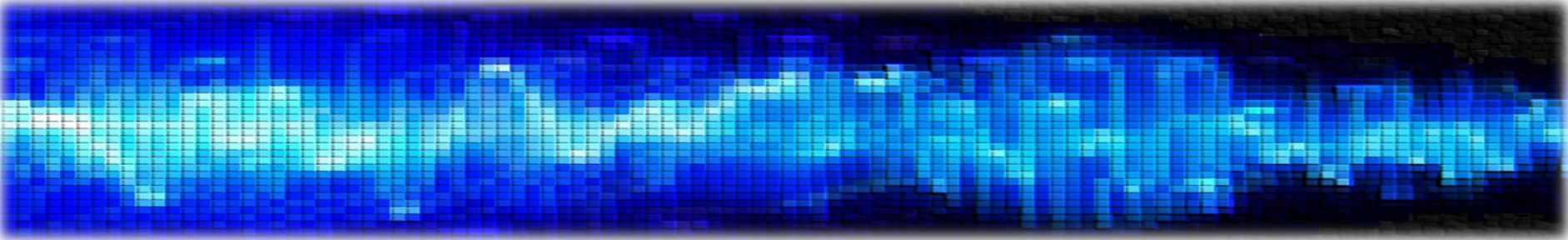


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 1^Η

- 
- Δειγματοληψία (reminder)
 - Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- **Ως τώρα... (coming from HY215)**

- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \quad |f| > f_{max}$$

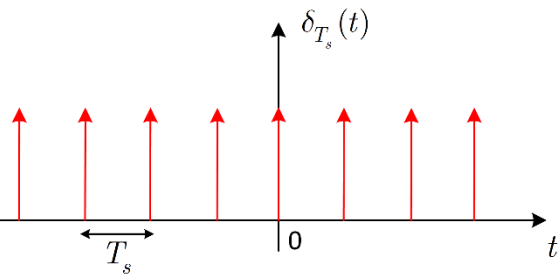
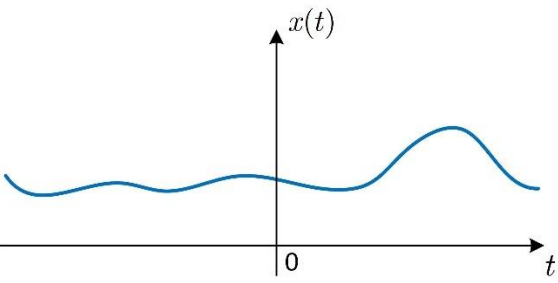
με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα f_{max}

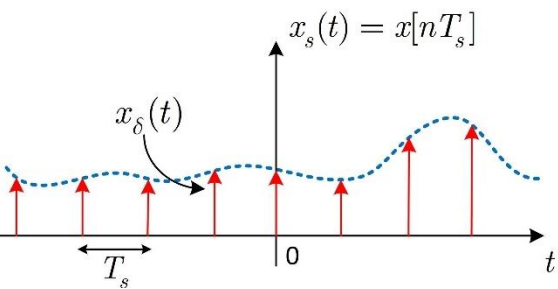
$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**
- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας

