Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Απόκριση σε Συχνότητα

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος (επανάληψη…)**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός): **Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)**

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος (επανάληψη…)**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

με

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Αν $h[n]$ πραγματική συνάρτηση του n, τότε

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi}_H\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right) = -\boldsymbol{\varphi}_H(\boldsymbol{e}^{-j\omega})$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}, \quad A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}\left(e^{j\omega}\right)}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H\left(e^{j0}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$. Έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} \left(e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega\left(\frac{M_2}{2}\right)} \frac{\cancel{2j}\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \underbrace{\frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\left(\omega\frac{M_2}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{\text{ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ}}.$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

$$= \left|\frac{1}{M_2+1}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}\right|}_{1,\ \forall\omega} \cdot \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| = \frac{1}{M_2+1}\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|.$$

Ας επιλέξουμε το διάστημα $[0, 2\pi)$. Έξω από αυτό, η $|H(e^{j\omega})|$ επαναλαμβάνεται.

Για $\omega=0$, $$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lim_{\omega\to 0}\frac{\lambda\cos(\lambda\omega)}{\cos(\omega)} = \lambda = M_2+1$$

Ο αριθμητής μηδενίζεται: $\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0$? $\frac{\omega(M_2+1)}{2} = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Άρα $$\boxed{\omega = \frac{2k\pi}{M_2+1}},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Για $M_2 = 4$, $\omega = \frac{2k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ εξαρτάται ουσιαστικά από το μέτρο του

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

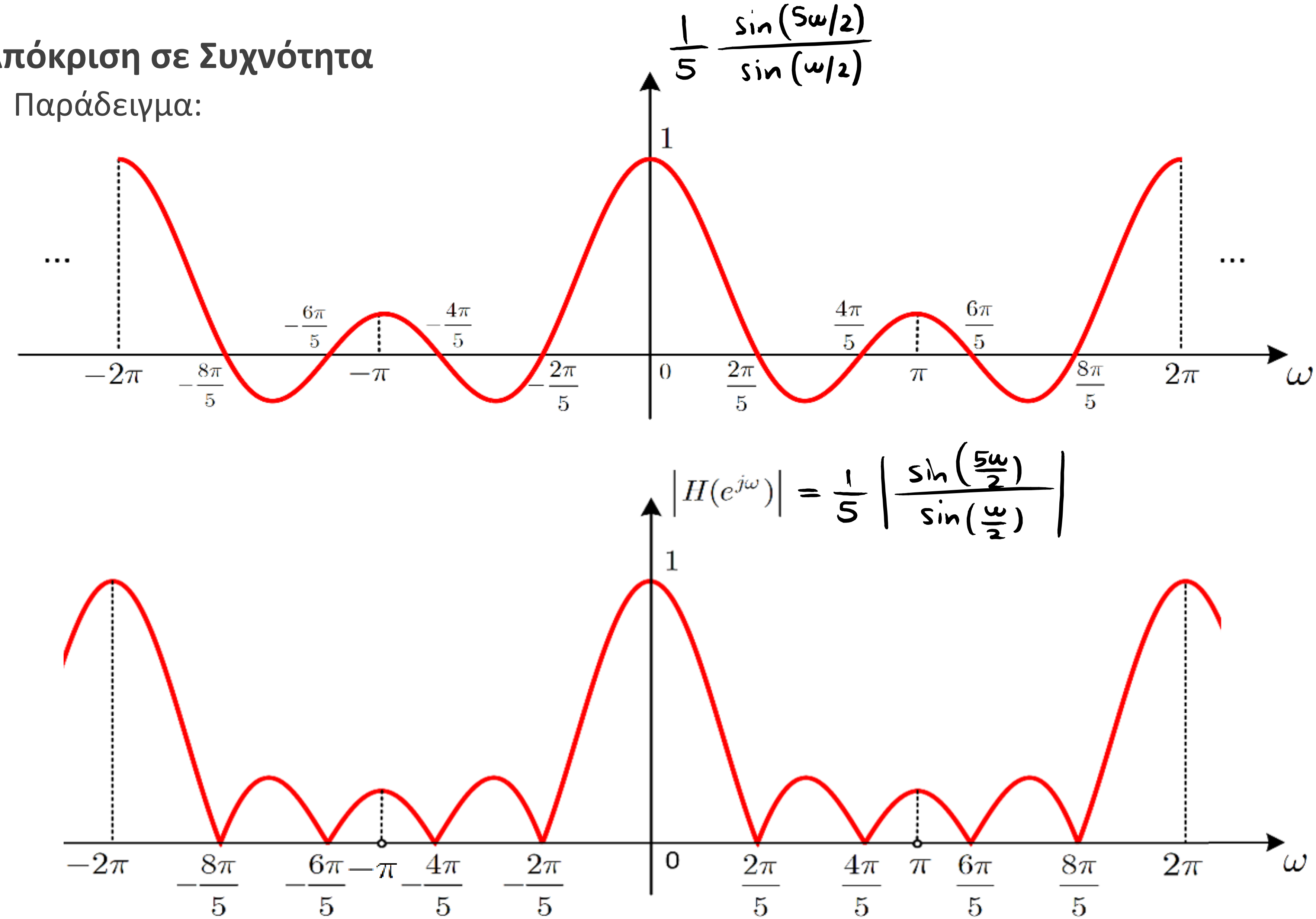
Για να έχουμε μια ποιοτική εικόνα, θέτουμε $M_1=0$, $M_2=4$, οπότε λάβαμε:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

