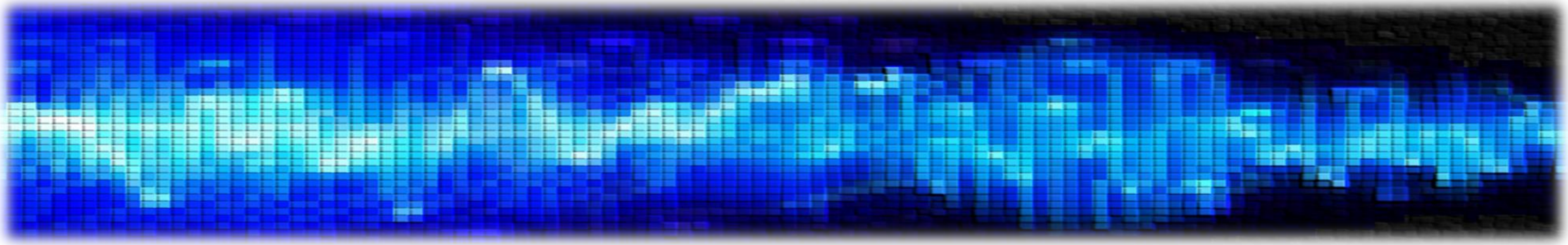
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η



- Μετασχηματισμός Z

- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

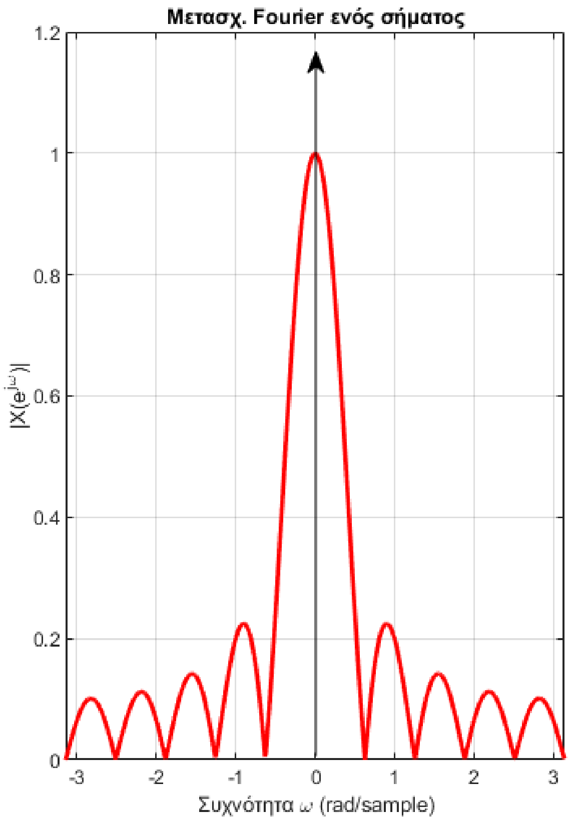
  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

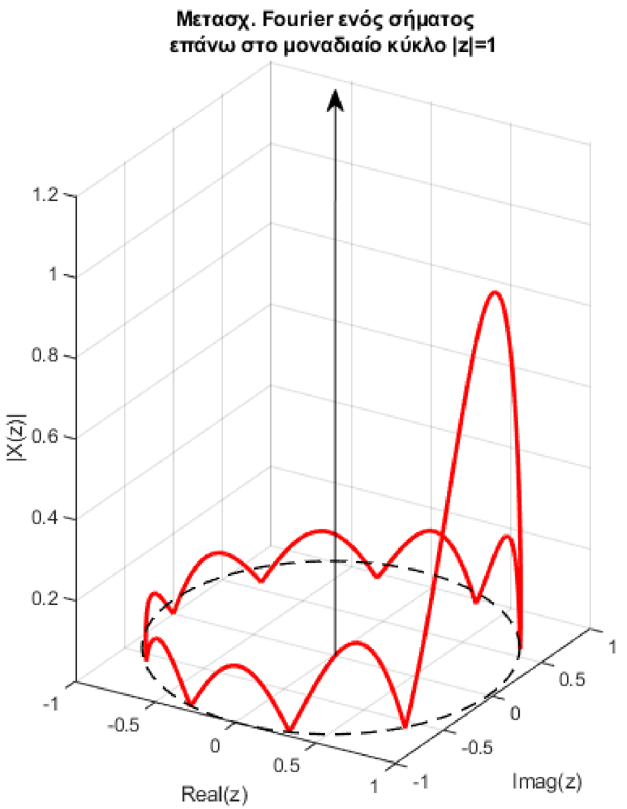
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?