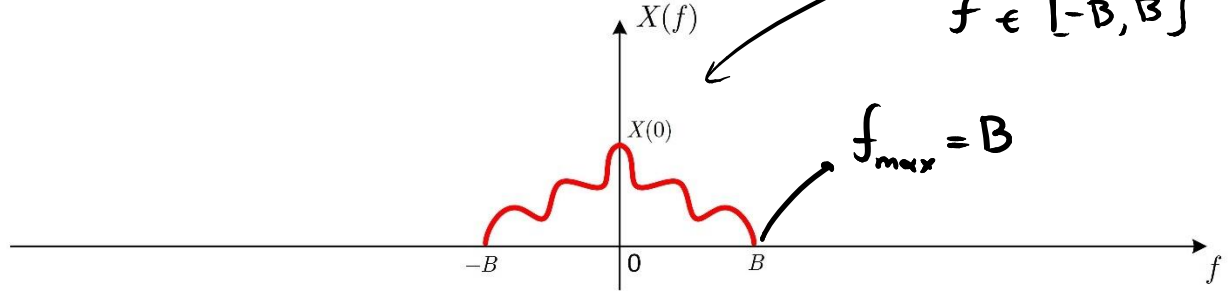
ΧΡΟΝΟΣ



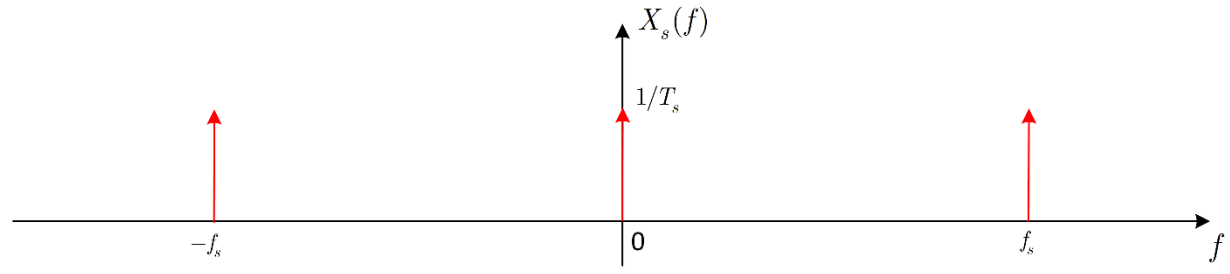
||



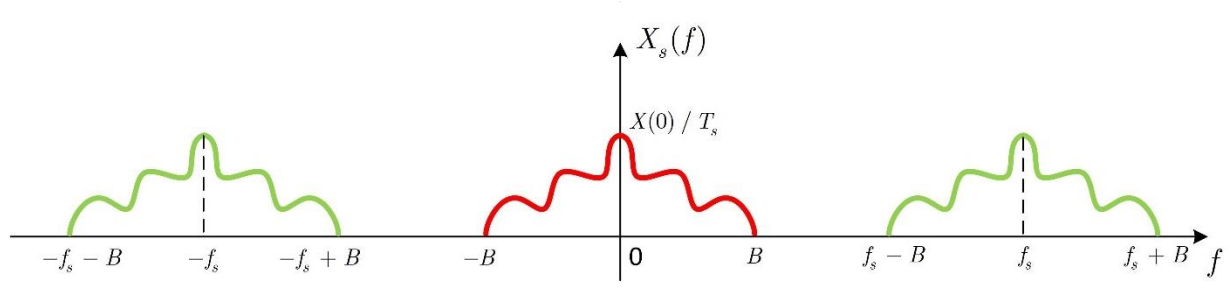
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



★ (Συνέλιξη)



||



- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_S(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_S(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

