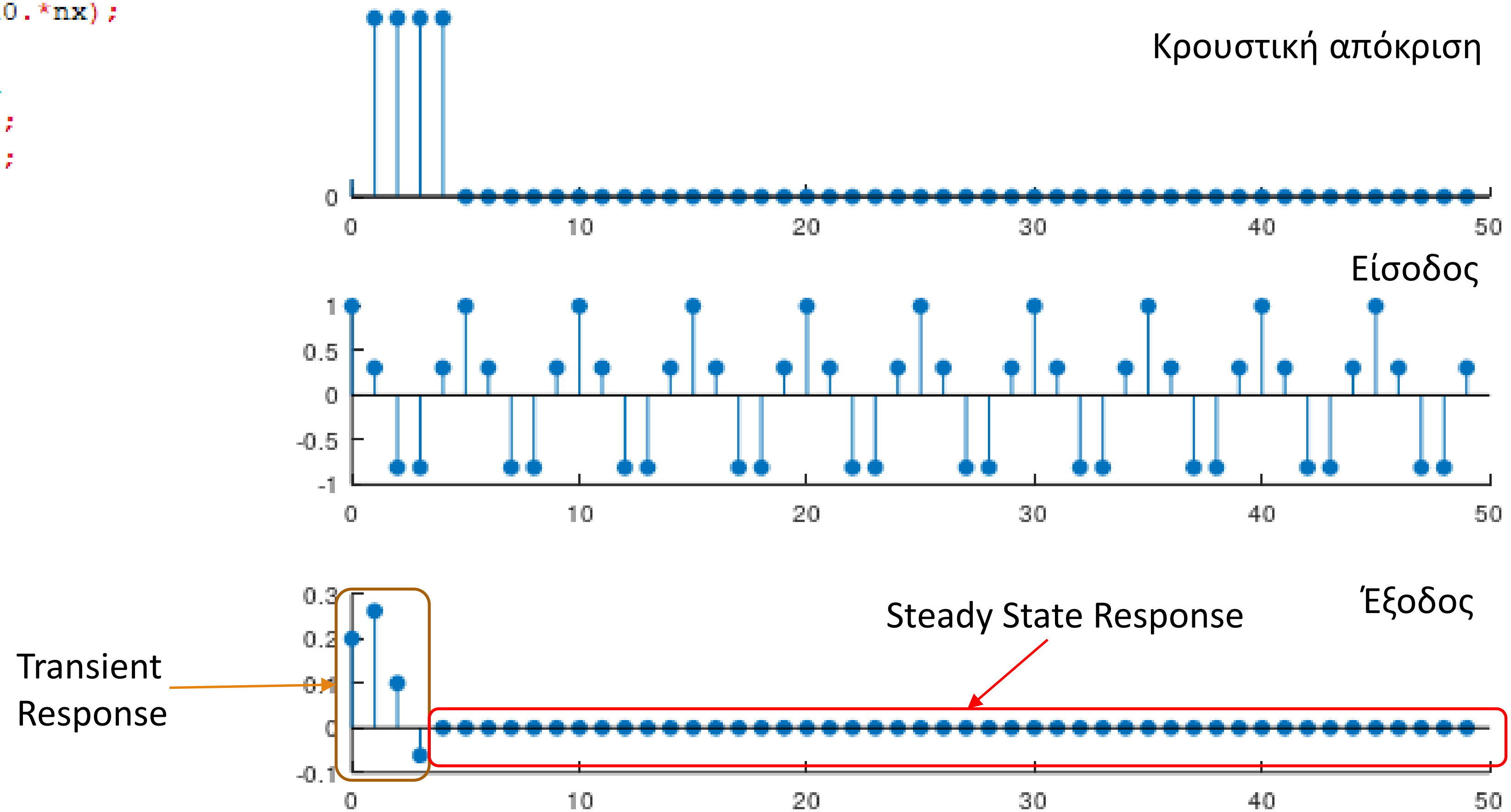
• Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης

```
% Impulse Response h[n]
h = 1/(5).*ones(1, 5);
h = [h zeros(1,50)];
nh = 0:54;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1054];
```

```
% Plots
subplot(311);
stem(nh(1:50), h(1:50), 'filled');
subplot(312);
stem(nx(1:50), x(1:50), 'filled');
subplot(313);
stem(ny(1:50), y(1:50), 'filled');
```

