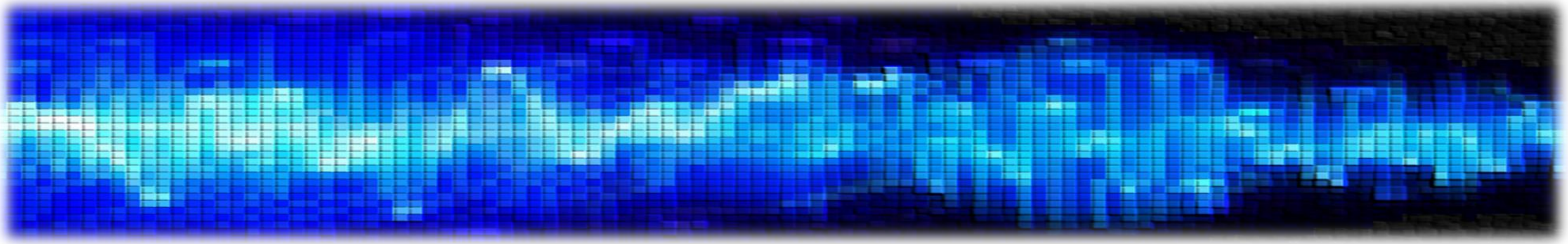
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)
- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

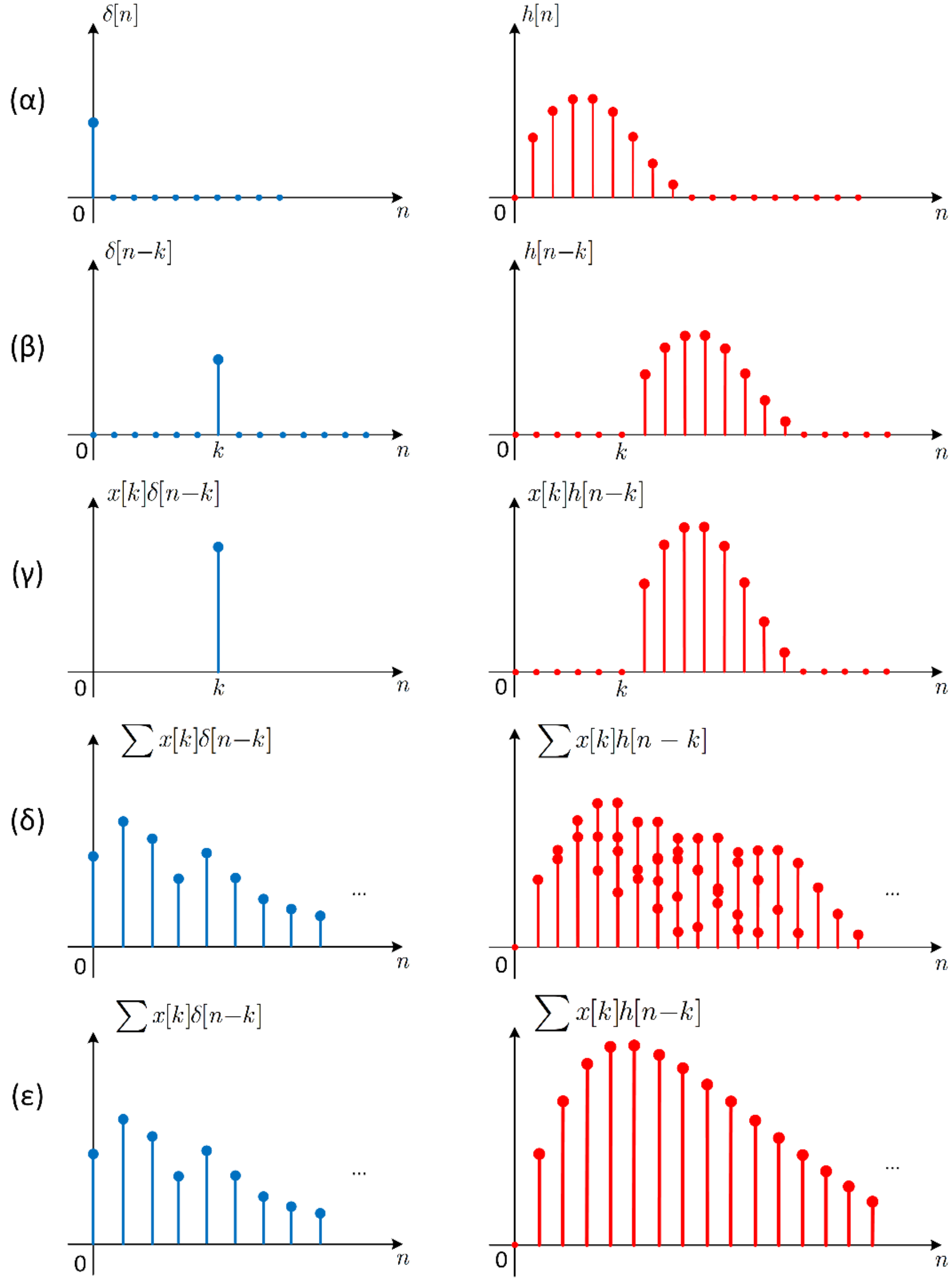
- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί…