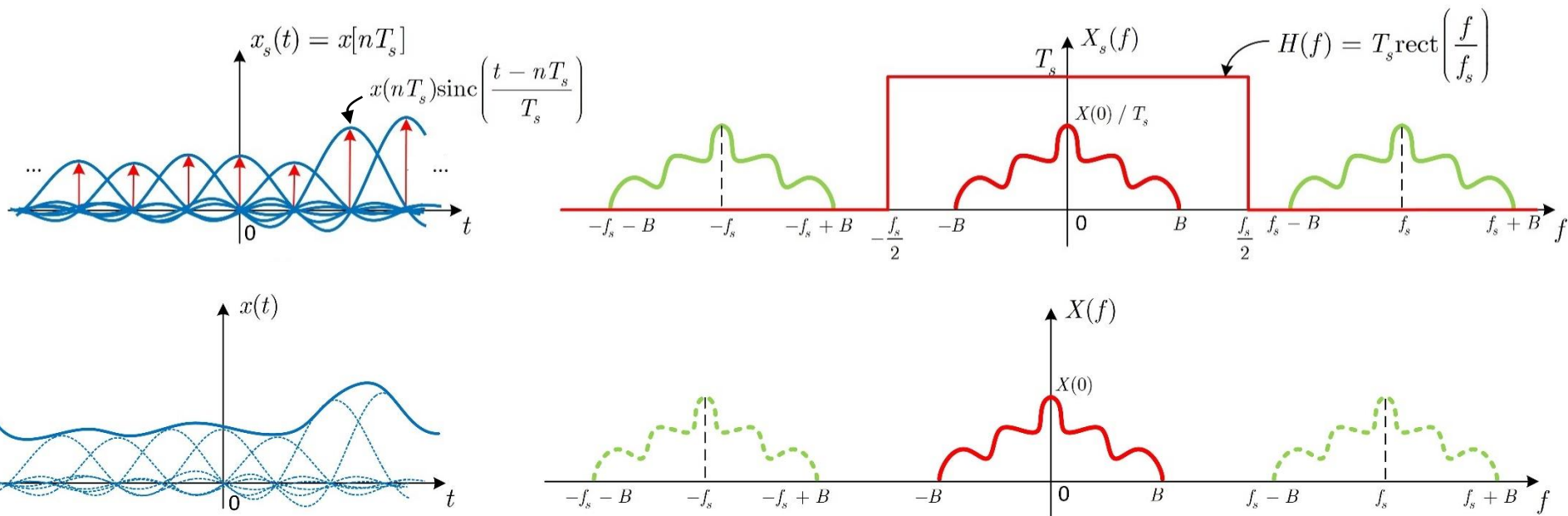
ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφα» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

