ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Για το παρακάτω σύστημα $H(z)$,

$$H(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{1}$$

βρείτε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ τέτοιο ώστε οι αποκρίσεις πλάτους των δυο συστημάτων να είναι ίσες, δηλ. $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$.

Λύση:
Το σύστημα έχει δυο μηδενικά, στις θέσεις $z = -3$ και $z = \frac{1}{4}$, ενώ έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = \frac{3}{4}$ και $z = \frac{4}{3}$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ και ο πόλος στη θέση $z = \frac{4}{3}$ θα ανήκουν σε ένα all-pass σύστημα, το οποίο θα έχει επίσης πόλο στη θέση $z = -1/3$ και μηδενικό στη θέση $z = \frac{3}{4}$, και άρα θα είναι

$$H_{ap}(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

το οποίο γράφεται ως

$$H_{ap}(z) = -\frac{9}{4}\frac{(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{4}{3})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{3}$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{4}$, έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$ από το αρχικό σύστημα, ενώ θα έχει και ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{3}$ και έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$, που πρέπει να υπάρχουν για να ακυρώνονται οι όροι που εισήχθησαν στο all-pass. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{4}$$

και μεταφέροντας το συντελεστή $-9/4$ από το all-pass, έχουμε

$$H_{min}(z) = -\frac{9}{4}\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{5}$$

Άσκηση 2.
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{6}$$

(α') Γράψτε την εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

(β') Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων μηδενικών και ορίστε την περιοχή σύγκλισης του συστήματος.

(γ') Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$.

(δ') Εξηγήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω δηλώσεις:

- Το σύστημα είναι ευσταθές.

- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Λύση:

(α') Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{7}$$

$$= \frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{8}$$

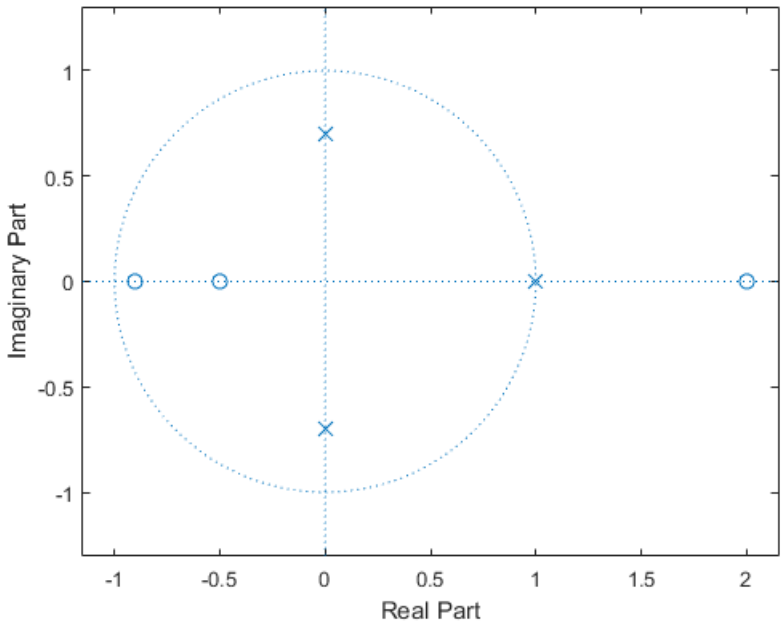
$$= \frac{1-0.6z^{-1}-2.35z^{-2}-0.9z^{-3}}{1-z^{-1}+0.49z^{-2}-0.49z^{-3}} \tag{9}$$

$$= \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{10}$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί και κάνοντας αντίστροφο μετασχ. Z λαμβάνουμε

$$y[n]-y[n-1]+0.49y[n-2]-0.49y[n-3] = x[n]-0.6x[n-1]-2.35x[n-2]-0.9x[n-3] \tag{11}$$

(β') Υπάρχουν τρεις πόλοι στις θέσεις $z = \pm j0.7$ και $z = 1$, ενώ τρια μηδενικά υπάρχουν στις θέσεις $z = 2$, $z = -1/2$ και $z = -0.9$. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.