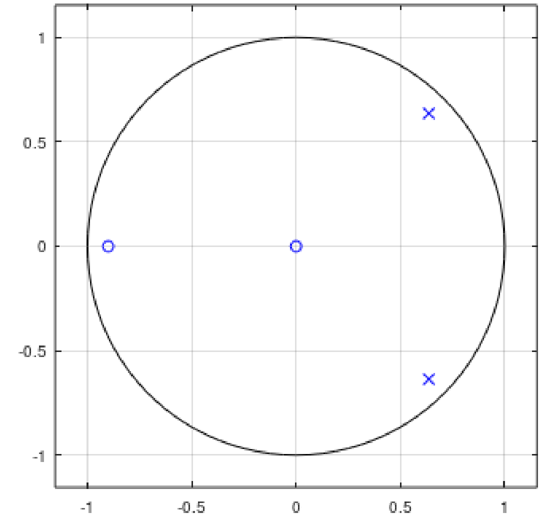


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που να ενισχύει τη συχνότητα $\omega = \frac{\pi}{4}$ και να καταστέλλει σημαντικά τη συχνότητα $\omega = \pi$
- Θα τοποθετήσουμε δυο πόλους κοντά στις συχνότητες $\omega = \pm\frac{\pi}{4}$ και ένα μηδενικό κοντά στη συχνότητα $\omega = \pi$
- Αυτό το σύστημα θα έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{\left(1 - 0.9e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - 0.9e^{-\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

- Ο παρακάτω κώδικας παράγει αυτό το σύστημα

```
% Polynomial coefficients
B = [1 0.9];
A = conv([1 -0.9*exp(j*pi/4)], [1 -0.9*exp(-j*pi/4)]);
% z-plane
zplane(B,A);
```

