

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 25^H

- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**

- **Διακριτός Μετασχ. Fourier:**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier:**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Το πλήθος N των συντελεστών του DFT (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) πρέπει να είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**

- Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα

- **Πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- **Σωστή εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο

- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – **review**

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1) \\ &\quad + A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2) \end{aligned}$$

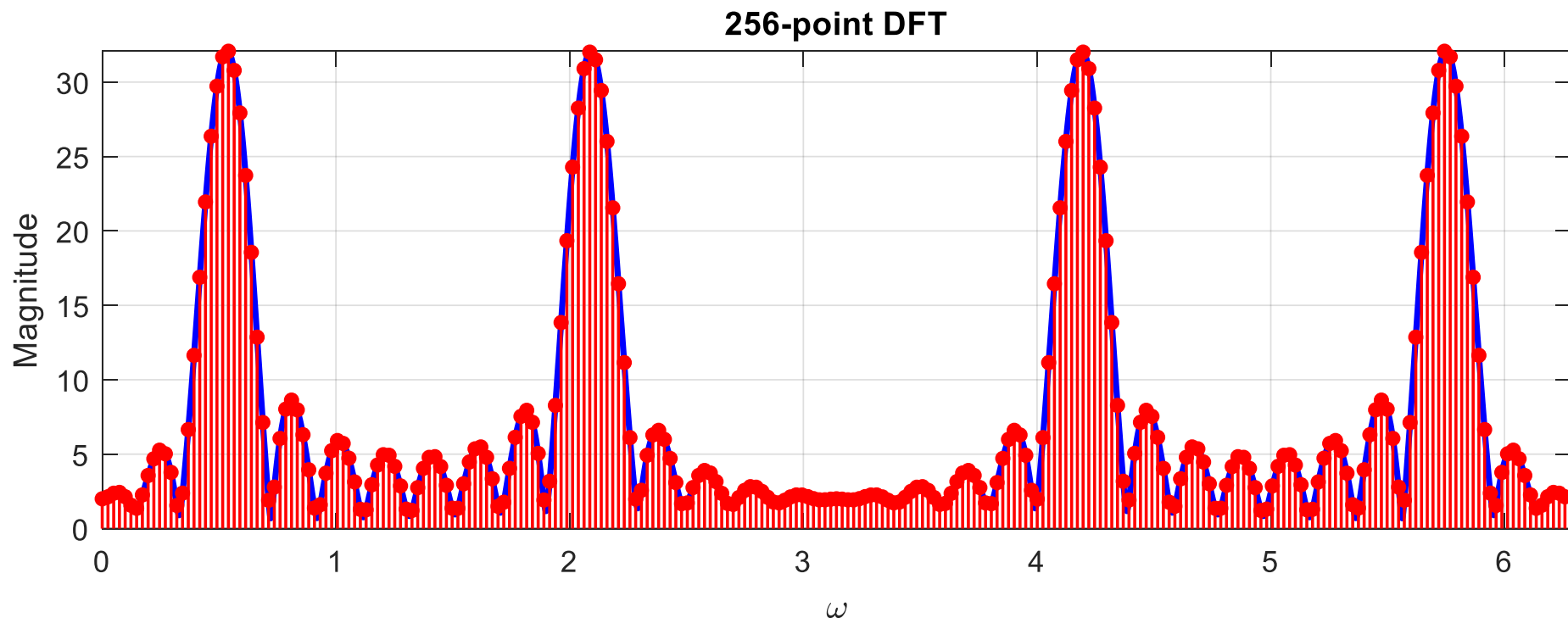
- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x[n]w[n]\} &= \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega + \omega_1)}) \\ &\quad + \frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W(e^{j(\omega + \omega_2)}) \end{aligned}$$

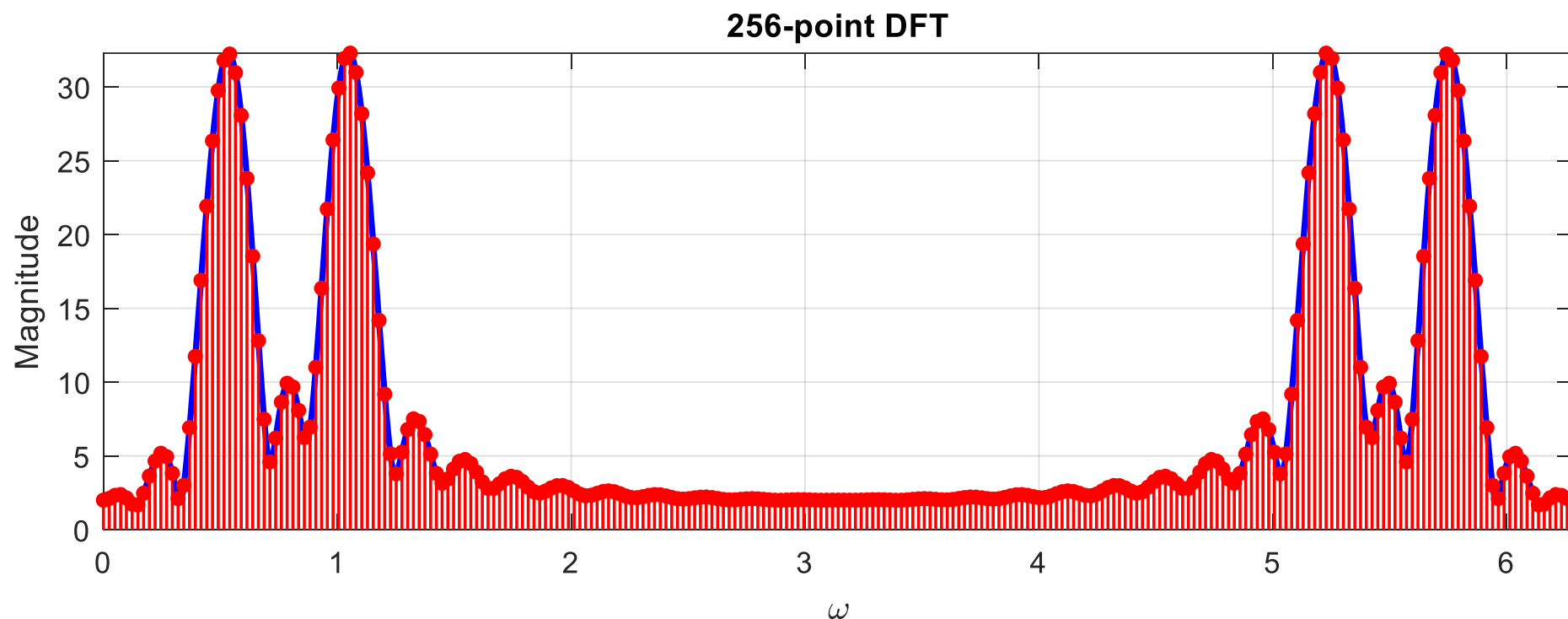
- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega - \omega_1)}) + W(e^{j(\omega + \omega_1)}) + W(e^{j(\omega - \omega_2)}) + W(e^{j(\omega + \omega_2)})$$

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – **review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$

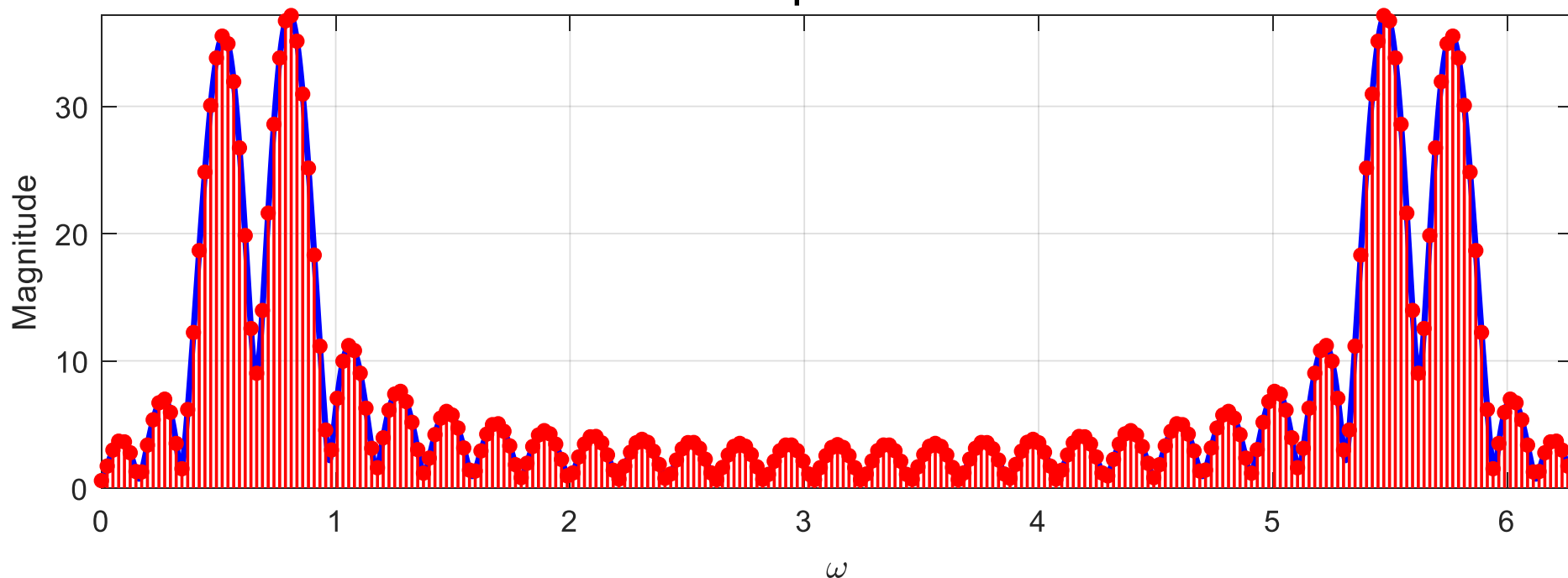


- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – **review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$

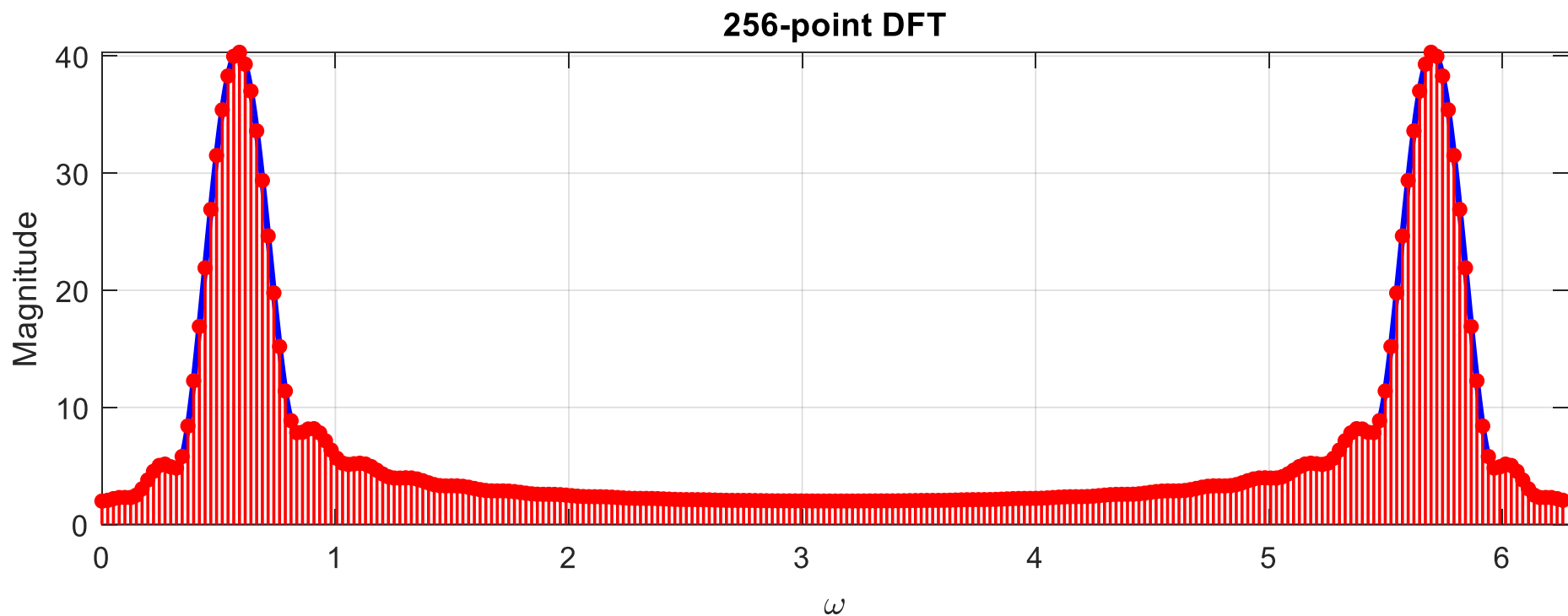


- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – **review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$

256-point DFT



- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – **review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$



• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Τι παρατηρήσατε?

