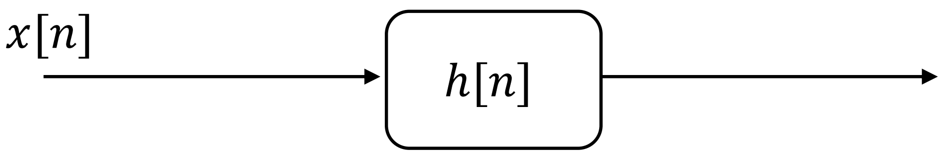
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^{Η}

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



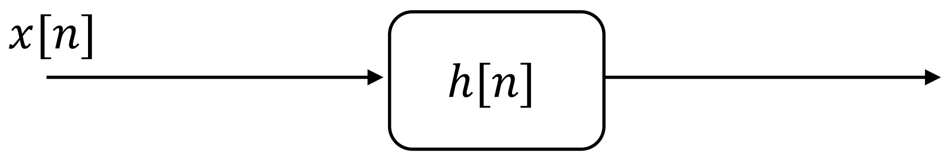
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

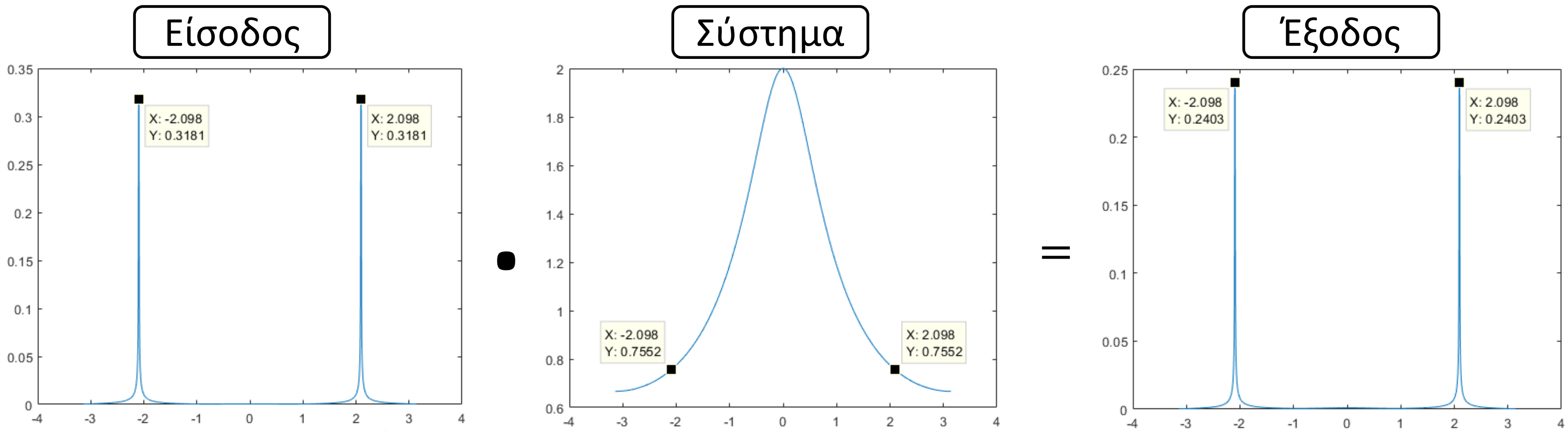
- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