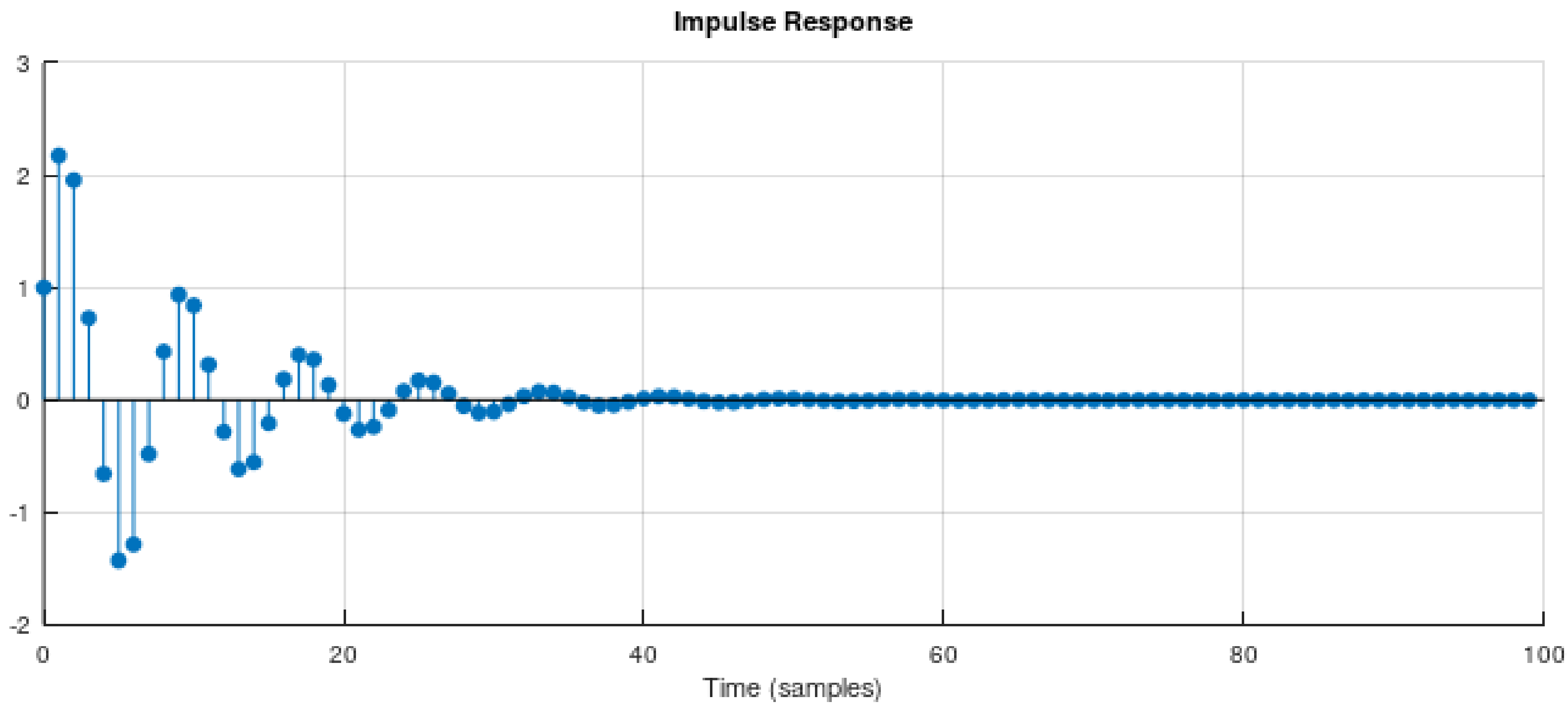


- Όλα όπως πρέπει… ☺

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η κρουστική απόκριση του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί στο MATLAB\ Octave

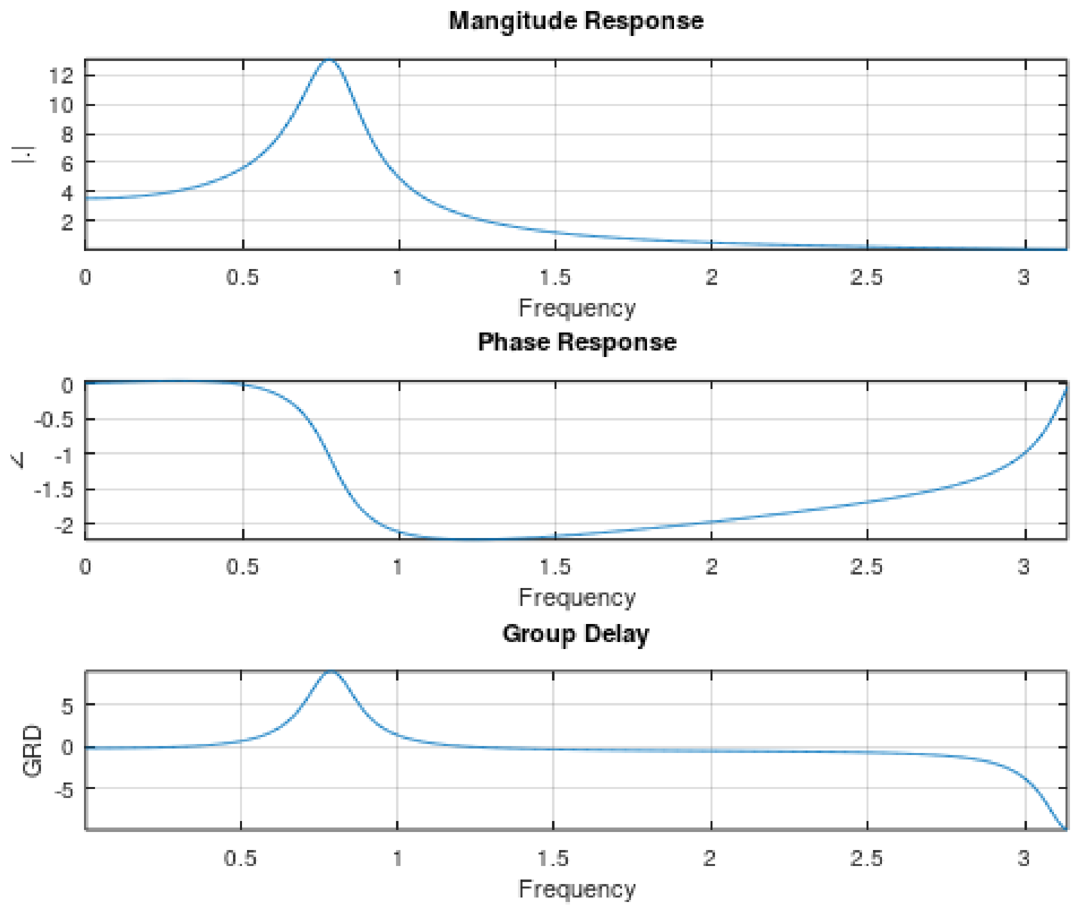
```
% Polynomial coefficients
B = [1 0.9];
A = conv([1 -0.9*exp(j*pi/4)], [1 -0.9*exp(-j*pi/4)]);
% Impulse response
[h,T] = impz(B, A, 2048);
% Plot
stem(T(1:100), h(1:100), 'filled');
xlabel('Time (samples)');
title('Impulse Response');
```