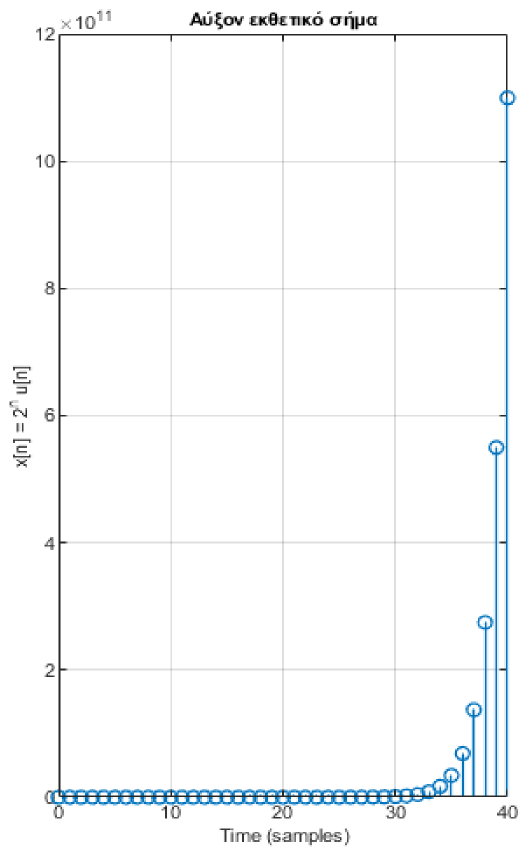
- Έστω το σήμα

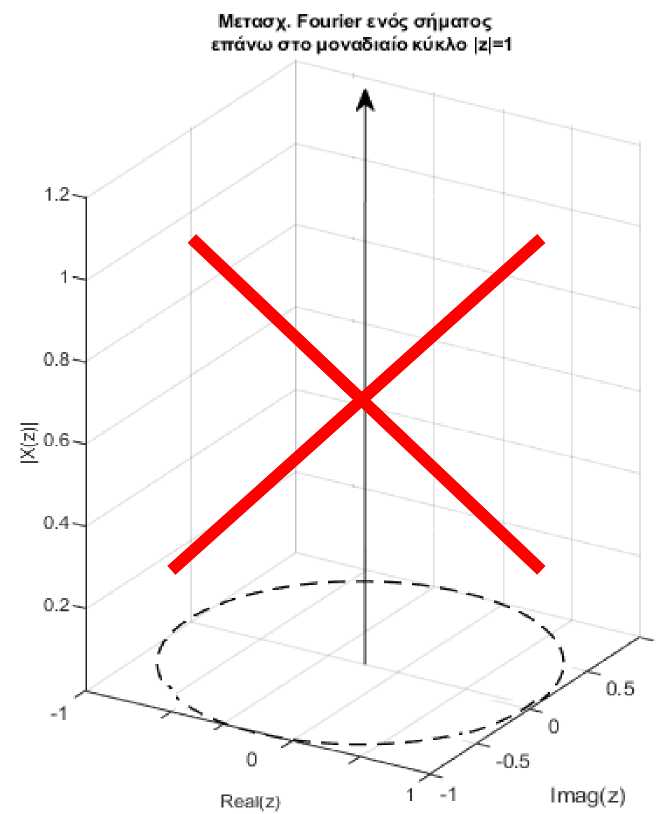
$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier

- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους

- Διαφορετικού πλάτους ίσως?





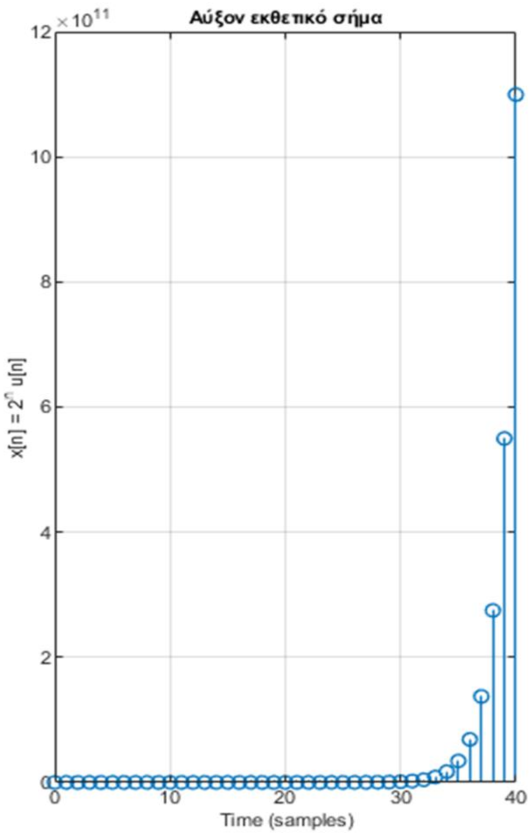
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