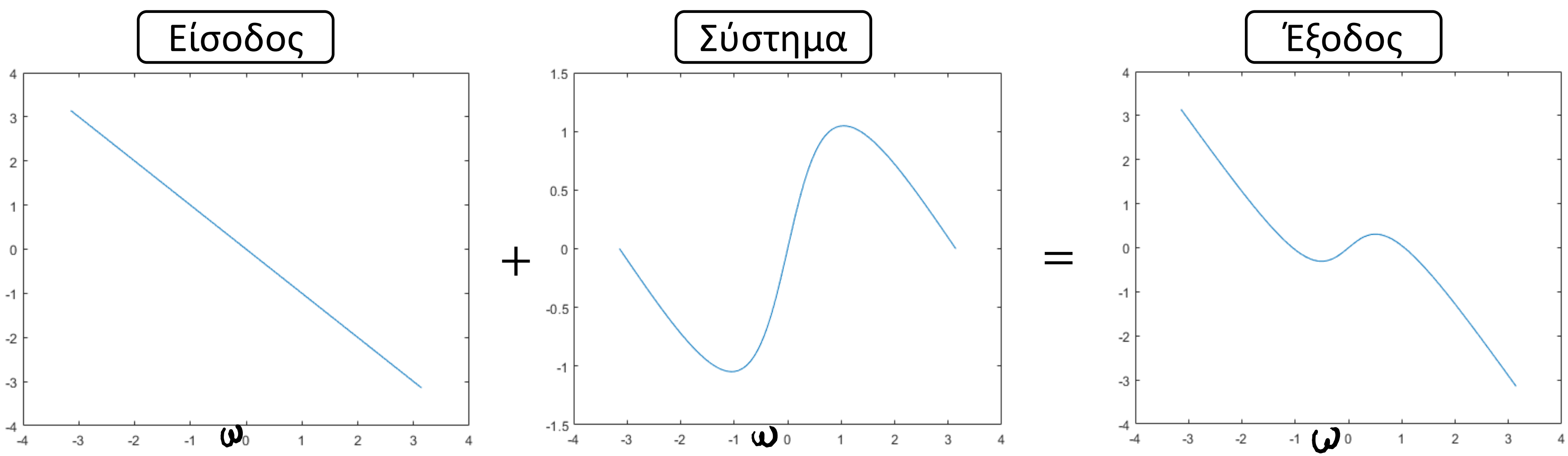
- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος



    - Κατά φάση



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

  - Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα…

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})\,e^{-j\omega n_0}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ Βρείτε την κρουστική απόκριση.

Είναι

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{1-1/4\,e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F^{-1}} h[n]\ ?$$

Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\,e^{-j\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}} h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X\left(e^{j\omega}\right) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

Χρόνος: Έστω S_0 : $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$, θέτω $x[n] = \delta[n]$,

τότε $y[n] = h_0[n]$, δηλ.

$$h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$$

Για $n=0$: $h_0[0] - \frac{1}{2}\cancel{h_0[-1]}^{\,0} = \delta[0] = 1 \Leftarrow \boxed{h_0[0]=1}$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma - \frac{1}{2} \Rightarrow$ χαρακτ. ρίζες : $\gamma = \frac{1}{2}$

Άρα

$$h_0[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n, \; n \geq 0$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Αφού $h_0[0]=1$, έχουμε $h_0[0] = c\left(\frac{1}{2}\right)^0 = c = 1$

Άρα

$$h_0[n] = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Η κρουστική απόκριση θα είναι :

$$h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4}h_0[n-1]$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Συχνότητα:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$
$$\updownarrow F$$
$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