• α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης

- Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!

- Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$

• β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!

- Ανεπαρκής ανάλυση!

• Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου...

• ...ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου...

- ...είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς...

• Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου

- Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς

• Τι μπορούμε να κάνουμε?

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Έχουμε λοιπόν δυο προβλήματα:

- α) Να μειώσουμε τη φασματική διαρροή μέσω μείωσης της φασματικής διασποράς

a.k.a : να μειώσουμε τους πλευρικούς λοβούς

- β) Να αυξήσουμε την ανάλυση του φάσματος ώστε να διαχωρίζονται οι πολύ κοντινές συχνότητες

a.k.a : να «στενέψουμε» το εύρος του κεντρικού λοβού

- Γνωρίζουμε ότι για το α) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά παράθυρα ανάλυσης (Hamming, Hanning, Blackman, Bartlett, Kaiser, Poisson, Slepian, Flat-top, Gaussian, κ.α.)

- Για το β), η αλλαγή παραθύρου επιδεινώνει την κατάσταση, καθώς «φαρδαίνει» τον κεντρικό λοβό

- Πώς θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε?

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

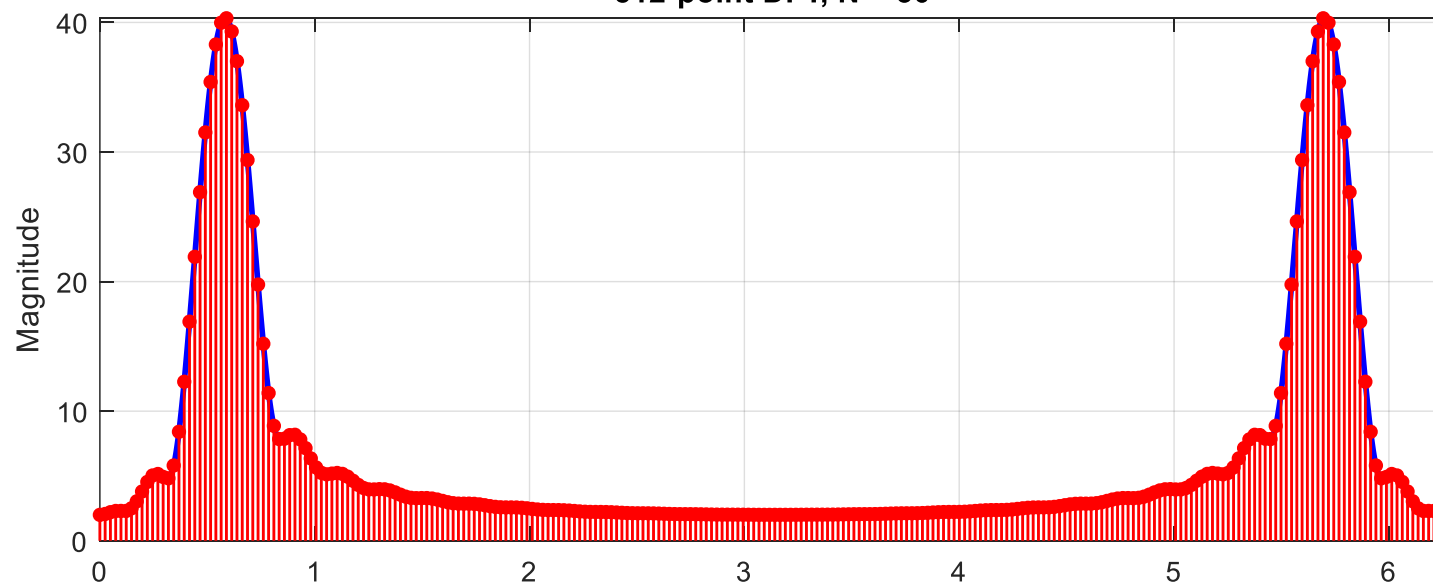
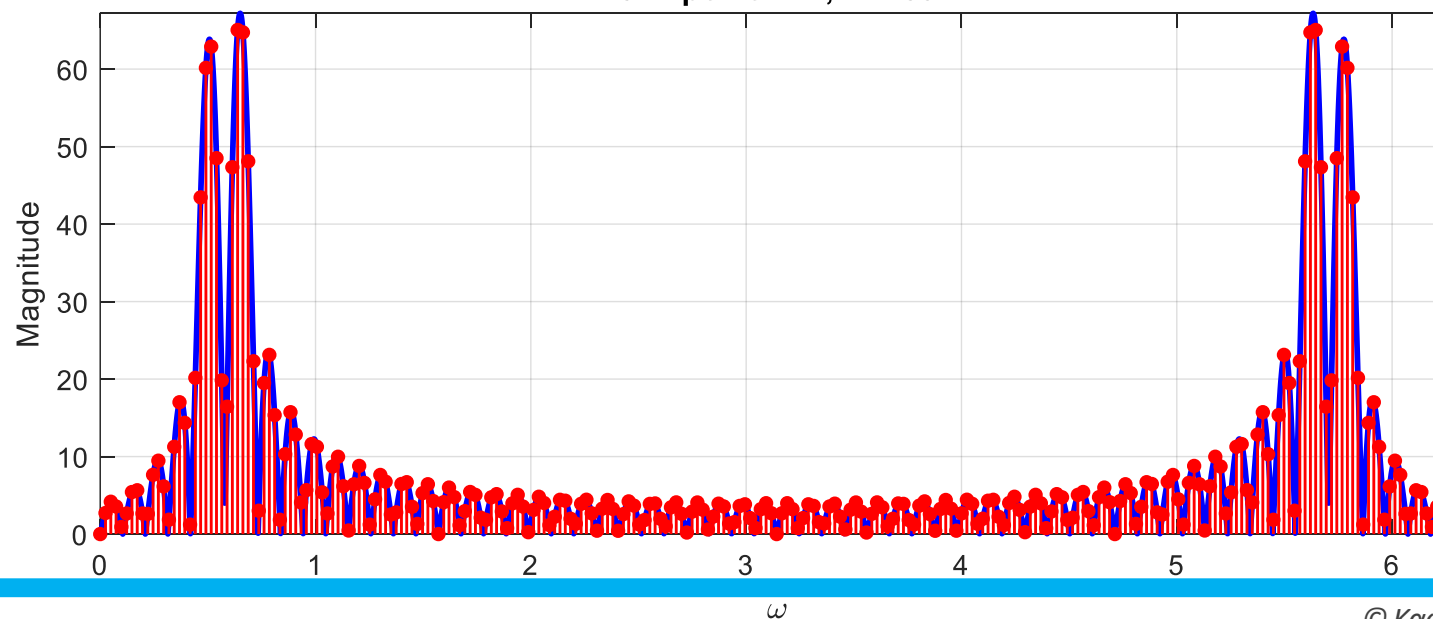
Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Μπορούμε να αυξήσουμε τη διάρκεια M του παραθύρου!!
 - Με άλλα λόγια, να πάρουμε περισσότερα δείγματα από το υπό ανάλυση σήμα!
- Ας επιχειρήσουμε να λύσουμε τα προβλήματα μας...
- Ας δούμε πόσο μήκος παραθύρου χρειαζόμαστε για να διαχωρίσουμε τις συχνότητες
- Για το τετραγωνικό παράθυρο, για να είναι (πλήρως) διαχωρίσιμες οι συχνότητες $\omega_1 < \omega_2$ (δηλ. χωρίς επικάλυψη των κεντρικών λοβών) αρκεί

$$\omega_2 - \omega_1 \geq \frac{4\pi}{M} \Rightarrow M \geq \frac{4\pi}{\frac{\pi}{30}} = 120$$