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Άρα

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} && \text{Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} && \text{Γραμμικότητα (ομογένεια)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] && \text{Χρον. Αμεταβλητότητα} \end{aligned}$$



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι <u>εξαιρετικά</u> σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boldsymbol{x[n]} * \boldsymbol{h[n]}$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

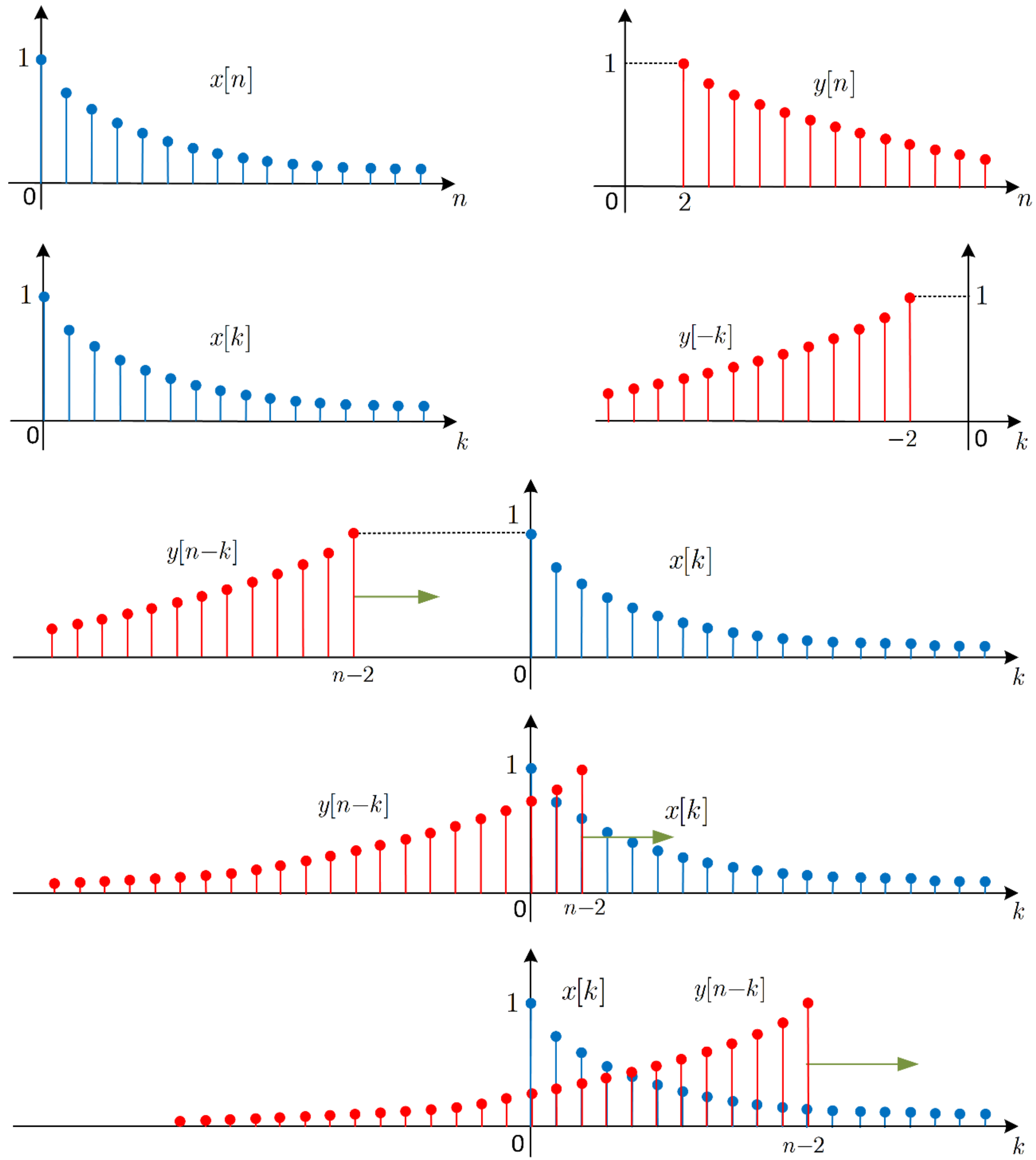
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

• Συνέλιξη

- Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:



- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ‘‘ολισθαίνουμε’’ πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο μέσα στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.