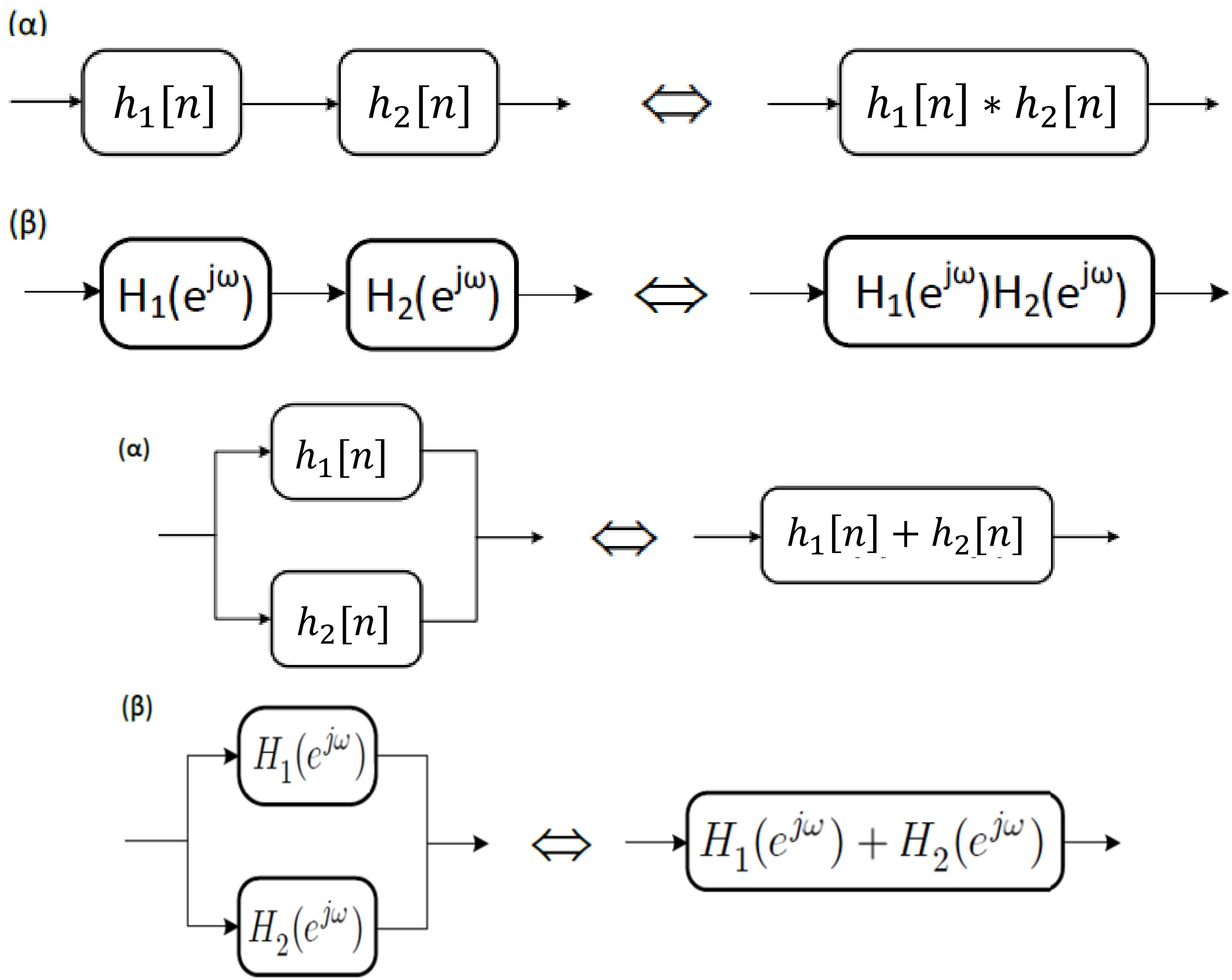
$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j\omega}$$

Άρα

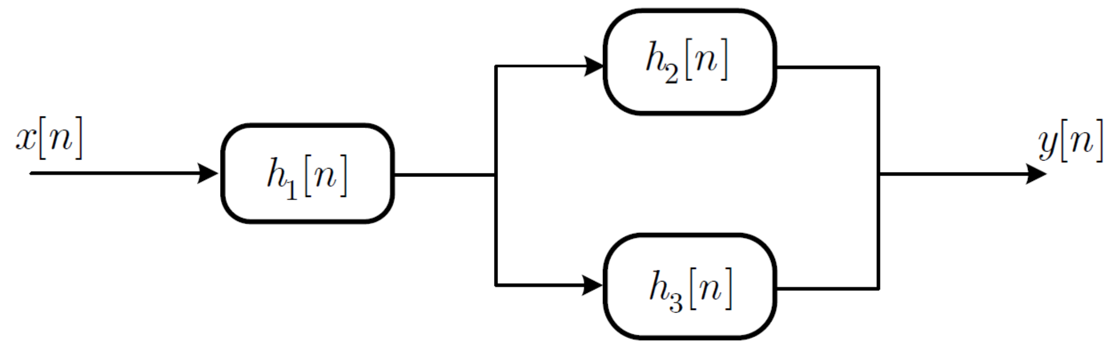
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$
$$h_2[n] = \delta[n-2],$$
$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