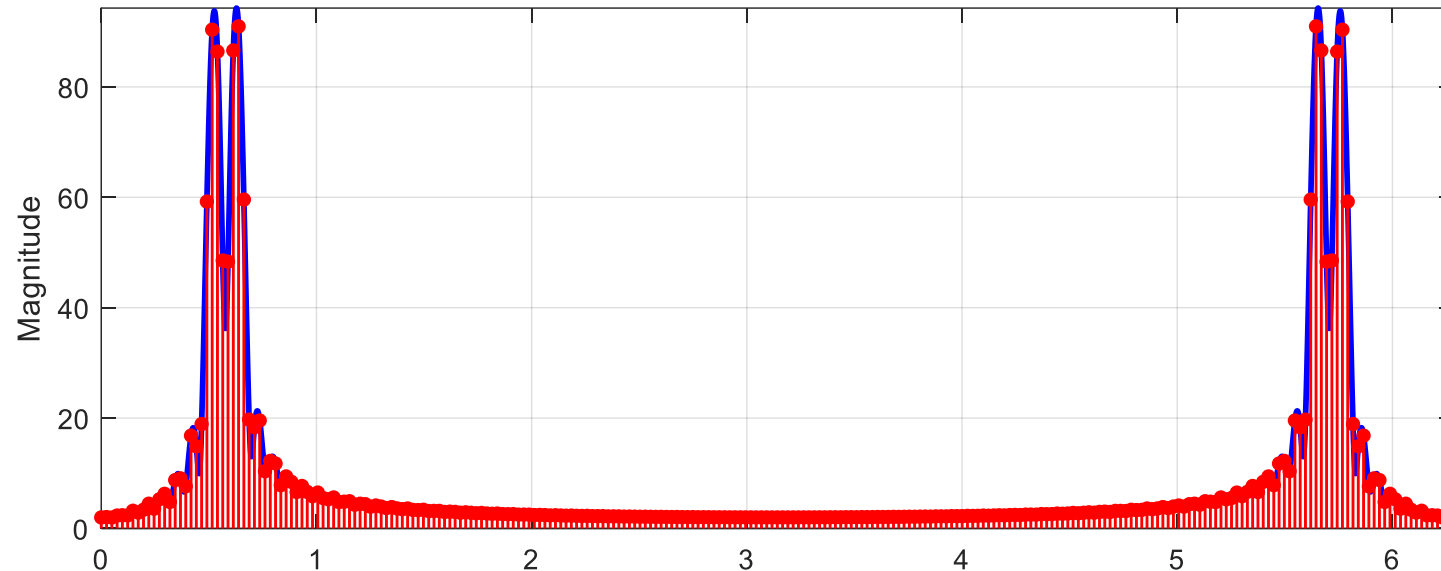
- Ας δούμε διάφορες τιμές του M

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

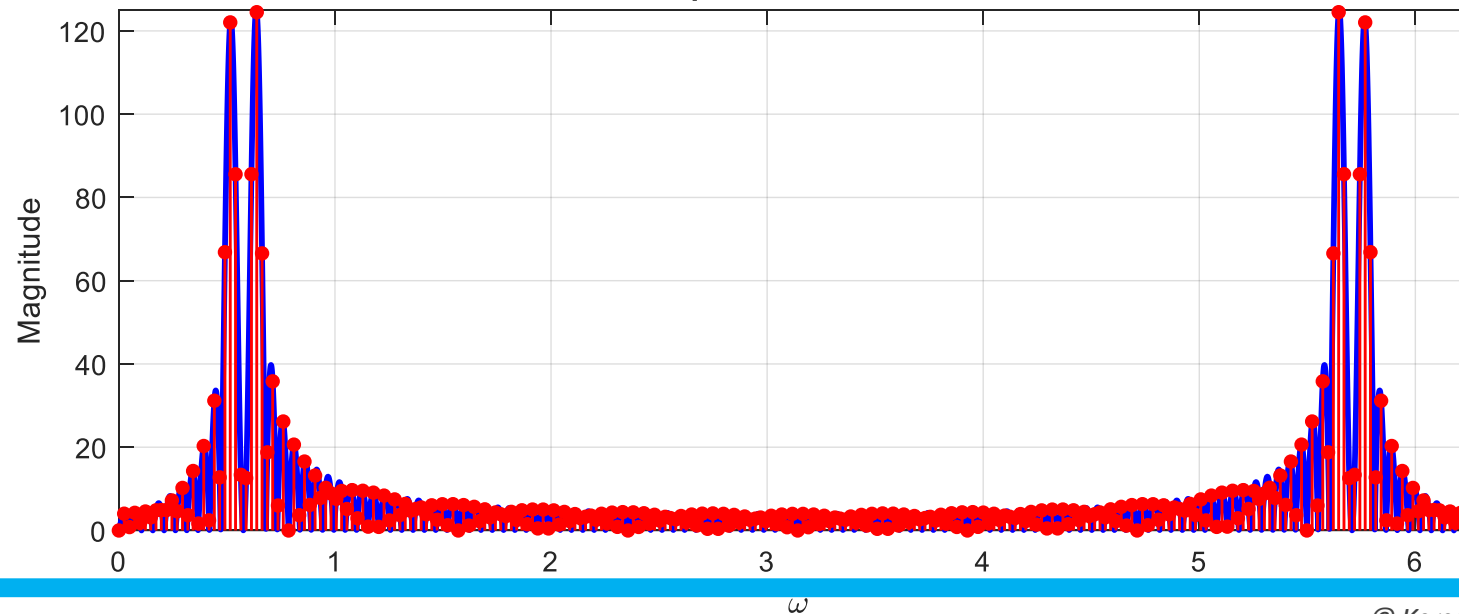
512-point DFT, $N = 30$ 512-point DFT, $N = 60$ 

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

512-point DFT, N = 90



512-point DFT, N = 120



- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Γνωρίζουμε ήδη ένα πολύ καλό παράθυρο, το παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M-1}{2}}{\frac{M-1}{2}} \right]^2} \right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: διάρκεια σήματος παραθύρου M , παράμετρος σχήματος β
- Ας ορίσουμε ως Δ_{ml} το εύρος του κεντρικού λοβού, ως η απόσταση μεταξύ των πρώτων μηδενισμών του φάσματος πλάτους εκατέρωθεν του μηδενός
- Ας ορίσουμε ως A_{sl} το λόγο σε dB μεταξύ του πλάτους του κεντρικού λοβού προς το πλάτος του μεγαλύτερου πλευρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ο Kaiser βρήκε μια συνάρτηση του β συναρτήσεως του A_{sl}

- Είναι

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26), & 13.26 < A_{sl} < 60 \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3), & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$

- Επίσης βρήκε μια σχέση μεταξύ M , Δ_{ml} , A_{sl} :

$$M \cong \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

- Οπότε για δεδομένα A_{sl} , Δ_{ml} μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους β , M

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Πολλά σήματα διακριτού χρόνου προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου

- Συμβολίζοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας ως f_s και άρα την περίοδο δειγματοληψίας ως $T_s = \frac{1}{f_s}$, κατά τη δειγματοληψία θα έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = 2\pi f T_s$$

και όταν δειγματοληπτούμε τη συχνότητα ω σε N σημεία κατά τον DFT, έχουμε:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} = 2\pi f_k T_s \Leftrightarrow f_k = \frac{k}{NT_s} = \frac{k}{N} f_s$$

- Οπότε οι συχνότητες του συνεχούς χρόνου που δειγματοληπτούνται κατά τον DFT είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{N} f_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

- Ας δούμε ένα παράδειγμα

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 125t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

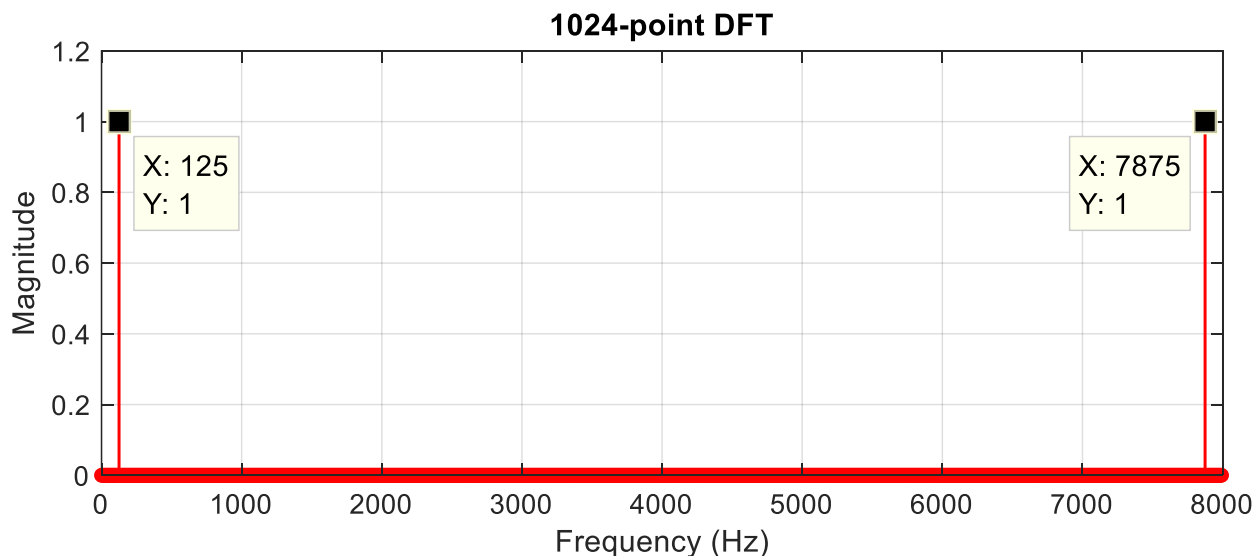
το οποίο δειγματοληπτούμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz

- Οι συχνότητες που αναπαρίστανται σε έναν DFT 1024 σημείων είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{1024} 8000 = 7.8125k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 1023$$

- Η συχνότητα του σήματος θα αναπαρασταθεί από το bin $k = 16$ του DFT

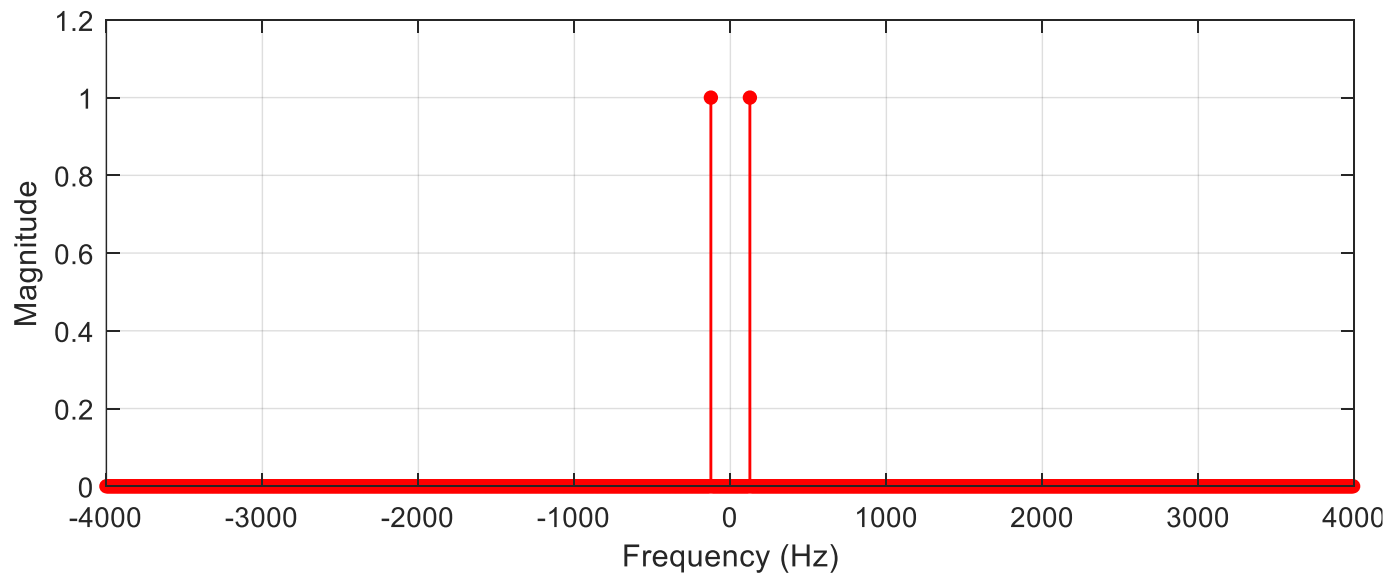
- ...αλλά και από το bin $k = 1008$!!



• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

• Ξέρουμε όμως ότι ένα σήμα που δειγματοληπτείται με συχνότητα f_s μπορεί να αναπαραστήσει μοναδικά συχνότητες ως $f_s/2$

• Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το αμφίπλευρο φάσμα στη συχνότητα f , στο διάστημα $\left(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right)$



```
% Sampling frequency
fs = 8000;
% DFT samples
NFFT = 1024;
% Frequency bins
k = (-NFFT/2:NFFT/2-1);
% Frequency in Hz
f = k*fs/NFFT;
% Time index
t = 0:1/fs:1;
% f0
f0 = 125;
% Signal
x = 2*cos(2*pi*f0*t);
% DFT @ NFFT and normalize
X = fft(x, NFFT)/NFFT;
% Plotting
stem(f, fftshift(abs(X)), 'r', 'LineWidth', 1);
grid; xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('Magnitude');
```

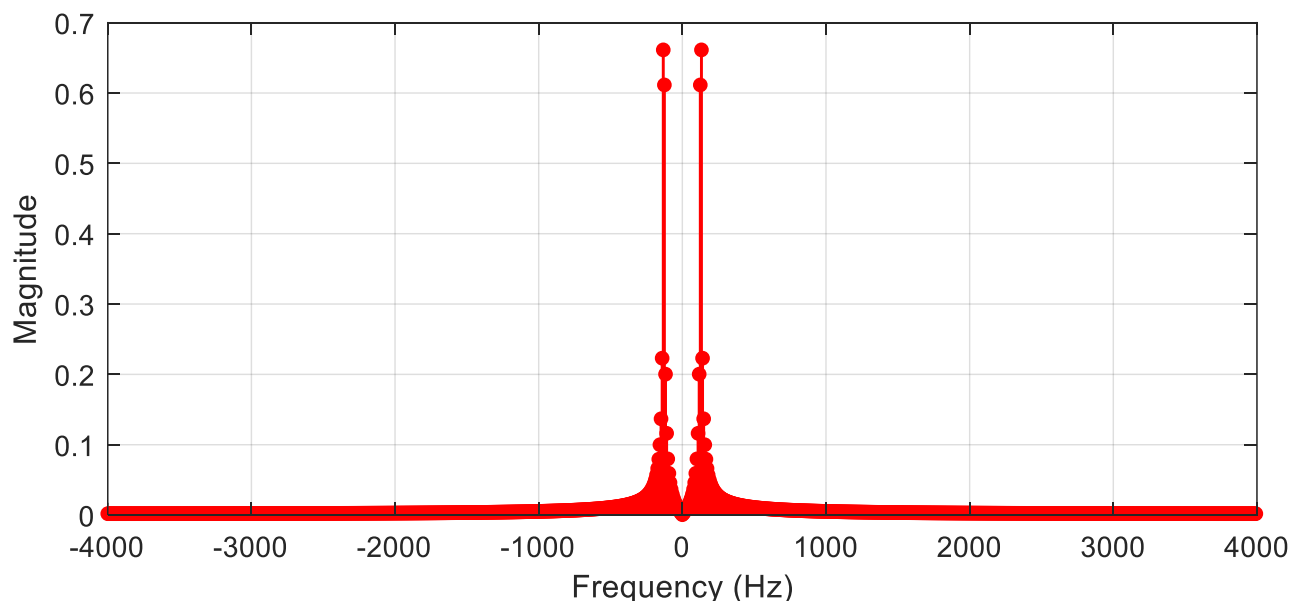
- Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση *fftshift* του MATLAB, η οποία αντιστρέφει το δεξί με το αριστερό τμήμα του φάσματος που επιστρέφει ο *fft*

- Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier
- Φυσικά δε γίνεται πάντα οι συχνότητες ενός σήματος να προκύπτουν ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{f_s}{N}$
- Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 129t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

το οποίο δειγματοληπτούμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz με έναν DFT 1024 σημείων

- Χρειαζόμαστε έναν DFT περισσότερων σημείων

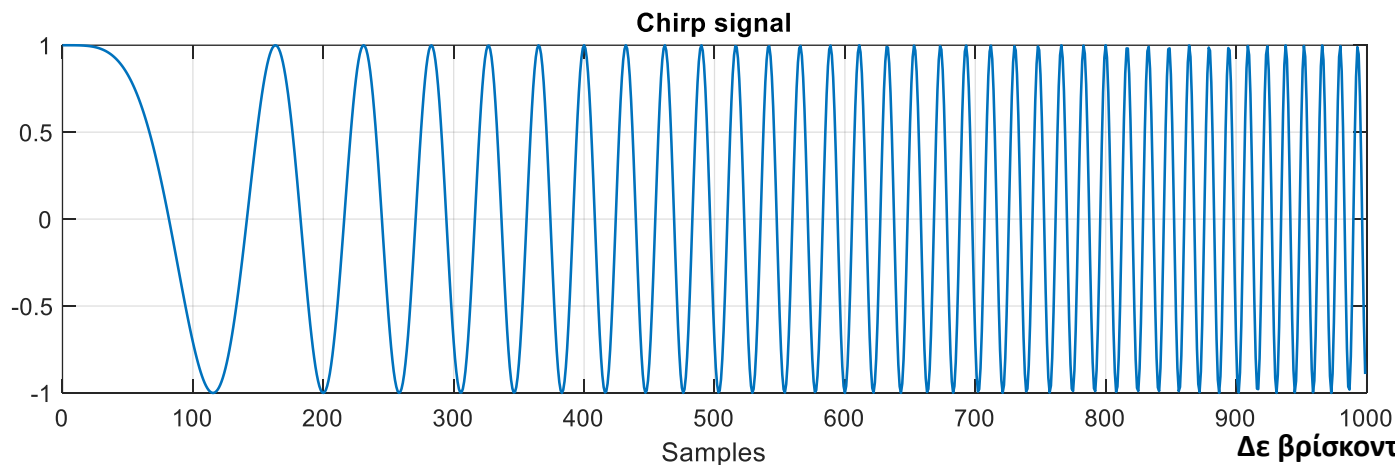


• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

- Τα παραδείγματα φασματικής ανάλυσης που είδαμε ως τώρα είναι αρκετά περιοριστικά
- Οι παράμετροι των ημιτόνων (συχνότητες, πλάτη, φάσεις) που αναλύσαμε ήταν στάσιμοι
 - Δεν άλλαζαν με το χρόνο, ήταν ίδιοι από την αρχή ως το τέλος του παραθύρου ανάλυσης
- Αυτό στην πράξη δεν ισχύει
 - Radar, sonar, ήχος, φωνή, επικοινωνίες κ.α.
- Αυξάνοντας τη διάρκεια M του παραθύρου έχουμε καλύτερη ανάλυση (διακριτική ικανότητα) του σήματος
 - Αλλά κάνουμε φασματική ανάλυση σε μεγάλα τμήματα του σήματος, που περιλαμβάνουν πολλές μεταβολές στις παραμέτρους...
- Τι θα δούμε στο φάσμα?
 - Ποιες τιμές των παραμέτρων θα εμφανιστούν?
 - Χάνουμε σε χρονική «τοπικότητα»
 - Δεν ξέρουμε σε ποιο τμήμα του σήματος στο χρόνο εμφανίζονται οι παράμετροι που βλέπουμε στο φάσμα
- Ας δούμε ένα παράδειγμα...

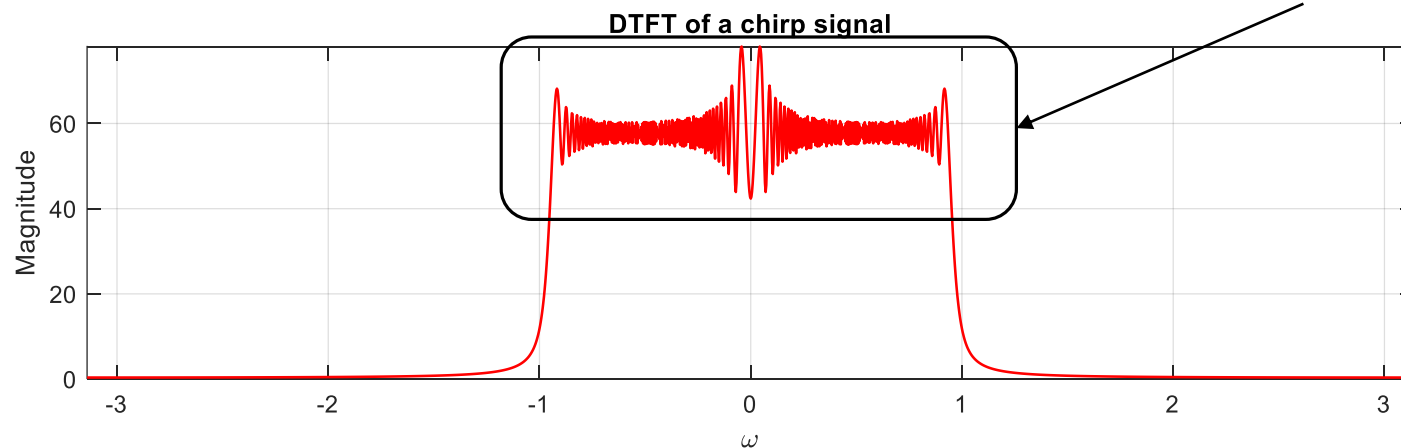
- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform
- Έστω ένα σήμα chirp (σήμα που μεταβάλλεται γραμμικά η συχνότητα)

$$x[n] = \cos(a_0 n^2)$$



Δε βρίσκονται όλες αυτές οι συχνότητες σε όλο το σήμα από την αρχή ως το τέλος του!

- Ο DTFT του:



• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

• Αναγκαζόμαστε να πάμε σε μια άλλη προσέγγιση

- Τον Τμηματικό Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου (**Short Time Discrete Time Fourier Transform – ST-DTFT**)

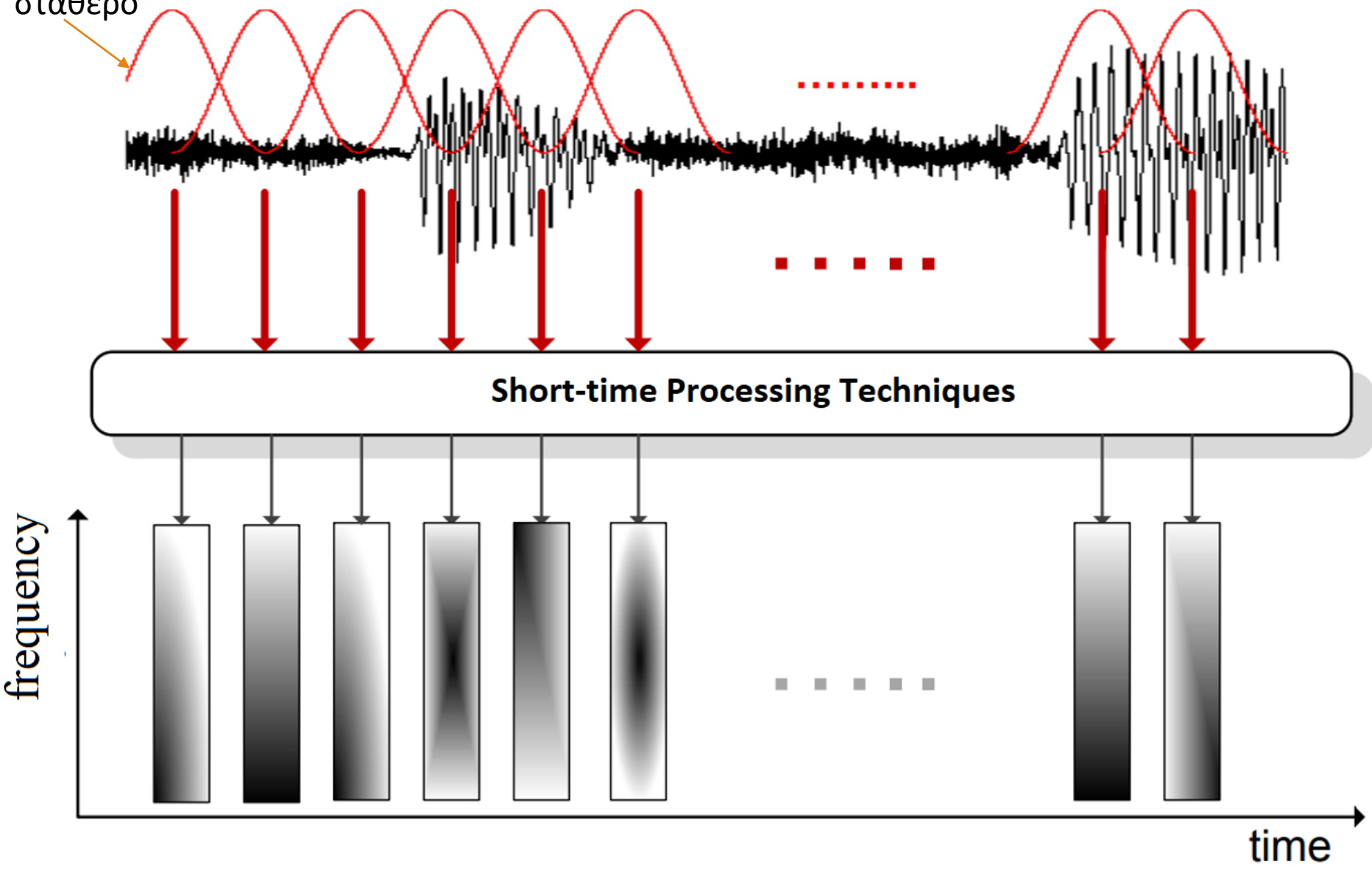
• Ορισμός:

$$X[n, \omega] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Πρόκειται ουσιαστικά για μια «συλλογή μετασχηματισμών Fourier» διακριτού χρόνου λαμβανόμενη σε παραθυροποιημένα τμήματα σήματος με αρχή το δείγμα n , με παράθυρο $w[m]$
- Το σήμα ολισθαίνει ένα δείγμα κάθε φορά κάτω από το παράθυρο, παραθυροποιείται, και στη συνέχεια λαμβάνεται ο DTFT του
- Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αυτή είναι διακριτή ως προς n και συνεχής ως προς ω
 - Όταν τη δειγματοληπτήσουμε θα έχουμε διακριτότητα και στους χώρους
 - Προφανώς η μεταβλητή ω εξακολουθεί να αφορά τη γνωστή μας συχνότητα
- Μια οπτικοποίηση της διαδικασίας υπολογισμού του ST-DTFT