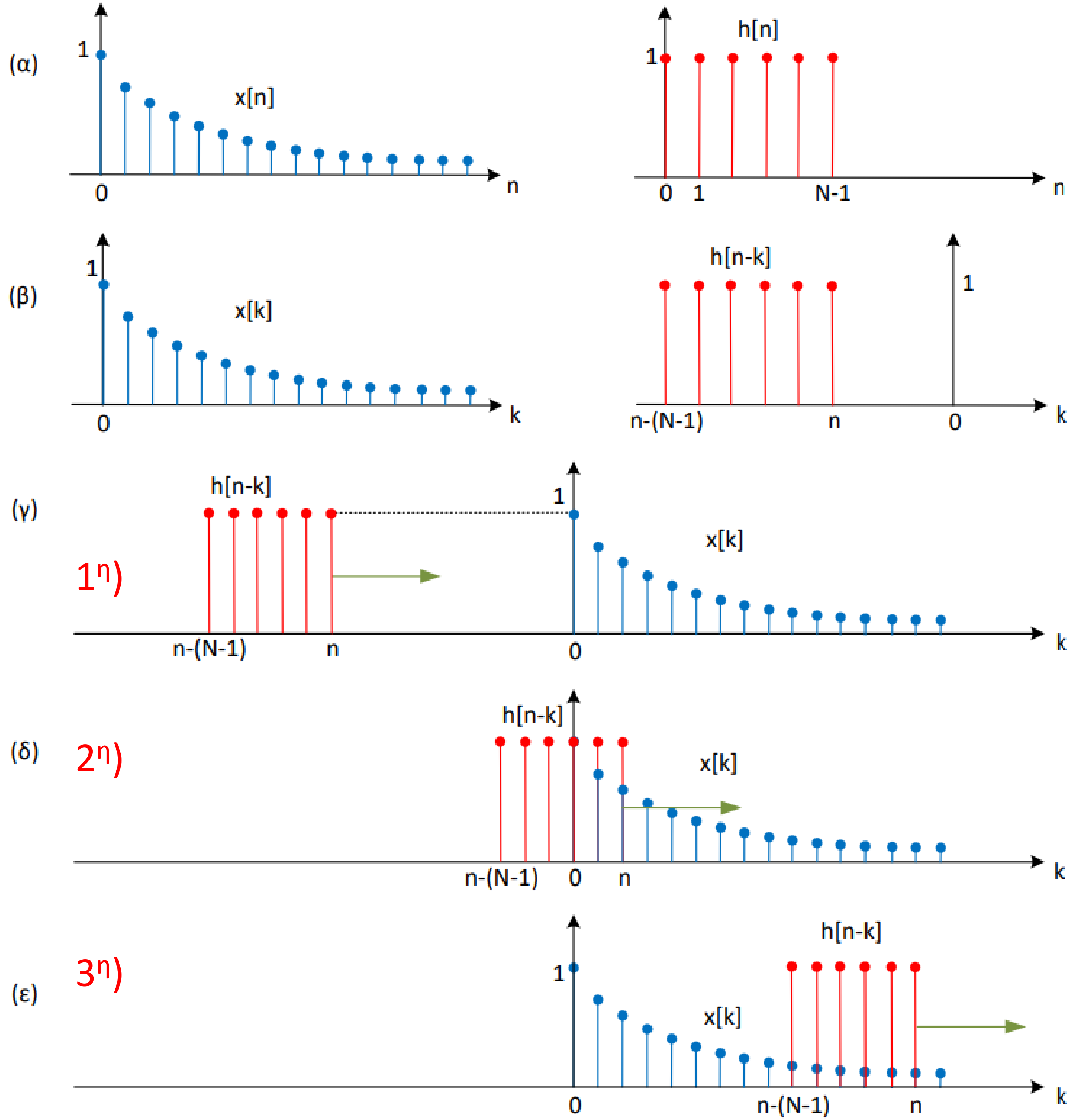
- **Συνέλιξη**

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

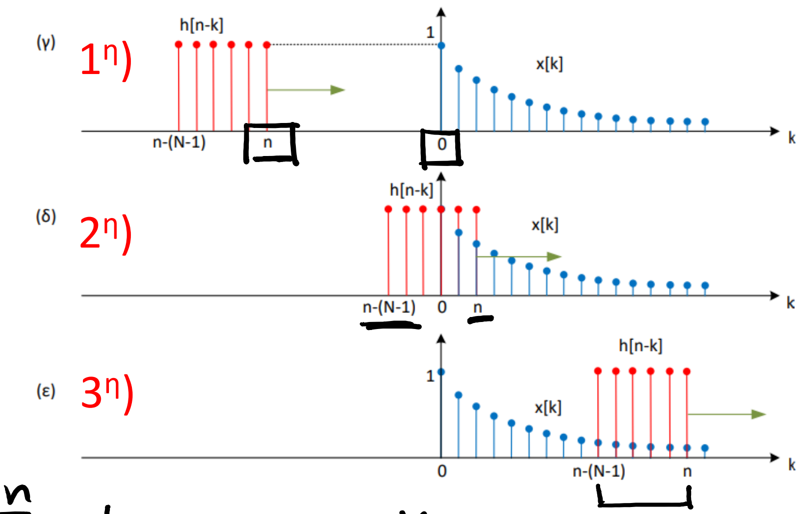
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και "σύρουμε" το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα "συνυπάρχουν", δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

$x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:



1η περίπτωση: για $n<0$ ή $\underline{n \leq -1}$,

$$C_{xh}[n] = x[n] * h[n] = 0.$$

2η περίπτωση: για $n \geq 0$ ΚΑΙ $n-(N-1) \leq -1$

$$C_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

3η περίπτωση: για $n-(N-1) \geq 0$

$$C_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}.$$

Συνολικά:

$$C_{xh}[n] = \begin{cases} 0, & n \leq -1 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-2 \\ \dfrac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}, & n \geq N-1 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