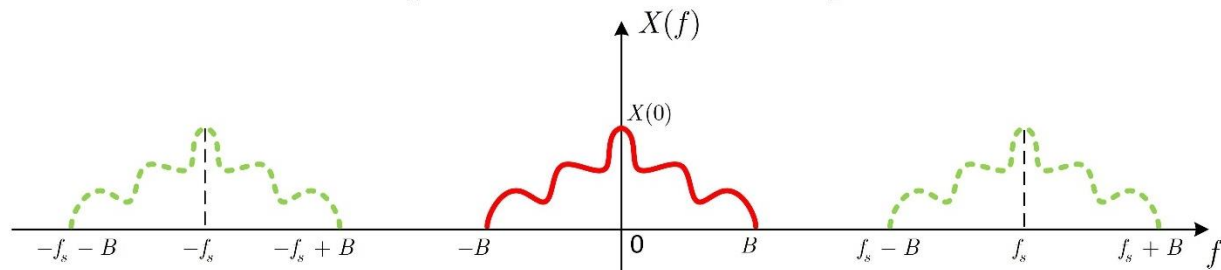
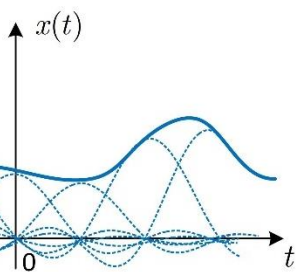
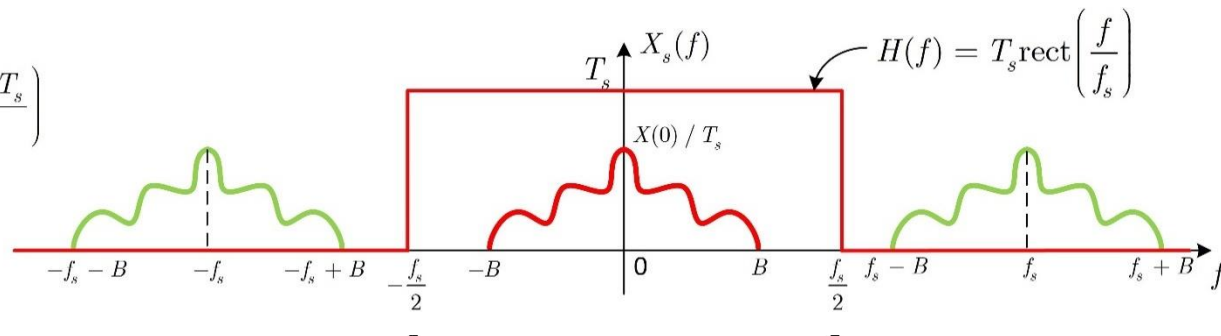
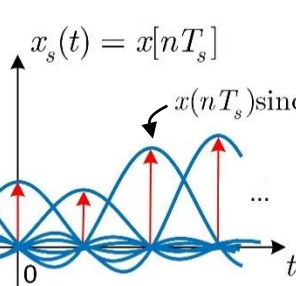
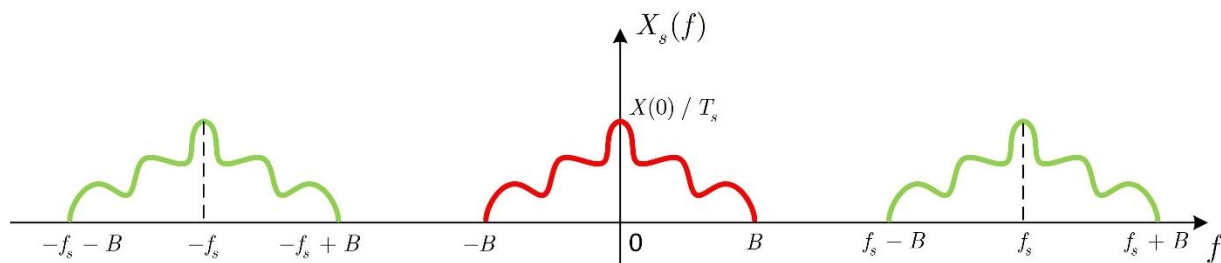
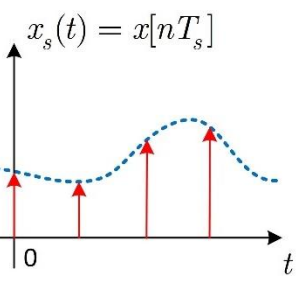
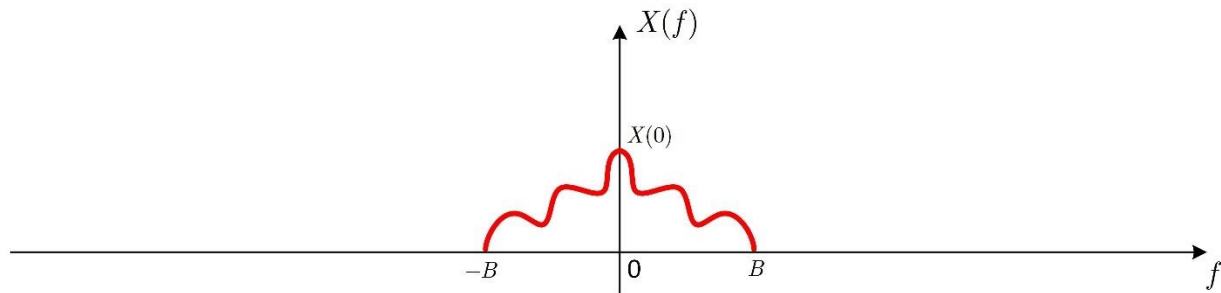
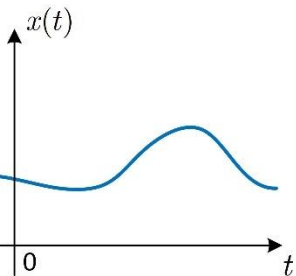
- Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 x_{rec}(t) &= x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$



ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



- Παράδειγμα:

- Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

Θέτω $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$, γιατί $T_s = \frac{1}{f_s}$

Είναι $x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s) = A \cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{f_s}\right) = x[n]$

$= A \cos(\omega_0 n)$

Έε $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}}$ Σχέση ω_0 , f_0 , και f_s !