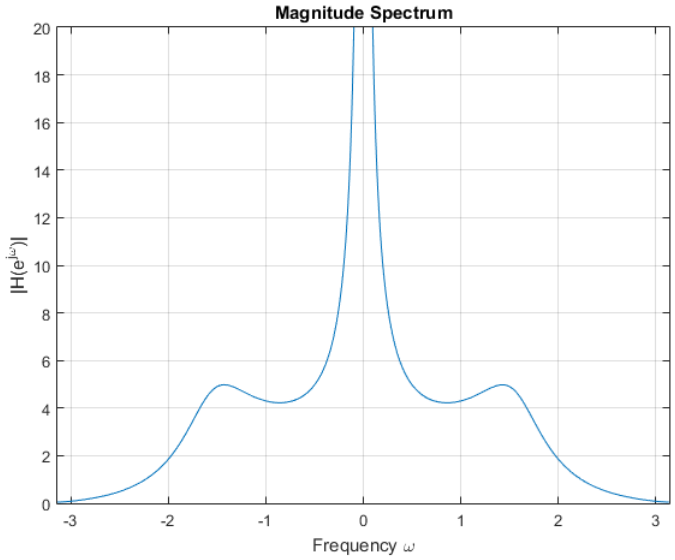


Σχήμα 1: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Άσκησης 2.*

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης θα είναι εξωστρεφές, άρα

$$|z| > 1 \tag{12}$$

(γ') Η απόκριση πλάτους θα είναι περίπου όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Απόκριση πλάτους Άσκησης 2.*

(δ') Έχουμε:

- Το σύστημα είναι ευσταθές: Λάθος, υπάρχει πόλος στη θέση $z = 1$, άρα είναι ασταθές.
- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n: Το σύστημα είναι ασταθές με πόλο στο $z = 1$, άρα θα υπάρχει κάποιος όρος $Au[n]$ στην κρουστική απόκριση. Οπότε για μεγάλα n, πράγματι η κρουστική απόκριση θα πλησιάζει τη σταθερή τιμή A - εφ'οσον οι άλλοι (ευσταθείς) όροι που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους πόλους θα έχουν "σβήσει" για μεγάλα n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$: Λάθος, οι πόλοι βρίσκονται στη συχνότητα $\omega = \pm\pi/2$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα: Λάθος, γιατί στο αντίστροφο σύστημα το μηδενικό στη θέση $z = 2$ θα γίνει πόλος, κι ως εκ τούτου δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα σύστημα. Άρα το αρχικό σύστημα δεν έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Άσκηση 3.
Θεωρήστε το αιτιατό σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z ως

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} \tag{13}$$

Για ποιές τιμές του α, το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι ένα σήμα πραγματικό και ελάχιστης φάσης;

Λύση:
Ο μετασχ. Z μπορεί να γραφεί ως

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-5z^{-1})}{(1-6z^{-1})} \tag{14}$$

Όμως

$$\alpha^n x[n] \longleftrightarrow X(\alpha^{-1}z) = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha z^{-1})(1-\frac{1}{4}\alpha z^{-1})(1-5\alpha z^{-1})}{(1-6\alpha z^{-1})} \tag{15}$$

Ένα σήμα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου του. Άρα πρέπει

$$|\alpha/2| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 2 \tag{16}$$
$$|\alpha/4| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 4 \tag{17}$$
$$|5\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{5} \tag{18}$$
$$|6\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{6} \tag{19}$$

Το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι πραγματικό και ελάχιστης φάσης μόνον αν $|\alpha| < \frac{1}{6}$.

Άσκηση 4.
Υπολόγισε τον μετ. Z και την περιοχή σύγκλισης του σήματος

$$x[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4} - e^{j\pi/3}\right)u[n-1]$$

και σχεδίασε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών στο z-επίπεδο. Είναι το σήμα απολύτως αθροίσιμο;

Λύση:
Έχουμε

$$\begin{aligned}
x[n] &= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4} - e^{j\pi/3}\right)u[n-1] && (20)\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+4}u[n-1] - e^{j\pi/3}u[n-1] && (21)\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1] - e^{j\pi/3}u[n-1] \leftrightarrow && (22)\\
X(z) &= \left(\frac{1}{4}\right)^{5}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}z^{-1} - e^{j\pi/3}\frac{1}{1-z^{-1}} && (23)\\
&= \frac{-e^{j\pi/3}z^2 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \frac{e^{j\pi/3}}{4}\right)z - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{(z-\frac{1}{4})(z-1)} && (24)
\end{aligned}$$

Οι πόλοι είναι στις θέσεις $p1 = 1/4, p2 = 1$ και τα μηδενικά στις θέσεις $z_1 = 0.2477 + j0.0043, z_2 = 0.0031 - j0.0056$. Επειδή το σήμα είναι δεξιόπλευρο, προφανώς το πεδίο σύγκλισης θα είναι εξωστρεφές, δηλ. $ROC_x : |z| > 1$. Επειδή υπάρχει πόλος επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, το σήμα ΔΕΝ είναι απολύτως αθροίσιμο.