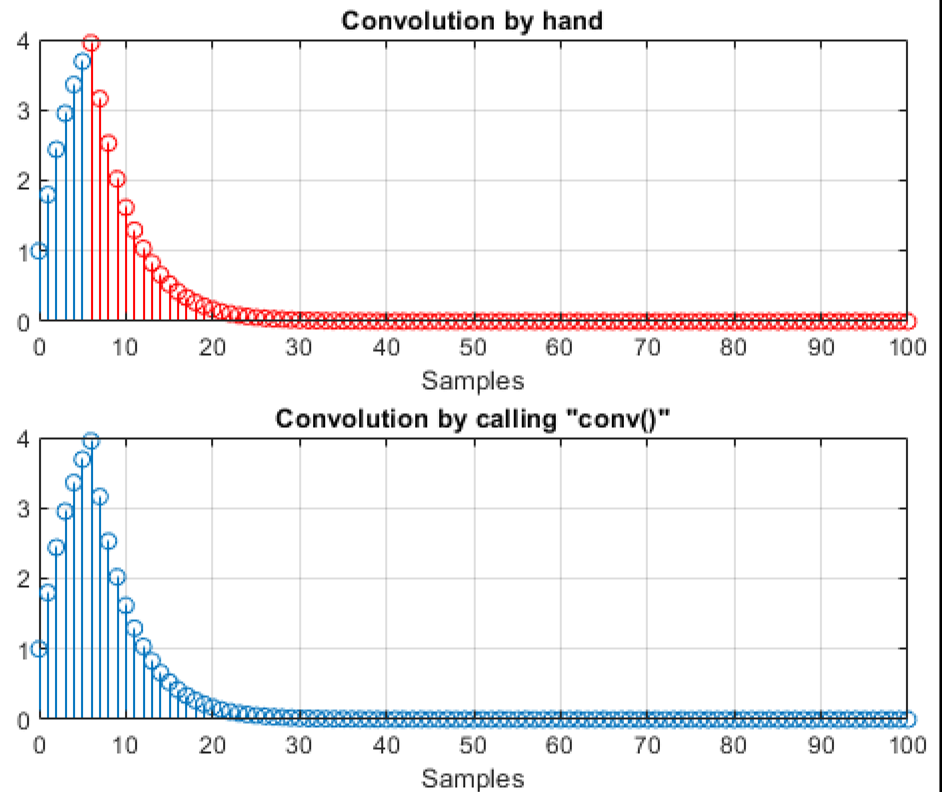
```
% Ορισμός διάρκειας
Nx = 7;

% Σήματα
x = ones(1,Nx);
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;

% Convolution by hand
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
c2 = (alpha.^([Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...
    - alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```



$$\sum_{N_1}^{N_2} c = c\,(N_2 - N_1 + 1)$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

Είναι $\displaystyle c_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]\, a^{n-k} u[n-k]$

$$= a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^k \cdot a^{-k}}_{1} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] \quad (1)$$

Είναι $u[k] = \begin{cases} \boxed{1, \ k \geq 0} \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$ και $u[n-k] = \begin{cases} 1, \ n-k \geq 0 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \boxed{1, \ k \leq n} \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$

Οπότε

$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1, \ 0 \leq k \leq n \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$. Άρα η (1) γράφεται ως:

$c_{xh}[n] = a^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = a^n (n - 0 + 1) = (n+1)a^n$, $n \geq 0$. δηλ. $c_{xh}[n] = (n+1)a^n u[n]$.

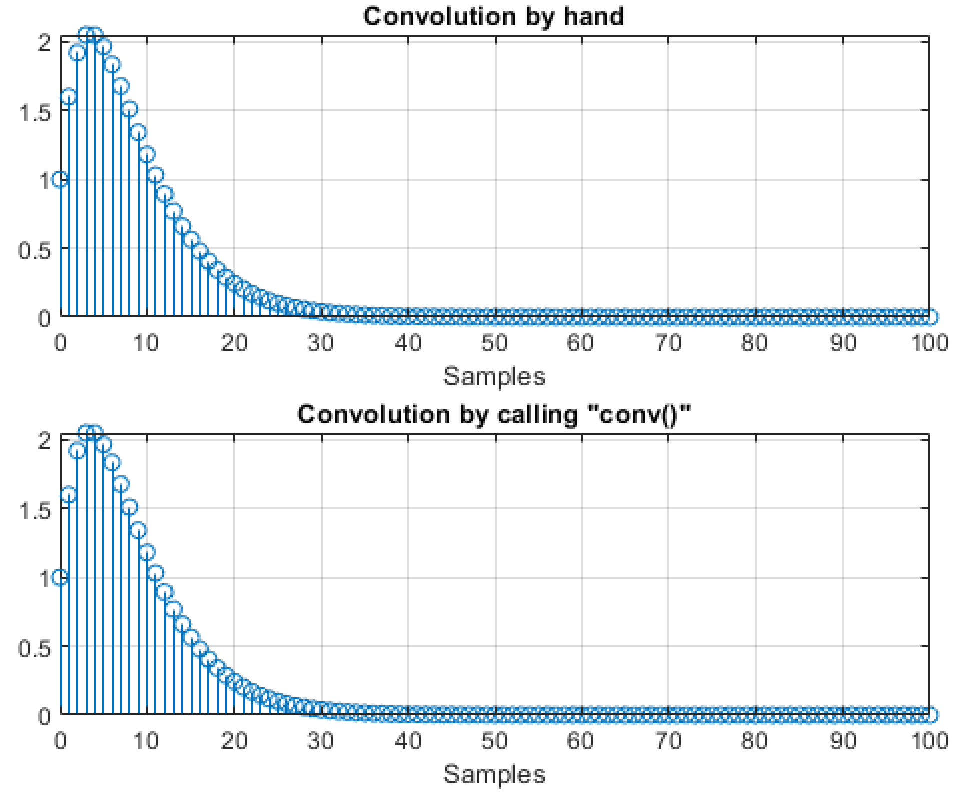
- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```
% Σήματα
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;
x = h;

% Convolution by hand
chx = alpha.^n .* (n+1);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(n, chx);
title('Convolution by hand'); grid;
xlabel('Samples');
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"');
xlabel('Samples');
```



- **Συνέλιξη**

  - Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας

  - Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?