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η απόκριση πλάτους, φάσης, και η καθυστέρηση ομάδας υπολογίζονται ως:

```
% Frequency response
[H,W] = freqz(B,A);
% Plots
figure; subplot(311); plot(W, abs(H));
grid;
title('Mangitude Response');
xlabel('Frequency');
ylabel('|.|');
subplot(312); plot(W, angle(H));
title('Phase Response');
grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('\angle');
subplot(313);
plot(W(2:end), -1./(W(2)-W(1)).*diff(angle(H)));
title('Group Delay');
grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('GRD');
```

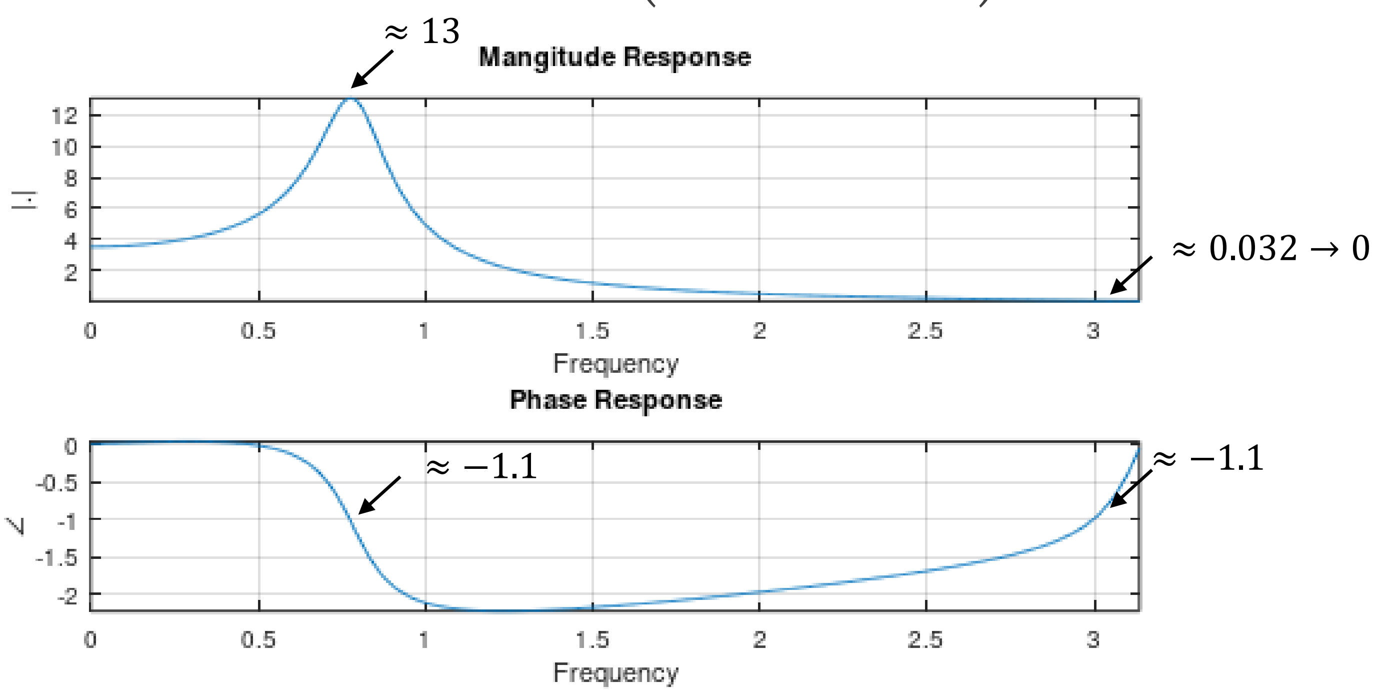


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας υποθέσουμε μια είσοδο της μορφής

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos(\pi n) \ , \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Από τη θεωρία των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοτιμών, περιμένουμε ότι

$$y[n] = \left|H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right) + \left|H\left(e^{j\pi}\right)\right| \cos\left(\pi n + \phi_H\left(e^{j\pi}\right)\right)$$



- $\left|H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right| \approx 13.081$
- $\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right| \approx 0$
- $\angle H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right) \approx -1.1$
- $\angle H\left(e^{j\pi}\right) \approx -1.1$

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Οπότε

$$y[n] \approx 13.081\cos\left(\frac{\pi n}{4} - 1.1\right)$$

- Στην πραγματικότητα, η είσοδος μας είναι «ξαφνική»
  - Δηλ. εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ (ή μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή)
- Οπότε το σήμα εισόδου είναι