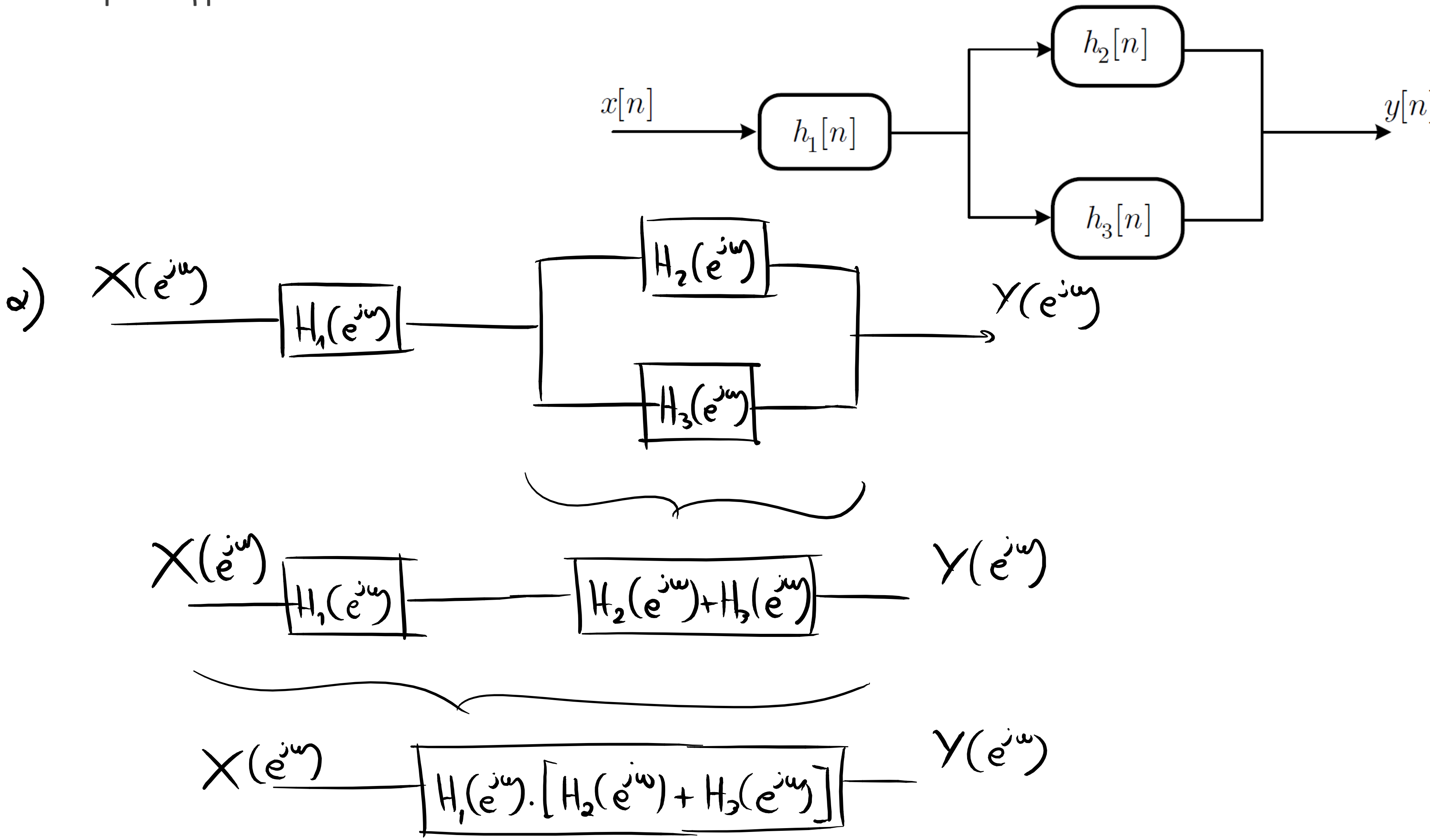


α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

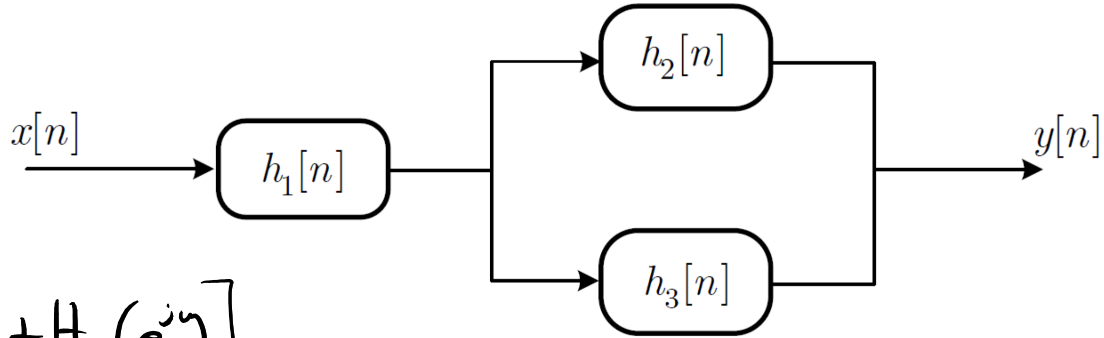
β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



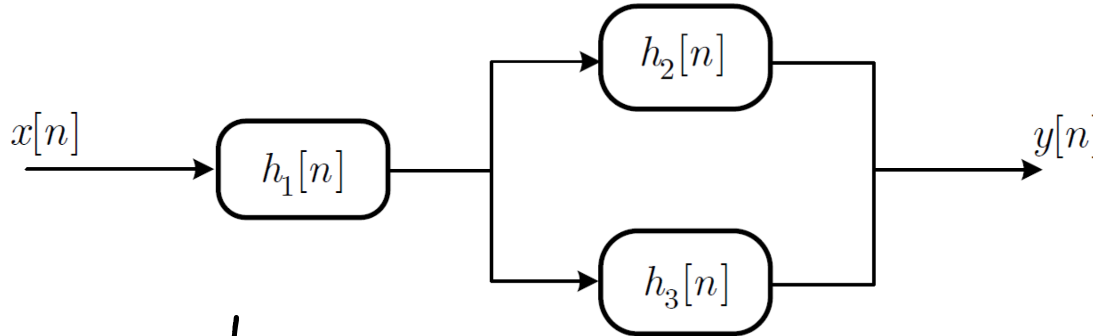
Άρα θα είναι:

$$H_{o\lambda}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left[e^{-j2\omega} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} e^{-j2\omega} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} . \quad (1)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



β) Βρήκαμε ότι:

$$H_{ολ}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j2\omega} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \qquad G(e^{j\omega})$$

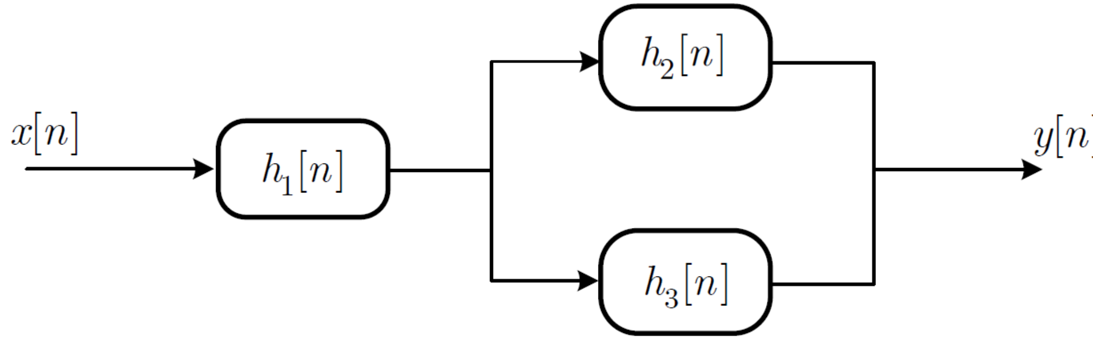
$$\updownarrow F^{-1} \qquad\qquad \updownarrow F^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2] \qquad\qquad ?\ g[n]$$