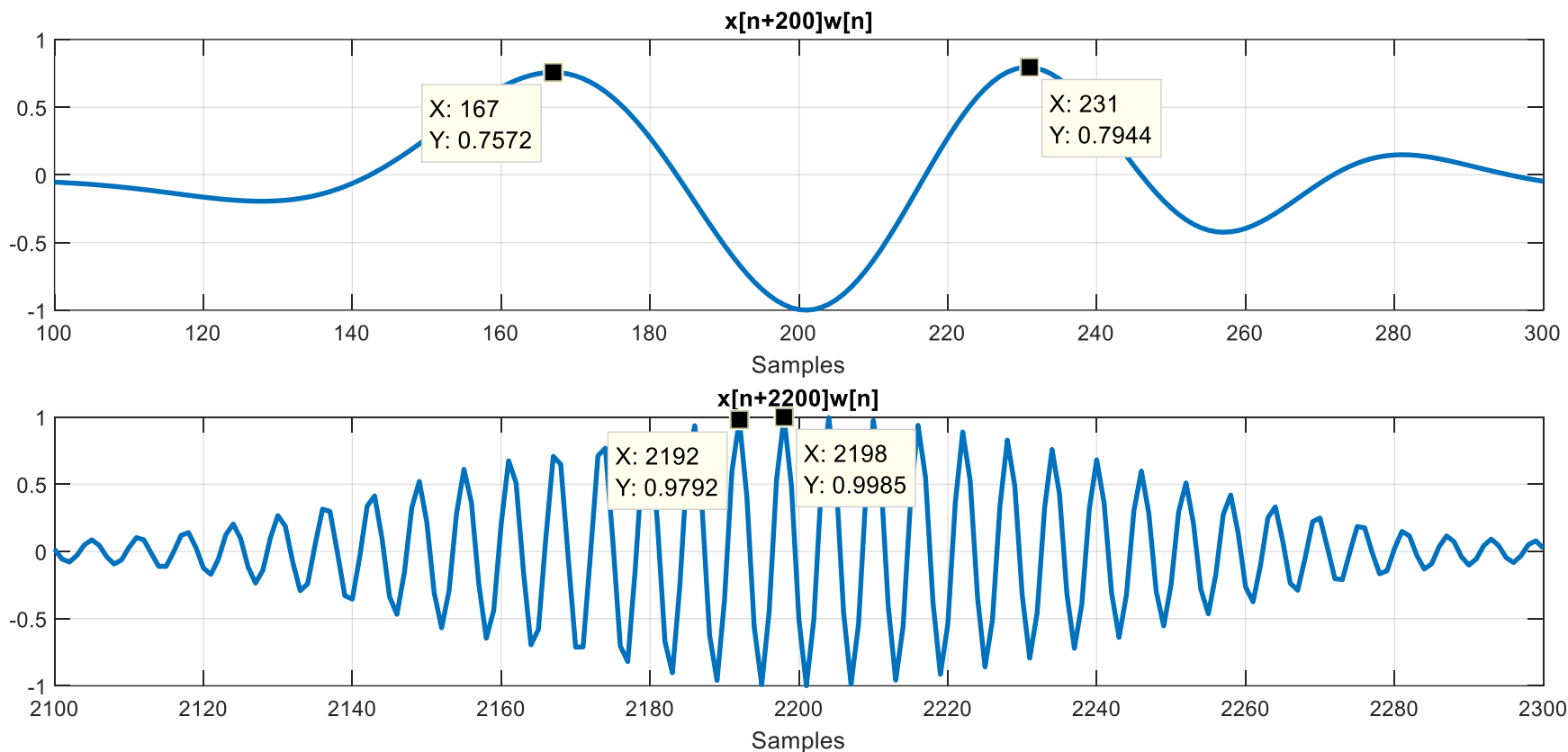
- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

σταθερό



• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

- Αν εφαρμόσουμε τη νέα προσέγγιση στο σήμα μας, ολισθαίνοντας το σήμα κατά 100 και 2100 δείγματα (κέντρο του παραθύρου Hamming το 201-οστό και το 2201-οστό δείγμα):

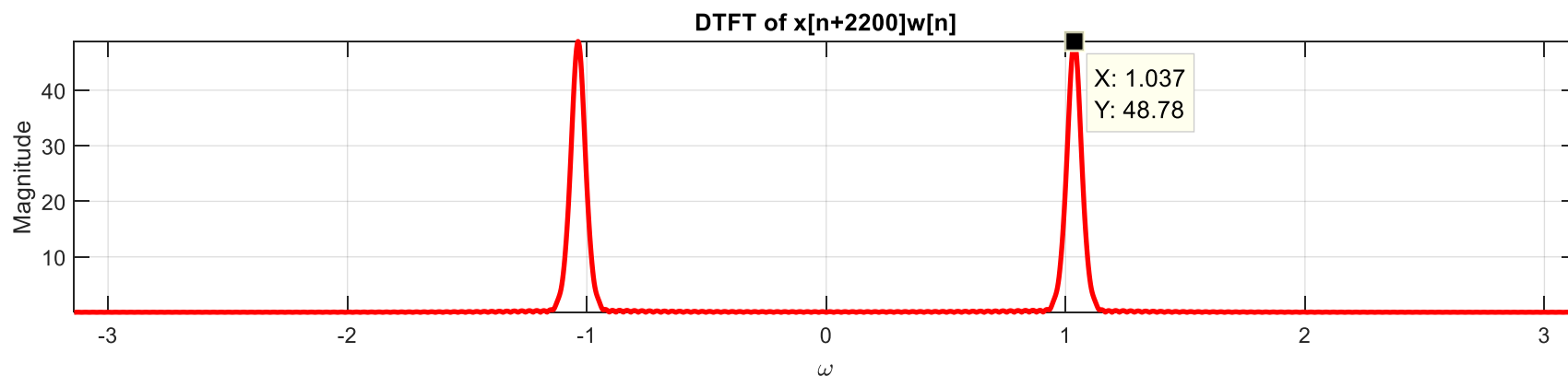
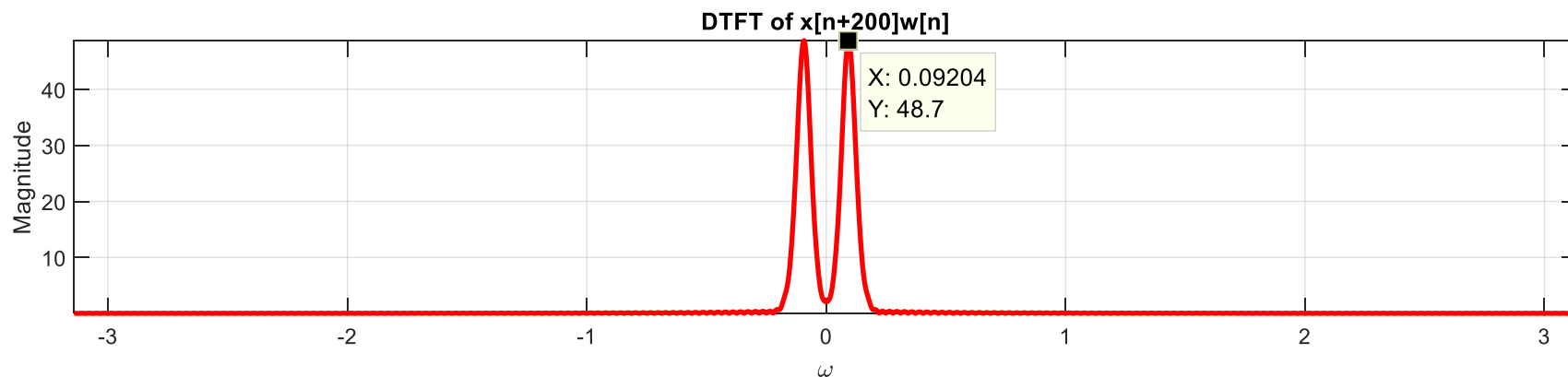


- Οι συχνότητες πρέπει να είναι (χονδρικά) κοντά στις τιμές

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{231 - 167} = 0.0982, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{2198 - 2192} = 1.0472$$

- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

- Παίρνοντας αντίστοιχους 2048-DTFTs, θα δούμε την παρακάτω εικόνα στο $(-\pi, \pi]$:



- Παρατηρούμε ότι πλέον η «τοπικότητα» επανήλθε!

- Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες που προέκυψαν στο φάσμα πλάτους ανταποκρίνονται αρκετά καλά στις πραγματικές

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

```
% Plain DFT
n = 0:20000;
a0 = 75*pi*10^(-6);
% Freq. varying signal
x = cos(a0*n.^2);
NFFT = 2048;
% FFT
X = abs(fft(x, NFFT));
k = -NFFT/2:NFFT/2-1;
% Plotting
figure; plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X))
```

• Ενδεικτικός κώδικας

```
% Parts of signal
% Window
w = hamming(201);
N = 201;
start1 = 100;
fin1 = start1 + N-1;
start2 = 2100;
fin2 = start2 + N-1;
% FFTs of part of signal
X1 = abs(fft(x(start1:fin1).*w', NFFT));
X2 = abs(fft(x(start2:fin2).*w', NFFT));
% Plotting
figure;
subplot(211); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X1), 'r');
subplot(212); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X2), 'r');

% In time
figure; subplot(211); plot(start1:fin1, x(start1:fin1).*w');
subplot(212); plot(start2:fin2, x(start2:fin2).*w');
```

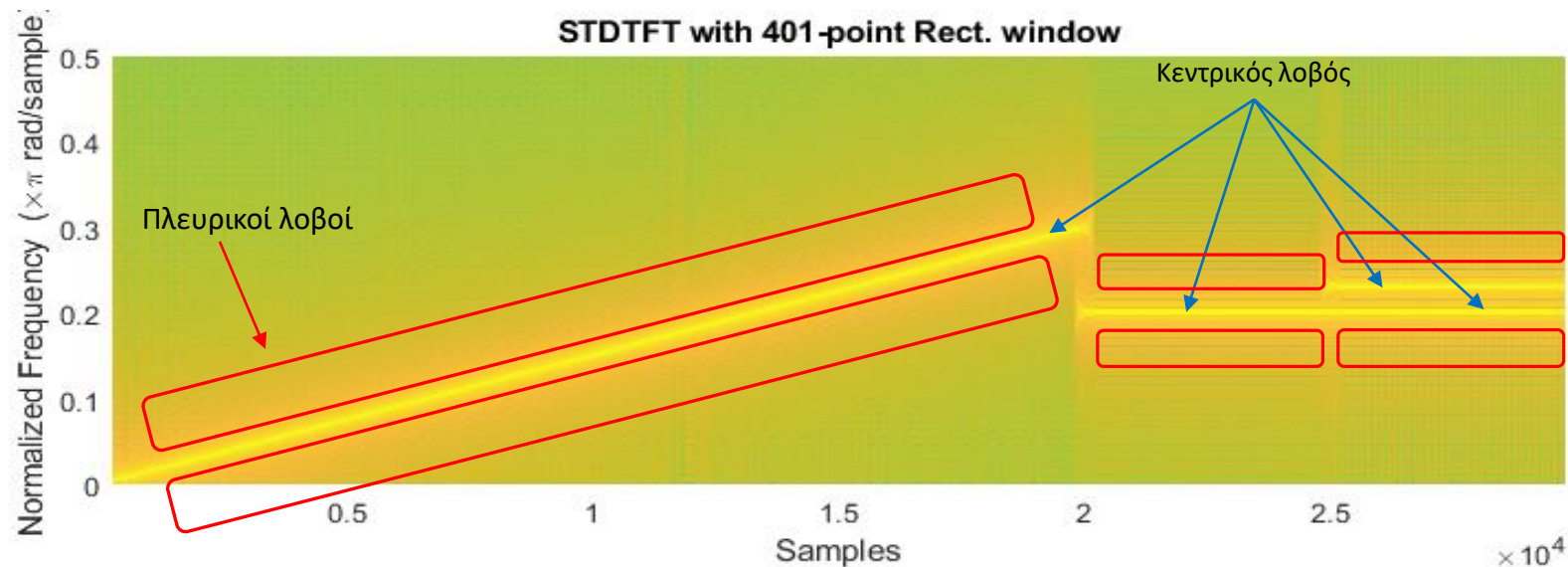
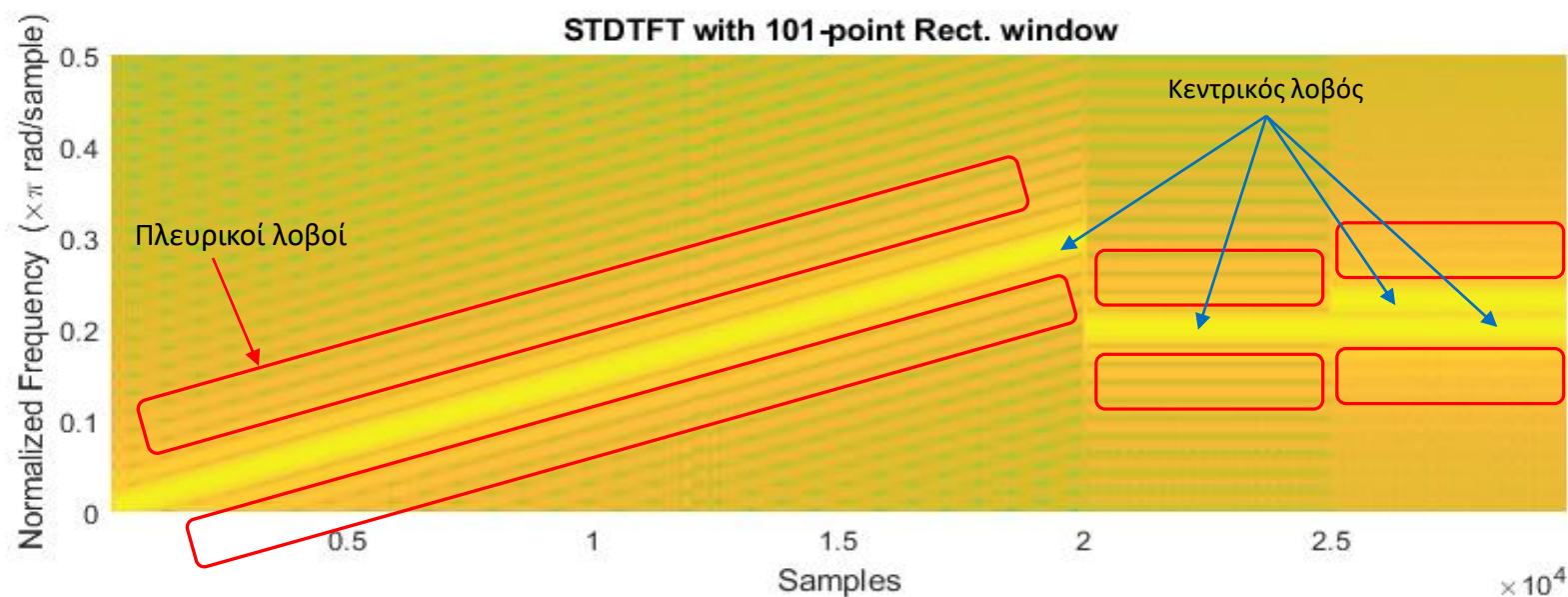
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Ας δούμε το παρακάτω σήμα:

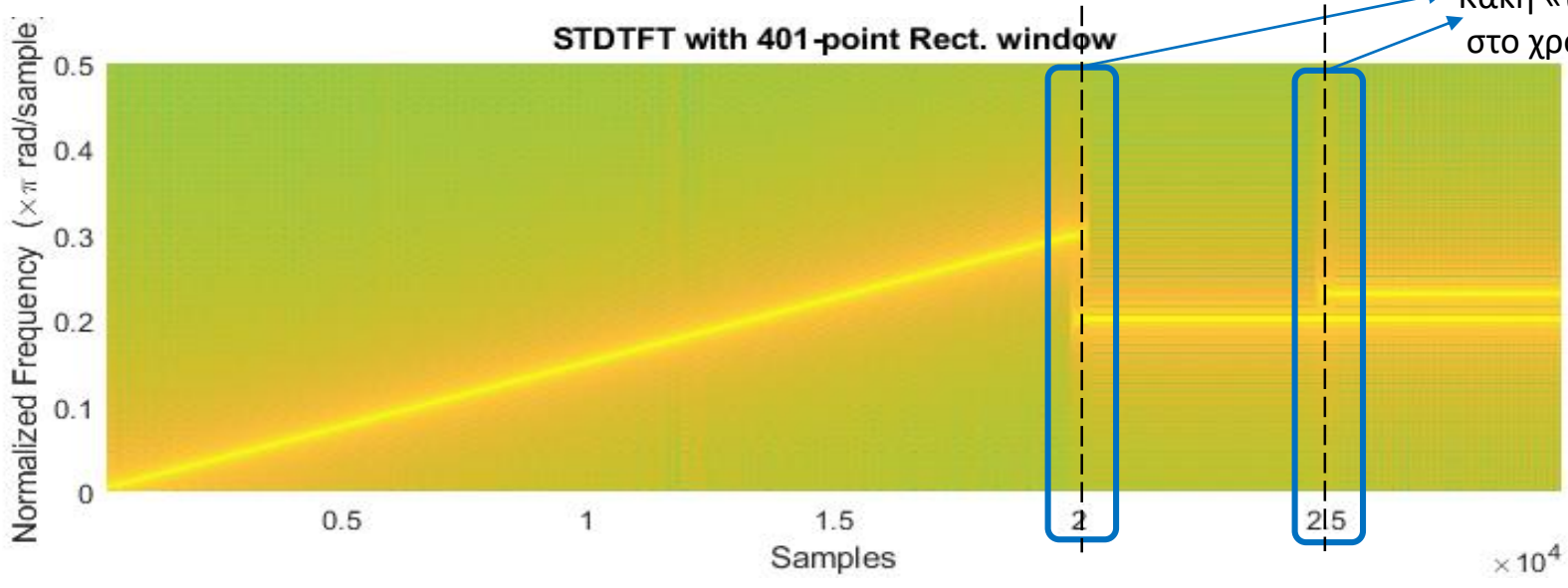
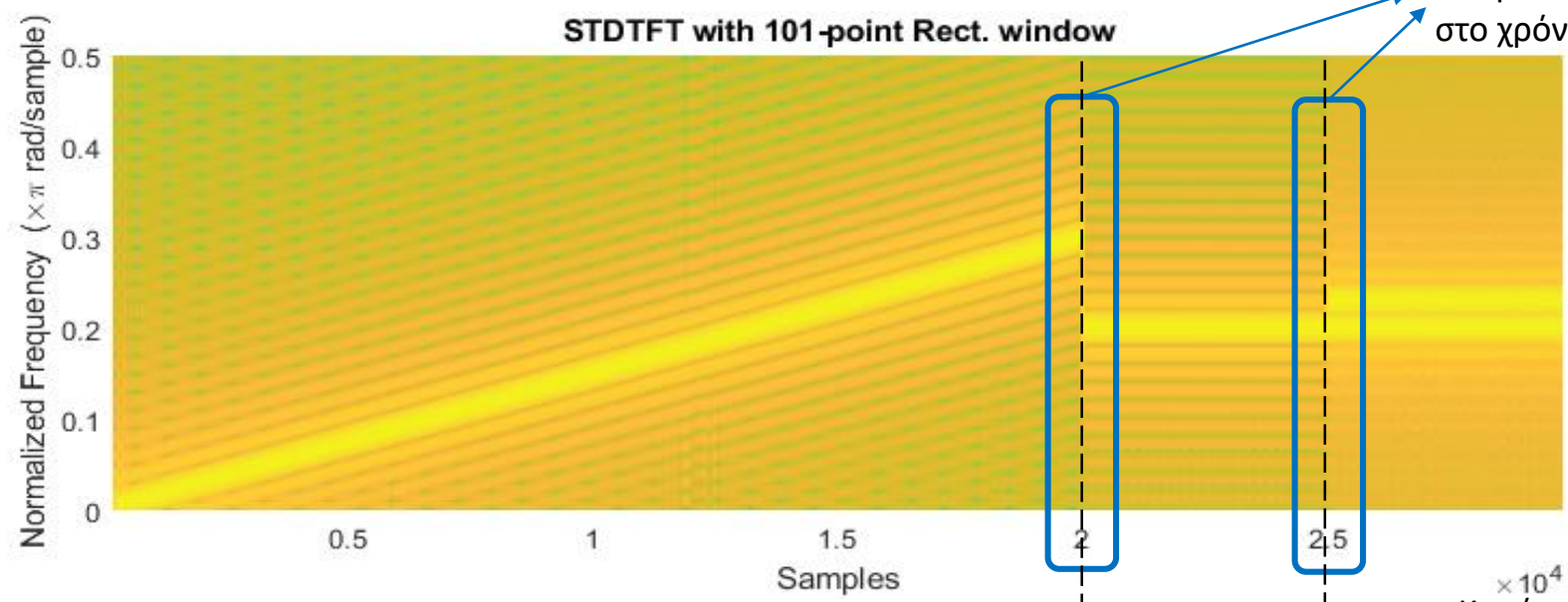
$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \cos(a_0 n^2), & 0 \leq n \leq 20000 \\ \cos(0.2\pi n), & 20001 \leq n \leq 25000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n), & n \geq 25001 \end{cases}$$

