

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14<sup>Η</sup>

- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Z

- FIR συστήματα (επανάληψη...)

- Συμπεράσματα

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| > 0\}$

- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| < \infty\}$

- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα (επανάληψη...)**

- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του  $z^{-1}$
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι
  - Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
  - Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
  - Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής  $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών (επανάληψη...)

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Το σύστημα είναι FIR και αιτιατό:  $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \dots$

Είναι

$$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z)$$

$$= X(z) \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \right)$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}, \quad |z| > 0$$

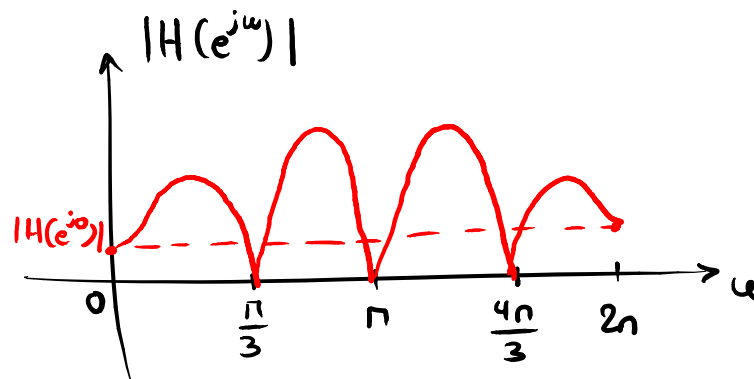
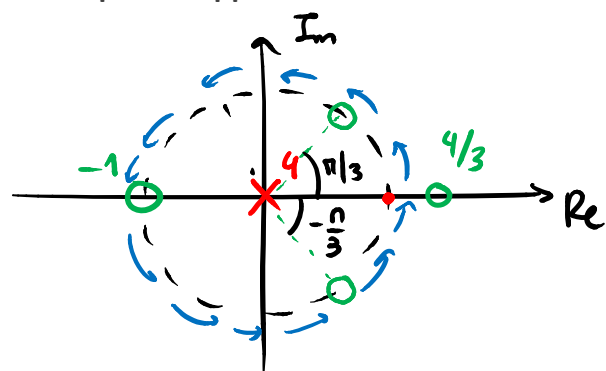
Είναι

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = -1 \\ z = 4/3 \\ z = e^{j\pi/3}, z = e^{-j\pi/3} \end{array} \right\} (4)$$

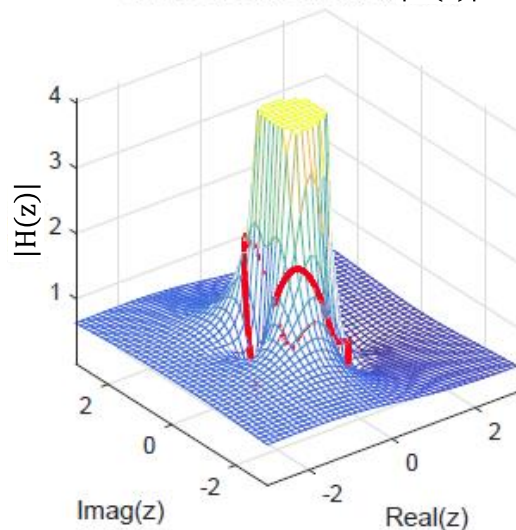
$\rightarrow$  Πόλοι:  $z = 0$  (4)

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

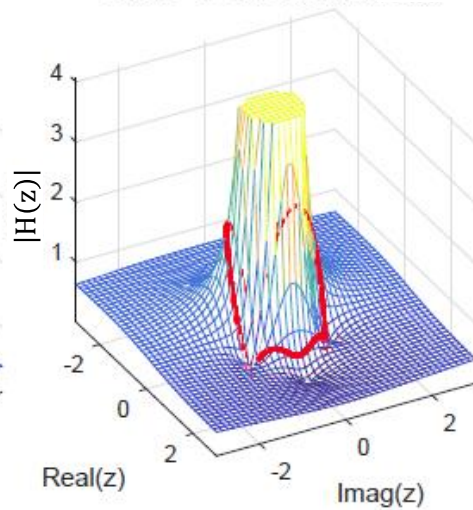
• Παράδειγμα:



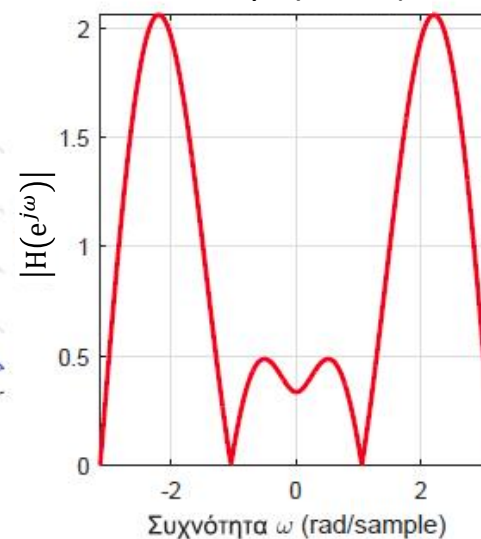
Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$



Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$



Απόκριση Πλάτους



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{(z+3)(z-1)} = \frac{z(z-2)}{(z+3)(z-1)}$$

$$\underbrace{z^2 + 2z - 3 = 0}_{z=0, z=2} \rightarrow \left. \begin{matrix} z = -3 \\ z = 1 \end{matrix} \right\} = \text{ROC: } 1 < |z| < 3$$

λόγω μη αιτιατότητας  
του συστήματος

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$\text{Είναι } H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+3z^{-1}}$$

$$A = H(z)(1-z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

$$B = H(z)(1+3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Άρα } H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1+3z^{-1}}, \text{ ROC: } 1 < |z| < 3$$

- $|z| > 1$
- $|z| < 1$

- $|z| > 3$
- $|z| < 3$

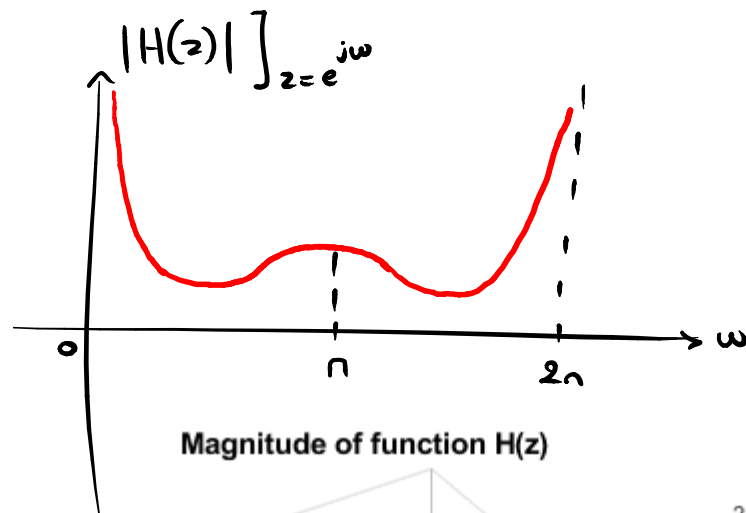
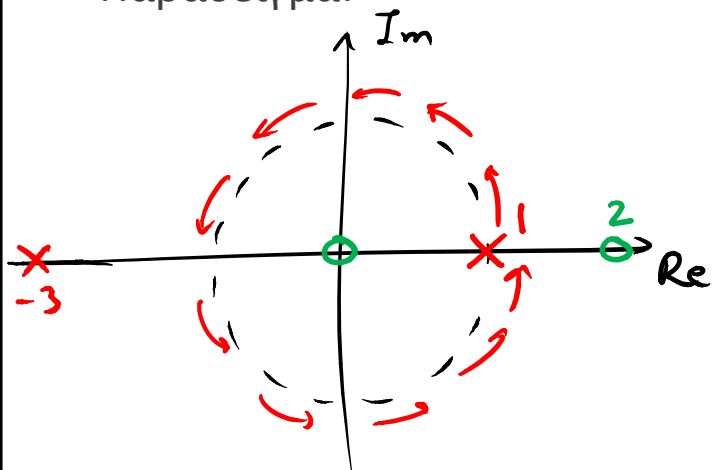
$$\text{Οπότε: } h[n] = -\frac{1}{4} u[n] - \frac{5}{4} (-3)^n u[-n-1]$$

$$\text{Είναι } H(e^{j\omega}) = -\frac{1}{4} \left( \pi \delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \right) + \frac{5}{4} \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$$