Είναι $$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\Big]_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Big]_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



$$B = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\Big]_{e^{-j\omega}=4}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Big]_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1-2} = -1$$

Άρα

$$G(e^{j\omega}) = 2\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - 1\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

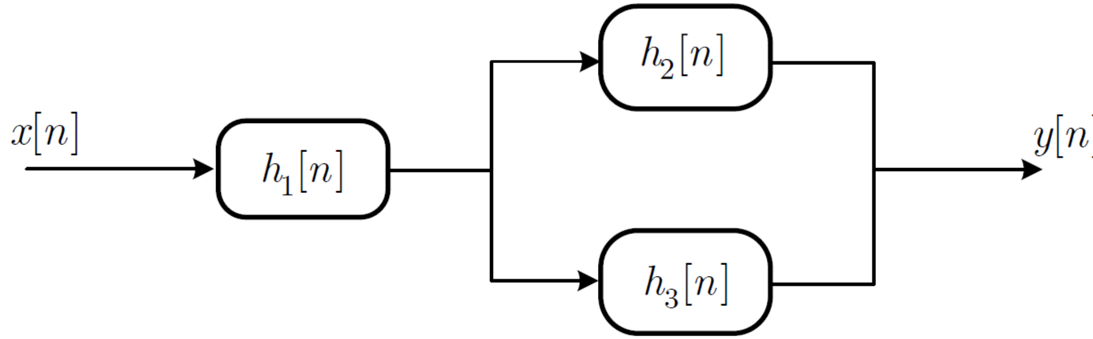
$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$g[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Συνολικά

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



γ) Από 1 :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)e^{-j2\omega}+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1\underbrace{-\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}_{-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Άρα