- Θα υπολογίσουμε το ST-DTFT με δυο τρόπους:
 - Με ένα παράθυρο διάρκειας 101 δειγμάτων
 - Με ένα παράθυρο διάρκειας 401 δειγμάτων
- Θα υπολογίσουμε ξανά το ST-DTFT με δυο τρόπους:
 - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 101 δειγμάτων
 - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 401 δειγμάτων
- Ας απεικονίσουμε το μέτρο του – ονομάζεται **φασματογράφημα (spectrogram)**
 - Η απεικόνιση γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα πλάτους (decibel - $20 \log_{10} |X(e^{j\omega})|$)
- Θα παρατηρήσουμε πολύ ενδιαφέροντα πράγματα! 😊

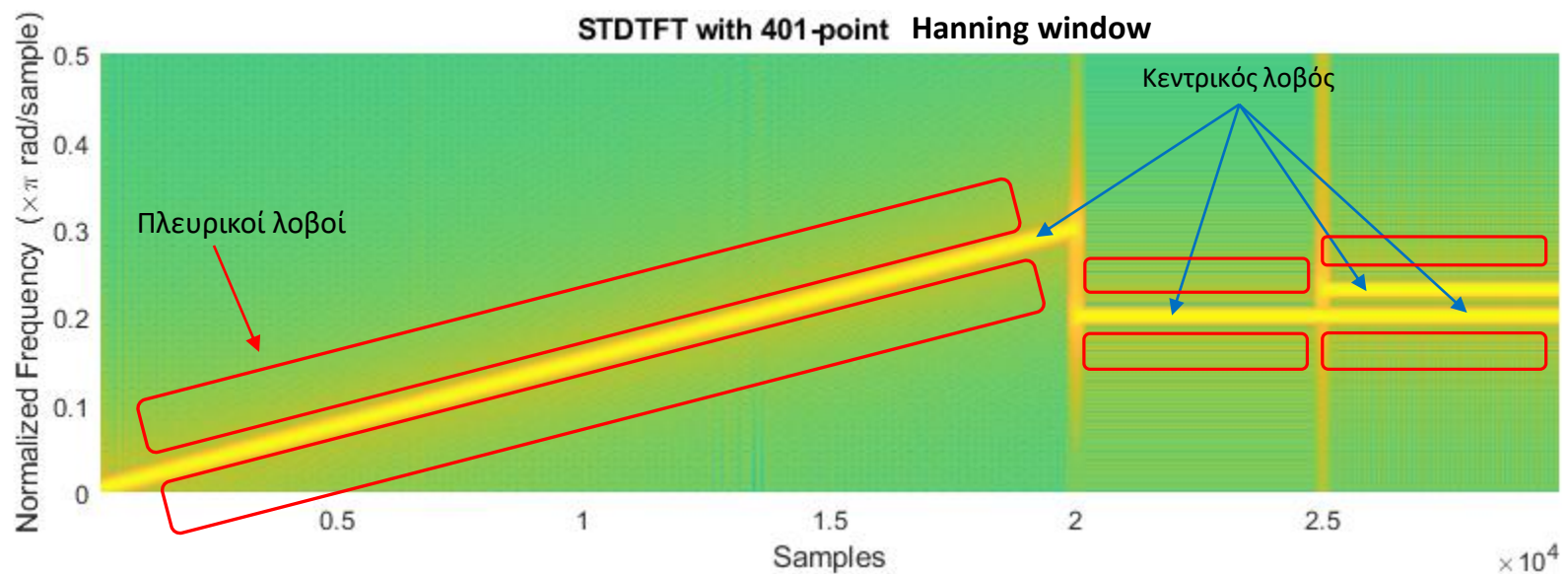
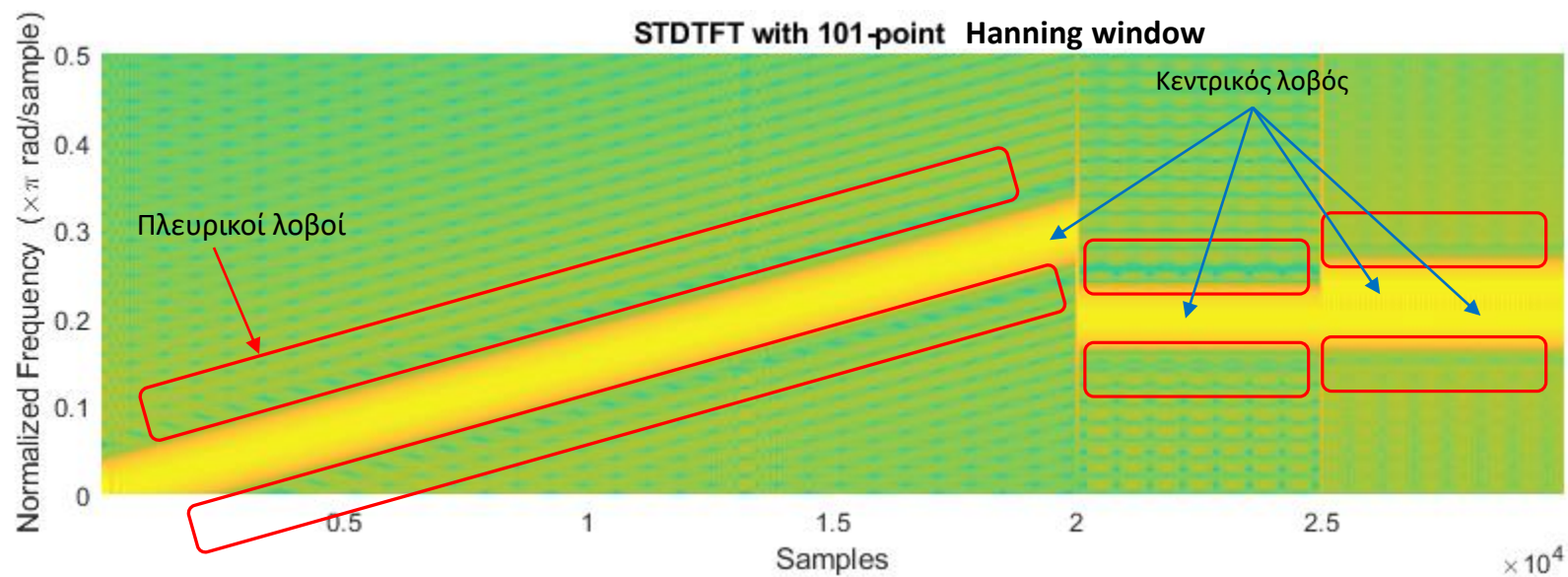
- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform



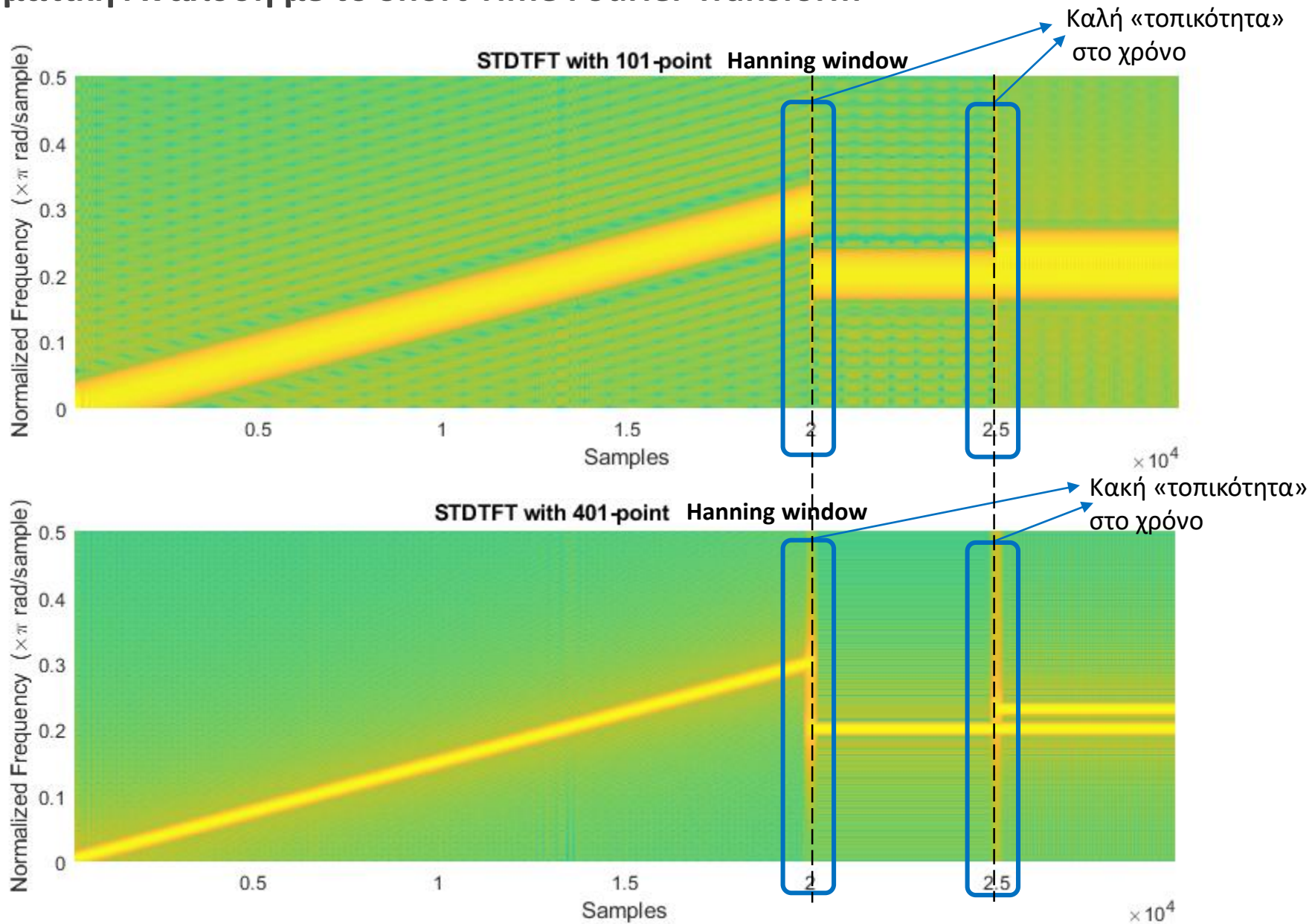
- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

```
% Signal creation
```

```
a0 = 7.5*pi*10^(-6);
```

```
x1 = cos(a0*(0:20000).^2);
```

```
x2 = cos(0.2*pi*(20001:25000));
```

```
x3 = cos(0.2*pi*(25001:30000)) + cos(0.23*pi*(25001:30000));
```

```
x = [x1 x2 x3];
```

- Ενδεικτικός κώδικας

```
% STDTFTs - actually it's a simulated STDTFT
```

```
% by ST Discrete Fourier Transform
```

```
NFFT = 512;
```

```
% Rectangular window
```

```
L = 101;
```

```
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided', 'yaxis');
```

```
V = axis;
```

```
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
```

```
title('STDTFT with 101-point Rect. Window');
```

```
L = 401;
```

```
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided', 'yaxis');
```

```
V = axis;
```

```
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
```

```
title('STDTFT with 401-point Rect. Window');
```

```
% Hamming window (default)
```

```
L = 101;
```

```
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided', 'yaxis');
```

```
V = axis;
```

```
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
```

```
title('STDTFT with 101-point Hamming Window');
```

```
L = 401;
```