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u[n] + \cos(\pi n)\,u[n]$$

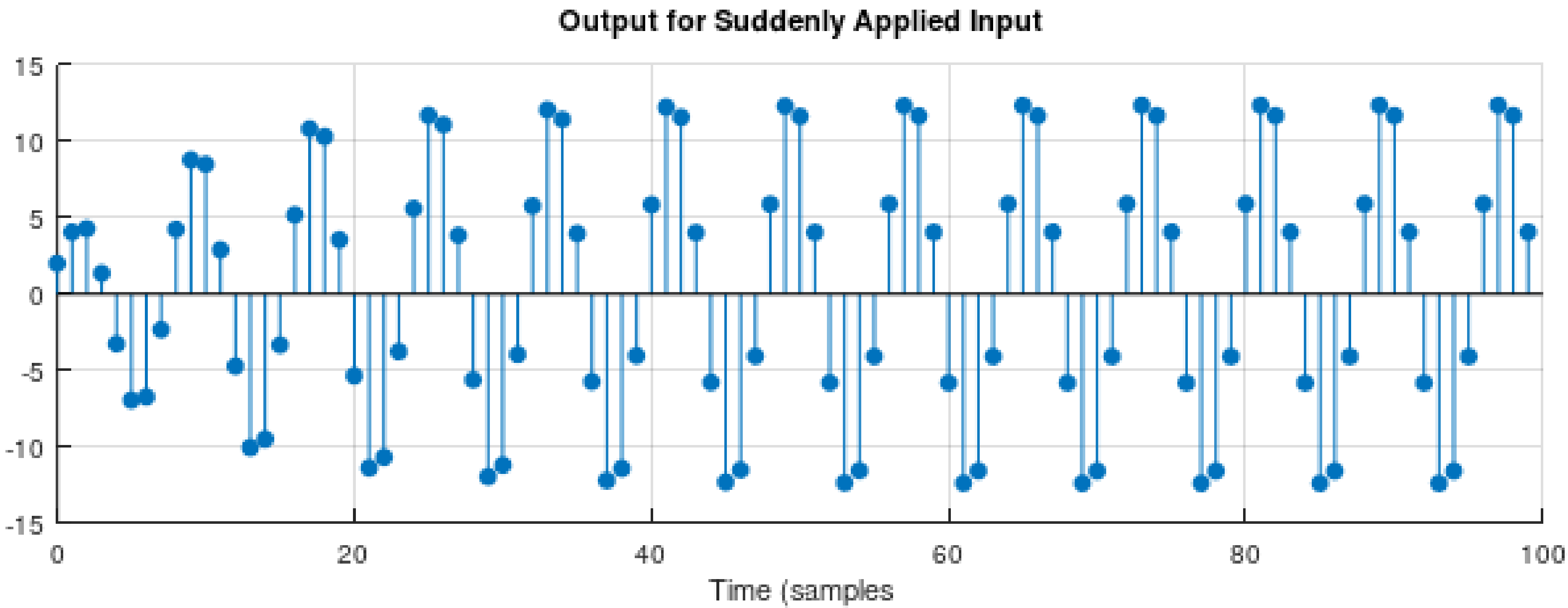
- Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα αποτελείται από δυο όρους:
  - Τη μεταβατική απόκριση $y_{tr}[n]$ – transient response
  - Την απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ – steady state response

$$y[n] = y_{tr}[n] + y_{ss}[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης ισούται με το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης
- Η μεταβατική απόκριση μας πληροφορεί πόσο «απέχει» η έξοδος μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

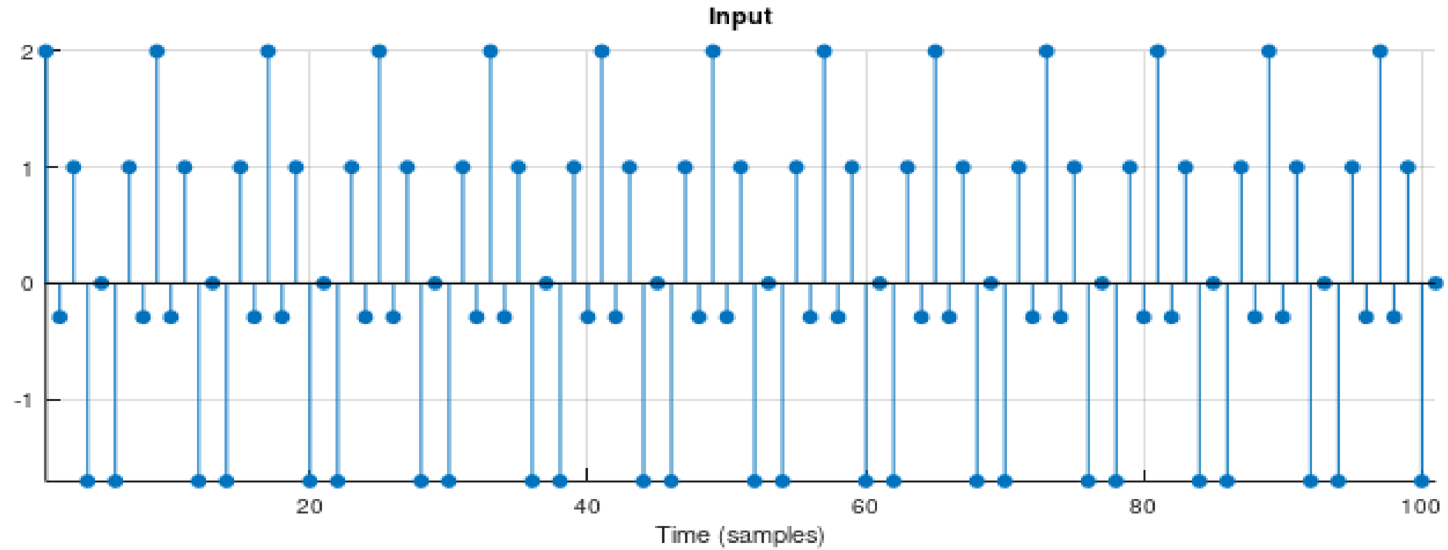
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας φιλτράρουμε το «ξαφνικό» σήμα μας

