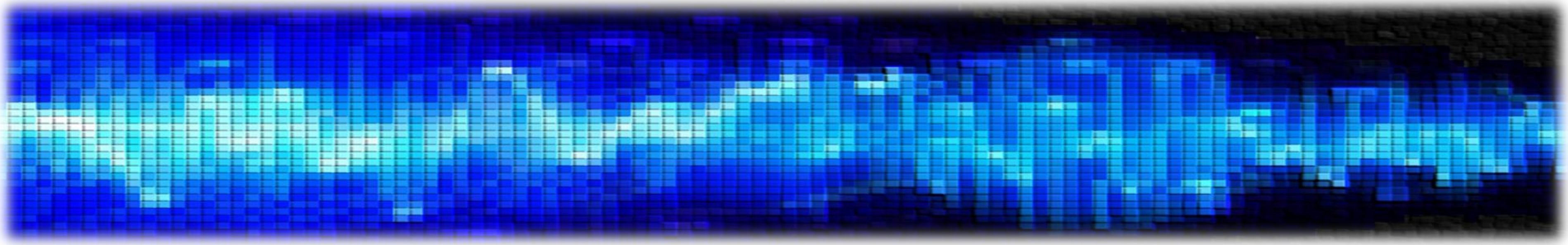
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3$^{\text{Η}}$



- Συστήματα διακριτού χρόνου

- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου <u>όσο και της εξόδου</u>

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που δε βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

  - Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
    - Της απόκρισης μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$ (zero input response)
    - Της απόκρισης μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

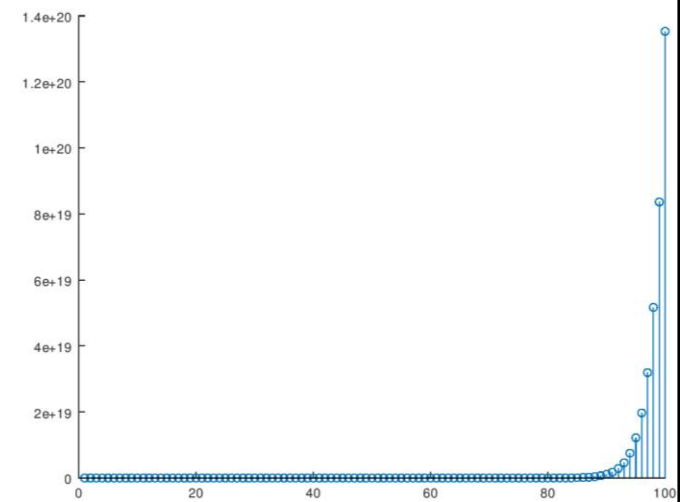
  - Η απόκριση μηδενικής εισόδου αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία <u>μόνο</u> των αρχικών συνθηκών
    - Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν

  - Η απόκριση μηδενικής κατάστασης αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
    - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$



αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$

  - Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

  - Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
    - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \ \forall \ n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**

  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \ c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \qquad c_2\gamma_2^n, \qquad c_3\gamma_3^n, \qquad \dots, \qquad c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \cdots + c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \qquad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

Ομογενής εξίσωση: $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + 5\gamma + 6$

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\gamma_1 = -2, \ \gamma_2 = -3}}_{\text{Χαρακτ. ρίζες}}$

Άρα:

$$y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n$$
$$= c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \quad n \geq 0.$$

Από τις αρχ. συνθήκες:

$$y[-2] = 0 = c_1(-2)^{-2} + c_2(-3)^{-2} = c_1 \frac{1}{4} + c_2 \frac{1}{9} = 0 \quad (1)$$

$$y[-1] = 1 = c_1(-2)^{-1} + c_2(-3)^{-1} = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} = 1 \quad (2)$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 4$, $c_2 = -9$.