Άσκηση 5.
Γράψε το σύστημα

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{1-0.64z^{-2}}$$

ως γινόμενο δύο συστημάτων:

1. $H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$
2. $H(z) = H_{min}(z)H_{lin}(z)$

όπου τα συστήματα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ είναι σε κάθε περίπτωση διαφορετικά, το $H_{ap}(z)$ δηλώνει ένα all-pass σύστημα, και το $H_{lin}(z)$ είναι ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης.

(α') Τι τύπου FIR είναι το σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης και ποια η φάση του;

(β') Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των συστημάτων.

Λύση:

Αρχικά το σήμα μας μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})} \tag{25}$$

και παρατηρούμε ότι έχει πόλους και μηδενικά στις θέσεις $p_{1,2} = \pm\frac{4}{5}, p_3 = 0$ και $z_1 = \frac{1}{2}, z_{2,3} = \pm 2j$, αντίστοιχα.

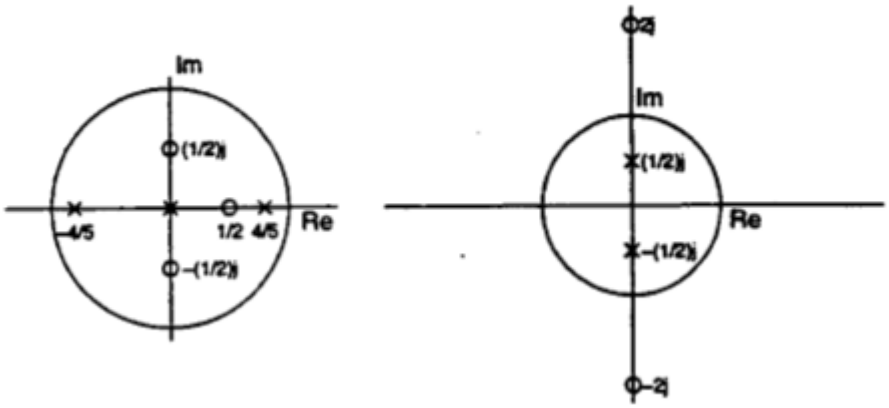
1. Ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, θα έχει τους πόλους του $H(z)$ - που είναι όλοι εντός του μοναδιαίου κύκλου - το μηδενικό που είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, και τα αντίστροφα μηδενικά του $H(z)$, καθρεφτίζοντας τα έτσι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}{1-0.64z^{-2}} \tag{26}$$

Τα διαγράμματα πόλων μηδενικών φαίνονται στο Σχήμα 3. Το all-pass σύστημα θα έχει ως μηδενικά τα μηδενικά του $H(z)$ που είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και ως πόλους τα δυο μηδενικά στον κατακόρυφο άξονα του $H_{min}(z)$, ώστε όταν γίνει το γινόμενο $H_{min}(z)H_{ap}(z)$, αυτά να αλληλοακυρωθούν.

$$H_{ap} = \frac{1+4z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \tag{27}$$

Όμως το $H_{ap}(z)$ δεν είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Για να είναι, πρέπει να γραφεί στη μορφή



Σχήμα 3: *Άσκηση 5 - Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών Ι*

$$H_{ap}(z) = \frac{1+4z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = 4\frac{\frac{1}{4}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = 4\frac{(\frac{1}{2}+jz^{-1})(\frac{1}{2}-jz^{-1})}{(1-\frac{1}{2}jz^{-1})(1+\frac{1}{2}jz^{-1})} \tag{28}$$

και ο συντελεστής 4 θα πάει στο $H_{min}(z)$, άρα

$$H_{min}(z) = 4\frac{(1-0.5z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}{1-0.64z^{-2}} \tag{29}$$

και

$$H_{ap}(z) = \frac{(\frac{1}{2}+jz^{-1})(\frac{1}{2}-jz^{-1})}{(1-\frac{1}{2}jz^{-1})(1+\frac{1}{2}jz^{-1})} \tag{30}$$