  - Τότε βολικότερη είναι η μέθοδος της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**

  - Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

  - Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

• Συνέλιξη

x[k]	0	0	0	2	-3	½	0	0
y[k]	0	0	-1	1	2	-1	0	0

ανάκλαση ως προς k

x[k]	0	0	0	2	-3	½	0	0
y[-k]	0	0	-1	2	1	-1	0	0

Μετατοπίσεις

(α) k=0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

n-2 n+1 ολίσθηση

c[n] = 0, n+1 < 0

(β)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0	0

n-2 n+1

c[-1] = -1x2 = -2

(γ)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0

n-2 n+1

c[0] = 1x2 + (-3)x(-1) = 5

(δ)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0

n-2 n+1

c[1] = 2^2 - 3 - ½ = ½

(ε)

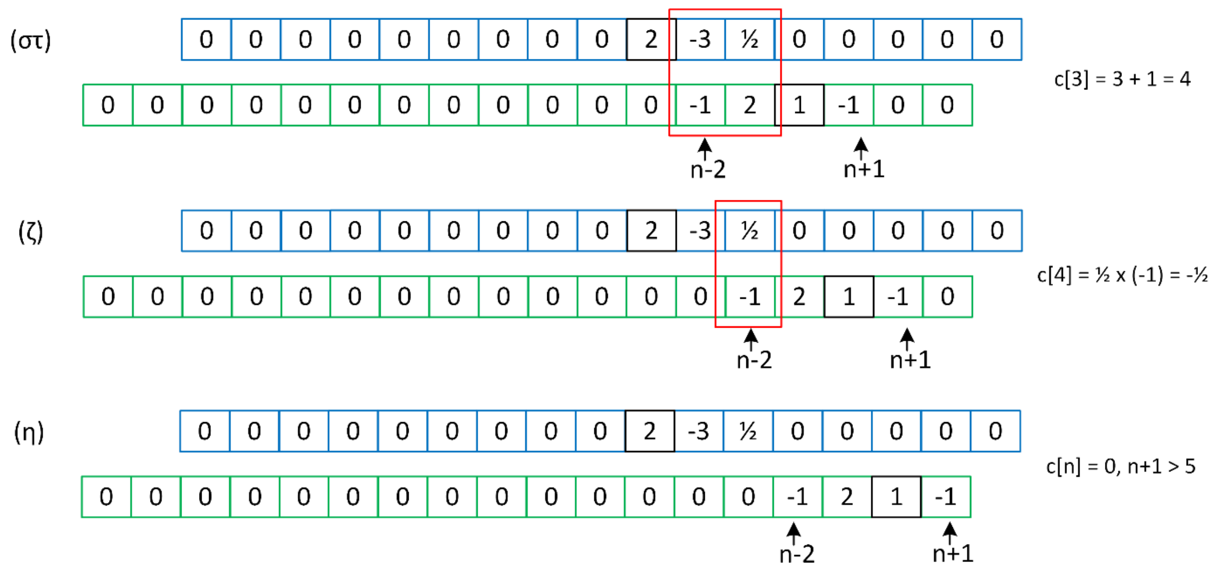
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0

n-2 n+1

c[2] = -2 - 6 + ½ = -15/2

• Συνέλιξη



- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?

- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

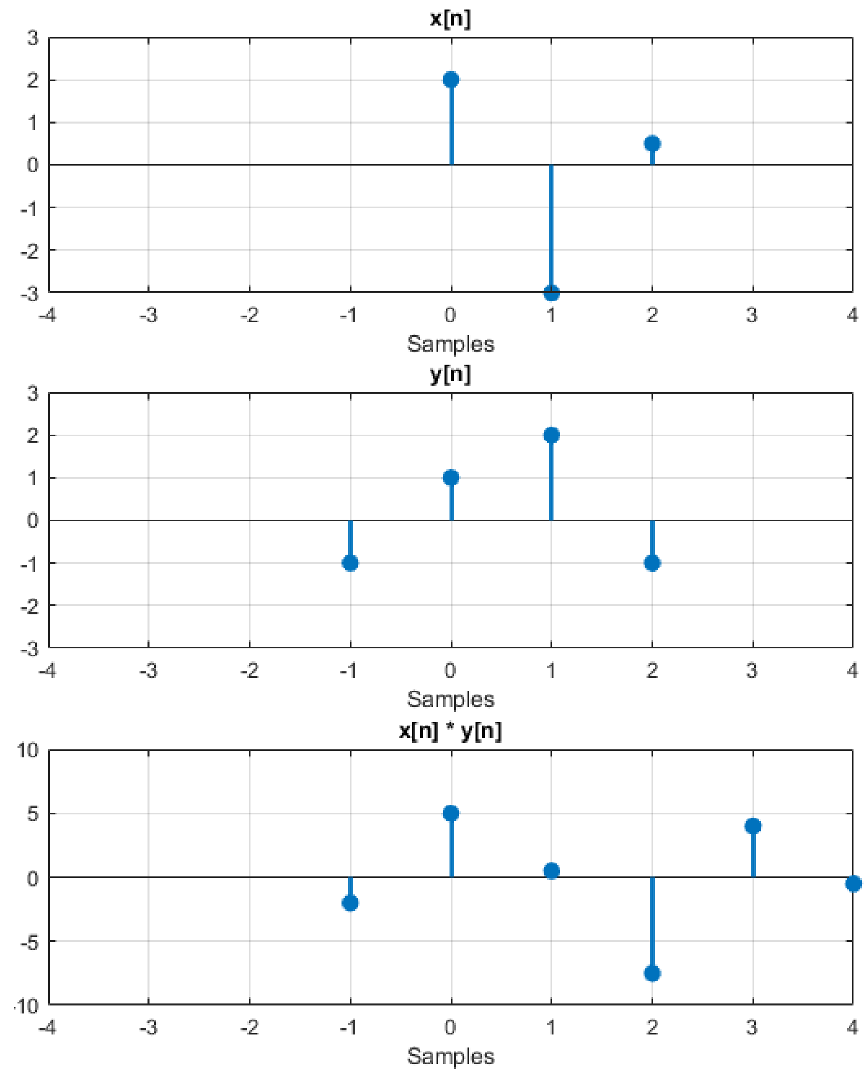
- **Συνέλιξη**

```
% Σήματα
x = [2 -3 1/2];
nx = [0 1 2];

y = [-1 1 2 -1];
ny = [-1 0 1 2];

% Συνέλιξη
cxy = conv(x, y);
n_c = [-1 0 1 2 3 4];

% Σχήματα
figure; subplot(311); stem(nx, x);
xlabel('Samples'); title('x[n]');
subplot(312); stem(ny, y);
xlabel('Samples'); title('y[n]');
subplot(313); stem(n_c, cxy);
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

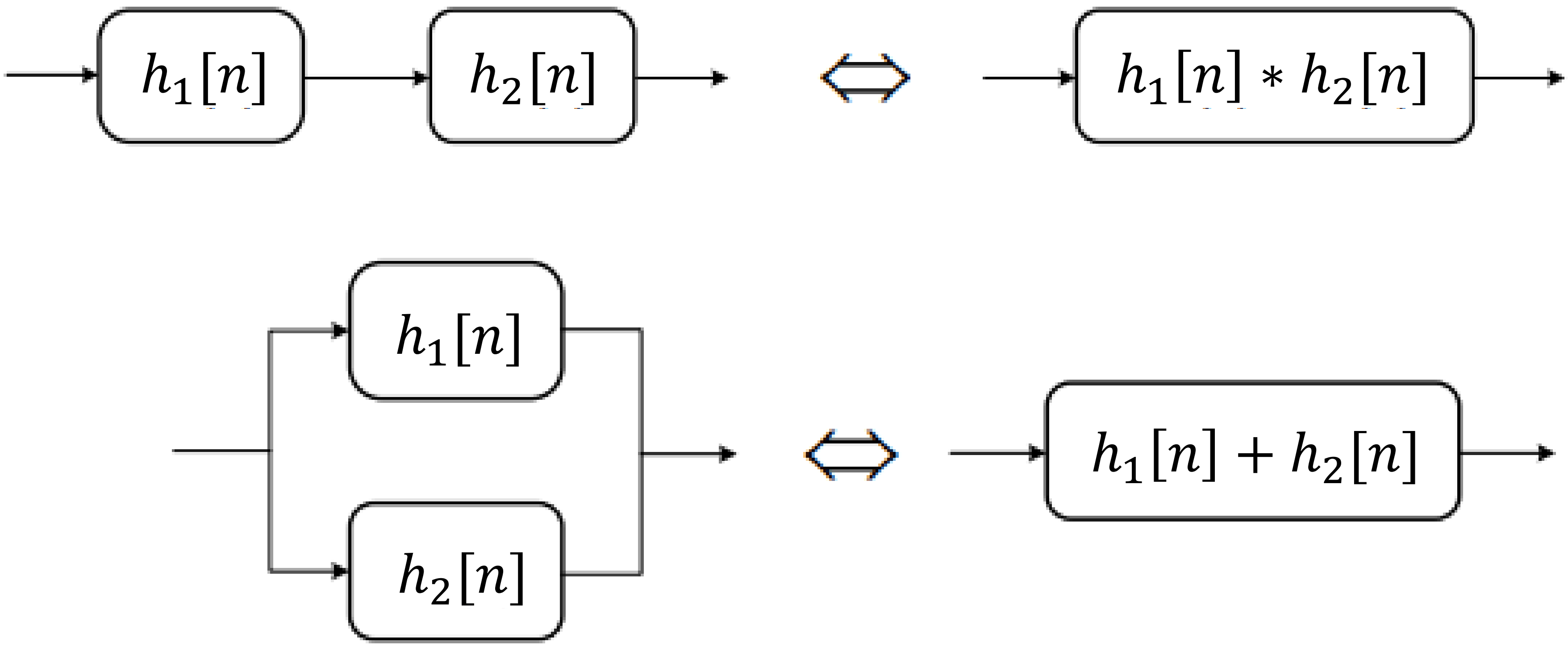
  - Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

  - Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**



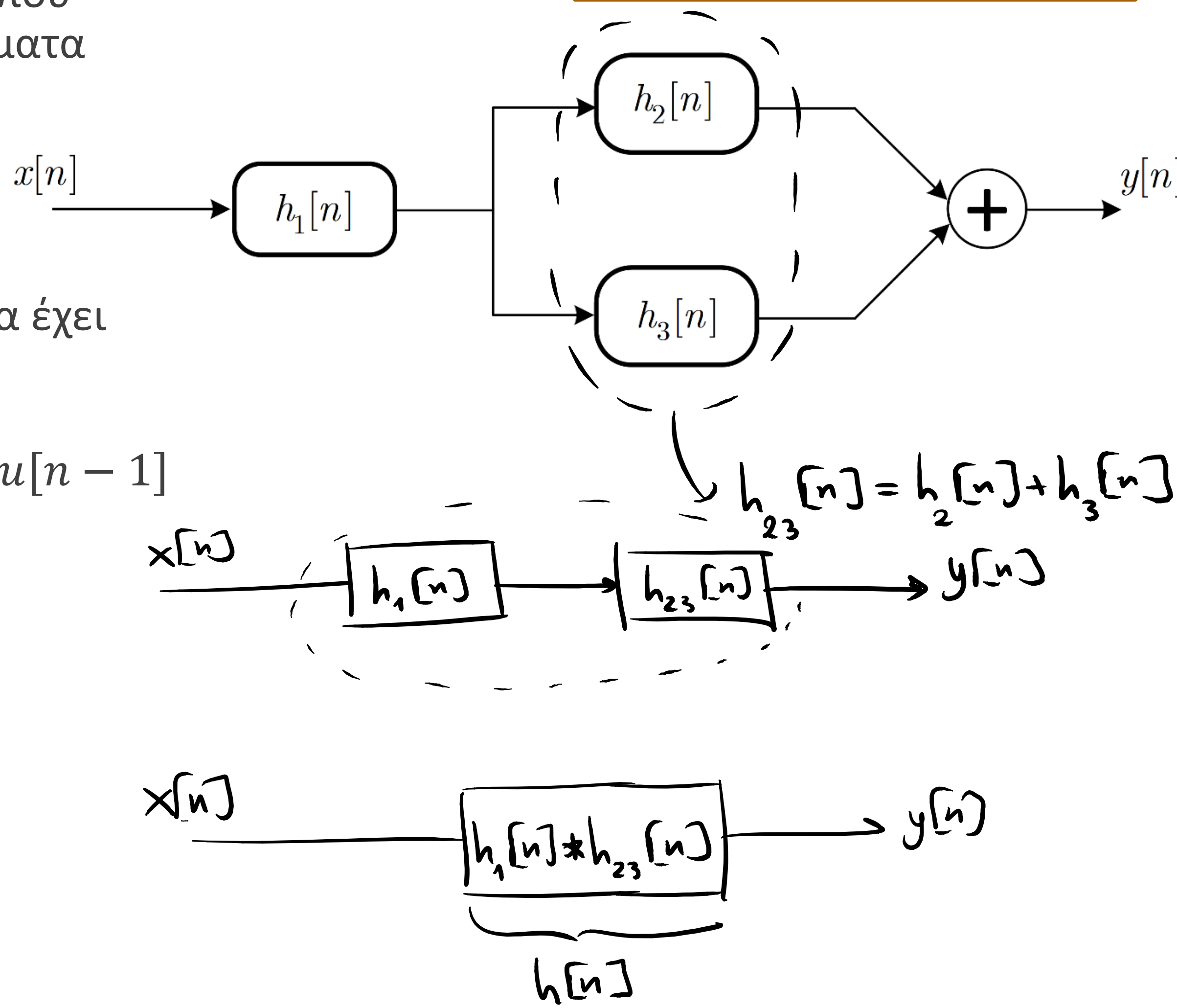
$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

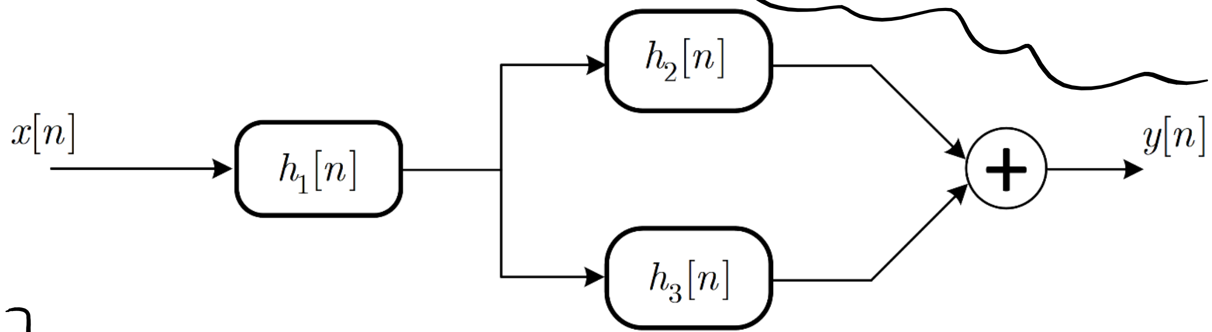