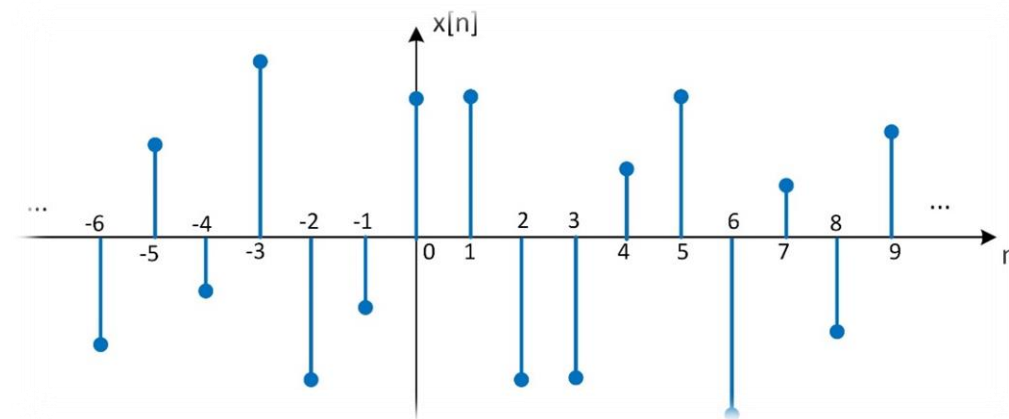
Π.χ. για $x(t) = 2 \cos(2\pi 100t)$ και $f_s = 8000$ Hz

θα έχουμε $x[n] = 2 \cos\left(\frac{2\pi 100}{8000} n\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{40} n\right)$,

έε $\omega_0 = \frac{\pi}{40}$ rad.

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \text{Re}\{x[n]\} + j\text{Im}\{x[n]\}$$

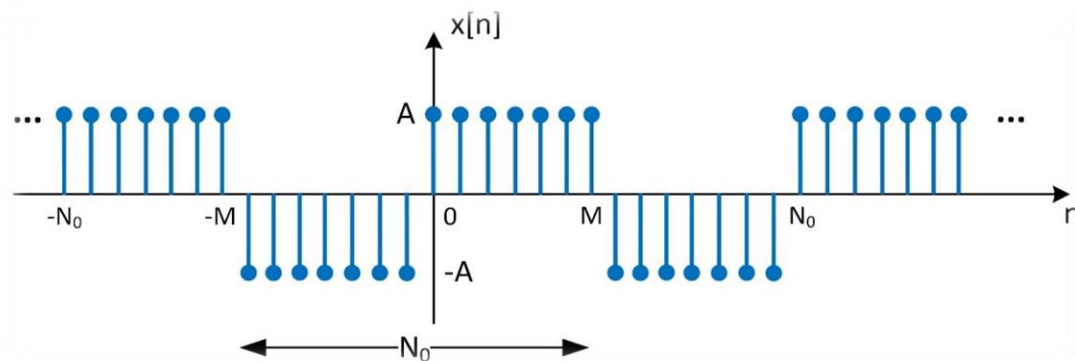
$$= |x[n]| e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\text{Re}^2\{x[n]\} + \text{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{x[n]\}}{\text{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n + N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται **περίοδος** του σήματος.
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2 , τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

• Ημίτονα

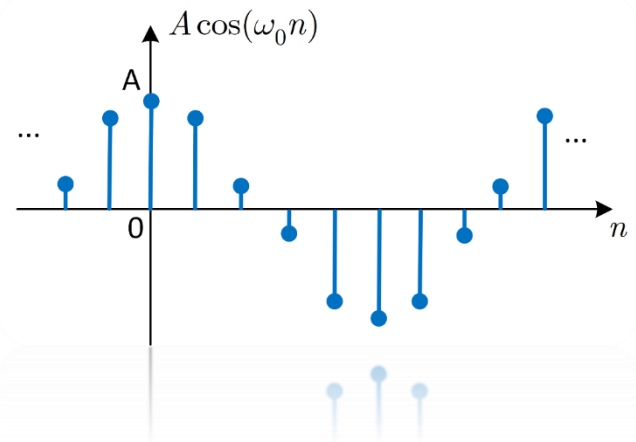
- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N , τότε θα ικανοποιεί τη σχέση

$$x[n] = x[n + N]$$

- Άρα

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 (n + N))$$

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 n + \frac{\omega_0 N}{?})$$



$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta + 2\pi k),$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \quad N, k \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N !