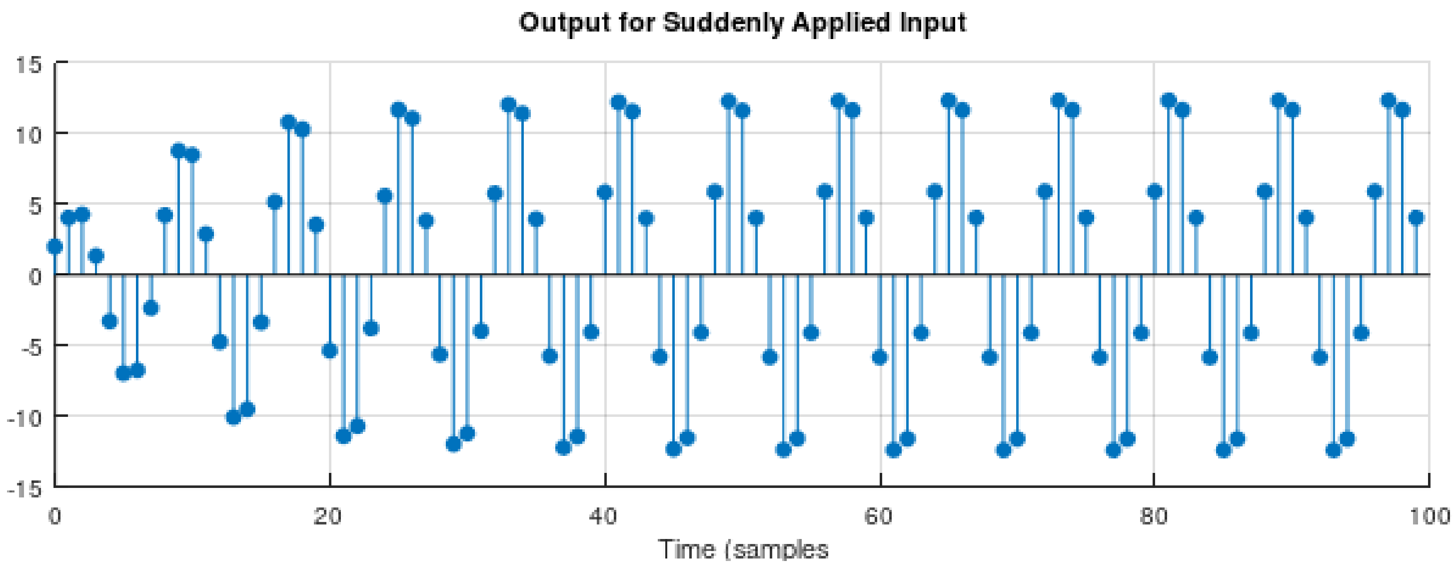
```
% Signals
n = 0:1000;
x = cos(pi*n/4) + cos(pi*n);
% Filter!
y = filter(B, A, x);
stem(n(1:100), y(1:100), 'filled');
xlabel('Time (samples'); grid;
title('Output for Suddenly Applied Input');
```