$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$



$$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Είναι $h[n] = h_1[n] * h_{23}[n]$

Είναι $h_{23}[n] = h_2[n] + h_3[n] = n\,u[n] + \delta[n+1]$, οπότε θα είναι:

$$h[n] = u[n-1] * \left(n\,u[n] + \delta[n+1]\right) = \underbrace{u[n-1] * n\,u[n]}_{1} + \underbrace{u[n-1] * \delta[n+1]}_{2}$$

(2) : $u[n-1] * \delta[n+1] = u[n-1+1] = u[n]$ (3)

(1) : $u[n-1] * n\,u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,\underbrace{u[k]\,u[n-k-1]}_{k \geq 0,\ k \leq n-1 \ \Rightarrow\ 0 \leq k \leq n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad n \geq 1$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,u[n-1] \quad (4)$$

Από (3),(4) προκύπτει το ζητούμενο.

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re$$

- Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| < B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| < B_y \Rightarrow \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_y$$

- Ξέρουμε ότι $|x[n]| < B_x, \quad \forall\, n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < B_y$$

- Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

  - Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty}$$

Κρουστική απόκριση απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

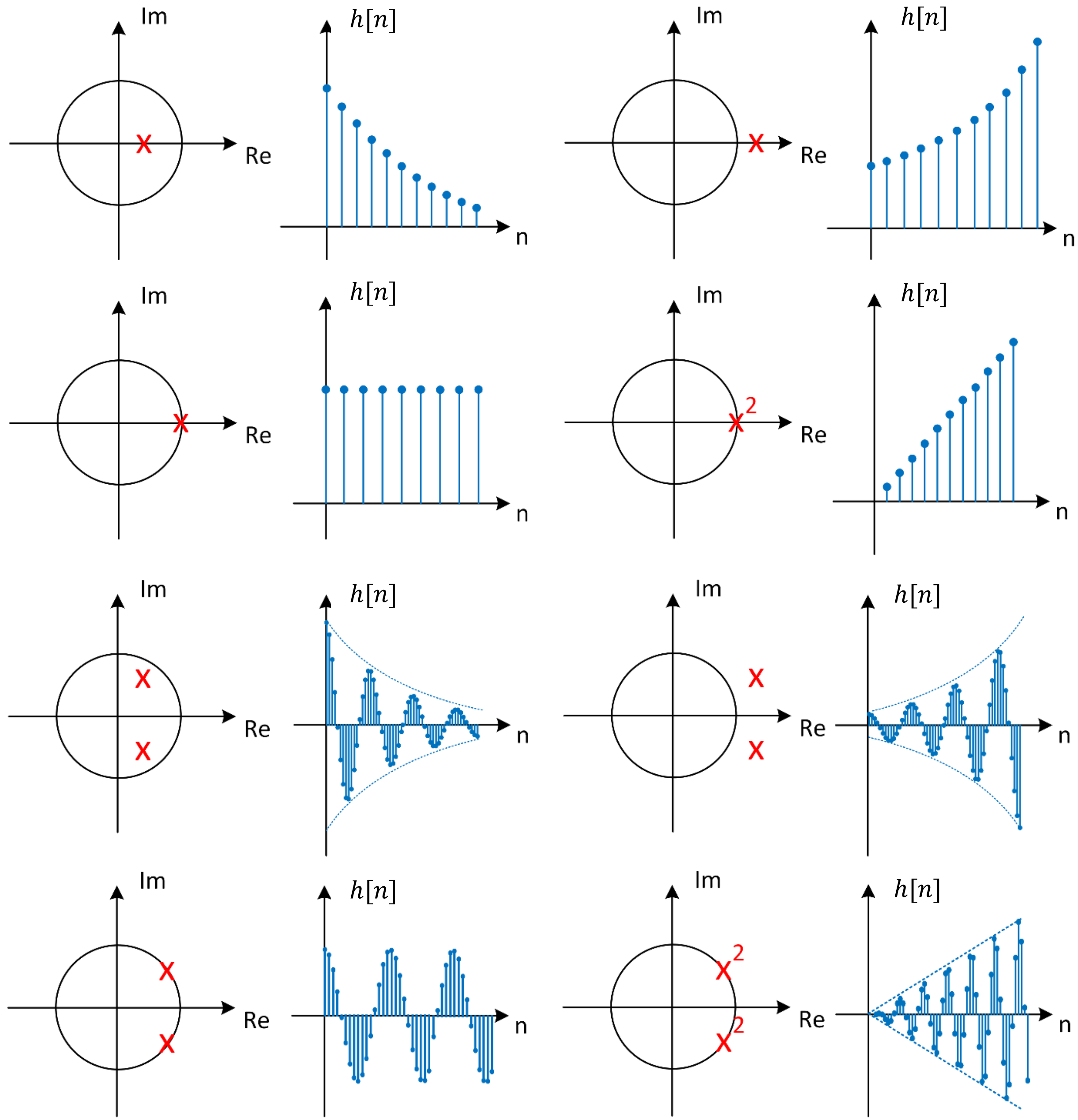
- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$$\boxed{|\gamma_k| < 1, \quad \forall\, \gamma_k \in \mathbb{C} \;\Leftrightarrow\; \text{οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!}}$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