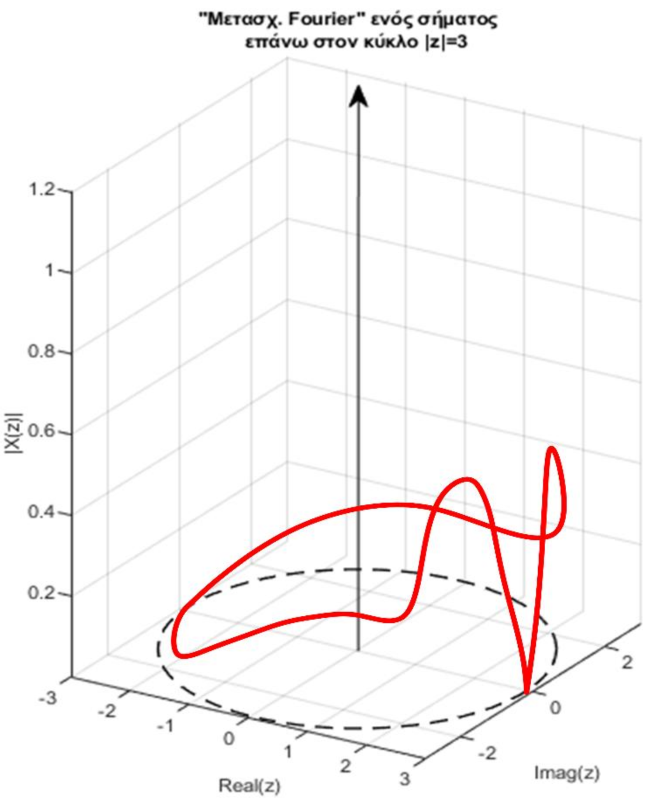
$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \qquad r \in \Re_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[n]}_{1,\, n\geq 0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, $|az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{|a|}{|z|} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| > |a|.}$

Πεδίο Σύγκλισης

Άρα

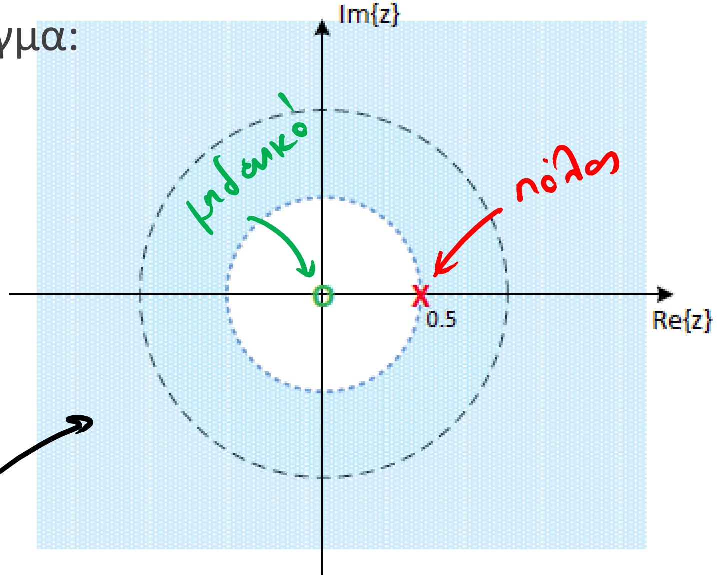
$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Είναι $X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$, $|z| > |a|.$

Ρίζες αριθμητή : $z = 0$: ονομάζονται ΜΗΔΕΝΙΚΑ

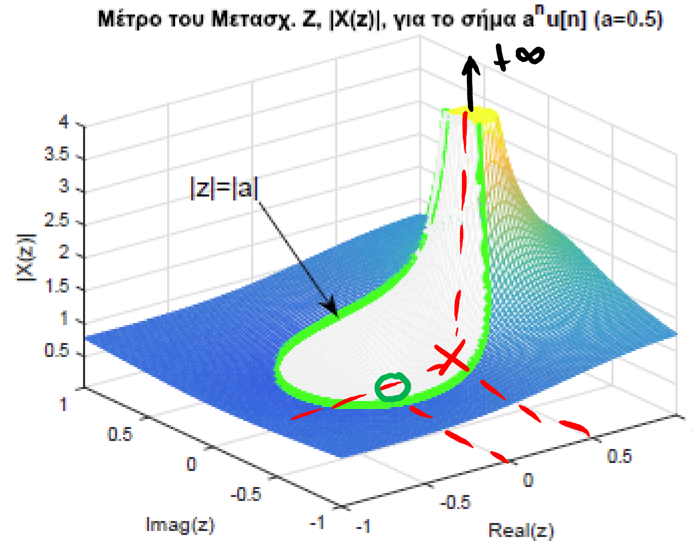
Ρίζες παρονομαστή : $z = a$: ονομάζονται ΠΟΛΟΙ

- Παράδειγμα:



$|z| > \frac{1}{2}$

(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z.

Πόλος = $X(z) \to \infty$ στη θέση $z = \frac{1}{2}$

Μηδενικό = $X(z) = 0$ στη θέση $z = 0$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $a \in \mathbb{R}$.