με σημεία μηδενισμού τα $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ας δούμε τον όρο $\frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και το μέτρο του.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση φάσης: $H(e^{j\omega}) = \underbrace{\frac{1}{M_2+1}}_{1\cdot|e^{j\vartheta}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}}_{1\cdot|e^{j\psi}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{1:|e^{jJ}}$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \vartheta(e^{j\omega}) + \psi(e^{j\omega}) + J(e^{j\omega})$$

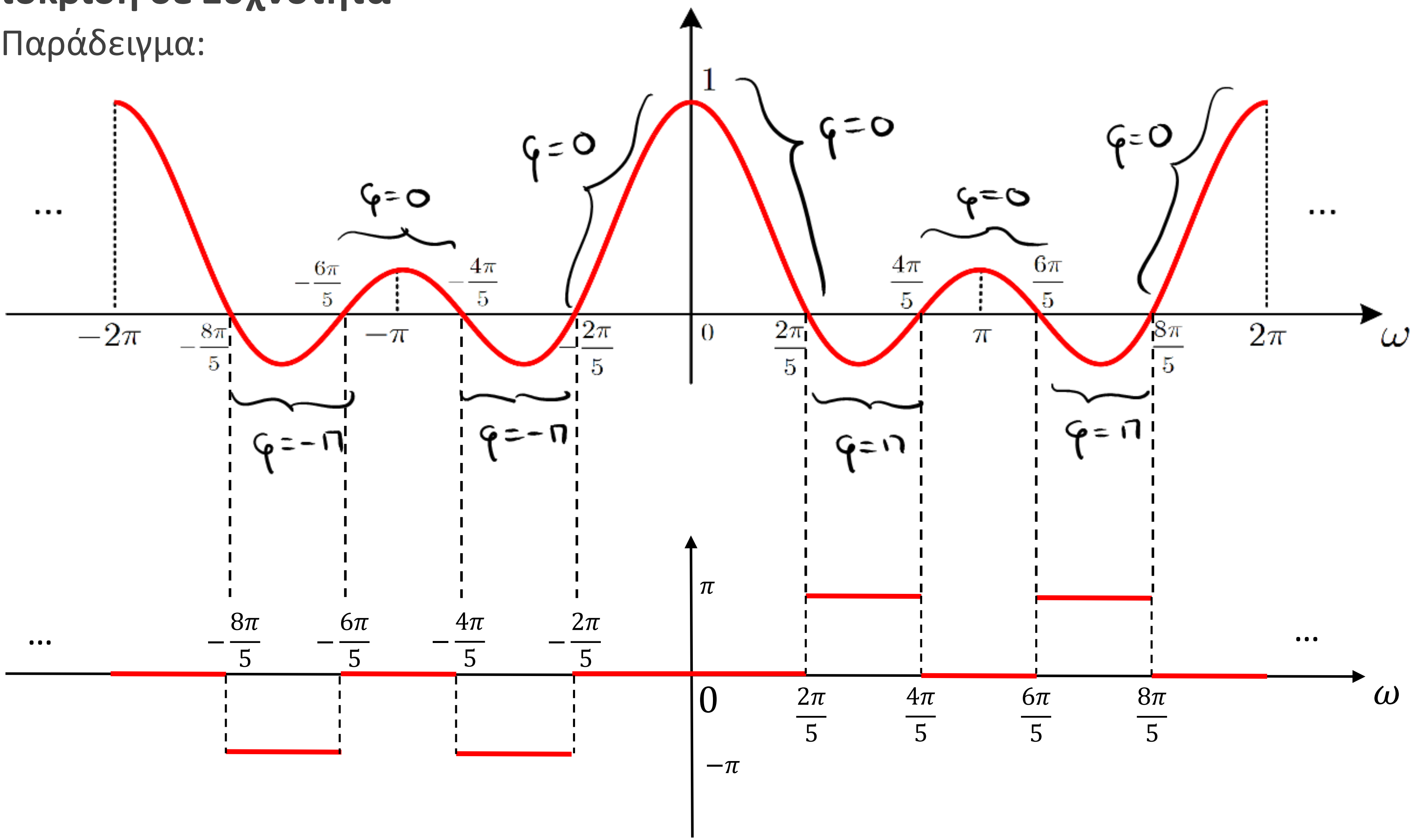
- $\vartheta(e^{j\omega}) = 0$, γιατί $\frac{1}{M_2+1} \in \mathbb{R}_+$
- $\psi(e^{j\omega}) = -\omega \frac{M_2}{2}$
- $J(e^{j\omega}) = ?$

$c > 0 : \; c e^{j0}$

$c < 0 : \; |c| \underbrace{e^{\pm j\pi}}_{-1}$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:



Αντιστοιχίζουμε θετικές τιμές της φάσης σε $\omega>0$

—"— αρνητικές —"— —"— —"— $\omega<0$.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