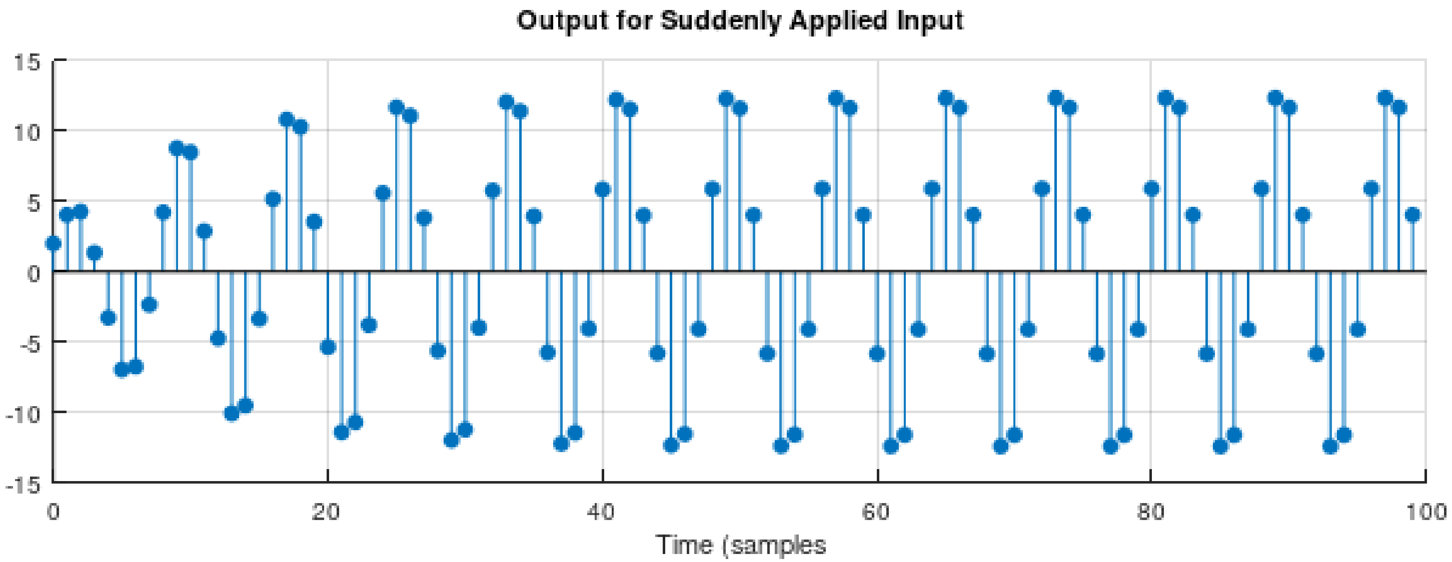
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Σύγκριση





- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- Γνωρίζουμε ότι η κρουστική μας απόκριση είναι άπειρης (θεωρητικά) διάρκειας, οπότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά «σβήνει» στο μηδέν όσο προχωρούν τα δείγματα προς το άπειρο

- Η μεταβατική απόκριση είναι εμφανής στα πρώτα δείγματα της εξόδου, μέχρι αυτή να «σταθεροποιηθεί» πολύ κοντά στην απόκριση σταθερής κατάστασης