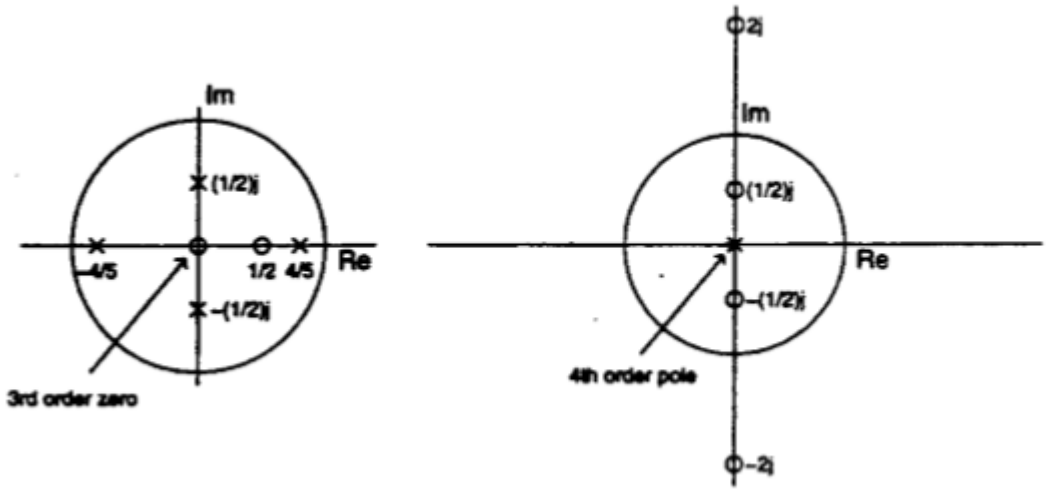
2. Ένα σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης έχει πόλους και μηδενικά στις θέσεις $z = 1, -1, 0$ ή ∞, ή σε συζυγή ζεύγη. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} \tag{31}$$

και

$$H_{lin}(z) = (1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + 4z^{-2}) \tag{32}$$

Το διάγραμμα πόλων μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 4. Το σύστημα γενικευμένης γραμμικής



Σχήμα 4: *Άσκηση 5 - Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών II*

φάσης είναι προφανώς FIR Τύπου I. Η φάση είναι

$$\phi = -2\omega + \beta \tag{33}$$

με β = 0 ή π.

Άσκηση 6.
Δείξτε ότι το μη αιτιατό σύστημα

$$h[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{34}$$

έχει καθυστέρηση ομάδας group delay ίση με 1, για κάθε ω, δηλ. δείξτε ότι

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = 1 \tag{35}$$

Λύση:
Έχουμε

$$\begin{aligned}
h[n] &= \delta[n+1] + \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \leftrightarrow && (36)\\
H(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + 1 + 4e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} && (37)\\
&= e^{-j\omega}(e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 4 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) && (38)\\
&= e^{-j\omega}(4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)) && (39)
\end{aligned}$$

Έτσι, θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \tag{40}$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \tag{41}$$

και άρα

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = 1 \tag{42}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 7.
Έστω S_1 ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 0 \tag{43}$$

και κρουστική απόκριση $h_1[n]$.

(α΄) Είναι το S_1 αιτιατό; Εξηγήστε.

(β΄) Έστω $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$. Βρείτε ένα $h_2[n]$ τέτοιο ώστε το $g[n]$ να έχει τουλάχιστον εννιά μη μηδενικά δείγματα, και το $g[n]$ να μπορεί να θεωρηθεί ως η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος με αυστηρά γραμμική φάση: $G(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$ για έναν ακέραιαο n_0.

(γ΄) Έστω $q[n] = h_1[n] * h_3[n]$. Βρείτε ένα $h_3[n]$ τέτοιο ώστε

$$q[n] = \delta[n], \quad 0 \leq n \leq 19 \tag{44}$$

Λύση:
Είναι

(α΄) Ναι, είναι αιτιατό. Από την περιοχή σύγκλισης, $|z| > 0$, καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει πόλος στο ∞, άρα το σύστημα είναι δεξιόπλευρο και αιτιατό. Εναλλακτικά, μπορούμε να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα και να έχουμε

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}, \quad |z| > 0 \tag{45}$$

(β΄) Το $h_1[n]$ είναι ένας αιτιατός τετραγωνικός παλμός διάρκειας 5. Αν κάνουμε συνέλιξη του $h_1[n]$ με έναν άλλο αιτιατό τετραγωνικό παλμό διάρκειας N, θα πάρουμε έναν τριγωνικό παλμό με διάρκεια $N+5-1 = N+4$. Ο τριγωνικός παλμός είναι συμμετρικός γύρω απ' την κορυφή του, και άρα έχει γραμμική φάση. Αν θέλουμε να έχει ο τριγωνικός παλμός $g[n]$ τουλάχιστον 9 μη μηδενικά δείγματα, επιλέγουμε $N = 5$, ή αλλιώς $h_2[n] = h_1[n]$.