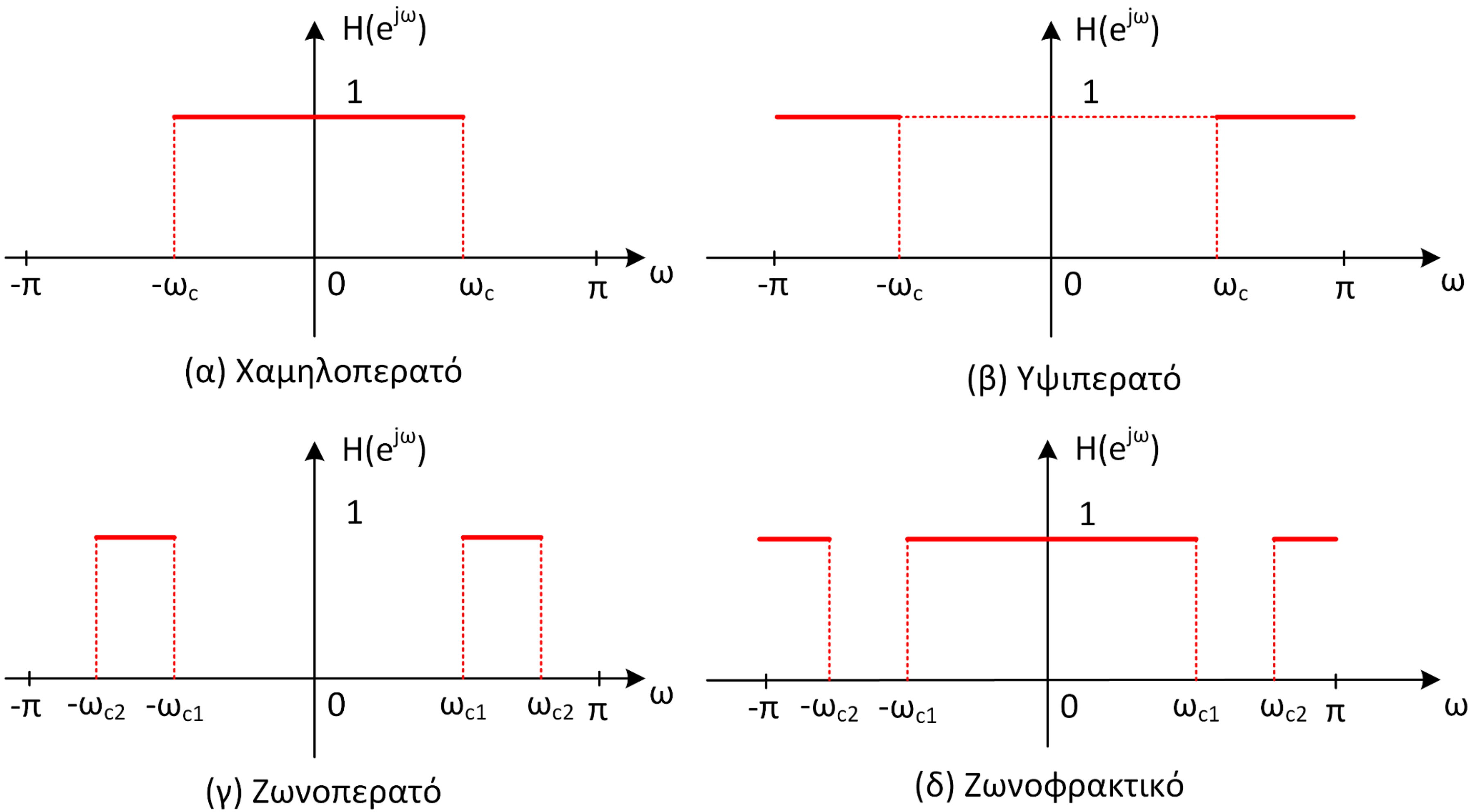
$$X(e^{j\omega})\left(1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}\right) = Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega})$$

έτσι, $x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] = y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

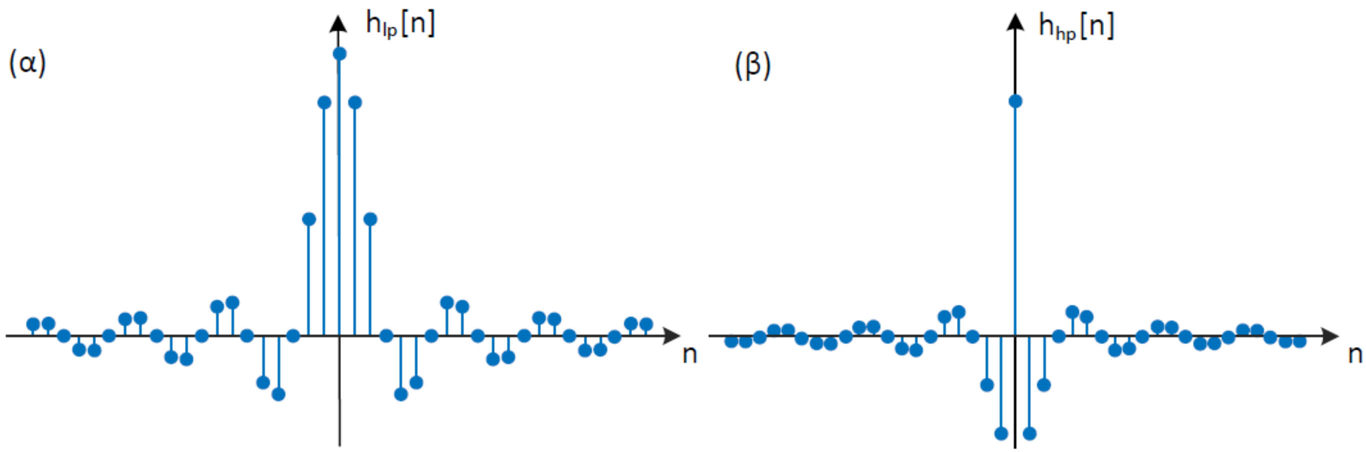
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \leftrightarrow \quad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