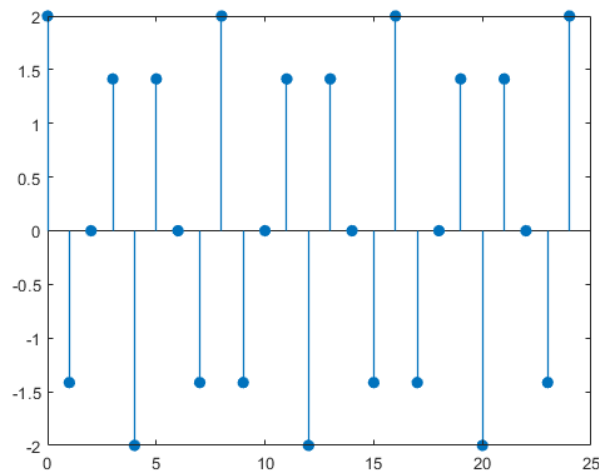
- Ημίτονα

- Παραδείγματα:

○ $x[n] = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} n\right)$

Είναι $N = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} k = \frac{8\pi}{3\pi} k = \frac{8}{3} k$

Για $k=3$, $N=8$, άρα η περίοδος είναι 8 δείγματα.

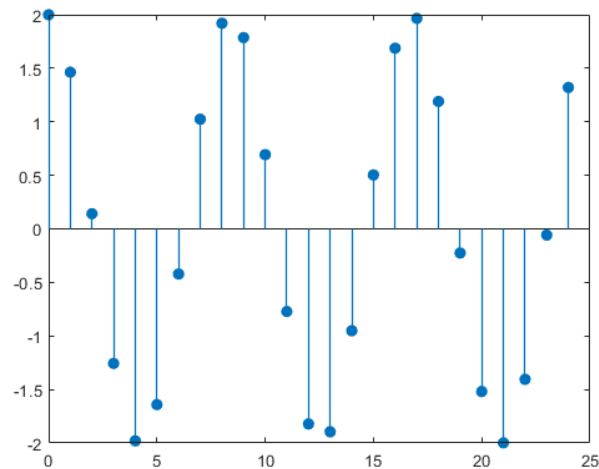


○ $x[n] = 2 \cos\left(\frac{3}{4} n\right)$

Είναι $N = \frac{2\pi}{\omega_0} k = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} k = \frac{8\pi}{3} k$

Δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$: το N να είναι ακέραιος αριθμός. Άρα το σήμα δεν

είναι περιοδικό.



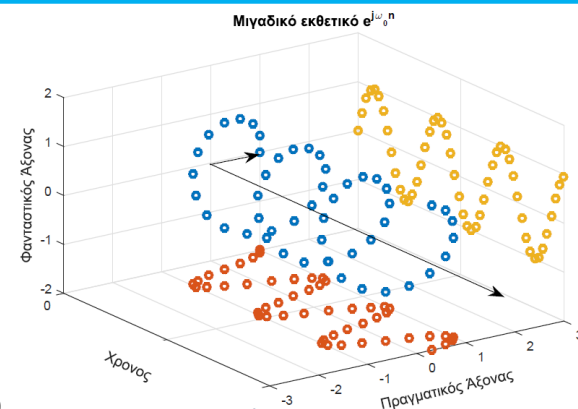
• Ημίτονα

- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \operatorname{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Στο διακριτό χρόνο