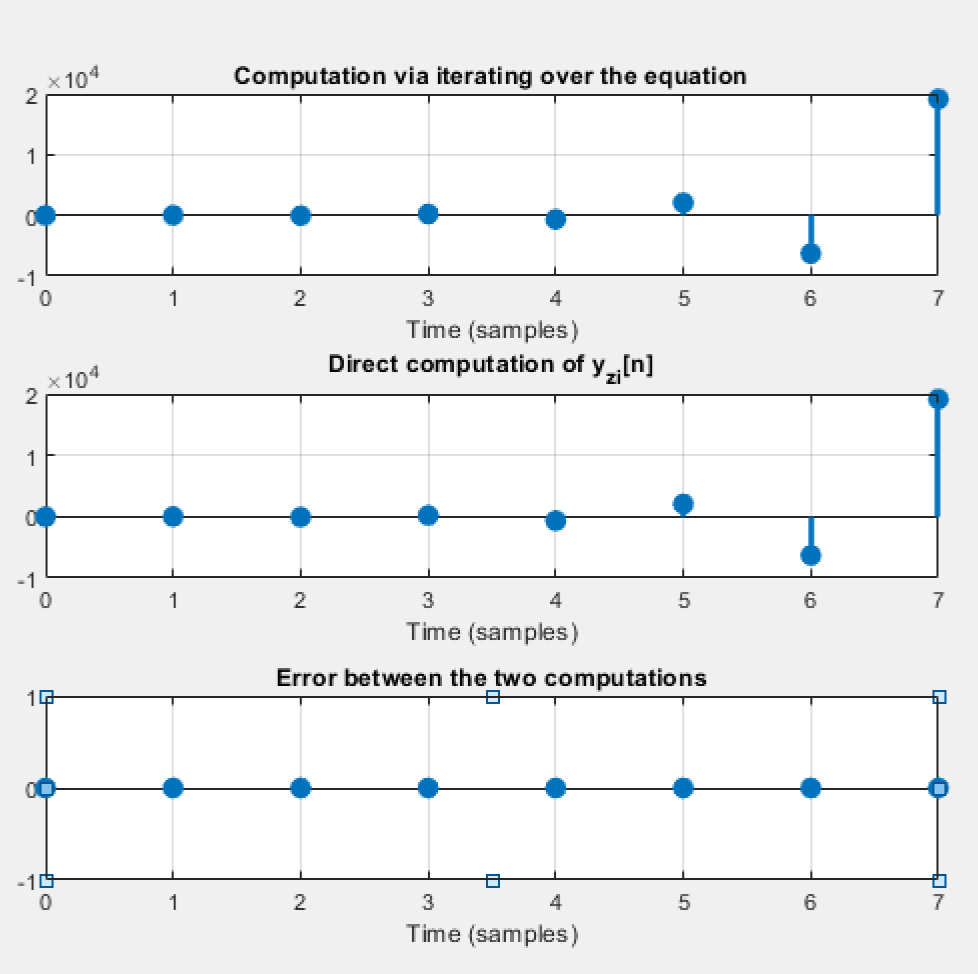
Άρα

$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n - 9(-3)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[4(-2)^n - 9(-3)^n\right] u[n].$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - MATLAB:

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

% Αρχικές συνθήκες y[-2] = 0, y[-1] = 1
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετράω από n=3 θεωρώντας ότ το y(3) είναι το y[0]
for n=3:N
y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of y_{zi}[n]');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

Ομογενής εξίσωση: $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 0$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12}$

— ıı — εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \gamma_2 = -\frac{1}{3}}$

Χαρακτ. ρίζες

Άρα $y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ n \geq 0$

Από αρχικές συνθήκες:

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

$$y[-2]=1=c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}+c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=1 \quad 1$$

$$y[-1]=0=c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}+c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}=0 \quad 2$$