(γ΄) Αφού το αποτέλεσμα της συνέλιξης θα είναι στο $[0, 19]$, δηλ. το μήκος του $g[n]$ είναι 20 δείγματα, και το μήκος του $h_1[n]$ είναι $N = 5$ (δηλ. $[0, 4]$), το μήκος του $h_3[n]$ θα είναι $L = 17$, δηλ. στο $[0, 16]$, έτσι ώστε το αποτέλεσμα της συνέλιξης να είναι στο $[0, 16 + 4 - 1] = [0, 19]$. Αυτό που μας ζητείται μοιάζει αρκετά με το αντίστροφο σύστημα. Αν θεωρήσουμε ότι $h_3[n]$ είναι το αντίστροφο σύστημα του $h_1[n]$ τότε

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-5}} = (1 - z^{-1})(1 + z^{-5} + z^{-10} + z^{-15} + ...) \tag{46}$$

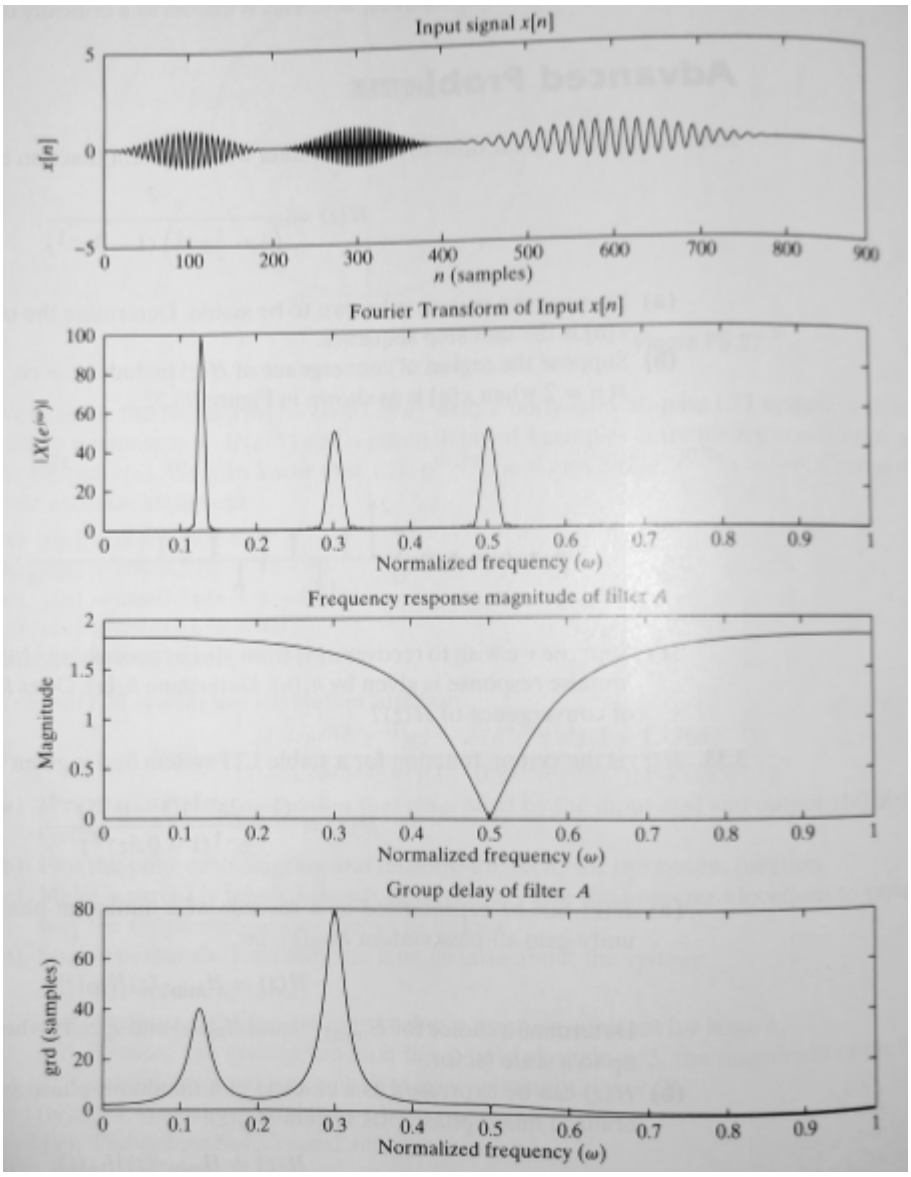
$$= 1 - z^{-1} + z^{-5} - z^{-6} + z^{-10} - z^{-11} + z^{-15} - z^{-16} + ... \tag{47}$$