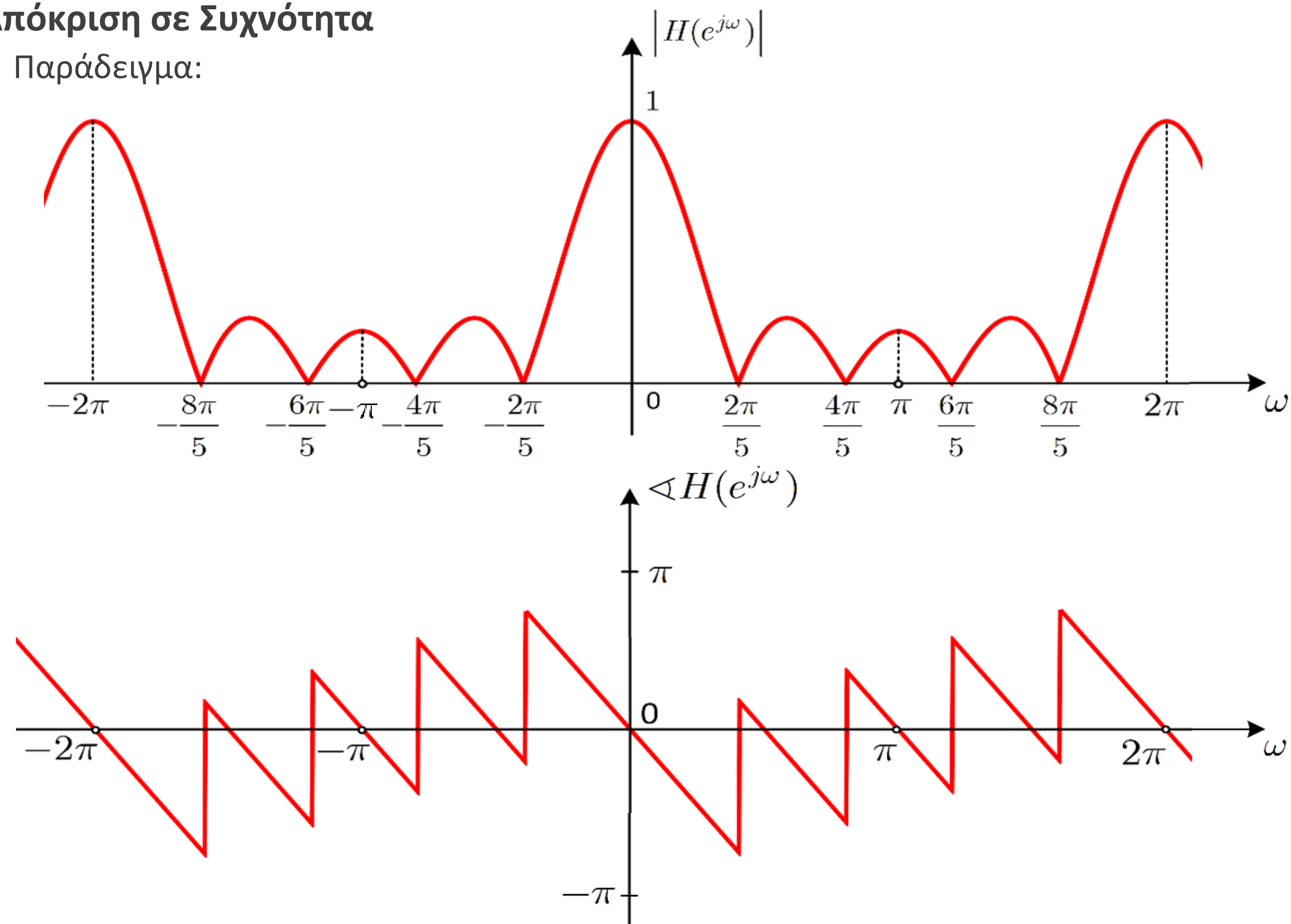
Είναι

$$J(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ +\pi & , \ \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ 0 & , \ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ +\pi & , \ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ 0 & , \ \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases}$$

Συνολικά : $(M_2 = 4)$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega & , \ 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi & , \ \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega & , \ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi & , \ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega & , \ \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] \cong A \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{|H(e^{j\pi})|} \cdot \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3} + \underbrace{0}_{\varphi_H(e^{j\pi})}\right) = \frac{A}{4}\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$$

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] \cong A \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{|H(e^{j\frac{\pi}{3}})|} \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{\varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})}\right)$$

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{8}\right) = A \cdot \underbrace{0}_{|H(e^{j\frac{4\pi}{5}})|} \cdot \cos(\ldots) = 0$!!!