Έχουμε, λύνοντας το σύστημα, ότι: $c_1=\frac{1}{4}$, $c_2=-\frac{1}{3}$

Οπότε:

$$y_{zi}[n]=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}, \quad n\geq 0$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n].$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (έστω πολλαπλότητας $r \geq 2$), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

  - Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος

  - Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
    - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία

  - Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
    - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα

  - Ποιό είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
    - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει “νόημα”: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα
  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$
  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

- Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

- Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

- Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$
$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; h[0] = \frac{1}{a_0}$$

- Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

- Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

  - Οπότε

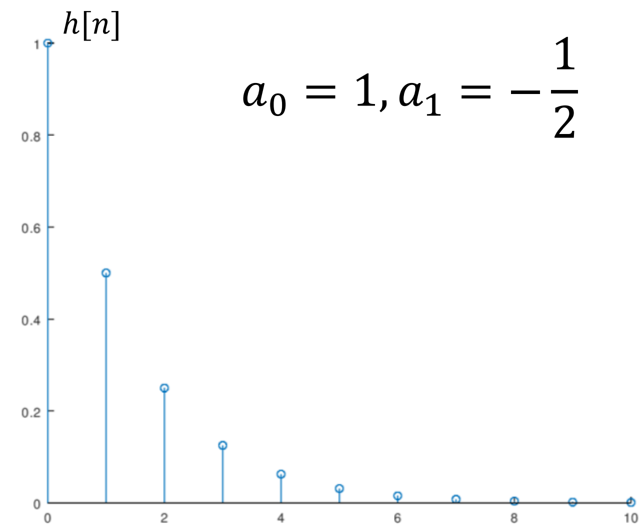
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

  - Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$



$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

  με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

  θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0^-}\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

  θα είναι $h_{0^-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]$$

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

  - Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, οπότε έχουμε $h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n]$.

Για $n=0$: $h[0] + \frac{5}{6}\underbrace{h[-1]}_{0} + \frac{1}{6}\underbrace{h[-2]}_{0} = \delta[0] = 1 \Rightarrow \boxed{h[0] = 1}$ (1)

Για $n=1$: $h[1] + \frac{5}{6}\underbrace{h[0]}_{1} + \frac{1}{6}\underbrace{h[-1]}_{0} = \delta[1] = 0 \Rightarrow \boxed{h[1] = -\frac{5}{6}}$ (2)

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6}$

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{3},\ \gamma_2 = -\frac{1}{2}}}_{\text{χαρ. ρίζες}}$

Είναι

$$h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ n \geq 0$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Από "ψευδο"-αρχικές συνθήκες:

$$h[0] = 1 = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{c_1 + c_2 = 1} \quad (3)$$

$$h[1] = -\frac{5}{6} = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = \boxed{-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{5}{6}} \quad (4)$$

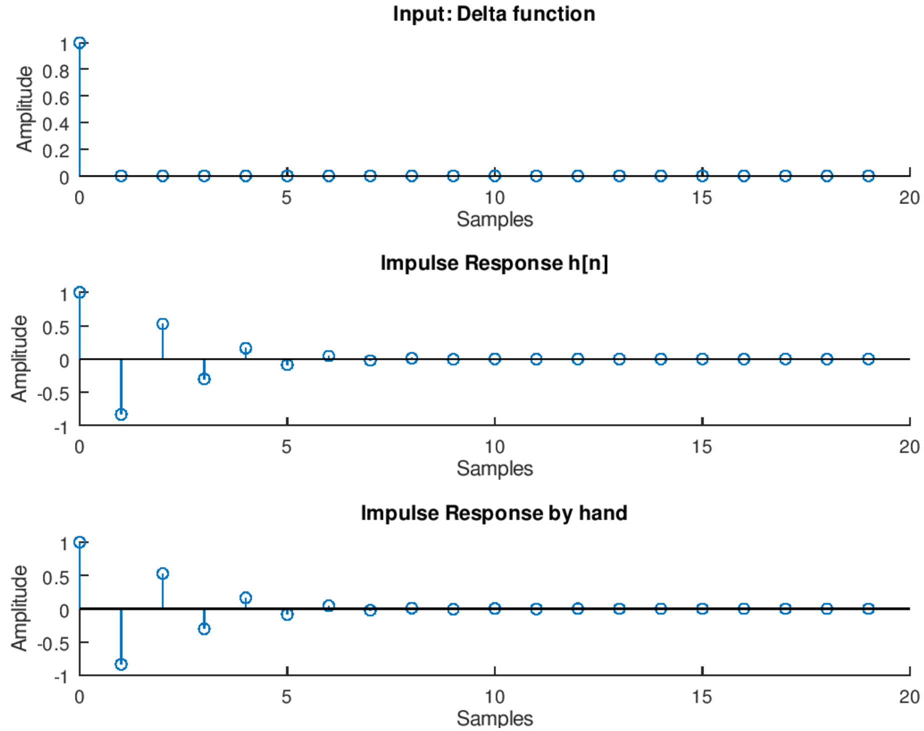
Από (3), (4), έχουμε $c_1 = -2$, $c_2 = 3$.

Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n].$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - MATLAB:




```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω;
N = 20;

% Αρχικοποίηση
h = zeros(1, N);

% "Ψευδοαρχικές" συνθήκες
h(1) = 1;
h(2) = -5/6;

% Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = [1, zeros(1,N-1)];

% Μετράω από n=3
for n=3:N
  h(n) = -5/6*h(n-1) - 1/6*h(n-2); % το x[n] δε χρειάζεται εδώ (είναι πάντα 0)
end

% Γραφήματα
figure; subplot(311);
stem(0:N-1, x); title('Input: Delta function');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

subplot(312); stem(0:N-1, h); title('Impulse Response h[n]');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

n = 0:N-1;
h_hand = -2*(-1/3).^n + 3*(-1/2).^n;
subplot(313); stem(n, h_hand); title('Impulse Response by hand');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 2h[n] = 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n] - 2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 4h[n] - 2h[n-2]$$

$$= 4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] - 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n]+\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]+2x[n-1] \quad : \quad S$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Θεωρούμε το απλό σύστημα: $S_0 : y[n]+\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]$

Θέτω $x[n]=\delta[n] \longrightarrow y[n]=h_0[n]$, οπότε:

$h_0[n]+\frac{2}{3}h_0[n-1]+\frac{1}{9}h_0[n-2]=\delta[n]$. Για $n=0$:

$h_0[0]+\frac{2}{3}\underbrace{h_0[-1]}_{0}+\frac{1}{9}\underbrace{h_0[-2]}_{0}=\delta[0]=1 \Rightarrow \boxed{h[0]=1}$. Για $n=1$:

$h_0[1]+\frac{2}{3}\underbrace{h_0[0]}_{1}+\frac{1}{9}\underbrace{h_0[-1]}_{0}=\delta[1]=0 \Rightarrow \boxed{h[1]=-\frac{2}{3}}$

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2+\frac{2}{3}\gamma+\frac{1}{9}=0 \Rightarrow \left(\gamma+\frac{1}{3}\right)^2=0 \Rightarrow \gamma_1=-\frac{1}{3}$ διπλή ρίζα

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Άρα $h_0[n] = (c_0 + n c_1)\gamma_1^n, \ n \geq 0$

Τέλος, $h_0[0] = 1 = c_0 \Longrightarrow \boxed{c_0 = 1}$

$h_0[1] = -\frac{2}{3} = (c_0 + c_1 \cdot 1)\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3} \Longrightarrow \boxed{c_1 = 1}$

Άρα η κρουστική απόκριση $h_0[n]$ θα είναι:

$$h_0[n] = (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Έτσι, η κρουστική απόκριση του συστήματος S θα είναι:

$$h[n] = h_0[n] + 2h_0[n-1]$$
$$= (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