Αυτή η επιπλοκή για το $h_3[n]$ θα μας δώσει αποτέλεσμα $h_1[n] * h_3[n] = \delta[n]$ για κάθε n. Όμως εμείς θέλουμε $q[n] = \delta[n]$ για $0 \leq n \leq 19$. Άρα απλά μπορούμε να κρατήσουμε το $h_3[n]$ ως το 19° δείγμα. Άρα τελικά

$$h_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-5] - \delta[n-6] + \delta[n-10] - \delta[n-11] + \delta[n-15] - \delta[n-16] \tag{48}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 8.
Ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n]$ έχει φάσμα πλάτους και καθυστέρηση ομάδας όπως στο Σχήμα 5. Το σήμα εισόδου φαίνεται επίσης στο Σχήμα 5, στην πρώτη γραφική παράσταση, είναι ένα άθροισμα

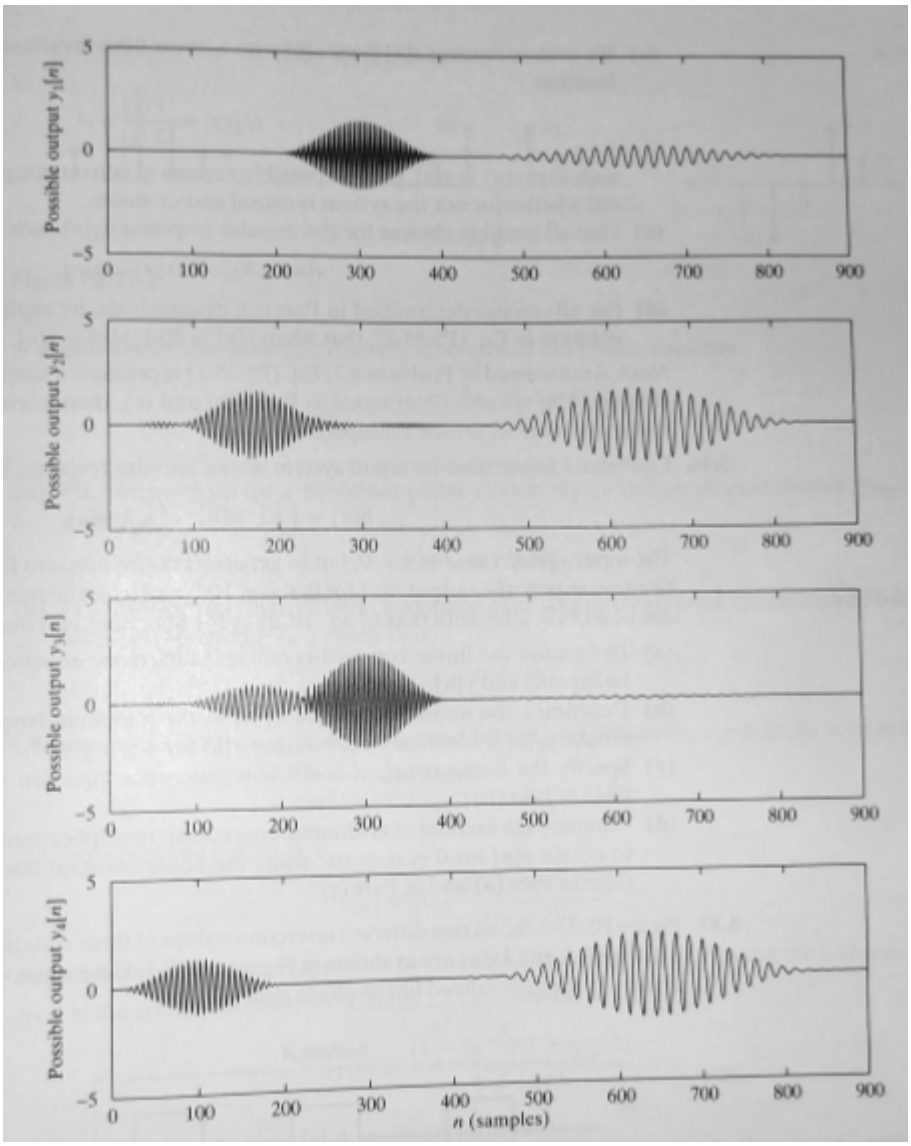


Σχήμα 5: Είσοδος και χαρακτηριστικά συστήματος

από τρία συνημίτονα. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 5 βλέπετε:

- το σήμα είσόδου, $x[n]$
- το $|X(e^{j\omega})|$, το φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier του $x[n]$
- το φάσμα πλάτους της απόκρισης σε συχνότητα του συστήματος, $H(e^{j\omega})$
- την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος, $grd\{H(e^{j\omega})\}$

Στο Σχήμα 6, σας δίνονται τέσσερα πιθανά σήματα εξόδου, $y_i[n], \quad i = 1, 2, 3, 4$. Βρείτε ποιό από αυτά είναι η έξοδος του συστήματος για το δεδομένο $x[n]$ που φαίνεται στην πρώτη γραφική παράσταση στο Σχήμα 5. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.