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u[-n-1]\right) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\ n\leq -1} z^{-n}$

$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (az^{-1})^{-n} =$

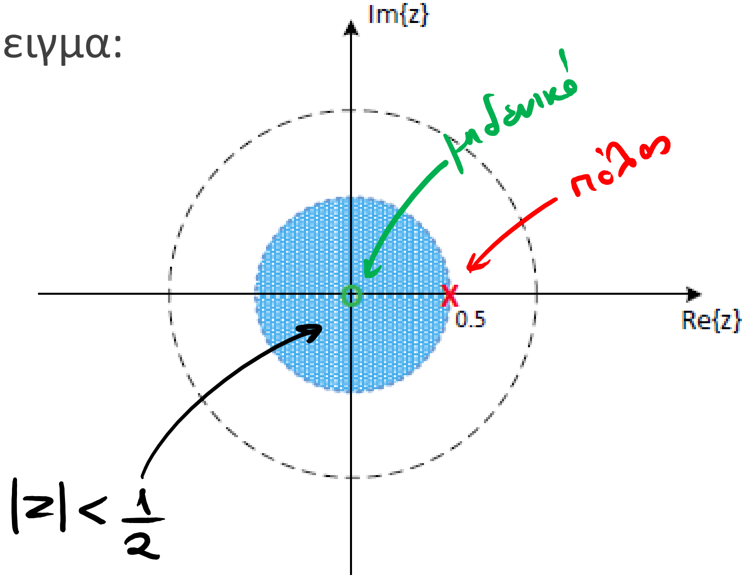
$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}$, $|a^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$

Πεδίο Σύγκλισης

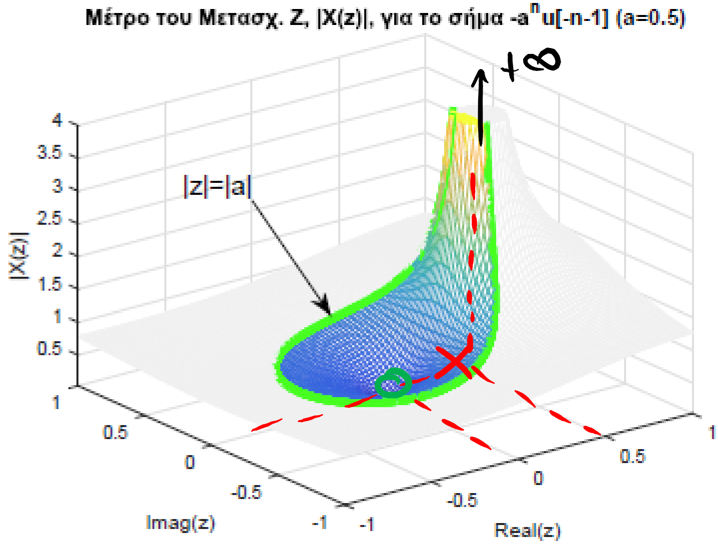
Είναι $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, $|z| < |a|$

Άρα $x[n] = -a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| < |a|$

- Παράδειγμα:



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

Είναι $X(z) = \dfrac{z}{z-a}$

Μηδενικά: $z = 0$: μηδενίζει το $X(z)$

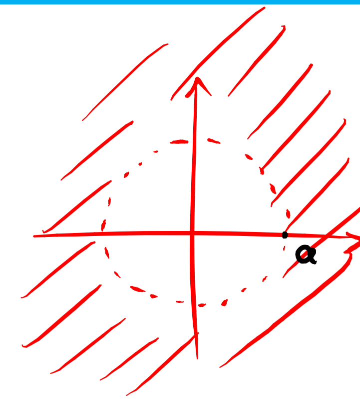
Πόλοι: $z - a = 0 \Rightarrow z = a$: απειρίζει το $X(z)$

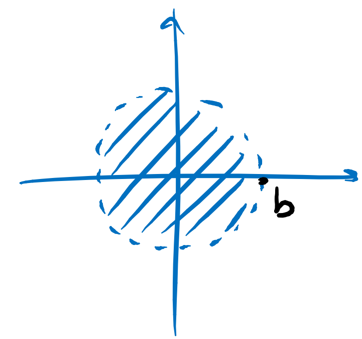
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a^n u[n] - b^n u[-n-1]\right) z^{-n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$|z|>|a|$ $\quad$ $|z|<|b|$





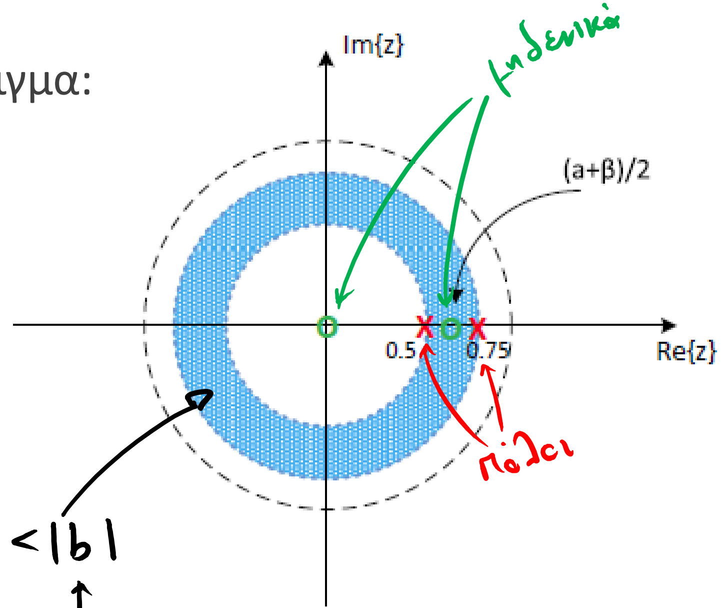
$$= \frac{1-bz^{-1}+1-az^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