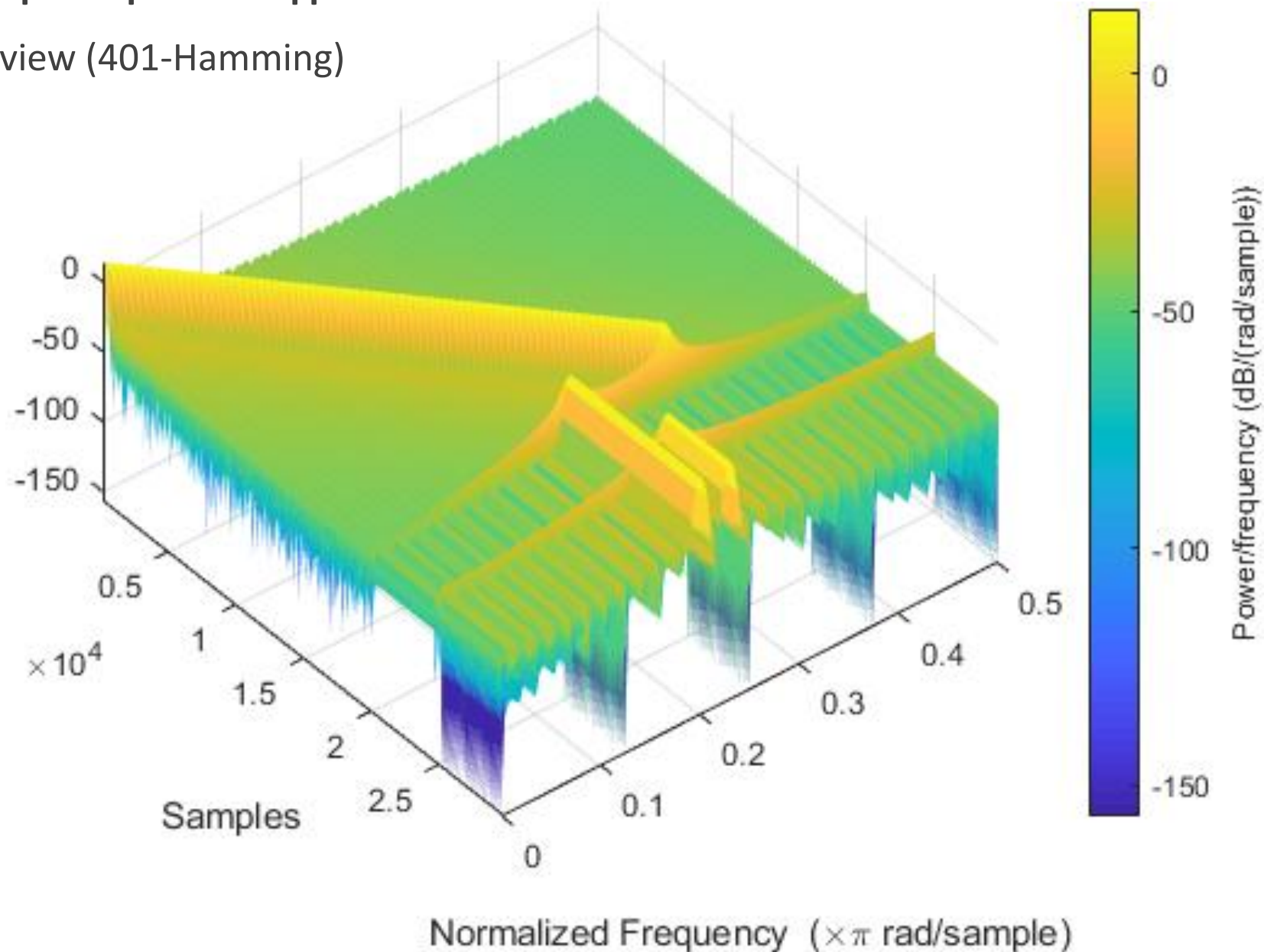
```
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided', 'yaxis');
```

```
V = axis;
```

```
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
```

```
title('STDTFT with 401-point Hamming Window');
```


- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform
- 3D-view (401-Hamming)



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

- STDTFT:

$$X[n, \omega] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο DTFT του σήματος $x[n+m]w[m]$: ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος αν το παράθυρο ανάλυσης έχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο

- Οπότε

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X[n, \omega] e^{j\omega m} d\omega$$

δηλ.

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]} \int_0^{2\pi} X[n, \omega] e^{j\omega m} d\omega$$

αν $w[m] \neq 0$

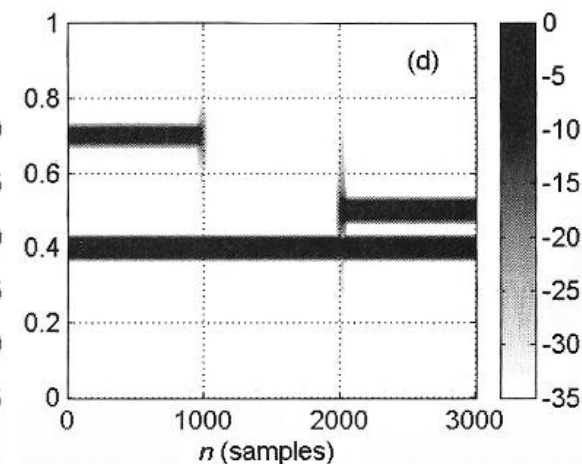
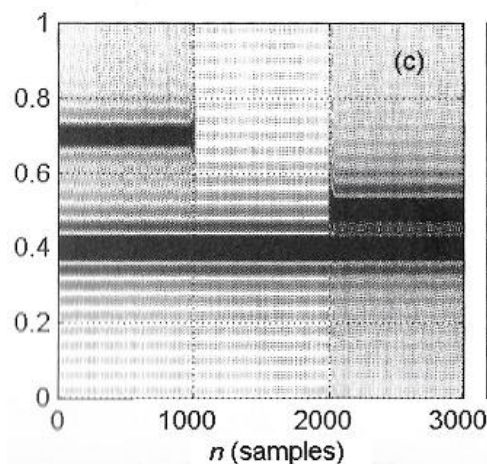
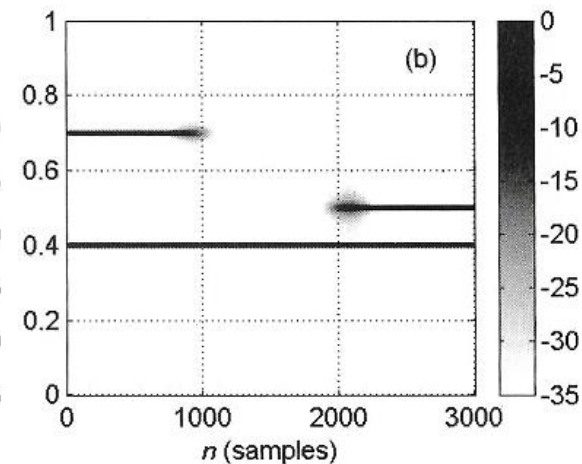
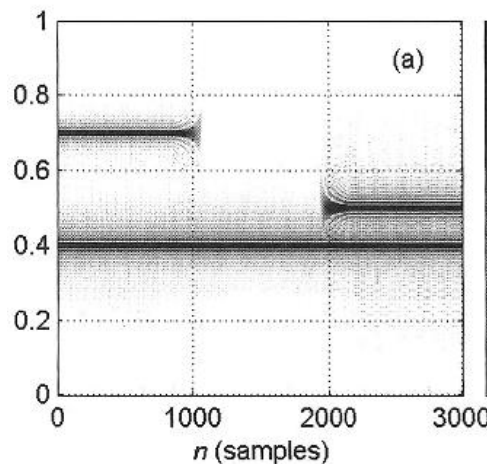
- Άρα αν επιλέξουμε ένα $m : w[m] \neq 0$ μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα $x[n]$ για κάθε n

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

• Παράδειγμα:

□ Ένα αναλογικό σήμα που αποτελείται από ένα άθροισμα ημιτόνων δειγματοληπτήθηκε με $f_s = 10$ kHz. Για τα STDTFT δίπλα χρησιμοποιήθηκαν παράθυρα Hamming ή τετραγωνικά. Απαντήστε στις ερωτήσεις:

- i. Σε ποιες εικόνες χρησιμοποιήθηκε τετραγωνικό παράθυρο?
- ii. Ποιο/α ζεύγος/η έχουν περίπου την ίδια ανάλυση στη συχνότητα?
- iii. Ποιος STDTFT έχει το μικρότερο παράθυρο ανάλυσης στο χρόνο?
- iv. Γράψτε μια εξίσωση για το σήμα που δειγματοληπτήθηκε, η οποία παρήγαγε τα διπλανά STDTFT.



• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

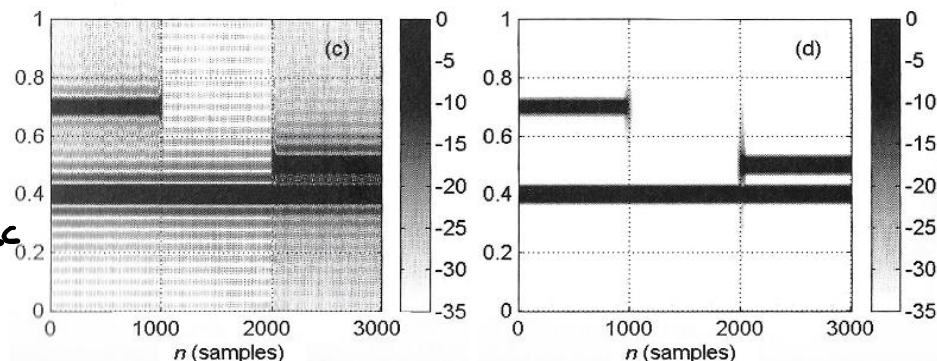
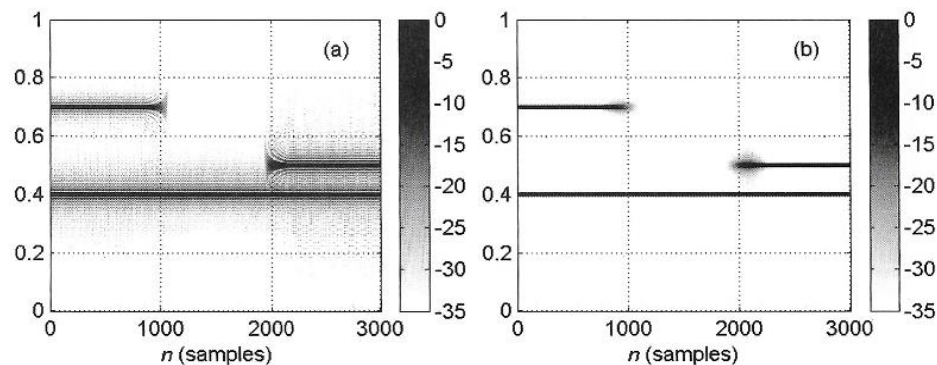
i. (a, c)

ii. (a, b), (c, d)

iii. c

iv.
$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{2\pi f}{10.000} = 0.4\pi$$

λρ a
$$2\pi f = 4000\pi \text{ rad/sec}$$



iv.

$$x_c(t) = \begin{cases} A_1 \cos(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1) + A_2 \cos(0.7\pi \times 10^4 t + \phi_2), & 0 \leq t \leq 1000 \times 10^{-4} \\ A_1 \cos(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1) + 0, & 0.1 \leq t < 0.2 \\ A_1 \cos(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1) + A_3 \cos(0.5\pi \times 10^4 t + \phi_3), & 0.2 \leq t. \end{cases}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

