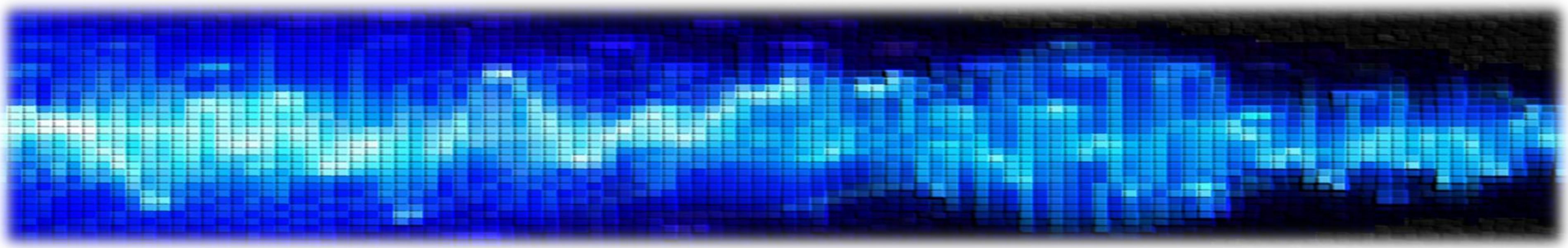
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η



- Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \;\; \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \;\; \forall\, n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \;\; \Rightarrow \;\; y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
  - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0}$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ' όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

- Αρκεί

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $|e^{j\omega n}| = 1, \ \forall \ \omega, n$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
  - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Η συνάρτηση ως προς ω

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

  - Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

  - Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Η ιδιότητα

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}})\right| = \left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}})\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi}_H(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}) = -\boldsymbol{\varphi}_H(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}})$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

  - Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} \end{aligned}$$

- Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
  - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

Απόκριση σε Συχνότητα

- Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με <u>πραγματική</u> κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right)}$$

- Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H\left(e^{-j\omega}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Άρα

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{-j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H\left(e^{j\omega_0}\right)| A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

  - Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος

- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!

- Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
  - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της

- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
  - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
  - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα

- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$n_d > 0$

  - Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

Θεωρούμε $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, τότε $y[n] = x[n-n_d] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}}_{H(e^{j\omega_0})} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 n}}$

Γενικότερα, $\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}}$

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = |\cos(-\omega n_d) + j\sin(-\omega n_d)|$

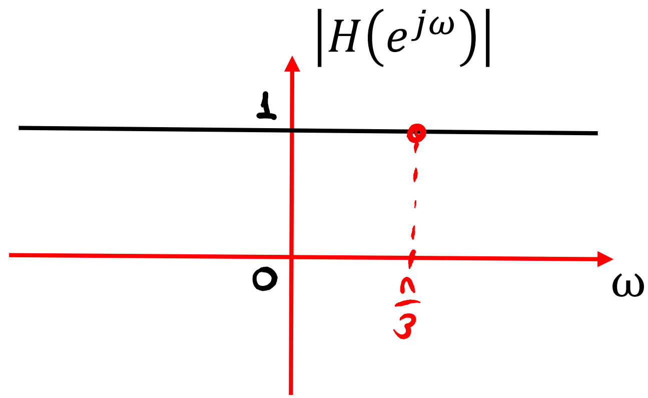
$$= \sqrt{\cos^2(-\omega n_d) + \sin^2(-\omega n_d)} = \sqrt{1} = 1, \ \forall \omega.$$

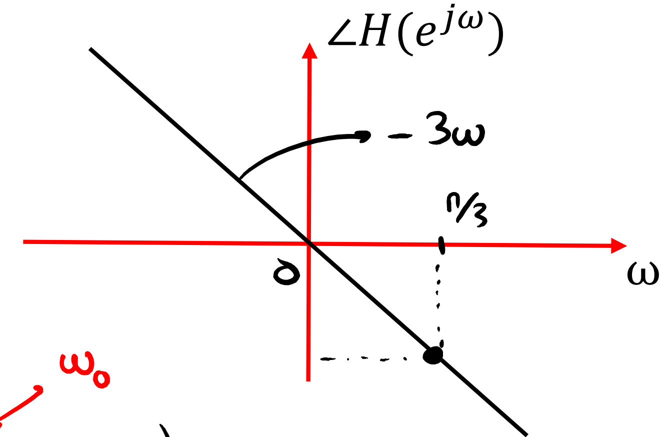
Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\dfrac{\sin(-\omega n_d)}{\cos(-\omega n_d)} =$