- Αν $a>b$, Πεδίο Σύγκλισης $= \emptyset$. Άρα δεν υπάρχει ο Μετ. Z!
- Αν $a<b$, Πεδίο Σύγκλισης: $|a|<|z|<|b|$, δακτύλιος

Άρα

$$x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad |a|<|z|<|b|$$

- Παράδειγμα:

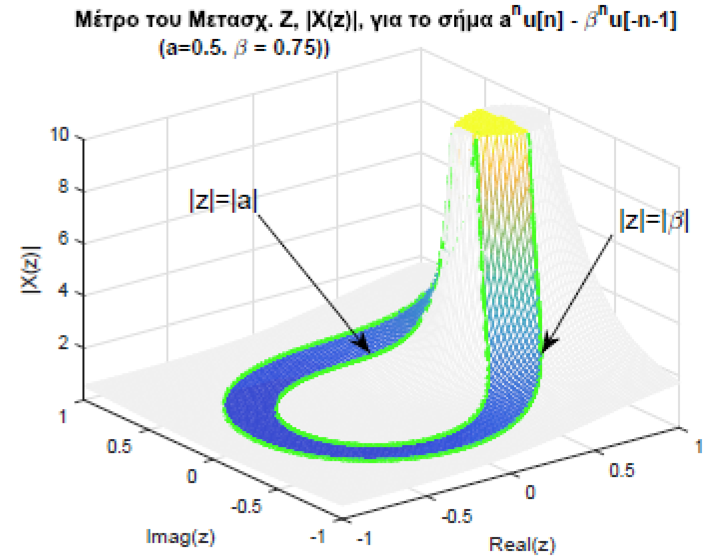


$|a|<|z|<|b|$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$

$1/2$ $\quad$ $3/4$

(α′) *Πεδίο σύγκλισης, με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β′) *Μέτρο μετασχ. Ζ με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Πόλοι : $X(z) = \dfrac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \overset{\cdot z^2}{\underset{\cdot z^2}{=}} \dfrac{2z^2-(a+b)z}{(z-a)(z-b)}, \quad |a|<|z|<|b|$

Μηδενικά : $2z^2-(a+b)z=0 \Rightarrow z=\dfrac{a+b}{2}$ και $z=0$

Πόλοι : $(z-a)(z-b)=0 \Rightarrow z=a, \; z=b$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \delta[n]$

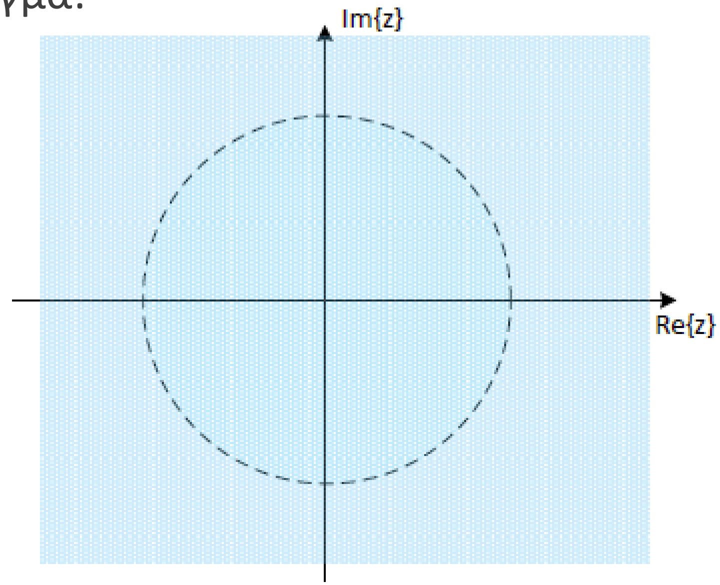
Είναι

$$\left.\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} \\ \delta[n] &= \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(z) = 1 \cdot z^{0} = 1, \ \forall z$$