$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n}$$

- Αν $\varphi = 2\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

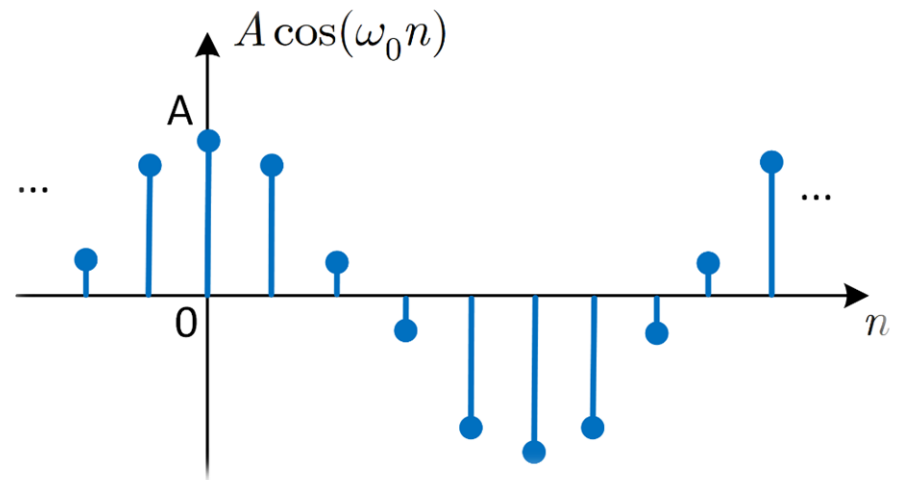
$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (\text{!!!!!!!!!!!!})$$

Γιατί? $\lambda \in \mathbb{Z}$,
 $n \in \mathbb{Z}$, άρα $u = n\lambda \in \mathbb{Z}$, οπότε
 $e^{j2\pi u} = 1$, $u \in \mathbb{Z}$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π !!

- Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

- Ημίτονα
- Σύνοψη:



Περιοδικό?

Εξαρτάται από το ω_0 !

Περιοδικό?

Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

• Ημίτονα

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις
- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
 - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

• Όμως...

$$x_1[n] = 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2[n] = 4 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4 \cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$= 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!)$$

$\frac{6\pi n - 2\pi n}{3}$

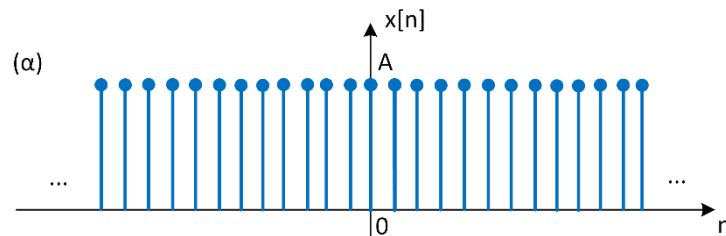
*

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
 - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

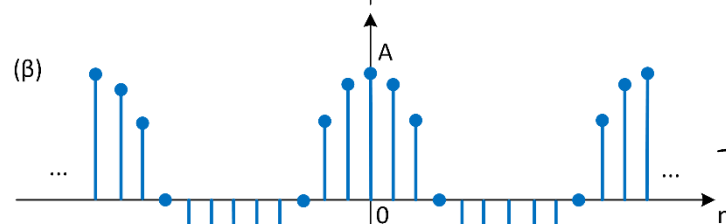
$$* \cos(2\pi k - \delta) = \cos(\delta)$$

• Ημίτονα

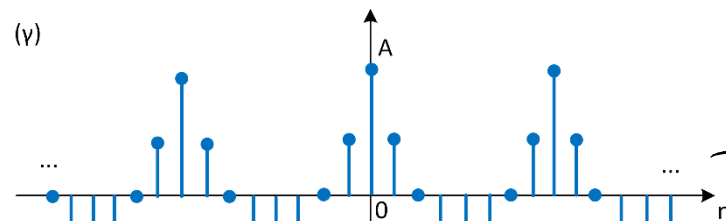
$$\omega_0 = 0$$



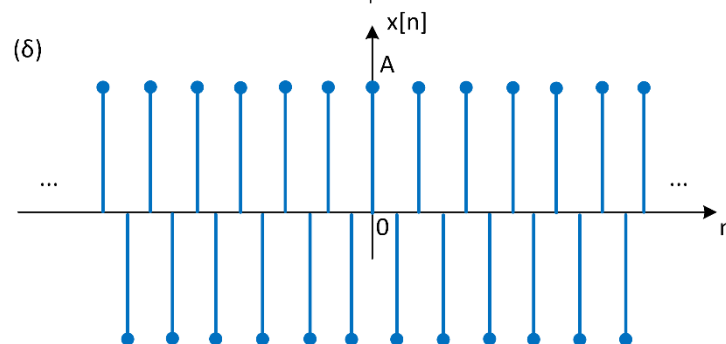
π.χ. $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$



π.χ. $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$



$$\omega_0 = \pi$$


 2π
 ω

- Στο $[0, \pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0

π.χ. $\omega_0 =$

- Στο $(\pi, 2\pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0 !!