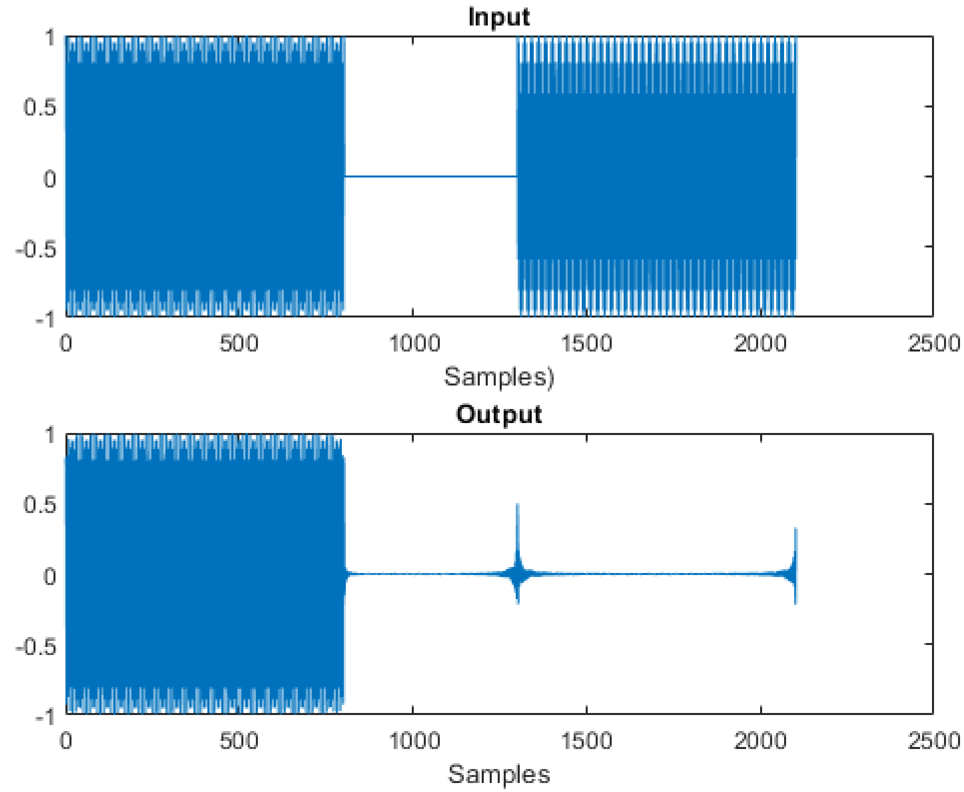
- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

```
% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples)'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');
```



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$e^{j\omega_0 n} \rightarrow H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

$$h[n] = \frac{4\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)\pi}$$

Ξέρουμε ότι $h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F} H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Παρατηρώ ότι $h[n] = 4h_{lp}[n-1]$, για $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Οπότε

$$H(e^{j\omega}) = F\{4h_{lp}[n-1]\} = 4H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα

$$y[n] = 2|H(e^{j\frac{\pi}{4}})|\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) + 8|H(e^{j\frac{3\pi}{4}})|\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5} + \varphi_H(e^{j\frac{3\pi}{4}})\right)$$

Αφού $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$ είναι εκτός $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, όλος ο $2^{ος}$ όρος αποκόπτεται.

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

Έτσι,

$$\left.\begin{array}{l} y[n] = 2\left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right| \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) \\ H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 4e^{-j\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \begin{array}{l} \left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right| = 4 \\ \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = -\frac{\pi}{4} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] = 8\cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right).$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