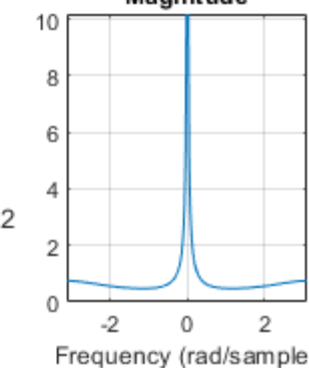
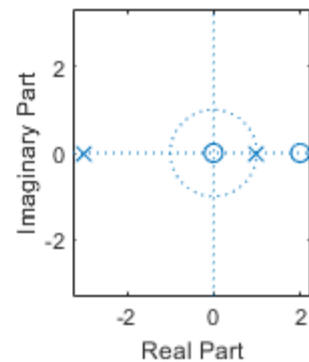
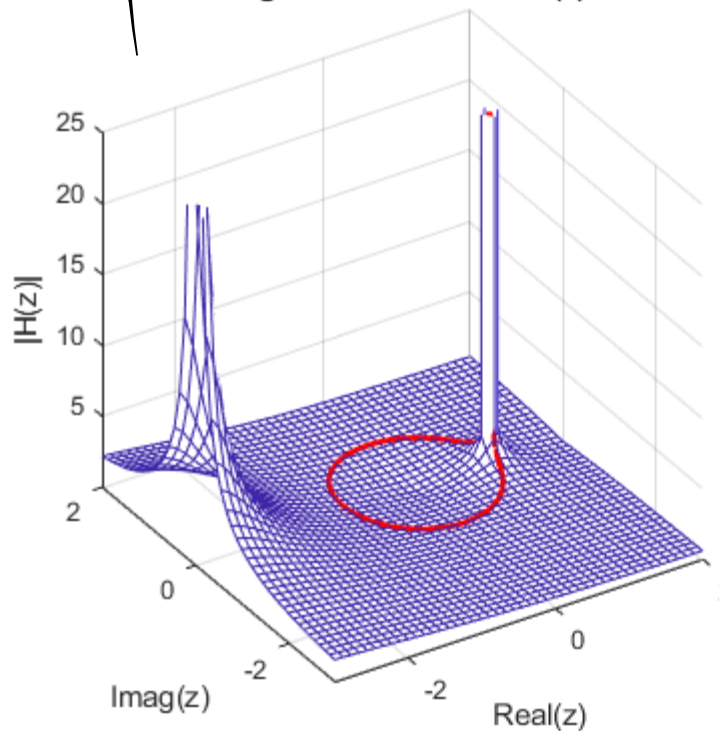


• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

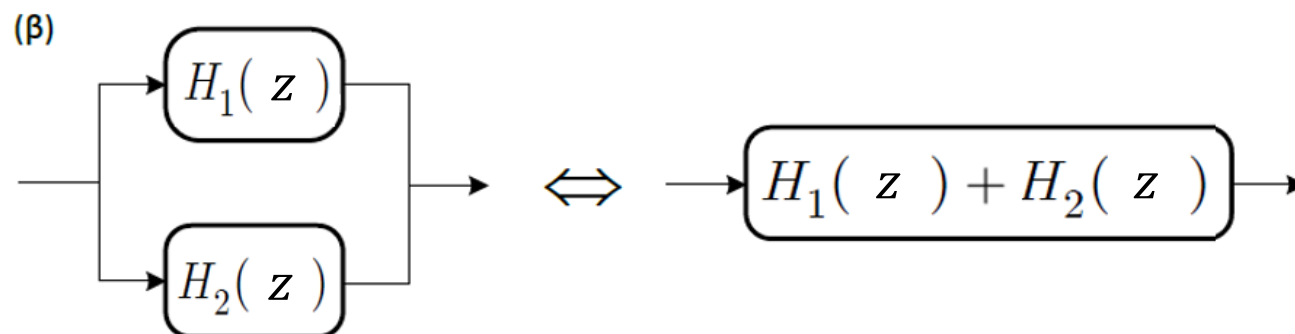
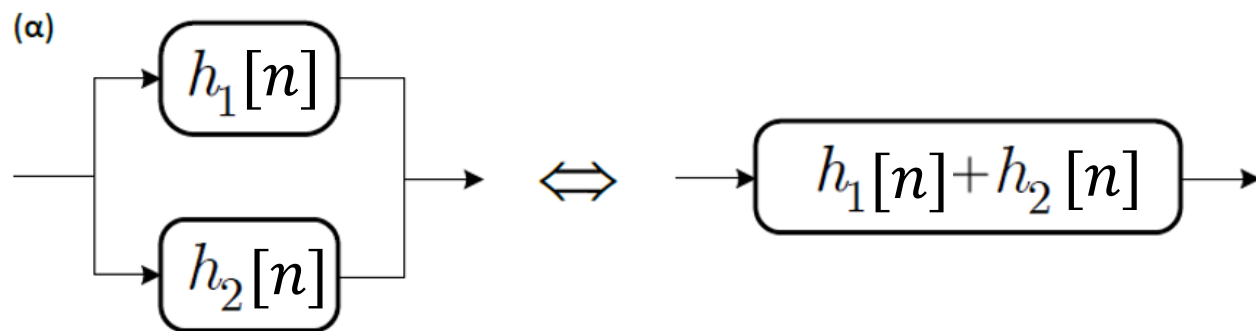
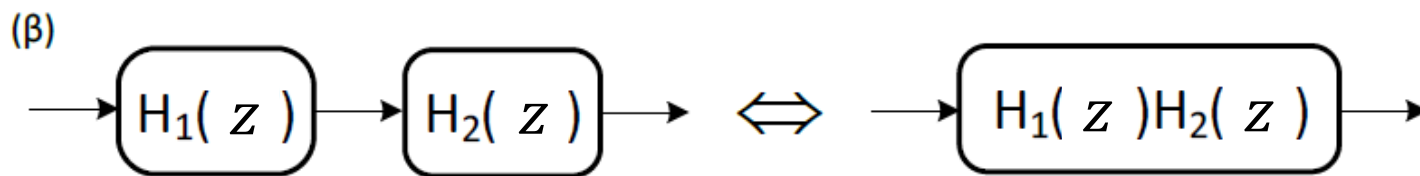
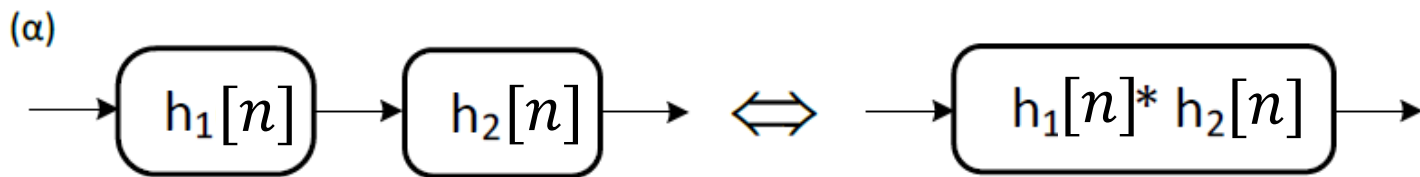
• Παράδειγμα:



Magnitude of function H(z)



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του  $Z$  – Διατάξεις Συστημάτων



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**

- Έχουμε δείξει ότι αν  $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$  τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν  $|\gamma_i| < 1, \forall i$ , όπου  $\gamma_i$  οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του  $h[n]$  συγκλίνει ομοιόμορφα  $\forall \omega$



- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Οι πόλοι βρίσκονται στα θέσεις  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2}$

Πιθανά ROCs:

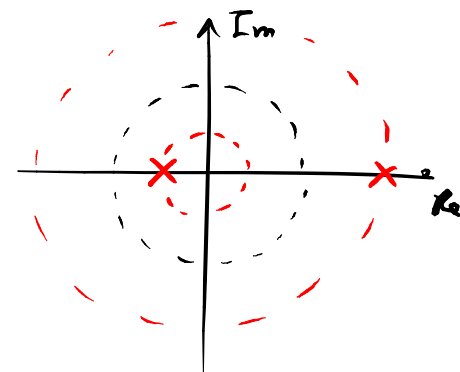
(α)  $|z| > 2$     (β)  $|z| < \frac{1}{2}$     (γ)  $\frac{1}{2} < |z| < 2$

Είναι

$$H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με } A = 1, B = 1$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του  $Z$  – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

(α) Θέλω το σύστημα να είναι ευσταθές. Αυτό συμβαίνει στο (γ)

$$\text{Πεδίο : } \frac{1}{2} < |z| < 2 \Rightarrow \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ |z| < 2 \right\}$$

$$\text{Άρα } H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(β) Τα αυθαγά σήματα έχουν ελωστρεφές πεδίο σύγκλισης. Αυτό είναι το  $|z| > 2 \Rightarrow \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ |z| > 2 \right\}$

$$\text{Άρα } H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = 2^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

Έχουμε 
$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\left(1 - 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-2}\right)Y(z) = \left(2 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)X(z)$$

$$\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right)Y(z) = \left(2 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)X(z)$$

$$Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\updownarrow z^{-1}$$

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1]$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

Είναι

$$H(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+3)} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+3)}$$

Μηδενικά:  $z=0$  (2),  $z=-1$

Πόλοι:  $z=1$ ,  $z=\frac{1}{2}$ ,  $z=-3$



Πεδία Σύγκλισης:

α)  $|z| < \frac{1}{2}$

β)  $\frac{1}{2} < |z| < 1$

γ)  $1 < |z| < 3$

δ)  $|z| > 3$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

Είναι  $H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}$ ,  $\Re_H$ ,  $f \in A=1, B=-\frac{2}{7}, C=\frac{3}{7}$

Οπότε  $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}}$

α)  $|z| < \frac{1}{2}$  :  $h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$

β)  $\frac{1}{2} < |z| < 1$  :  $h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$

γ)  $1 < |z| < 3$  :  $h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$

δ)  $|z| > 3$  :  $h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n]$

	Ευσταθής	Αιτιατό
α)	X	X
β)	X	X
γ)	X	X
δ)	X	✓



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