π.χ. $\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

$\omega_0 = \pi$

 π
 π

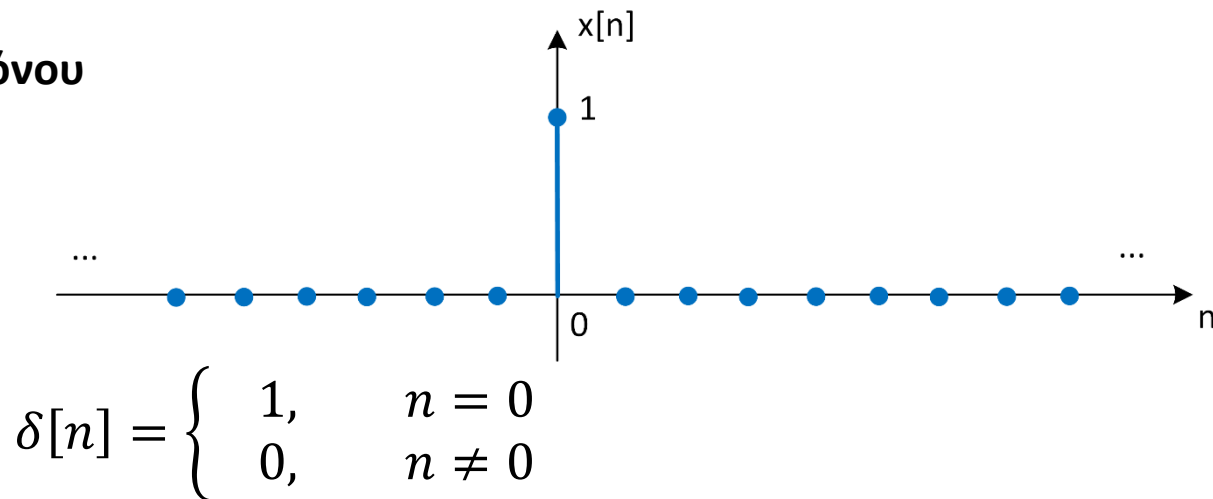
• Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

• Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου

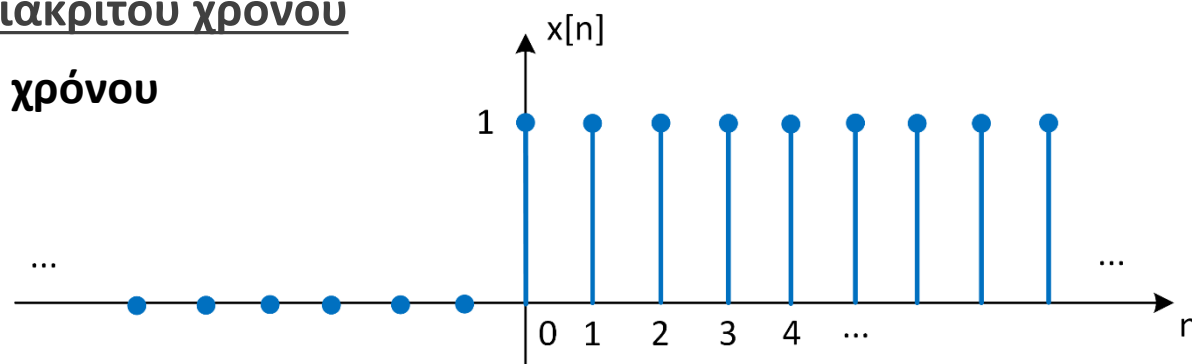
Ορισμός:



- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου
- Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