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής
$$e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$
σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το
$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

  - Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

  - Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\
&= y_{ss}[n] + y_t[n]
\end{aligned}
$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

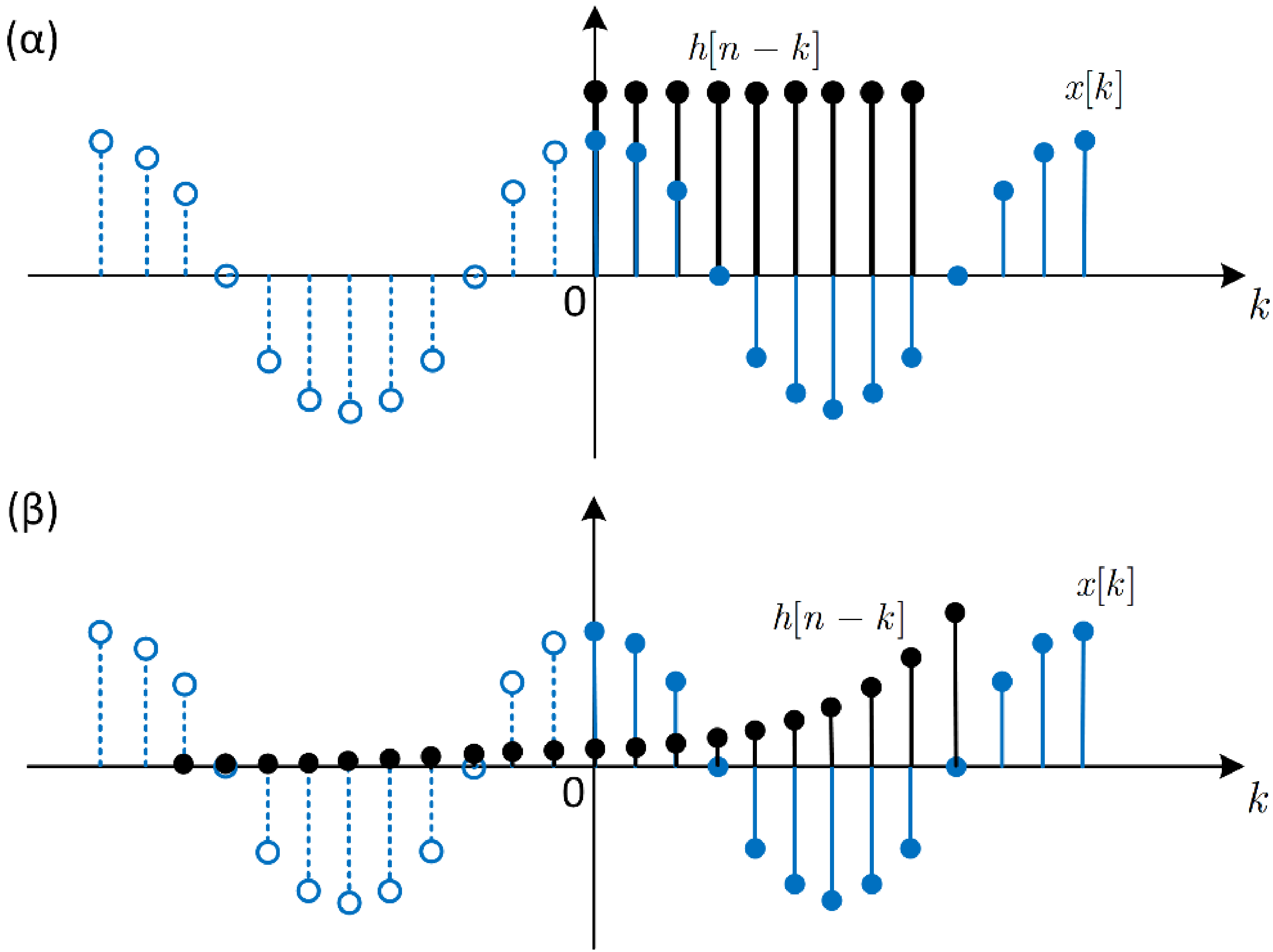
$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|e^{j\omega(n-k)}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε
$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$
τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \rightarrow +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**



- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

    $$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

    δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

    $$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

    με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

  - Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική!

  - Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

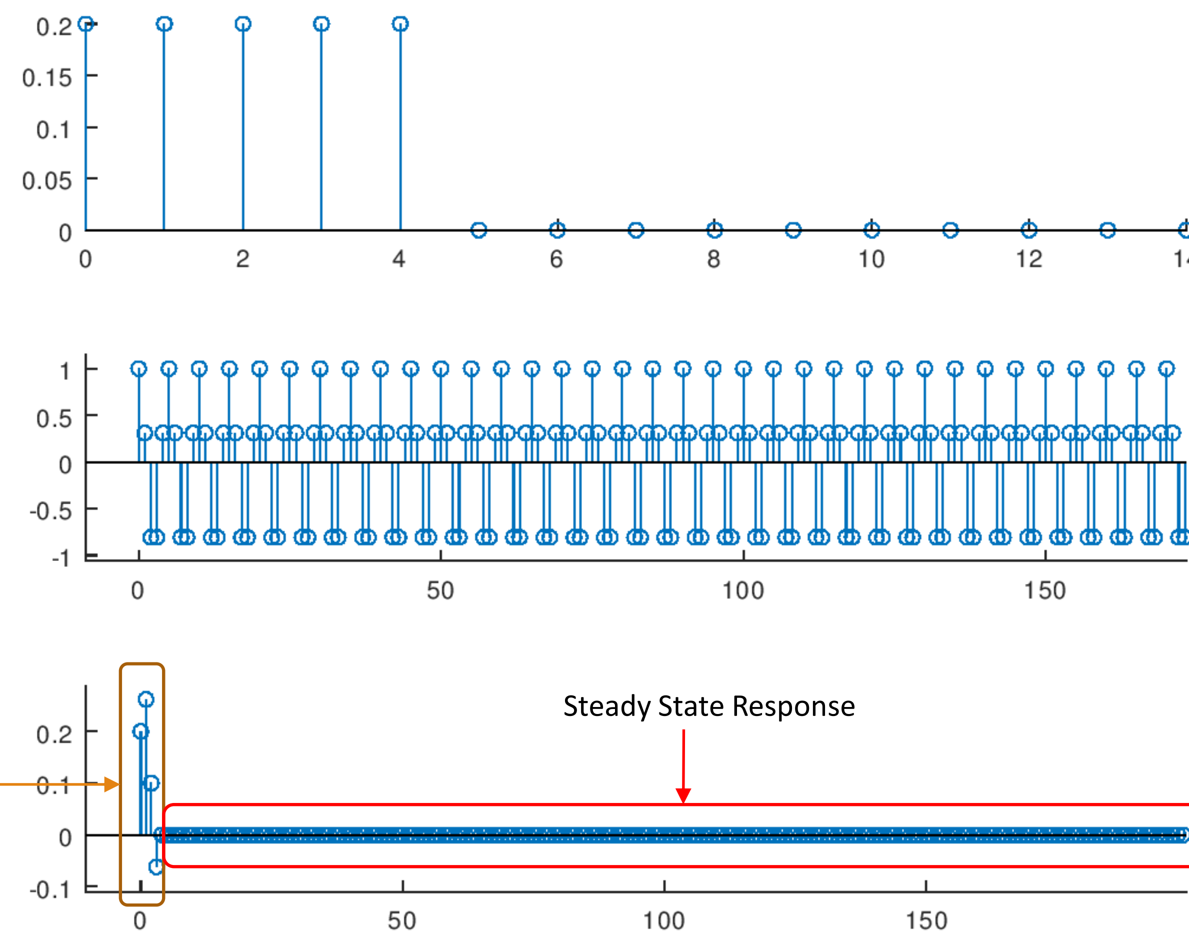
• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```
% Impulse Response h[n]
M1 = 0;
M2 = 4;
h = 1/(M1 + M2 + 1).*ones(1, M2+1);
h = [h zeros(1,10)];
nh = 0:14;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1014];

% Plots
subplot(311); stem(nh, h);
subplot(312); stem(nx, x);
subplot(313); stem(ny, y);
```



Transient
Response

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