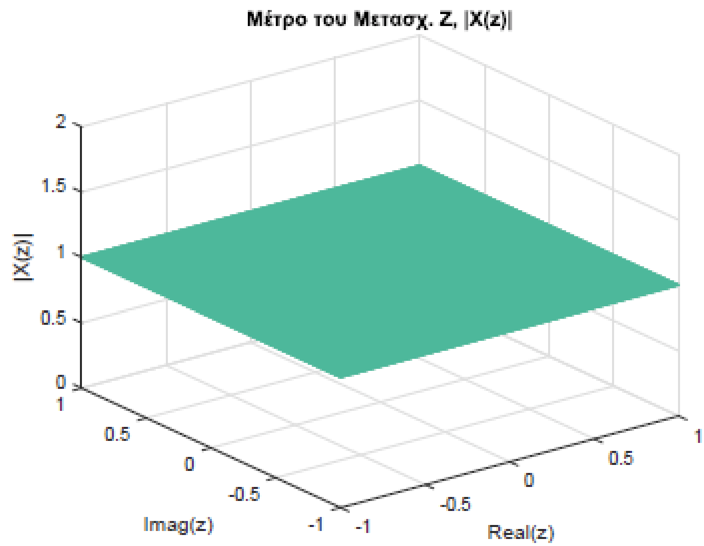
Άρα

$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 1 \quad \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]\, z^{-n}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0}$$

$$|X(z)| = \frac{1}{|re^{j\omega}|^{n_0}} = \frac{1}{|r|^{n_0}\,|\cancel{e^{j\omega}}|^{n_0}} = 1/r^{n_0}$$

Οπότε

$$x[n] = \delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$$

$n_0 > 0$:

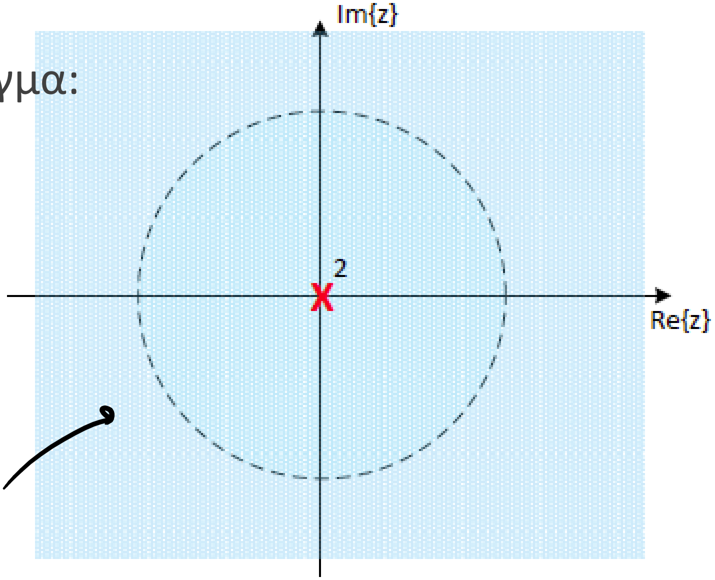
Μηδενικά : $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n_0}} = 0$, άρα $z = \infty$ υπάρχει μηδενικό.

Πόλοι : $z = 0$ υπάρχει πόλος

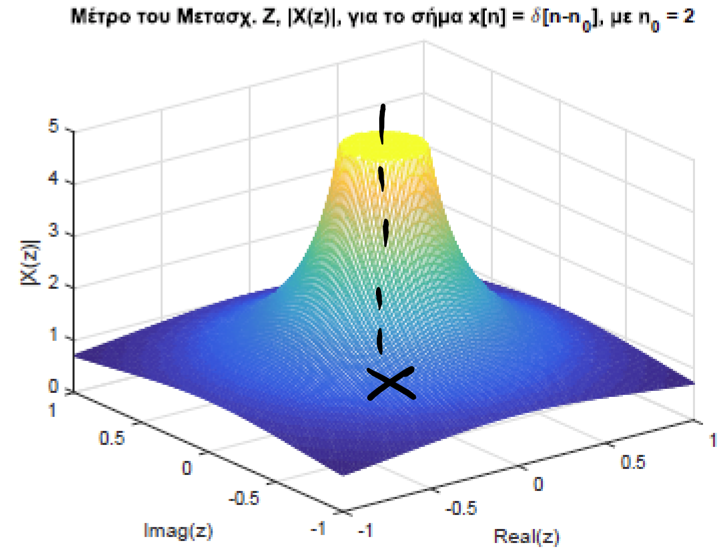
Πεδίο Σύγκλισης : $|z| > 0$

- Παράδειγμα:

$|z| > 0$

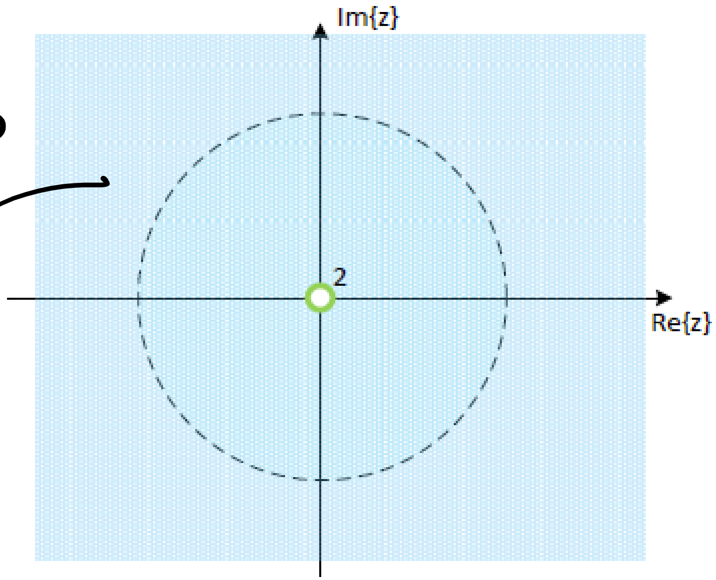


(α′) Πεδίο σύγκλισης.