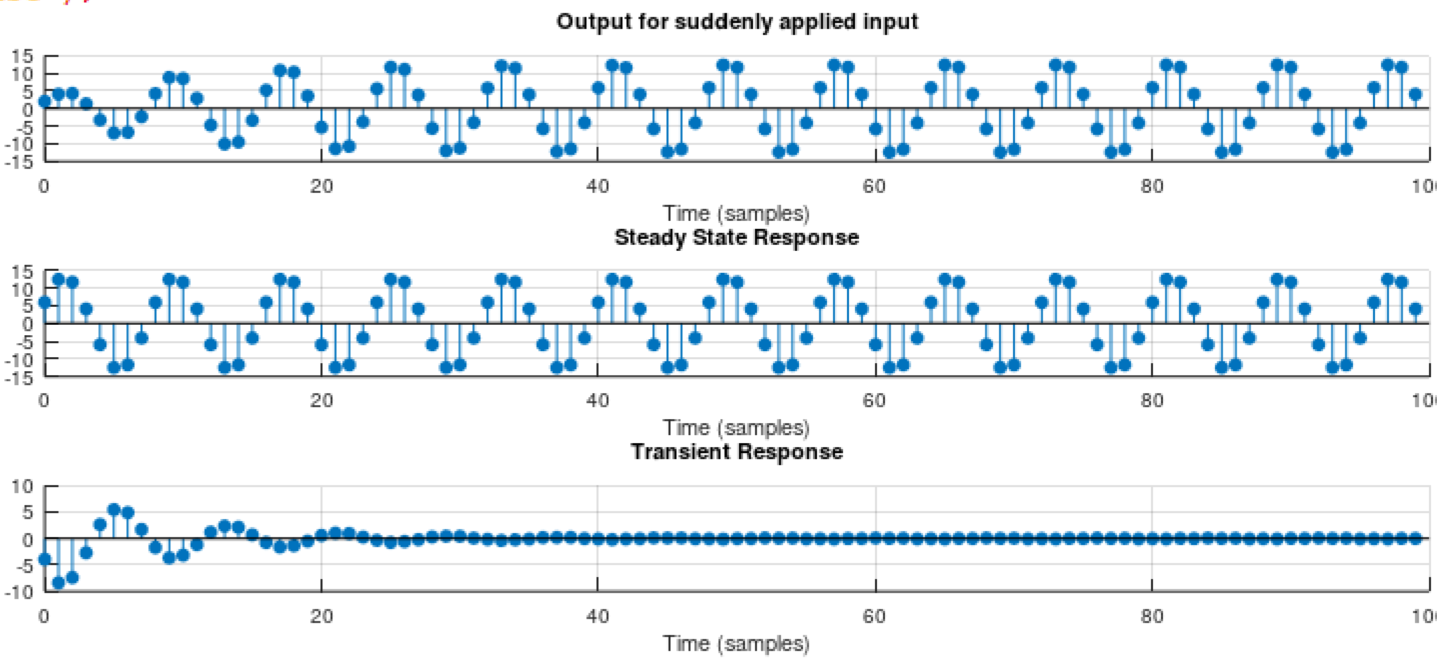
- Η μεταβατική απόκριση μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$y_{tr}[n] = y[n] - y_{ss}[n]$$

- ## Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης

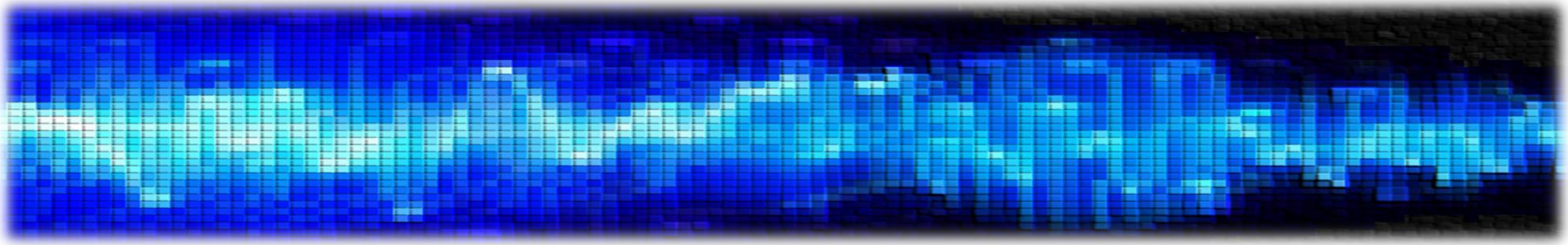
```
% Simulate transient response
yss = 13.081*cos(pi*n/4 - 1.1);
ytr = y - yss;
figure; subplot(311);
stem(n(1:200), y(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Output for suddenly applied input');
subplot(312);
stem(n(1:200), yss(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Steady State Response');
subplot(313);
stem(n(1:200), ytr(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Transient Response');
```

Η διπλανή προσομοίωση είναι πολύ ευαίσθητη στο σωστό υπολογισμού του πλάτους και της φάσης της απόκρισης σταθερής κατάστασης. Είναι για καθαρά εκπαιδευτικούς/demo σκοπούς



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- FIR vs IIR φίλτρα

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Σύγκριση μεταξύ φίλτρων FIR & IIR
- IIR:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- FIR:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Κατηγορία / Ιδιότητα	FIR	IIR
Φάση (group delay)	Δυνατότητα γραμμικής φάσης	Δυσκολία στο χειρισμό, αδυναμία γραμμικής φάσης
Ευστάθεια	Πάντα ευσταθή	Έλεγχος για ευστάθεια
Τάξη φίλτρου (για ίδιο αποτέλεσμα)	Μεγάλη	Μικρή
Ευκολία υλοποίησης	Εύκολα	Λιγότερο εύκολα
Ευκολία σχεδίασης	Εύκολα	Λιγότερο εύκολα
Μνήμη	Περισσότερη	Λιγότερη
Πολυπλοκότητα	Περισσότερη	Λιγότερη
Ευρωστία στην πεπερασμένη ακρίβεια	(πολύ) Περισσότερη	Λιγότερη

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