$$= \tan^{-1}\frac{-\sin(\omega n_d)}{\cos(\omega n_d)} = \tan^{-1}\left(-\tan(\omega n_d)\right) = -\tan^{-1}(\tan(\omega n_d)) = -\omega n_d.$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$\boxed{n_d = 3}$$





- Αν η είσοδος είναι $x[n] = 4\cos\left(\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{3}}}_{\omega_0} n + \frac{\pi}{8}\right)$

$$y[n] = 4 \cdot \underbrace{1}_{|H(e^{j\frac{\pi}{3}})|} \cdot \cos\left(\boxed{\frac{\pi}{3}} n + \frac{\pi}{8} \underbrace{-\pi}_{\varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$y[n] = x[n-3]$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-3) + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \pi + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$. Έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} \left(e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega(M_2/2)} \frac{\cancel{2j}\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \underbrace{\frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j(\omega(M_2/2))} \cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{\text{ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ}}.$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega(M_2/2)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

$$= \left|\frac{1}{M_2+1}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-j\omega(M_2/2)}\right|}_{1,\ \forall \omega} \cdot \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| = \frac{1}{M_2+1}\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|.$$

Ας επιλέξουμε το διάστημα $[0, 2\pi)$. Έξω από αυτό, η $|H(e^{j\omega})|$ επαναλαμβάνεται.

Για $\omega = 0$, $\lim\limits_{\omega\to 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lim\limits_{\omega\to 0} \frac{\lambda\cos(\lambda\omega)}{\cos(\omega)} = \lambda = M_2+1$

Ο αριθμητής μηδενίζεται: $\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0$? $\frac{\omega(M_2+1)}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Άρα $\boxed{\omega = \frac{2k\pi}{M_2+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Για $M_2 = 4$, $\omega = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$

Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ εξαρτάται ουσιαστικά από το μέτρο του

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

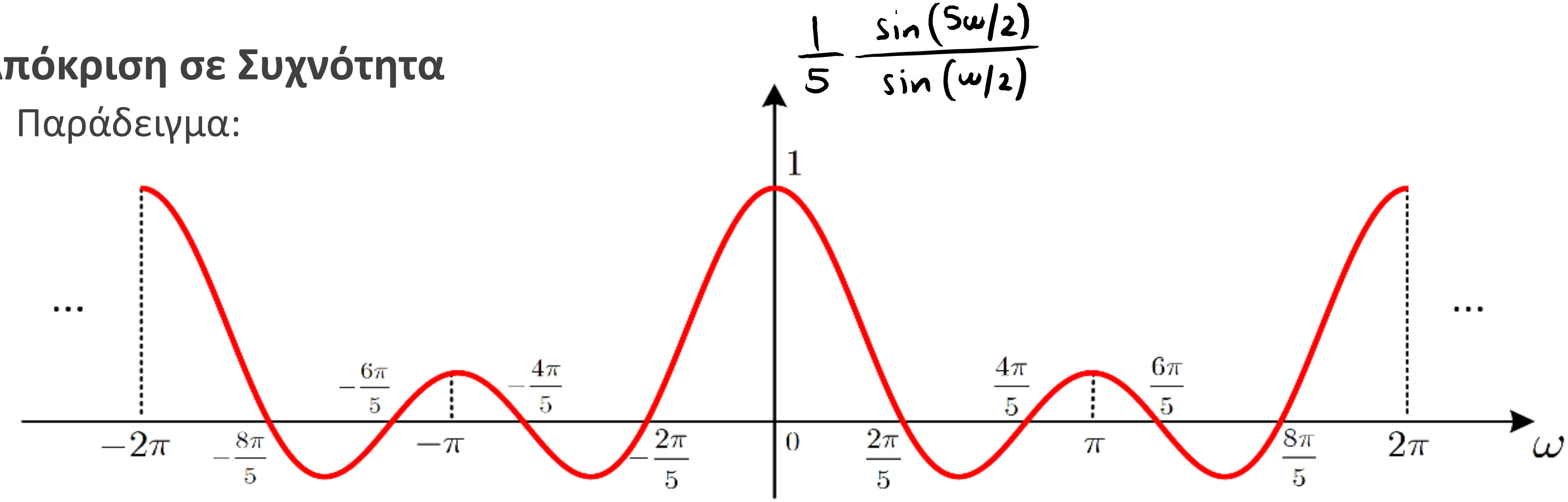
Για να έχουμε μια ποιοτική εικόνα, θέτουμε $M_1=0,\ M_2=4$, οπότε λάβαμε:

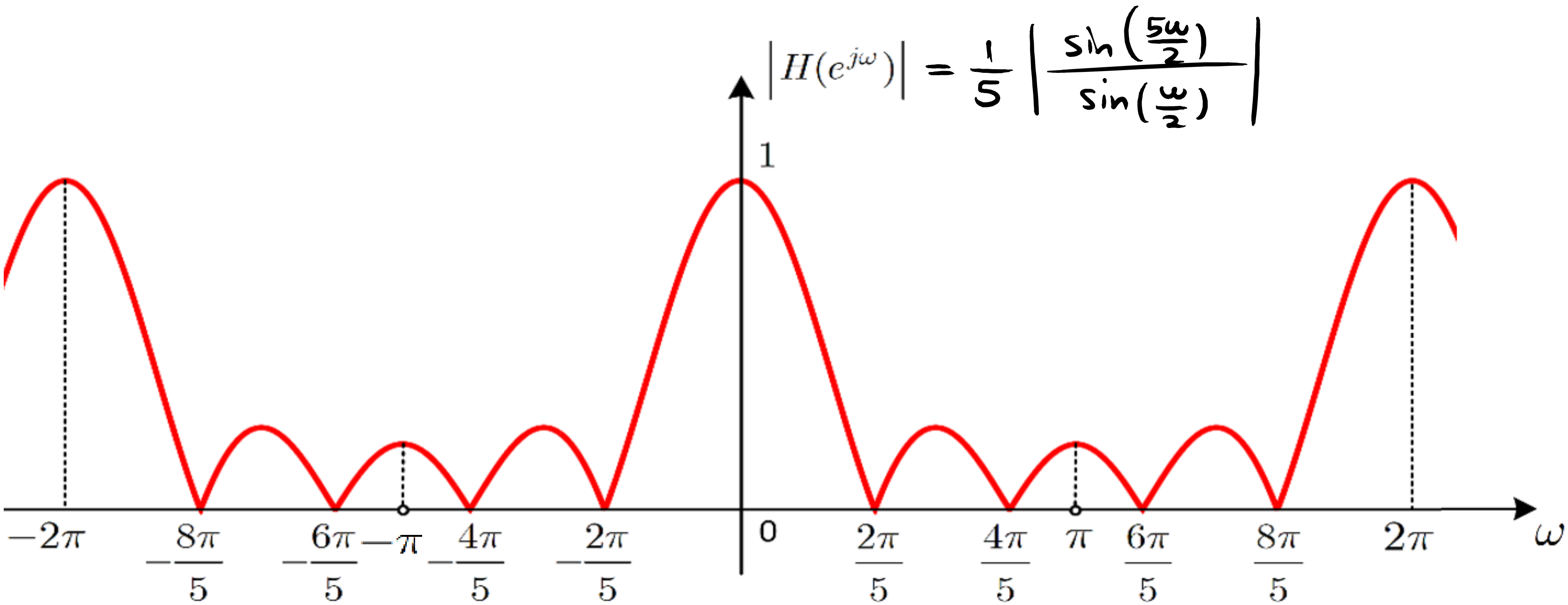
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

με σημεία μηδενισμού τα $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ας δούμε τον όρο $\frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και το μέτρο του.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





Συνεχίζεται... ☺