Σχήμα 6: *Πιθανά σήματα εξόδου*

Λύση:

Από το φάσμα πλάτους του φίλτρου, παρατηρούμε ότι το φίλτρο μηδενίζει το πλάτος της συχνότητας 0.5π. Βλέπουμε στο φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου, ότι ένα από τα τρία ημίτονα έχει ακριβώς συχνότητα. Άρα το ένα απ' τα τρία ημίτονα (το πιο υψίσυχνο, το μεσαίο στη γραφική παράσταση του $x[n]$) δε θα περάσει στην έξοδο. Οπότε στην έξοδο θα έχουμε δυο ημίτονα, τα δύο πιο χαμηλόσυχνα, με μεγαλύτερο πλάτος απ' ό,τι είχαν στην είσοδο. Αυτό μας λέει η πληροφορία των πλατών.

Ας εξετάσουμε την πληροφορία που παίρνουμε από τη φάση, μελετώντας το group delay. Βλέπουμε ότι τα δύο ημίτονα που περνούν στην έξοδο, το χαμηλόσυχνο και το μεσαίας συχνότητας, θα καθυστερήσουν κατά 40 και κατά 80 δείγματα, αντίστοιχα. Άρα το πρώτο ημίτονο (το μεσαίας συχνότητας) στη γραφική παράσταση του $x[n]$ θα καθυστερήσει περίπου 80 δείγματα, άρα θα ξεκινήσει στην έξοδο κοντά στο 100ο δείγμα, το δεύτερο ημίτονο σχεδόν εκμηδενίζεται λόγω της ανάλυσης που κάναμε πριν στο φάσμα πλάτους, ενώ το τρίτο ημίτονο (το πιο χαμηλόσυχνο) θα καθυστερήσει περίπου 40 δείγματα, άρα θα ξεκινάει στην έξοδο κοντά στο 500ο δείγμα.

Αυτές τις απαιτήσεις τις ικανοποιεί η έξοδος $y_2[n]$.

Άσκηση 9.
Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^{-2}(1-2z^{-1})}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \tag{49}$$

1. Είναι το σύστημα all-pass; Εξηγήστε.
2. Θέλουμε να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ως μια σειρά από τρία συστήματα $H_{min}(z)$, $H_{max}(z)$, $H_d(z)$, που συμβολίζουν ένα σύστημα ελάχιστης φάσης, ένα μέγιστης φάσης, και ένα σύστημα ακέραιας μετατόπισης, αντίστοιχα. Βρείτε τις κρουστικές αποκρίσεις, $h_{min}[n]$, $h_{max}[n]$, $h_d[n]$ των παραπάνω συστημάτων.

Λύση:
Είναι

1.

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z^{-2}(1-2z^{-1})}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}(1-2e^{-j\omega})}{2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} \Rightarrow && (50)\\
|H(e^{j\omega})| &= \left|\frac{e^{-j2\omega}(1-2e^{-j\omega})}{2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}\right| = \left|e^{-j2\omega}\right|\left|\frac{(1-2e^{-j\omega})}{2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}\right| && (51)\\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1-2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1-2\cos(\omega))^2+4\sin^2(\omega)}}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\cos(\omega))^2+\frac{1}{4}\sin^2(\omega)}} && (52)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-2\cos(\omega))^2+4\sin^2(\omega)}{(1-\frac{1}{2}\cos(\omega))^2+\frac{1}{4}\sin^2(\omega)}} && (53)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4\cos(\omega)+4\cos^2(\omega)+4\sin^2(\omega)}{1-\cos(\omega)+\frac{1}{4}\cos^2(\omega)+\frac{1}{4}\sin^2(\omega)}} && (54)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4\cos(\omega)+4}{1-\cos(\omega)+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(\frac{1}{4}-\cos(\omega)+1)}{1-\cos(\omega)+\frac{1}{4}}} && (55)\\
&= \sqrt{\frac{1-\cos(\omega)+\frac{1}{4}}{1-\cos(\omega)+\frac{1}{4}}} = 1 && (56)
\end{aligned}$$

   άρα το σύστημα είναι all-pass.

2. Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z-2}{2z^2(z-0.5)} \tag{57}$$

   Επειδή το σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $p_1 = 0$ (δύο), $p_2 = \frac{1}{2}$ και μηδενικά στις θέσεις $z_1 = 2$ και $z_2 = \infty$ (δυο), το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει μόνο τον πόλο εντός του μοναδιαίου κύκλου ($p_2 = \frac{1}{2}$), το σύστημα μέγιστης φάσης θα έχει το μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου ($z_1 = 2$), και οι πόλοι στο μηδέν και τα μηδενικά στο άπειρο θα μοντελοποιηθούν από το σύστημα καθυστέρησης. Οπότε θα κάνουμε τη διάσπαση ως

$$\begin{aligned}
H(z) &= H_{min}(z)H_{max}(z)H_d(z) = \left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{z-2}{z}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\right) && (58)\\
& && (59)
\end{aligned}$$

με

$$H_{min}(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow h_{min}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{60}$$

$$H_{max}(z) = \frac{z-2}{z} = 1-2z^{-1} \longleftrightarrow h_{max}[n] = \delta[n]-2\delta[n-1] \tag{61}$$

$$H_d(z) = \frac{1}{2}z^{-2} \longleftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] \tag{62}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 10.
Σας δίνονται τα παρακάτω τρία στοιχεία για ένα σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z $X(z)$:

1. Το $x[n]$ είναι πραγματικό και ελαχίστης φάσης.
2. Το $x[n]$ είναι μηδέν έξω από το διάστημα $0 \leq n \leq 4$
3. Το $X(z)$ έχει ένα μηδενικό στο $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ και ένα μηδενικό στο $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$
   Με βάση τα παραπάνω, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

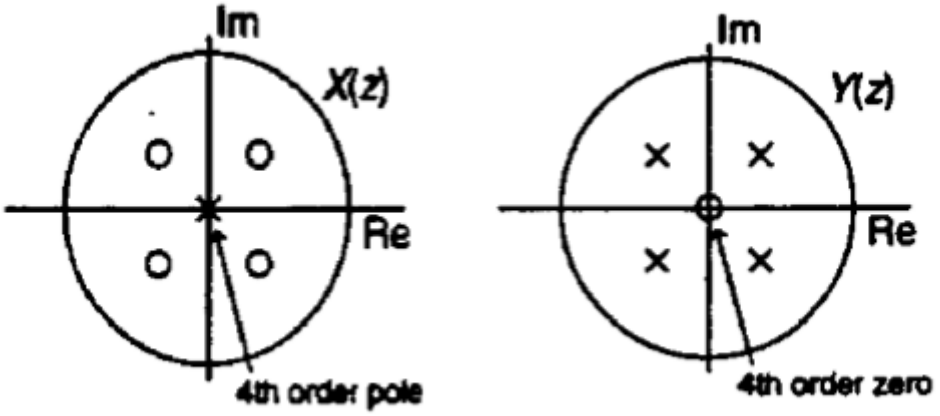
   (α') Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $X(z)$ και βρείτε το πεδίο σύγκλισης.

   (β') Αν $y[n] * x[n] = \delta[n]$ και το $y[n]$ είναι δεξιόπλευρο, σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών για το $Y(z)$ και βρείτε την περιοχή σύγκλισής του.

Λύση:
Αφού το σήμα είναι πραγματικό, τότε τα μηδενικά θα είναι σε συζυγείς θέσεις. Επίσης, αφού είναι πεπερασμένης διάρκειας από 0 ως 4, ημαίνει ότι έχει μόνο 4 μηδενικά (και πόλους). Άρα η μορφή του θα είναι

$$X(z) = \left(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{j3\pi/4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}z^{-1}\right) \tag{63}$$

(α') Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 7α'. Το πεδίο σύγκλισης είναι το ROC_x: $|z| > 0$.



(α') *Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών 1* (β') *Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών 2*

Σχήμα 7: *Διαγράμματα Πόλων Μηδενικών Άσκησης 10*

(β') Έχουμε

$$y[n] * x[n] = \delta[n] \leftrightarrow Y(z)X(z) = 1 \rightarrow Y(z) = \frac{1}{X(z)}$$

και άρα τα μηδενικά του $X(z)$ είναι πόλοι του $Y(z)$ και οι πόλοι του $X(z)$ γίνονται μηδενικά του $Y(z)$. Άρα το διάγραμμα πόλων μηδενικών δίνεται στο Σχήμα 7β', και το πεδίο σύγκλισης είναι το $|z| > \frac{1}{2}$, αφού γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι είναι δεξιόπλευρο.