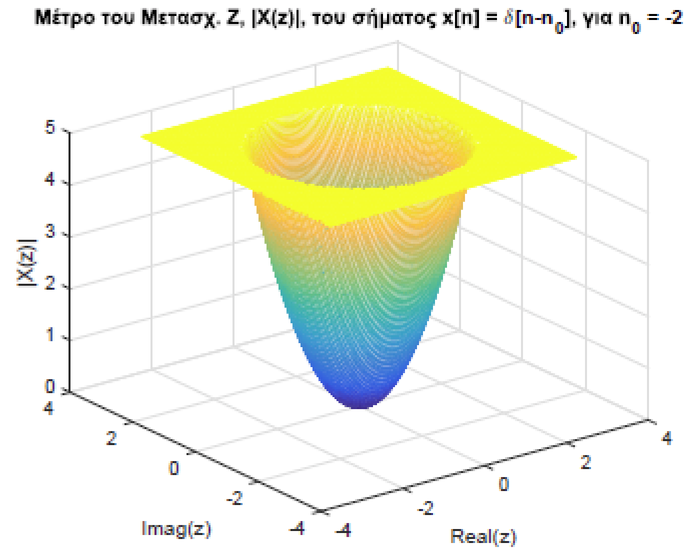


(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$.

$|z| < \infty$



(α′) Πεδίο σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

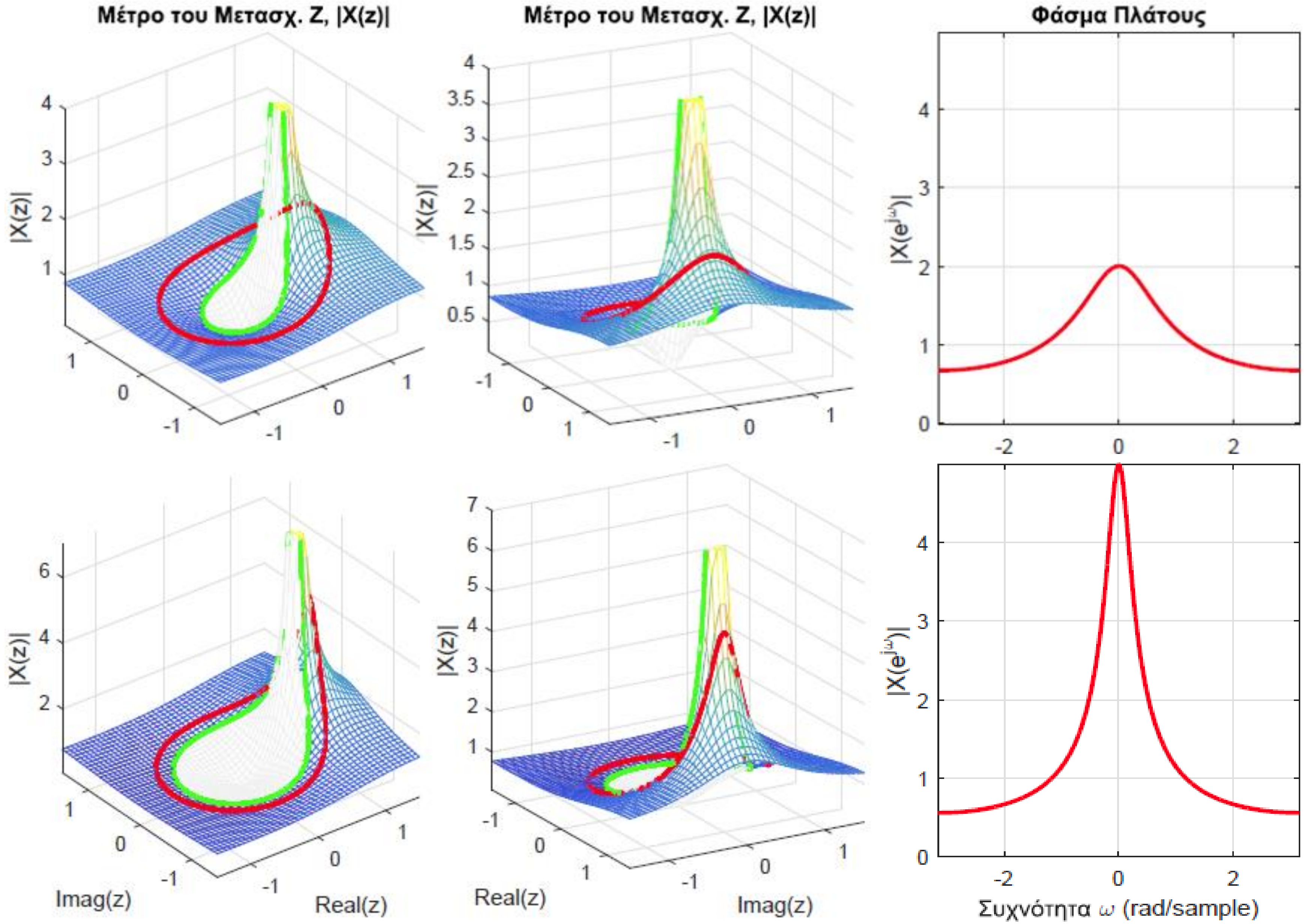
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

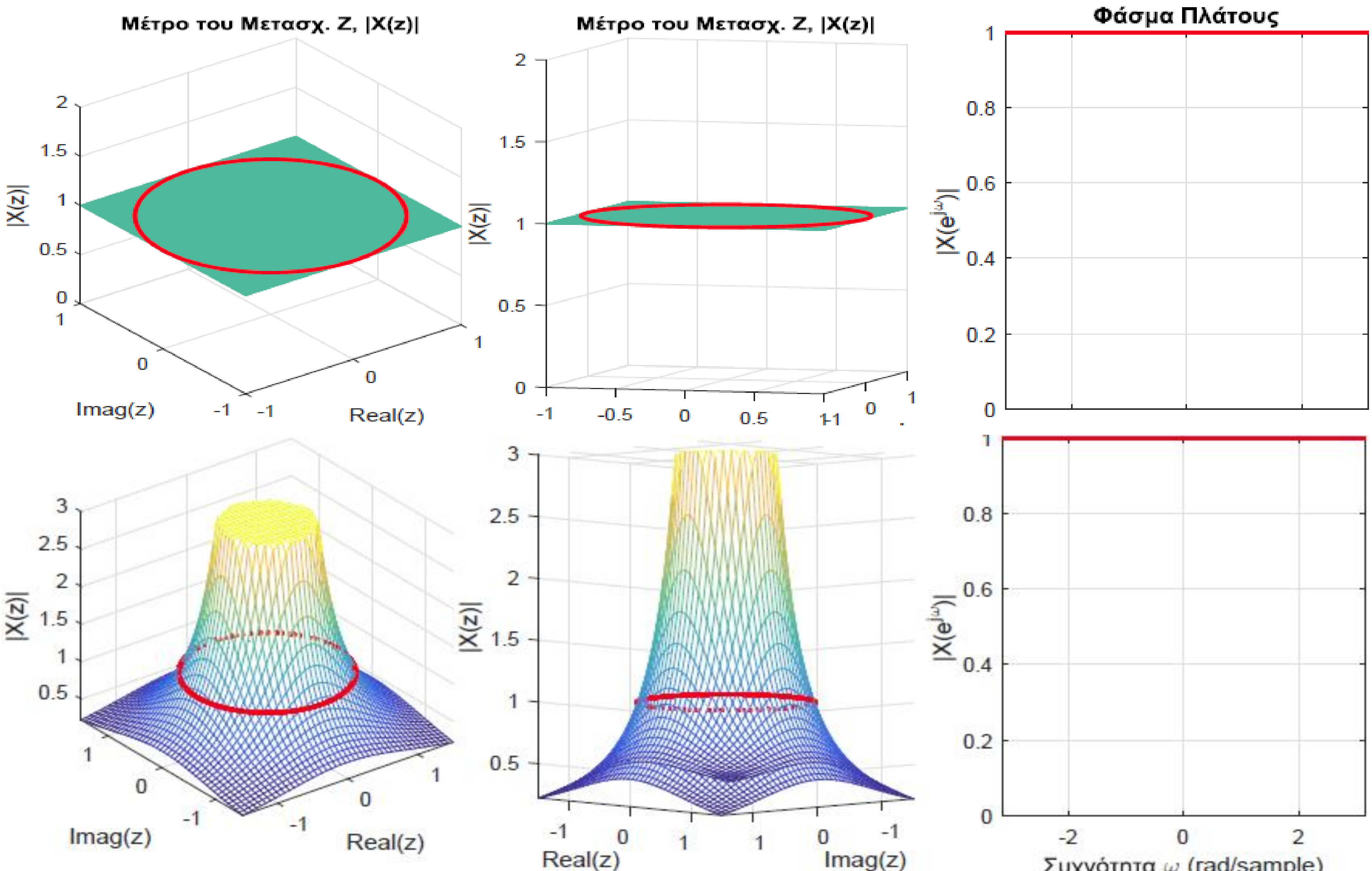
  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

  - Δείτε τι συμβαίνει…

• **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?



Συνεχίζεται... ☺